

Universiteit Twente
Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Afdeling Systeem & Besturingstheorie

Modellering van de verticale verspreiding van slib in de Westerschelde deel I

Luc Aalderink

Enschede, 29 april 1997

Gecombineerde stage & doctoraalopdracht

In opdracht van:
Het Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ) te Middelburg,
onderdeel van het ministerie van Verkeer en Waterstaat.

Begeleiders:
Dr.ir. B. de Jong (UT/TW)
Ir. A. Langerak (RIKZ)
Ing. D. van Maldegem (RIKZ)

In afstudeercommissie tevens:
Prof. dr. ir. H. Kwakernaak (UT/TW)
Dr. M. Vajta (UT/TW)
Dr. ir. P. Löhnberg (UT/EL)

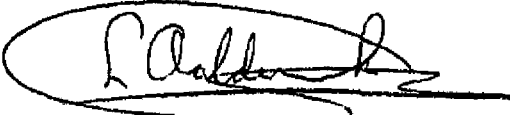
Voorwoord

Deze gecombineerde stage-doctoraalopdracht is uitgevoerd in opdracht van het Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ), afdeling OSFD (Onderzoek Strategie Fysica Delta), te Middelburg. Het RIKZ is een dienst van het Ministerie van Verkeer en Waterstaat en levert adviezen en gegevens gericht op duurzaam gebruik van estuaria, kusten en zeeën, en bescherming tegen overstroming door de zee. Deze opdracht is uitgevoerd in het kader van het project SAP (Schelde Actie Plan)

Hierbij wil ik het RIKZ te Middelburg bedanken voor de prima tijd die ik daar gehad heb. Naast het onderzoek werd het mij mogelijk gemaakt me met sportieve activiteiten te ontspannen (met dank aan A. Holland) en om enige uitstapjes te maken naar de Westerschelde en Oosterschelde. Met deze uitstapjes doel ik op het bezoek aan de Roggeplaat in de Oosterschelde (met dank aan M. Zekhuis), het bezoek aan de plaat van Baarland (met dank aan M. Duiker), het bezoek aan het meetponton 'De Zeekat' (met dank aan A. Smaal) en het bezoek aan 'Het verdronken land van Seaftinghe' (met dank aan F. Tank en A. Holland). Deze uitstapjes hebben er allen toe bijgedragen om enthousiast met de materie aan de slag te gaan en om meer inzicht in de materie te krijgen!

Verder wil ik graag de volgende personen hartelijk bedanken. Ir. A. Langerak voor zijn intensieve begeleiding en het mogelijk maken van deze opdracht. Ing. D. van Maldegem voor de goede begeleiding en het verstrekken van de benodigde literatuur en gegevens. Ir. H. Verbeek voor onder andere het organiseren van het uitstapje met de afdeling. Ir. H. Leepel van het WL voor de hulp bij het 1DV-model. Reinder-Jan Ronda, mijn kamergenoot op het RIKZ, en Fred Tank voor de nodige afleiding (vooral in positieve zin) van mijn werk. Mijn ouders, broers, nog niet genoemde vrienden en huisgenoten voor hun morele ondersteuning en de desbetreffenden voor het nakijken van mijn verslag. En last but not least dr. ir. B. de Jong voor zijn intensieve begeleiding en belangstelling vanaf de universiteit.

Hengelo, 29 april 1997.



Luc Aalderink

Samenvatting

In dit onderzoek is getracht meer te weten te komen over de verspreiding van slib in de verticale richting. Daartoe is een 1 Dimensionaal Verticaal-model (1DV-model) aangekocht van het Waterloopkundig Laboratorium (W.L.) te Delft. Als vergelijkingsmateriaal en invoergegevens is gebruik gemaakt van de meetgegevens verkregen met het meetpontoon 'De Zeekat' te Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke. Na het handmatig afregelen van het 1DV-model bleek de grafiek van de berekende slibconcentraties nog veel af te wijken van de gemeten slibconcentraties. Om de uitkomsten te verbeteren is, voor zover mogelijk, onderzocht welke simulaties van slibprocessen in het model voor verbetering vatbaar zijn en welke mogelijkheden daarvoor aanwezig zijn. Daarnaast is gekeken voor welke parameters het model gevoelig is; dit is gedaan om parameters te vinden waarvoor een betere waarde bepaald zou kunnen worden met behulp van filtertechnieken. Aan de hand van deze twee onderzoeken zijn vervolgens een aantal aanpassingen gemaakt. Zo is voor de valsnelheid van slib de formule van 'van Leussen' ingevoerd, de mogelijkheid tot dichtheidsterugkoppeling ingebouwd en is het mogelijk geworden zelf waarden voor de sedimentatie en erosie in te vullen. Daarnaast bleek het onderste meetpunt van 'De Zeekat' op een andere hoogte te hebben gemeten dan werd verondersteld. De aanpassing van deze meethoogte leidde tot een duidelijke verbetering van de uitkomsten. De valsnelheidsformule van 'van Leussen' leverde geen verbetering op. Het toepassen van de dichtheidsterugkoppeling had een verandering in de periodieke vorm van de slibconcentraties tot gevolg, het resultaat werd er echter weinig beter van. Naar aanleiding van het gevoeligheidsonderzoek van het 1DV-model is vervolgens besloten om de waarden van w_o en $D - E$ te gaan schatten. De parameter w_o staat in de formule van 'van Leussen' en stelt ruwweg de gemiddelde valsnelheid over de diepte voor; de term $D - E$ is de hoeveelheid slib die per seconde sedimenteert of erodeert. Voor het schatten van deze parameters zijn, met behulp van het Extended Kalmanfilter, filtervergelijkingen afgeleid. Daarna is met behulp van fictieve meetgegevens het gedrag van het filter onderzocht. Het filtergedrag en daarmee de waarneembaarheid van het systeem bleek te voldoen ten aanzien van het schatten van w_o en $D - E$ en het schatten van de slibconcentraties. Vervolgens is, voor zover er tijd over was, het filter toegepast op de door het meetpontoon 'De Zeekat' gemeten slibconcentraties. Het voorlopige resultaat hiervan is veelbelovend, er is namelijk een waardevolle schatting van w_o en $D - E$ verkregen. Bovendien blijkt het filter door het schatten van w_o en $D - E$ in staat om de berekende slibconcentraties bij te sturen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	17
1.1	Beschikbare 'continue'-metingen	19
2	Het 1DV-model	23
2.1	Belangrijke processen	23
2.2	Berekening slibconcentratie	27
2.3	Gebruikte metingen	28
2.4	Afstellen 1DV-model	29
2.5	Evaluatie 1DV-model	32
3	Analyse 1DV-model	37
3.1	Controle simulatie turbulentie	37
3.2	Gevoeligheidsanalyse	39
3.3	Aanpassingen	47
3.3.1	Mogelijke aanpassingen	48
3.3.2	Gemaakte aanpassingen	50
3.3.3	Resultaten aanpassingen	50
4	Discrete filter theorie	55
4.1	Definities	56
4.2	Lineaire filter theorie	56
4.2.1	Systeembeschrijving	56
4.2.2	Het Kalmanfilter	57
4.3	Niet lineaire filter theorie	58

4.3.1	Systeembeschrijving	58
4.3.2	Het Extended Kalmanfilter	59
4.4	Smoothen	60
4.4.1	Systeembeschrijving	61
4.4.2	Fixed-point smoother	61
5	Filtervergelijkingen 1DV-model	65
5.1	Definities	66
5.2	De slibvergelijking	66
5.3	Transformatie	67
5.4	Discretisatie getransformeerd systeem	68
5.4.1	Definities	69
5.4.2	Discretisatie slibvergelijking	69
5.4.3	Discretisatie v.d. randvoorwaarden:	72
5.4.4	Het discrete systeem	74
5.5	Toepassen filtertechnieken	77
6	Het filteren	87
6.1	Onderzoeken filtergedrag	87
6.1.1	Per vier minuten één slibconcentratie bekend en geen dichtheidste- rugkoppeling	89
6.1.2	Per vier minuten drie slibconcentraties bekend en geen dichtheid- sterugkoppeling	90
6.2	Filteren met gemeten slibconcentraties	92
6.3	Balans filterresultaten	98
7	Conclusies & Aanbevelingen	107
7.1	Conclusies	108
7.2	Aanbevelingen	108
	Bibliografie	109
A	Vergelijkingen 1DV-Model	113

B Invoerfile voor 1DV-model met 10 lagen	117
C Uitleg invoerfile	119
D Stroomsnelheidsmetingen	125
E Rijks Instituut voor Kust en Zee (RIKZ)	127
F Meetponten 'De Zeekat'	131
G Geschreven matlabprogramma's voor het filteren	137

Lijst met symbolen

Symbol	Definitie	Dimensie
τ_d	Kritieke sedimentatieschuifspanning	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
τ_e	Kritieke erosieschuifspanning	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
τ_b	Bodemschuifspanning	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
w_s	Valsnelheid slib	$\left[\frac{m}{s}\right]$
M	Erosieparameter	$\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$
D_{kv}	Moleculaire diffusie coëfficiënt	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
D	Hoeveelheid slib die per seconde sedimenteert	$\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$
E	Hoeveelheid slib die per seconde erodeert	$\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$
Γ_T	Eddy-diffusiteit	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
ν_T	Eddy-viscositeit	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
ν	De kinematische viscositeit van water	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
c	Slibconcentratie	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
u_*	schuifspanningsnelheid	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\bar{u}$	gemiddelde maximale snelheid over de diepte	$\left[\frac{m}{s}\right]$
Ch	Chézy-waarde	$\left[\frac{m^{1/2}}{s}\right]$
t	Tijd	$[s]$
z	Hoogte, met $z = z_o$ de bodem en $z = H$ het oppervlak	$[m]$
z_o	Ruwheidshoogte van de bodem	$[m]$
Δz_b	Dikte van de eerste laag boven de bodem	$[m]$
H	De waterhoogte	$[m]$
σ_T	Turbulente Prandtl Schmidt nummer	
σ	Standaard deviatie van de betreffende variabele	
N	Aantal lagen waarin waterkolom is opgedeeld	

Filtersymbool	Definitie	Dimensie
X	Symbool geschreven als hoofdletter is een Matrix	
$\underline{X}$	Onderstreepte hoofdletter is stochastische vector variabele	
s	Aantal bekende toestanden per filterstap	
r	Aantal systeemruiscomponenten	
$\underline{X}_n$	Toestand op $t = t_n$	$N * 1$
$\hat{X}_{n n}$	Toestandsschatting op $t = t_n$ gegeven Z_n	$N * 1$
$\hat{X}_{n+1 n}$	Toestandsschatting op $t = t_{n+1}$ gegeven Z_n	$N * 1$
$\underline{Z}_n$	Meting op $t = t_{n+1}$	$s * 1$
$\underline{\hat{Z}}_n$	Meetreeks $\{ \underline{Z}_0, \underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_n \}$	
$P_{n n}$	Covariantiematrix van de fout in $\hat{X}_{n n}$	$N * N$
$P_{n+1 n}$	Covariantiematrix van de fout in $\hat{X}_{n+1 n}$	$N * N$
K_{n+1}	Kalmangainmatrix op $t = t_{n+1}$	$N * s$
F_n	Transpositiematrix van de toestand	$N * N$
G_n	Coëfficiëntenmatrix van de systeemruis	$N * r$
Q_{n+1}	Covariantiematrix van de systeemruis	$r * r$
M_n	Meetmatrix	$s * N$
R_{n+1}	Covariantiematrix van de meetruis	$s * s$

Lijst van figuren

1.1	Overzicht van de meetpunten van de Zeekat in de Westerschelde. Met meetpunt 1: Schaar van Spijkerplaat ter hoogte van Vlissingen, meetpunt 2: Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke, meetpunt 3: Schaar van de Noord ter hoogte van Bath	20
1.2	De drie meethoogtes waarop te Middelgat de slibconcentraties gemeten zijn door het meetponton 'De Zeekat'	20
1.3	Meetpunt Middelgat te Hoedekenskerke, met dieptelijnen in decimeters ten opzichte van N.A.P.	22
2.1	Processen die van belang zijn voor de hoogte van de slibconcentratie in een waterkolom, met E de erosie en D de sedimentatie (Deposition)	24
2.2	Berekende slibconcentraties bij verdeling waterkolom in 10 niet-equivalente lagen	31
2.3	De door het meetponton 'De Zeekat' gemeten 'continue'-slibconcentraties te Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke	31
2.4	Slibconcentraties bij verdeling waterkolom in 50 equivalente lagen	33
2.5	Grafiek 1: berekende eddy-viscositeiten, grafiek 2: berekende stroomsnelheden, grafiek 3: berekende slibconcentraties, grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentr.	34
3.1	Eddy-viscositeit bij verdeling waterkolom in 50 equivalente lagen	38
3.2	Schets van de gemeten stroomsnelheidsprofielen van eb, vloed en kentering	40
3.3	Door het 1DV-model berekende stroomsnelheidsprofielen van eb, vloed en kentering	40
3.4	Berekende slibconcentraties bij $z_o = 0.0030$	42
3.5	Berekende slibconcentraties bij $z_o = 0.0207$	42
3.6	Berekende slibconcentraties bij $w_s = 0.00375$	44
3.7	Berekende slibconcentraties bij $w_s = 0.01500$	44

3.8	Berekende slibconcentraties bij $\tau_e = 0.08$	45
3.9	Berekende slibconcentraties bij $\tau_e = 0.17$	45
3.10	Berekende slibconcentraties bij dichte bodem ($\tau_d = 0.0001$ en $\tau_e = 1000$) . .	46
3.11	Erosie en sedim. volgens Kr. en Parth.; grafiek 1: Aanpassing meethoogte en (3.6), grafiek 2: 'van Leussen' en (3.7), grafiek 3: dichtheidsterugkoppeling en (3.8), grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentraties	53
3.12	Erosie en sedim. is nul. Grafiek 1: Aanpassing meethoogte en (3.6), grafiek 2: 'van Leussen' en (3.7), grafiek 3: dichtheidsterugkoppeling en (3.9), grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentraties	54
5.1	Het impliciete differentieschema	70
5.2	Het impliciete differentieschema voor de randen	73
6.1	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 5.	93
6.2	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 30.	93
6.3	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 44.	93
6.4	De afwijking van de schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o	94
6.5	De afwijking van de schatting van de erosie en sedimentatie $D - E$	94
6.6	De fictieve slibconcentraties (zonder ruis!) tesamen met de geschatte slibconcentraties uitgezet tegen de tijd, met van boven naar beneden de slibconcentraties van lagen de 5,30 en 44.	94
6.7	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 5 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	95
6.8	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 30 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$)	95
6.9	De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$)	95
6.10	De afwijking van de schatting van 'gemiddelde' valssnelheid w_o ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	96
6.11	De afwijking van de schatting van de erosie en sedimentatie, $D - E$ ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	96
6.12	De fictieve slibconcentraties (zonder ruis!) tesamen met de geschatte slibconcentraties uitgezet tegen de tijd, met van boven naar beneden de slibconcentraties van lagen de 5,30 en 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	96

6.13	Schatting van w_o voor langere tijdsperiode, met de startwaarden van het filter gelijk aan (6.14).	100
6.14	Schatting van $D - E$ voor langere tijdsperiode, met de startwaarden van het filter gelijk aan (6.14).	100
6.15	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 5.	101
6.16	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 30.	101
6.17	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 44.	101
6.18	De schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o .	102
6.19	De schatting van de erosie (negatief) en sedimentatie (positief) $D - E$.	102
6.20	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 5 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	103
6.21	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 30 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	103
6.22	Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	103
6.23	De schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	104
6.24	De schatting van de erosie (negatief) en sedimentatie (positief) $D - E$ ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	104
6.25	De schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44.	105
6.26	De schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).	105
6.27	De gemeten slibconcentraties van de drie hoogten gemeten door het meetponton 'De Zeekat'.	105
E.1	Overzicht plaats Rikz binnen het ministerie van V & W.	128
F.1	Foto van het verplaatsbare meetponton 'De Zeekat'.	132
F.2	Overzicht van de meetpunten van de Zeekat in de Westerschelde. Met meetpunt 1: Schaar van Spijkerplaat ter hoogte van Vlissingen, meetpunt 2: Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke, meetpunt 3: Schaar van de Noord ter hoogte van Bath.	135

Hoofdstuk 1

Inleiding

Reeds lang is men geïnteresseerd in de verspreiding van slib in het water. Een van de redenen hiervoor is dat vervuilende stoffen, zoals zware metalen, aan slib kleven. Kennis over de verspreiding van slib geeft zodoende meer inzicht in de verspreiding van die vervuilende stoffen over een estuarium¹ zoals de Westerschelde. Daarnaast zou men graag meer te weten willen komen over de invloed van het menselijk ingrijpen, zoals de verdieping van de Westerschelde, op de hoogte van de slibconcentraties. Een verhoging van de slibconcentraties heeft namelijk tot gevolg een toename van de verspreiding van slib over en een afname van de leefbaarheid in een estuarium.

Om deze redenen is in de periode 1970-1990 op een vast aantal locaties in de Westerschelde net onder het wateroppervlak onder andere het slibgehalte gemeten. In die periode is de Westerschelde aanzienlijk verdiept. Verwacht werd dat dit invloed zou hebben op de hoogte van het slibgehalte in het estuarium. Om de invloed van die verdieping te weten te komen is getracht met een trendanalyse de tijdsafhankelijke invloeden (zoals getij-, seizoens- en doortij/springtijinvloeden) uit de gemeten slibconcentraties te elimineren. Echter doordat de spreiding in de gemeten slibgehalten groot was, had het willekeurig in de tijd verrichten van de meting (slechts 2 tot 4 keer per maand één slibconcentratie) tot gevolg dat er geen significante trend meer te bepalen was.

Om tot een oplossing van dit probleem te komen wordt geprobeerd de spreiding in de slibgehalten te verkleinen door 'verstorende' elementen zoals getij en seizoensinvloeden uit de metingen te elimineren. Dit wordt getracht te doen met een model en de 'continue'-meetgegevens van de Zeekat in de periode 1987 tot en met 1989. Naar verwachting zal deze eliminatie een aanzienlijke verbetering opleveren aangezien het slibgehalte met een factor 4 varieert over het getij en met een factor 2 over het seizoen. Een aanzet tot de eliminatie is gedaan met een eenvoudig 1 (D)imensionaal (H)orizontaal model door S.J.C. Konings [11]. In dat onderzoek werden de onnauwkeurigheden in de metingen en de niet gemodelleerde fysica gemodelleerd door het toevoegen van meetruis respectievelijk

¹Door land omsloten watergebied langs de kust, waar eb en vloed bedrijvig zijn en waarin het zoute zeewater en het zoete rivierwater zich vermengen

systemruis. Door deze toevoeging worden de deterministische grootheden in het model stochastische variabelen. Vervolgens is met behulp van filtertechnieken getracht optimale waarden voor een aantal grootheden te bepalen zodat de fluctuaties in de gemeten slibconcentraties zo goed mogelijk beschreven zouden worden. Het resultaat van het onderzoek was niet bevredigend. Een deel van de verschillen tussen de modelresultaten en de metingen werd toegeschreven aan een onvolledige beschrijving van het fysische proces en een deel aan meetfouten. Ter verbetering van de resultaten werd in dat onderzoek aanbevolen de invloed van de verticale diffusie van slib en vlokvorming in het model mee te nemen. Van de diffusie van slib is echter nog weinig bekend.

DOEL ONDERZOEK

Om tot een verbetering van de simulatie van de slibconcentraties te komen wordt in dit onderzoek, om de hierboven genoemde reden, getracht meer te weten te komen over de verspreiding van slib in de verticale richting. Dit is gedaan in opdracht van het Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ), onderdeel van het ministerie van Verkeer en Waterstaat, te Middelburg. Met daarbij vermeld dat in het onderzoek in eerste instantie de invloed van vlokvorming is verwaarloosd.

Zijn de resultaten van het onderzoek naar tevredenheid dan kunnen de bevindingen worden gebruikt voor de eliminatie van de getij- en seizoensinvloeden uit de gemeten slibconcentraties in de periode 1970-1990. Tevens zouden de uitkomsten van het onderzoek een bijdrage kunnen leveren aan de 3-Dimensionale slibmodellering.

AANPAK

Voor het uitvoeren van het onderzoek is een 1DV-model² aangekocht van het Waterloopkundig Laboratorium. Hierin zijn de tot nu toe bekende en van belang zijnde fysische processen voor de verticale slibbeweging verwerkt. Daarnaast zijn 'continue'-meetgegevens beschikbaar, zie §1.1. Door te experimenteren met de waarden van de in te voeren parameters, in de invoerfile van het 1DV-model, wordt getracht de gemeten 'continue'-slibconcentraties zo goed mogelijk te simuleren. De berekende slibconcentraties zullen naar verwachting voor verbetering vatbaar zijn, dit vanwege de nog vele onbekende waarden van parameters en nog niet gemodelleerde of niet goed gemodelleerde fysische processen. Met behulp van filtertechnieken zal vervolgens getracht worden optimale waarden voor invloedrijke parameters te bepalen, waarvan de waarde in de literatuur nog niet vast staat, zodat de fluctuaties in de gemeten slibconcentraties zo goed mogelijk beschreven zullen worden.

Het laatste houdt het volgende in. Allereerst wordt naar invloedrijke parameters gezocht door de gevoeligheid van het 1DV-model te testen op kleine variaties in de waarden van de in het model verwerkte parameters. Door vervolgens systeemruis en meetruis aan de vergelijkingen voor de berekening van de slibconcentraties toe te voegen, worden

²afkorting van 1 Dimensionaal Verticaal model

de onnauwkeurigheden in de metingen en niet gemodelleerde fysica in het 1DV-model gemodelleerd. Toepassing van filtertechnieken op de verkregen vergelijkingen, leveren filtervergelijkingen op. Met deze filtervergelijkingen worden met behulp van de gemeten 'continue'-slibconcentraties door het meetpunt de Zeekat schattingen verkregen voor de invloedrijke parameters. Zijn de schattingen van de grootheden robuust³ dan kunnen deze gebruikt worden als in te voeren waarden, voor een geheel getij lang, voor de betreffende parameter in het 1DV-model.

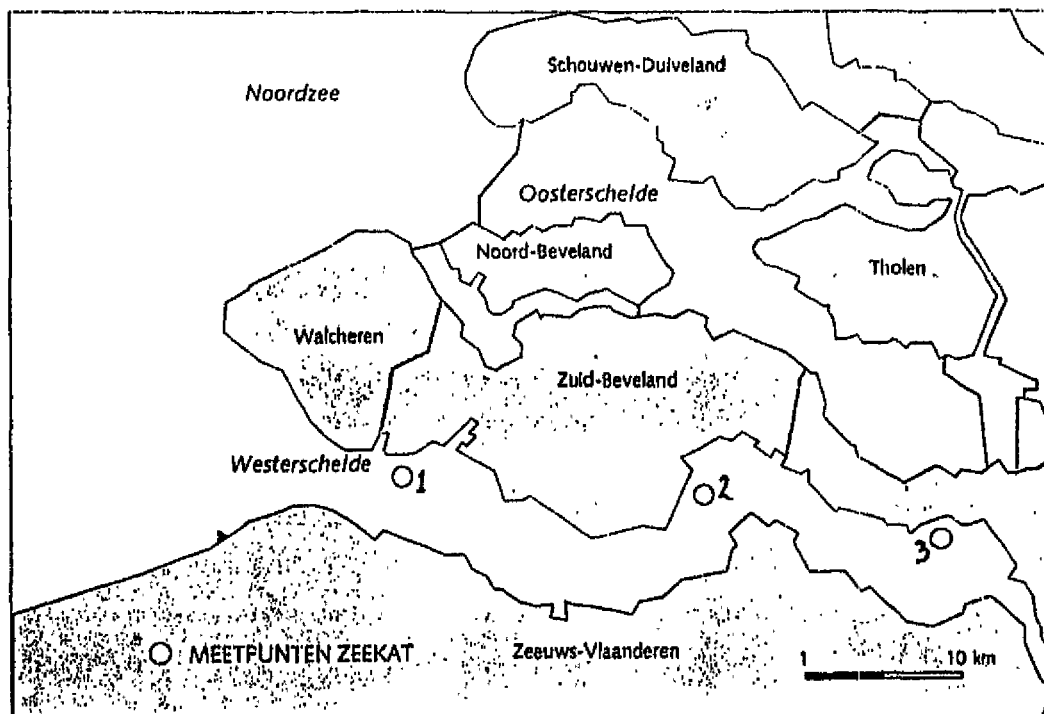
Het onderzoek is, naast het testen van het filter voor de slibconcentraties en de parameters w_o en $D - E$, helaas niet veel verder gekomen dan het enkele malen toepassen van het filter op de gemeten 'continue'-slibconcentraties. Het bepalen van de optimale waarden van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o en de erosie en sedimentatie $D - E$ met de verkregen filtervergelijkingen en de gemeten 'continue'-slibconcentraties zal daarom een aanbeveling zijn voor een vervolg onderzoek.

In hoofdstuk 2 worden de vergelijkingen en de uitkomsten van het 1DV-model onder de loep genomen. Vervolgens vindt in hoofdstuk 3 een analyse van het 1DV-model plaats. Daarna worden de wiskundige achtergronden van de gebruikte filtertechnieken besproken in hoofdstuk 4. Met behulp van deze filternieken zijn in hoofdstuk 5 de filtervergelijkingen voor het 1DV-model afgeleid. Daarna is in hoofdstuk 6 het filtergedrag van het filter onderzocht met behulp van fictieve meetgegevens en is er gefilterd met de gemeten 'continue'-slibconcentraties. Tenslotte worden in hoofdstuk 7 de conclusies en aanbevelingen van dit onderzoek weergegeven.

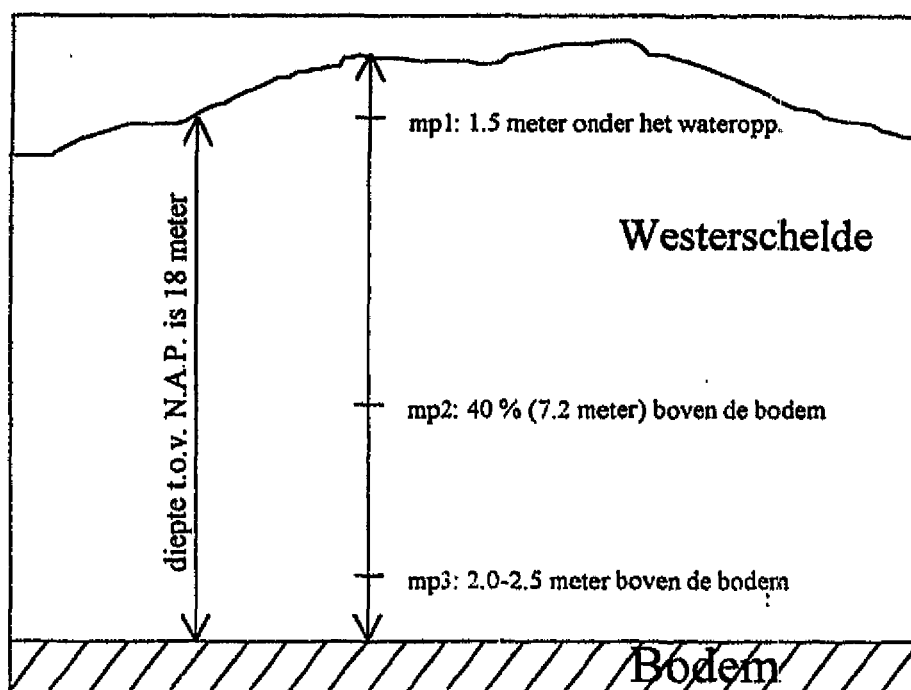
1.1 Beschikbare 'continue'-metingen

Op drie meetlocaties in de Westerschelde zijn met behulp van het meetpunt de Zeekat 'continue'-metingen verricht, zie figuur 1.1. In dit rapport zijn de metingen gedaan op de meetlocatie te Middelgat gebruikt, zie figuur 1.3. Op die locatie, met een diepte van ongeveer 18 meter ten opzichte van N.A.P., is in de periode 1-9-'87 tot en met 27-6-'88 het volgende gemeten: de troebelheid, de stroomsnelheid plus de richting ervan, de fluorescentie, de windsnelheid, de geleidendheid, de watertemperatuur en de radioactiviteit. Van die parameters werd de stroomsnelheid, plus de richting ervan, gemeten op 1.50 m onder het wateroppervlak. De troebelheid daarentegen werd gemeten op drie vaste hoogtes in de verticaal, te weten: ± 1.50 meter onder het wateroppervlak, $\pm 40\%$ van de waterhoogte boven de bodem en 2.25-2.75 meter boven de bodem, zie memo [5] en figuur 1.2. Om de 8 minuten werden deze hoogtes gecorrigeerd aan de hand van de waterhoogte op dat moment. De volgorde van het meten van de troebelheid ging als volgt: als eerste werd op ± 1.50 m onder het wateroppervlak gemeten, vier minuten later werd op $\pm 40\%$ van de waterhoogte boven de bodem gemeten waarna ongeveer vier minuten later op 2.25-2.75 m boven de bodem de troebelheid werd gemeten vervolgens werd vier minuten later

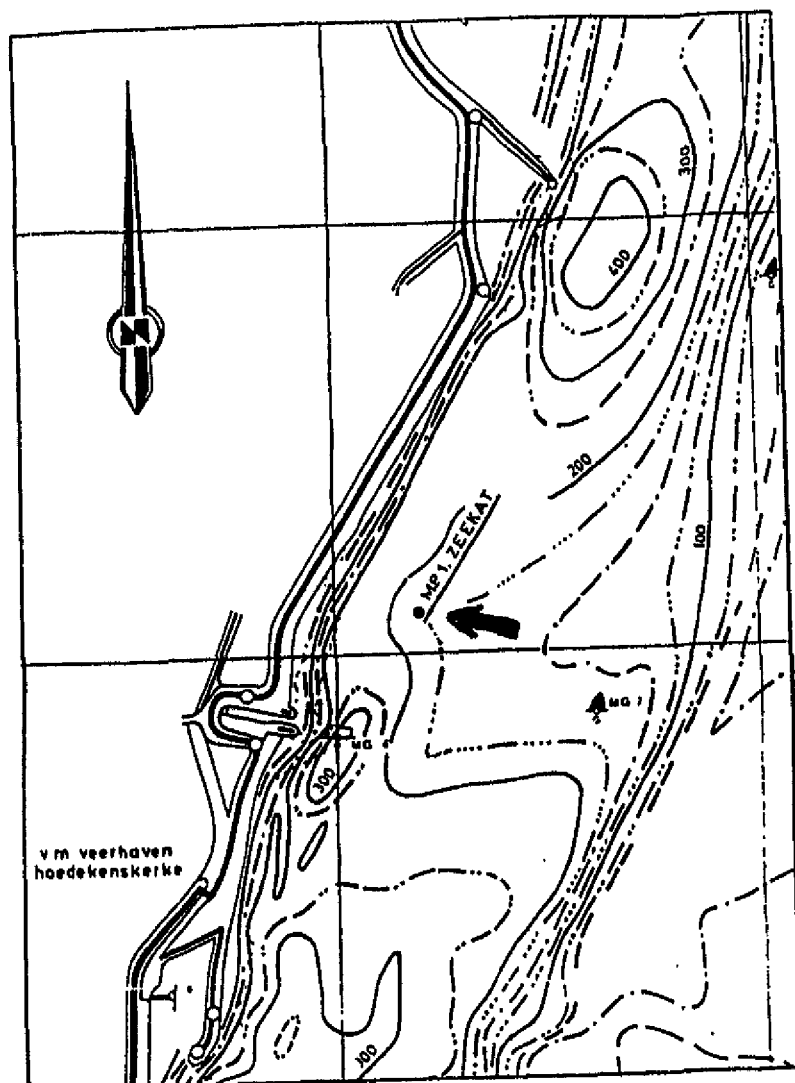
³Hiermee wordt bedoeld het overeenkomen van de schattingen van de invloedrijke parameters voor meerdere getijden



Figuur 1.1: Overzicht van de meetpunten van de Zeekat in de Westerschelde. Met meetpunt 1: Schaar van Spijkerplaat ter hoogte van Vlissingen, meetpunt 2: Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke, meetpunt 3: Schaar van de Noord ter hoogte van Bath



Figuur 1.2: De drie meethoogtes waarop te Middelgat de slibconcentraties gemeten zijn door het meetpunt 'De Zeekat'



Figuur 1.3: Meetpunt Middelgat te Hoedekenskerke, met dieptelijnen in decimeters ten opzichte van N.A.P.

weer vanaf voor af aan begonnen. De stroomsnelheid werd om de vier minuten bepaald. De gemeten troebelheid van het water is vervolgens met behulp van een ijklijn, met een correlatie in de buurt van de 92 %, omgezet in de concentratie van slib. Het nemen van watermonsters ter bepaling van die ijklijn werd ongeveer één keer per week gedaan. In notitie [10] zijn de daarmee ontstane slibconcentraties uitgezet tegen de tijd. Voor meer informatie over metingen verricht door het meetpunt 'De Zeekat', zie bijlage F.

Hoofdstuk 2

Het 1DV-model

In dit hoofdstuk wordt het 1DV-model van het Waterloopkundig Laboratorium nader bekeken. Zo zal in §2.1 besproken worden hoe de verschillende processen, die van belang zijn voor de verticale slibbeweging, in het 1DV-model zijn verwerkt. Vervolgens wordt in §2.2 de vergelijking besproken, waarmee de slibconcentraties worden berekend. Daarna volgt in §2.3 een nadere toelichting over de in dit onderzoek gebruikte 'continue'-meetgegevens. Vervolgens wordt in §2.4 getracht de berekende slibconcentraties zoveel mogelijk op de gemeten slibconcentraties te laten lijken. Tenslotte worden in §2.5 de uitkomsten van het 1DV-model vergeleken met de grafiek van de gemeten slibconcentraties.

2.1 Belangrijke processen

In deze paragraaf zullen alle bekende processen, die relevant zijn voor de hoeveelheid slib¹ in de waterkolom (zie figuur 2.1), besproken worden. Bij die bespreking zal tevens aangegeven worden hoe die processen in het 1DV-model zijn verwerkt.

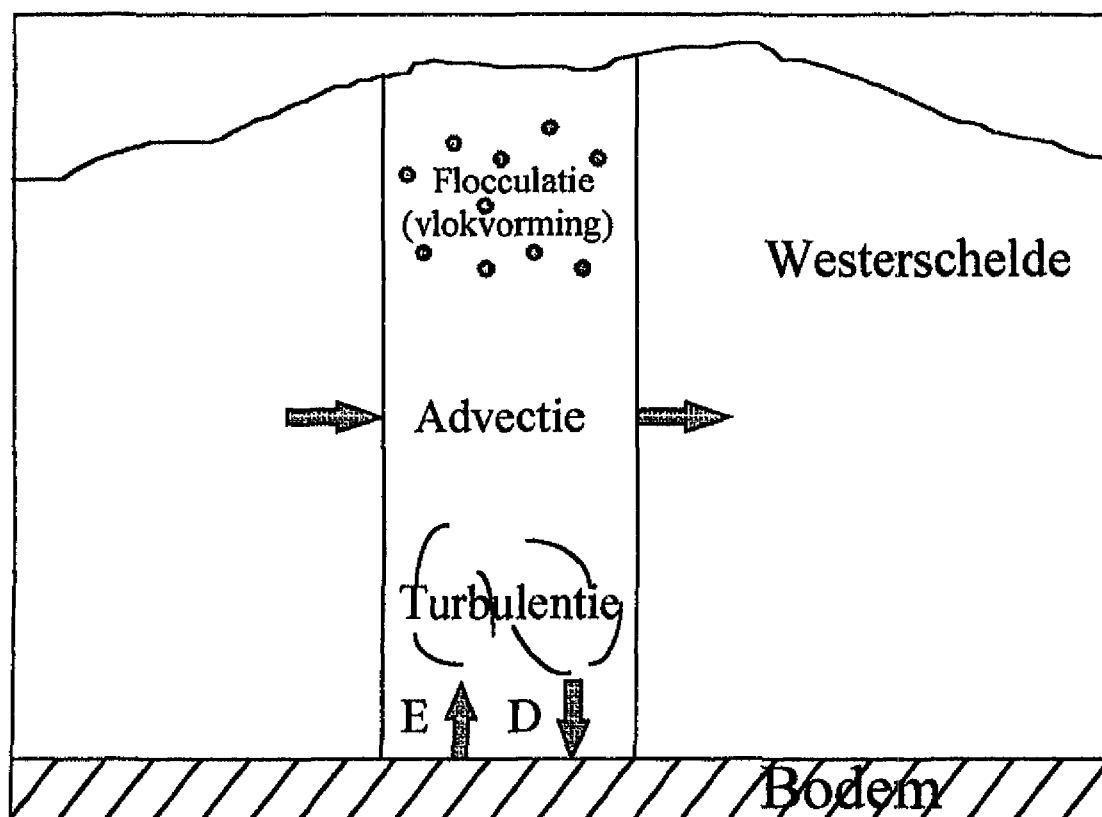
Turbulentie Voor het simuleren van de turbulentie wordt in dit model een $k-\epsilon$ model gebruikt zie vergelijkingen (A.1e) en (A.1f) in bijlage A:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \Gamma_r^{(k)}) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + P - B - \epsilon \quad , \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \Gamma_r^{(\epsilon)}) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} + P_\epsilon - B_\epsilon - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.2)$$

Hierin is k de turbulente energie, ϵ de energie dissipatie, t de tijd en z de hoogte in de waterkolom. De rest van de onbekenden volgen uit bijlage A. Met deze vergelijkingen wordt de eddy-viscositeit ν_T voor de gehele waterkolom berekend

¹In dit onderzoek wordt onder slib verstaan het anorganische gedeelte van het materiaal dat in het water zweeft of op de bodem ligt, met een diameter $< 53 \mu m$.



Figuur 2.1: Processen die van belang zijn voor de hoogte van de slibconcentratie in een waterkolom, met *E* de erosie en *D* de sedimentatie (*Deposition*)

volgens (A.1d), welke een simulatie van de turbulentie oplevert. In de waterkolom is de turbulentie verantwoordelijk voor het omhoog brengen van slib en heeft zodoende grootte invloed op de dispersie van slib over de verticaal. Het is dus van groot belang dat de simulatie van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model zo exact mogelijk is. In de literatuur staan veel modellen die de turbulentie trachten te simuleren. Van de twee-vergelijkingen modellen is het $k-\epsilon$ model het meest populair. Dit komt doordat het model simpel is en goede resultaten oplevert voor stromingen in rechte kanalen, ook als deze onder invloed zijn van het getij zie [20]. Zijn er echter bochten in het kanaal en/of treden er plotselinge veranderingen in de bodemschuifspanningen op, dan levert het $k-\epsilon$ model een stuk minder betrouwbare resultaten op.

In dit onderzoek wordt gebruik gemaakt van de metingen die gedaan zijn te Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke, zie figuur 1.3. Uit berekeningen van het scaldismodel² lijkt de stroming in de buurt van de meetlocatie redelijk recht te zijn. De rechtheid van het kanaal/stroming ter plekke van de meetlocatie zou zodoende geen problemen hoeven op te leveren. Van de fluctuaties in de bodemschuifspanning ter plekke van de meetlocatie is niets bekend. Wel zijn de verschillen in dieptes rond de meetlocatie veel groter als te verwachten valt bij een recht kanaal, met als mogelijk gevolg fluctuaties. Daarnaast is het de vraag wat de invloed is van de menging van het zoute zeewater met het zoete rivierwater op de grootte van de turbulentie in de verticale richting.

Of het $k-\epsilon$ model zodoende een betrouwbare weergave zal geven van de turbulentie op de meetlocatie is nog maar de vraag. Aan het begin van hoofdstuk 3 wordt getracht een indruk te krijgen van die betrouwbaarheid door onder andere gemeten stroomsnelheidsprofielen op de meetlocatie nader te beschouwen.

Het sedimentatie- en erosieproces Een proces dat van wezenlijk belang is voor de hoeveelheid slib in de waterkolom is het sedimentatie- en erosieproces. In het 1DV-model worden de erosie en sedimentatie beschreven in de randvoorwaarde van de bodem, zie eerste vergelijking van (A.11) in bijlage A. Voor de berekening van het slibgehalte levert dit met omzetting van de volumeconcentratie ϕ naar de (massa)concentratie c van slib, $\phi = \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_f - \rho_w} \right) \frac{c}{\rho_s}$, het volgende op :

$$\left\{ w_s c + (D_{kv} + \Gamma_T) \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} = D - E$$

Hierin stelt D de sedimentatie en E de erosie voor, beide in $\left[\frac{kg}{sm^2} \right]$. Voor de berekening van D en E is in dit 1DV-model gekozen voor de welbekende formules van Krone en Partheniades. Voor erosie is dat:

$$\tau_b > \tau_e : E = M \frac{\tau_b - \tau_e}{\tau_e} \quad (2.3)$$

²2 Dimensionaal stromingsmodel van de Westerschelde

en voor depositie:

$$\tau_b < \tau_d : D = w_s c_b \frac{\tau_d - \tau_b}{\tau_d} \quad (2.4)$$

met τ_d de bodemschuifspanning, τ_d de kritische schuifspanning voor het sedimentatieproces, τ_e de kritische schuifspanning voor het erosieproces, w_s de valsnelheid van slib, M de erosieparameter en c_b de sedimentconcentratie bij de bodem. Daarbij wordt er vanuit gegaan dat erosie en sedimentatie niet gelijktijdig kunnen plaatsvinden, zodat $\tau_d \leq \tau_e$ dient te zijn. Ligt τ_b tussen beide kritische schuifspanningen in dan vindt er noch erosie noch sedimentatie plaats.

De formules van Krone en Partheniades hebben in het verleden reeds hun diensten bewezen. Het is echter wel een sterke vereenvoudiging van de werkelijkheid, waarbij de instelparameters fenomenen beschrijven die onafhankelijk van elkaar lijken te zijn maar die vaak dezelfde gevolgen hebben. Verder is er geen limiet aan de hoeveelheid slib die geërodeert kan worden. Er wordt dus aangenomen dat de bodem uit één oneindige sliblaag bestaat.

Of er nu slib erodeert of sedimenteert hangt dus af van de grootte van de bodemschuifspanning. Het is daarom van belang dat de fluctuaties in de schuifspanning goed gesimuleerd worden door de in het 1DV-model gebruikte kwadratische wrijvingswet $\tau_b = \rho u_{*b}^2$, waarbij u_{*b} berekend wordt door één van de definities in (A.11). In verband met de invloed van de eerder genoemde verschillen in de diepte in de omgeving van de meetlocatie is het zodoende nog maar de vraag of de erosie en sedimentatie goed gesimuleerd zullen worden door de formules van Krone en Partheniades.

Het flocculatieproces Bevindt er zich genoeg zout en/of organisch materiaal in water dan kunnen slibdeeltjes aan elkaar gaan kleven, dit wordt het flocculatieproces of te wel vlokvorming genoemd. Dit proces is van belang voor de valsnelheid van slib, want hoe groter de flokken worden hoe sneller het slib naar de bodem zakt. In de Westerschelde bevindt zich genoeg zout en organisch materiaal in het water opdat er vlokvorming kan optreden. In het 1DV-model wordt er in eerste instantie echter vanuit gegaan dat de invloed van het flocculatieproces op de valsnelheid van slib verwaarloosbaar is. Daarom wordt een constante waarde voor de valsnelheid gebruikt. Later zal blijken of dit juist is.

Het consolidatieproces Hoe langer slib op de bodem blijft liggen hoe meer het in elkaar zal klinken, waardoor de cohesie tussen de sedimentdeeltjes zal toenemen. Het gevolg hiervan is dat er meer kracht voor nodig is om het slib te laten eroderen. Vooral bij stromingen over platen is dit proces van belang. In het model is met dit proces geen rekening gehouden. Voor dit onderzoek is dat terecht omdat de meetlocatie te Middelgat nooit droogvalt en er zodoende nauwelijks sprake is van consolidatie.

Advectie Dit is de hoeveelheid slib die per seconde de waterkolom horizontaal binnenkomt min de hoeveelheid slib die per seconde de kolom horizontaal weer verlaat. In het 1DV-model wordt geen rekening gehouden met de advectie. Er wordt dus aangenomen dat er horizontaal gezien evenveel slib de waterkolom in als uitgaat. Wat inhoudt dat de bodem, in de omgeving van de waterkolom, vlak is en uit hetzelfde materiaal bestaat. In figuur 1.3 is te zien dat de bodem niet vlak is, daarnaast bestaat het vermoeden dat een aantal pieken in de gemeten slibconcentraties veroorzaakt worden door nabijgelegen ontgrondingsputten. Uit nader onderzoek zal moeten blijken of deze term werkelijk verwaarloosbaar is, en zo niet hoe deze dan het beste in het 1DV-model verwerkt zou kunnen worden.

2.2 Berekening slibconcentratie

Voor de berekening van onder andere de slibconcentratie in de waterkolom wordt in het 1DV-model gebruik gemaakt van de transport-diffusievergelijking (A.1c) uit bijlage A. Met

$$\phi = \left(\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s(\rho_f - \rho_w)} \right) c, \quad (2.5)$$

is de volumeconcentratie ϕ in de transport-diffusievergelijking omgeschreven naar de massaconcentratie c van slib. Daarnaast is de term $D_{kv} + \Gamma_T$ vervangen door Γ_T , omdat voor slib geldt dat de moleculaire diffusie coëfficiënt D_{kv} veel kleiner is dan de diffusie coëfficiënt Γ_T . Het resultaat van deze aanpassingen is de volgende vergelijking, in het vervolg slibvergelijking genoemd, voor de berekening van de slibconcentratie op elke hoogte in de waterkolom en op elk willekeurig tijdstip:

De slibvergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial w_s c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \quad (2.6)$$

Hierin is w_s de valsnelheid van slib, die onafhankelijk van de tijd en hoogte wordt verondersteld. Daarnaast is Γ_T de diffusie coëfficiënt, de waarde hiervan wordt berekend met het k- ϵ model.

Om de slibconcentratie met deze vergelijking te kunnen berekenen zijn er nog een aantal voorwaarden nodig. Zo zal van het begintijdstip t_0 , vanaf waar de slibconcentraties worden berekend, bekend moeten zijn wat c , w_s en Γ_T zijn, dit worden de beginvoorwaarden genoemd.

De beginvoorwaarden voor $t = t_0$ zijn:

$$c(t_0, z) = \bar{c}_0(z) \quad , \quad \Gamma_T(t_0, z) = \bar{\Gamma}_{T_0}(z) \quad \text{en} \quad w_s(t_0, z) = \bar{w}_{s_0}(z) \quad (2.7)$$

De beginwaarden van w_s en c moeten in de invoerfile opgegeven worden. De eddy-difusiteit volgt daarentegen uit het $k-\epsilon$ model, zie vorige paragraaf. De beginvoorwaarden van dat model zijn in het 1DV-programma geprogrammeerd.

Daarnaast is het voor het oplossen van de slibvergelijking nodig te weten hoeveel slib er aan de boven- en onderkant en de randen van de waterkolom binnenkomt. De vergelijkingen hiervoor worden de randvoorwaarden³ genoemd. De in het 1DV-model gebruikte randvoorwaarden voor (2.6) staan in (A.11) van bijlage A. Worden deze vergelijkingen met (2.5) herschreven, dan levert dit met de eerder genoemde vervanging van $D_{kv} + \Gamma_T$ door Γ_T de volgende randvoorwaarden op:

- Randvoorwaarde voor het vrije oppervlak

$$\left\{ w_s c + \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.8)$$

Het rechterlid van de vergelijking geeft aan hoeveel slib er per seconde aan de bovenkant van de waterkolom in- of uitgaat. Aangezien de windaanvoer van 'slib' nihil is en dit de enige uitwisseling met het wateroppervlak is, is voor de rechterkant de waarde nul genomen.

- Randvoorwaarde voor de bodem

$$\left\{ w_s c + \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} = D - E \quad (2.9)$$

De hoeveelheid slib die de onderkant van de waterkolom in- of uitgaat is afhankelijk van de erosie E en de sedimentatie D . De waarden van deze twee variabelen worden berekend met de formules van Krone en Partheniades, zie vorige paragraaf.

Met de gegeven voorwaarden kan de slibvergelijking opgelost worden. Dit is in het 1DV-model gedaan met behulp van een numerieke oplossingsmethode omdat niet alle vergelijkingen die in het 1DV-model gebruikt worden exact oplosbaar zijn.

2.3 Gebruikte metingen

Voor het afstellen van het 1DV-model wordt gebruik gemaakt van de 'continue'-meetgegevens vanaf 30-10-'87 zoals beschreven in §1.1. Die meetreeks is gekozen omdat vanaf die dag een lange ononderbroken periode van goede meetgegevens beschikbaar zijn. Daarnaast wordt gebruik gemaakt van de waterhoogten ten opzichte van N.A.P. die door Rijkswaterstaat op een vast aantal locaties langs de Westerschelde continu om de tien minuten gemeten worden. Van deze gegevens is het volgende gebruikt als invoer voor het 1DV-model:

³In theorie wordt er onderscheid gemaakt tussen drie soorten randvoorwaarden, te weten Dirichlet-, Neuman- en een combinatie van die twee gemengde randvoorwaarden. De hier gebruikte randvoorwaarden vallen onder de laatstgenoemde categorie

Reeks met de gemeten stroomsnelheden In de invoerfile van het 1DV-model wordt om een reeks met gemiddelde stroomsnelheden gevraagd. Met het meetpunt 'De Zeekat' is echter alleen de snelheid van 1.50 meter onder het wateroppervlak gemeten. Om toch zo goed mogelijk aan het gevraagde te voldoen is de gemeten snelheid met de factor 0.86 vermenigvuldigd.

Reeks met de gemeten waterhoogten Voor het 1DV-model is de reeks met waterhoogten ten opzichte van N.A.P. gebruikt die gemeten zijn bij Hansweert. Nu is het getij een lopende watergolf, om daarom de juiste fase van de waterhoogte bij Middelgat te krijgen is een kwartier van het meettijdstip afgetrokken. Dit kwartier werd afgeleid uit het faseverschil tussen de gemeten waterhoogten te Hansweert en Terneuzen. Daarnaast is 18 meter bij de waterhoogtes ten opzichte van N.A.P. opgeteld om de waterhoogten ten opzichte van de bodem te verkrijgen.

2.4 Afstellen 1DV-model

Voor het afstellen van het 1DV-model zijn de berekende slibconcentraties die het dichtst in de buurt liggen van de gemeten slibconcentraties uitgezet tegen de tijd. Met dien verstande dat in dit stadium van het onderzoek er vanuit werd gegaan dat de slibconcentraties op de volgende hoogten gemeten waren: 1.5 meter onder het wateroppervlak, 40 % boven de bodem en 1.0 meter boven de bodem! De zo verkregen grafiek kan dan vergeleken worden met de grafiek van de gemeten slibconcentraties. De coëfficiënten waarmee het 1DV-model kan worden afgesteld staan in bijlage B. Voor de betekenis van deze coëfficiënten en de uitleg van de mogelijkheden van de invoerfile zie bijlage C.

Zoals aan het eind van §2.2 is vermeld worden de slibconcentraties in het 1DV-model numeriek berekend. Daarvoor wordt de waterkolom in een aantal lagen opgedeeld. In de invoerfile van het 1DV-model dient daarom opgegeven te worden in hoeveel lagen de waterkolom opgedeeld moet worden. Hoe groter het aantal lagen gekozen wordt, hoe dichter de numerieke oplossing in buurt van de exacte oplossing zal liggen. Het nadeel is dat de rekentijd ongeveer evenredig toeneemt met het aantal lagen.

10 lagen

Om een grof beeld van de werking van het 1DV-model te krijgen en om de rekentijd klein te houden is begonnen met een onderverdeling van de waterkolom in tien lagen, met een naar beneden toe kleiner wordende laagdikte. Ter vergelijking van de door 'De Zeekat' gemeten slibconcentraties zijn de slibconcentraties van de lagen 1,4 en 8 afgedrukt. Door de gebruikte numerieke oplossingsmethode in het 1DV-model wordt de slibconcentratie c berekend voor het midden van elke laag terwijl onder andere de eddy-difusiteit Γ_T , eddy-viscositeit ν_T en de energie dissipatie ϵ voor de randen van de laag berekend worden. De lagen 1,4 en 8 komen daardoor voor de slibconcentraties overeen met ± 1.80 meter onder het wateroppervlak, 39 % boven de bodem en ± 1.26 meter boven de bodem. Voor de grootte van de tijdstap is in het 1DV-model $\frac{1}{10}$ minuut ingevoerd. Dit is gedaan omdat

bij deze stapgrootte de grafiek van de slibconcentraties uitgezet tegen de tijd, nauwelijks meer zichtbare afwijkingen vertoonde ten opzichte van dezelfde grafiek bij een kleinere stapgrootte. In het 1DV-model wordt gebruik gemaakt van een drukcorrectie met daarin de gemiddelde waarde van de stroomsnelheid over de diepte, zie tweede term van het rechterlid van de eerste vergelijking in (A.1b). Met behulp van deze drukcorrectie is het 1DV-model in staat de te berekenen stroomsnelheden een op te geven reeks met gemiddelde stroomsnelheden te laten volgen. Om ervoor te zorgen dat het model de opgegeven reeks met stroomsnelheden netjes volgt, wordt door het Waterloopkundig Laboratorium aanbevolen de relaxatietijd T_{rlx} , in de drukcorrectieterm, twee keer zo groot te nemen als de tijdstapgrootte. Deze aanbeveling is in dit onderzoek overgenomen.

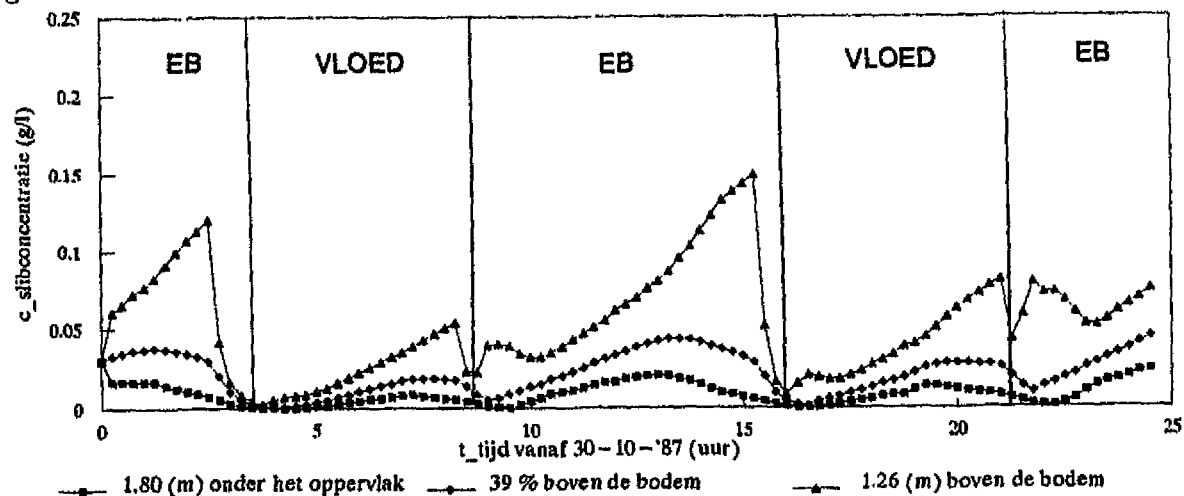
In het 1DV-model dient verder opgegeven te worden voor hoeveel tijdstappen de waarden van de verschillende grootheden berekend moeten worden. In de geleverde versie van het 1DV-model kunnen voor niet meer dan 99 van die tijdstappen de berekende waarden van de variabelen weggeschreven worden. Per run was het daarom gewenst de tijdstapgrootte tussen de af te drukken waarden zo groot mogelijk te nemen. Daarnaast is het van belang dat de pieken in de grafiek van slibconcentraties tegen de tijd behouden blijven. Daarom is bij het wegschrijven van de berekende waarden gekozen voor een tijdstapgrootte van 15 minuten.

Voor de rest van de instelbare coëfficiënten in de invoerfile zijn vervolgens zodanig waarden gekozen, dat de grootte van de berekende slibconcentraties en de vorm van de grafiek zoveel mogelijk overeenkwamen met die van de gemeten slibconcentraties. Zie figuur 2.2 voor de berekende slibconcentraties en figuur 2.3 voor de gemeten slibconcentraties. Voor de waarden van de coëfficiënten, beginconcentraties etc. zie de invoerfile in bijlage B. Ondanks de periodieke overeenkomsten tussen de metingen en de berekeningen zijn de uitkomsten van het 1DV-model nog niet bevredigend. Om te zien of een uitbreiding van het aantal lagen in de waterkolom hier nog verandering in brengt is het aantal lagen uitgebreid tot vijftig. De waarden van de andere invoerparameters zijn in eerste instantie constant gehouden.

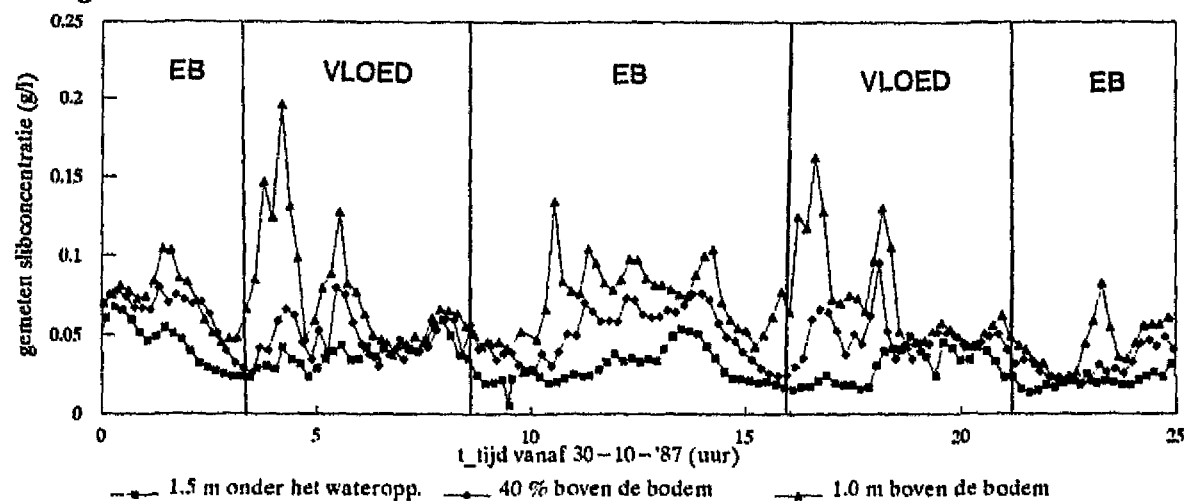
50 lagen

Begonnen is met dezelfde laagdikte voor alle vijftig lagen. Daarna zijn, om de nauwkeurigheid nog meer te vergroten, andere lagenverdelingen uitgeprobeerd zoals een logaritmische en een lineaire lagenverdeling met naar beneden toe afnemende laagdiktes. Dit laatste werd gedaan omdat de afgeleiden van de slibconcentratie en de snelheid naar de hoogte z , naar de bodem toe steeds groter worden. Bij de lagenverdelingen is de verhouding 2:3 tussen twee opeenvolgende lagen niet overschreden, zoals wordt voorgeschreven in de bijgeleverde documentatie van het 1DV-model. De resultaten van de niet equidistante lagenverdelingen bleken verrassend veel af te wijken van de resultaten met de equidistante lagenverdeling, te veel zelfs. Bij navraag bij het Waterloopkundig Laboratorium bleek dat vooral niet aan de volgende conditie voldaan moest worden, zie eerste conditie van

Figuur 2.2: Berekende slibconcentraties bij verdeling waterkolom in 10 niet-equivalente lagen



Figuur 2.3: De door het meetpunt 'De Zeekat' gemeten 'continue'-slibconcentraties te Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke



(A.1i) in bijlage A :

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta z_b}{z_o} < 1 \quad : \quad u_{*b} = \frac{u(\frac{1}{2}\Delta z_b)}{12} \quad ;$$

Hierin stelt Δz_b de dikte van de onderste laag voor, z_o de ruwheidshoogte van de bodem en u_{*b} de bodemwrijvingssnelheid. Geadviseerd werd de dikte Δz_b van de onderste laag in ieder geval een factor tien groter te laten zijn dan z_o . Deze factor is ingesteld om dan geen last te hebben van de viskeuze sublaag waarvan de grootte afhankelijk is van de ruwheidshoogte z_o . Bij een maximale z_o van 0.0207 (dit is hetzelfde als de Chézy-waarde 45) zou dit betekenen dat Δz_b groter zou moeten zijn dan 0.207. Omdat bij een equidistante lagenverdeling Δz_b reeds schommelt rond 0.36 is in de rest van het onderzoek de equidistante lagenverdeling aangehouden. In de later geleverde versies is deze conditie er uitgehaald. De testen met niet equidistante lagen zijn echter niet meer herhaald. Het onderzoek is voortgezet met 50 equidistante lagen.

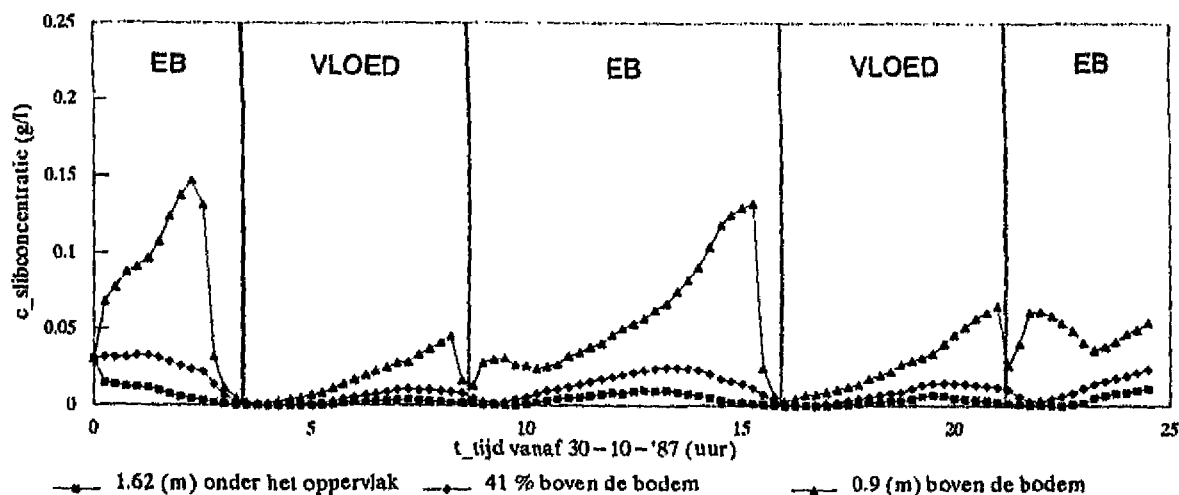
In de figuren zijn de berekende slibconcentraties gepresenteerd van de lagen 5,30 en 48 omdat deze het dichtst in de buurt komen van de hoogtes waarop werkelijk gemeten is. Bij een waterhoogte van 18 meter komt dit voor de hoogtes van de slibconcentratie en de snelheid neer op: 1.62 meter onder de wateroppervlakte, 41 % boven de bodem en 0.9 meter boven de bodem. Voor onder andere de eddy-diffusiteit komt dit neer op 1.80 meter boven de bodem, 40 % boven de bodem en 0.72 meter boven de bodem. De waterhoogte varieert onder invloed van het getij en wijkt als gevolg daarvan maximaal ongeveer 2.25 meter van de gemiddelde waterhoogte van 18 meter af. De zojuist in meters gepresenteerde hoogten zullen als gevolg daarvan variëren, met een maximale afwijking van 12 procent.

Bij de verdeling van de waterkolom in 50 equidistante lagen bleek de tijdstap van 1/10 minuut eveneens de optimale tijdstap. Bij verdere verkleining traden nauwelijks zichtbare veranderingen op. De stapgrootte van 15 minuten voor het afdrukken van de berekende waarden bleek eveneens nog te voldoen. Het resultaat is te zien in figuur (2.4). Ten opzichte van de resultaten verdeling van de waterkolom in 10 lagen is er in de periodieke vormen (helaas) weinig veranderd. In de grootte van de slibconcentraties van de drie verschillende hoogten (onderling) zit wel een zichtbaar verschil. In het vervolg van het onderzoek zal daarom verder gewerkt worden met een verdeling van de waterkolom in 50 equivalente lagen.

2.5 Evaluatie 1DV-model

In metingen zitten altijd meetfouten, daarnaast zitten er in de gemeten slibconcentraties kleine fluctuaties die er niet toe doen. Om de gemeten slibconcentraties beter te kunnen

Figuur 2.4: Slibconcentraties bij verdeling waterkolom in 50 equivalente lagen



vergelijken met de berekende slibconcentraties is de grafiek van de gemeten slibconcentraties, zie figuur 2.3, handmatig afgevlakt, bovendien is de achtergrondconcentratie⁴ van alledrie de concentraties afgehaald. De zo verkregen grafiek is de vierde grafiek van figuur 2.5. In de andere grafieken van deze figuur staan de door het 1DV-model berekende eddy-viscositeiten, stroomsnelheden respectievelijk slibconcentraties, uitgaande van een verdeling in 50 lagen.

De slibconcentratie op 1.5 meter onder het wateroppervlak

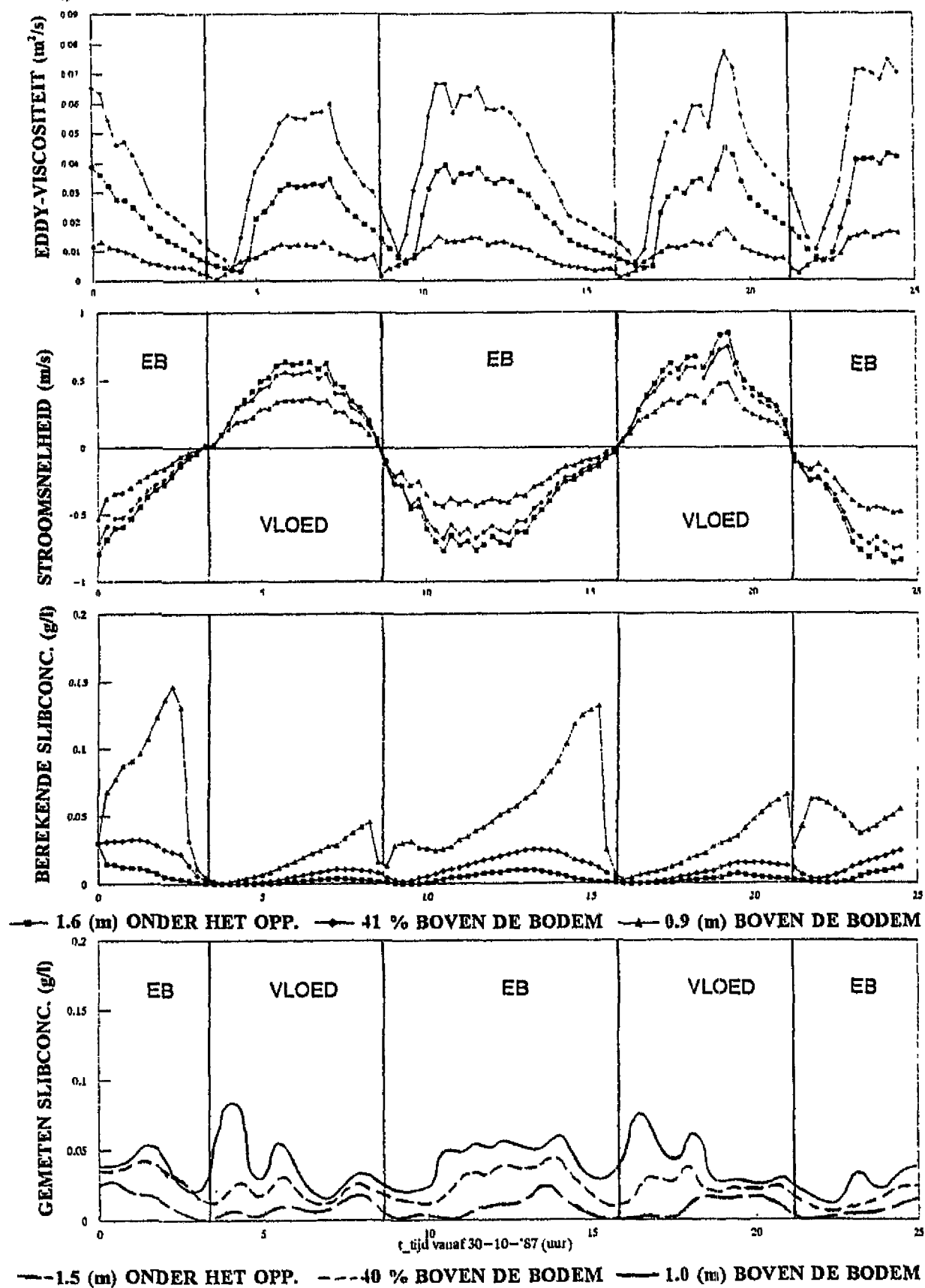
Zoals gezegd in de inleiding is de slibconcentratie, in de periode 1970-1990, bovenin de waterkolom gemeten. Voor het elimineren van de fluctuaties als gevolg van het getij en seizoen is het dus vooral van belang dat de berekende slibconcentratie op 1.50 onder het wateroppervlak zo goed mogelijk overeenkomt met gemeten slibconcentratie. In de figuur 2.5 is te zien dat op die hoogte de slibconcentraties het beste met elkaar overeenkomen. Zo treden het minimum respectievelijk het maximum van de berekende en gemeten slibconcentratie vrijwel gelijktijdig op. Daarnaast komen de periodieke vormen van beide 'signalen' redelijk met elkaar overeen.

De slibconcentratie op 40 % (± 7.2 meter) boven de bodem

Vervolgens zijn de slibconcentraties op 40 % boven de bodem met elkaar vergeleken. Wat opvalt is dat in de metingen bij vloed de slibconcentratie de eerste paar uur na de kentering veel hoger is, twee kleine piekjes, dan de berekende slibconcentratie. Bij eb is deze hogere slibconcentratie in de metingen pas na een paar uur waar te nemen, terwijl bij het 1DV-model weinig tot geen verschil te zien is (behalve in de hoogte) tussen de slibconcentratie van eb en van vloed. Worden deze verhogingen weggedacht dan komen de tijdstippen van het minimum en het maximum van zowel de berekende als gemeten slib-

⁴Dit is het gedeelte van het slib dat altijd in suspensie blijft, hierbij is gekeken naar de hoeveelheid slib die zich, rond de stroomkenteringen op 1.50 m onder het wateroppervlak, nog in de waterkolom bevindt.

Figuur 2.5: Grafiek 1: berekende eddy-viscositeiten, grafiek 2: berekende stroomsnelheden, grafiek 3: berekende slibconcentraties, grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentr.



concentraties redelijk met elkaar overeen. Met de opmerking daarbij dat in de metingen, ten opzichte van het 1DV-model, het minimum in de slibconcentratie bij de kentering van eb naar vloed iets eerder optreedt en bij de kentering van vloed naar eb juist wat later optreedt.

De slibconcentratie op 1.0 meter boven de bodem

Tenslotte worden de slibconcentraties op 1.0 meter boven de bodem met elkaar vergeleken. De berekende slibconcentratie op deze hoogte lijkt, ten opzichte van de andere twee hoogten, verreweg het minst op die van de metingen. In het 1DV-model wordt de erosie en sedimentatie, zoals reeds eerder gezegd, berekend met behulp van de formules van Krone en Partheniades. Hierdoor sedimenteert er slib uit de kolom zo gauw de bodemschuifspanning τ_b kleiner wordt dan de opgegeven kritische sedimentatieschuifspanning τ_d . Met als gevolg dat op deze hoogte het minimum van de berekende slibconcentratie samenvalt met de stroomkentering op deze hoogte. Dit in tegenstelling tot de gemeten slibconcentratie, bij de kentering van eb naar vloed vindt hier het minimum ruim voor de stroomkentering plaats (dit zou je niet verwachten). Bij de kentering van vloed naar eb vindt daarentegen het minimum een paar uur later plaats dan de stroomkentering.

In de steilheid van de grafiek van de berekende stroomsnelheden rond beide stroomkenteringen (van eb naar vloed en van vloed naar eb) is een duidelijk verschil te zien. Het gevolg hiervan is dat de tijdsduur dat er slib sedimenteert bij de ene kentering groter is als bij de andere. Hierdoor verdwijnt bij de kentering van eb naar vloed zo'n beetje al het slib uit de kolom terwijl bij de kentering van vloed naar eb dit niet gebeurt. Wat bij de laatstgenoemde kentering tot gevolg heeft dat door het nog naar beneden zakken van slib er op 1.0 meter boven de bodem direct na deze kentering een piek in de berekende slibconcentratie ontstaat. Deze piek is niet terug te vinden in de gemeten slibconcentraties.

Verder is vooral op 1.0 meter boven de bodem te zien dat in de berekende slibconcentratie het maximum van eb veel hoger ligt dan het maximum van vloed. Dit heeft twee oorzaken, te weten: de hoeveelheid slib die in suspensie blijft direct na de kentering en de veel langere tijdsduur dat er erosie plaatsvindt ($\tau_b \geq \tau_e$). De vorm van de grafiek van eb en vloed, oftewel de mate van difussie, lijkt echter niet te veranderen. Dit in tegenstelling tot de gemeten slibconcentratie, hier zit een duidelijk verschil tussen de vorm van de gemeten slibconcentratie van eb en die van vloed. Bij vloed zijn eerst twee pieken te zien, daarna neemt de slibconcentratie hier wat af. Bij eb daarentegen neemt na het minimum de slibconcentratie snel toe en blijft vervolgens redelijk constant.

De diffusie van slib

De grootte van de diffusie van slib is in het 1DV-model gelijk aan de eddy-viscositeit gedeeld door het turbulente Prandtl Schmidt nummer (constante). De gevolgen van de globale vorm van de grafiek van de eddy-viscositeit, zie eerste grafiek van figuur 2.5 is terug te vinden in de berekende slibconcentraties. Zo is het percentuele verschil tussen de drie slibconcentraties maximaal rond de kentering en minimaal rond het midden van de eb en vloed perioden. Ook bij de gemeten slibconcentraties is een percentueel minimum

en maximum verschil in de slibconcentraties waar te nemen, zij het dat het maximum nu na de kentering ligt en het minimum na het midden van de vloed- en ebperiode. Het tijdstip in de berekende diffusiteit na de kentering waarop het maximum optreedt is van eb en vloed verschillend. Bij eb treedt het maximum meer aan het begin van de ebperiode op en bij vloed is dat meer aan het einde van de vloedperiode. De invloed van dit verschil in de diffusie van eb en vloed is amper zichtbaar in de grafiek van de berekende slibconcentraties. In de grafiek van de gemeten slibconcentraties is tussen eb en vloed een veel groter verschil in diffusie zichtbaar. Bij het gemeten signaal is aan het begin van de vloedperiode de diffusie een stuk kleiner dan bij de ebperiode, terwijl in de tweede helft van de vloedperiode de diffusie veel groter is dan bij de ebperiode.

Tot slot nog iets over de piekjes in de eddy-viscositeit, die het gevolg zijn van de piekjes in de stroomsnelheid. In de grafiek van de berekende slibconcentraties is de invloed van die pieken niet terug te vinden, alhoewel het aannemelijk zou zijn als het wel een duidelijk invloed zou hebben. Zo'n mogelijk verband tussen deze piekjes en de pieken in de gemeten slibconcentratie is echter niet uit de grafieken af te leiden.

Mogelijke oorzaken van de verschillen

Naar de oorzaak van de hogere slibconcentraties bij de metingen na het minimum van de slibconcentratie van de onderste twee meetpunten rond de kenteringen is het voorlopig gissen. Wel zijn er een aantal vermoedens, te weten:

Tweelagenidee Het vermoeden bestaat dat het bovenste gedeelte van de bodem rond de kentering uit twee lagen bestaat. De bovenste eindige laag bestaande uit nagenoeg 100 % slib en de tweede laag daaronder bestaande uit slib vermengd met zand. Voor de bovenste laag is weinig kracht nodig om deze te laten eroderen terwijl voor de tweede laag veel meer kracht nodig is om het slib te laten eroderen. Dit zou meerdere kritische erosieschuifspanningen en een veranderende bodemruwheid tot gevolg hebben. Dit in tegenstelling tot het model, waar uitgegaan wordt van één oneindige sliblaag met als gevolg een constante bodemruwheid en één kritische erosieschuifspanning.

Interne golven Als mogelijke oorzaak werden in het verslag van Hilberink en de Jong [7] interne golven genoemd. Dit werd afgeleid uit een kleine gradiënt van de stroomsnelheid als er een grootte slibpiek optrad, dit verband is echter nog niet bewezen.

De andere verschillen, zoals de genoemde tijdsverschuivingen, zouden mogelijk het gevolg kunnen zijn van afwijkende simulaties van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model.

Hoofdstuk 3

Analyse 1DV-model

In dit hoofdstuk worden voor zover mogelijk de simulaties, van de fysische processen die in het 1DV-model zijn verwerkt, gecontroleerd. Dit komt neer op het bekijken van de simulatie van de turbulentie in §3.1. Daarna wordt in §3.2 de gevoeligheid van het 1DV-model onderzocht op veranderingen in de gebruikte grootheden. Vervolgens worden in §3.3 de mogelijke en gemaakte aanpassingen van het model besproken. Tevens worden parameters gekozen waarvan met behulp van filtertechnieken getracht zal worden schattingen te verkrijgen. Tenslotte worden in §3.3.3 de resultaten van de aanpassingen op de berekende slibconcentraties getoond.

3.1 Controle simulatie turbulentie

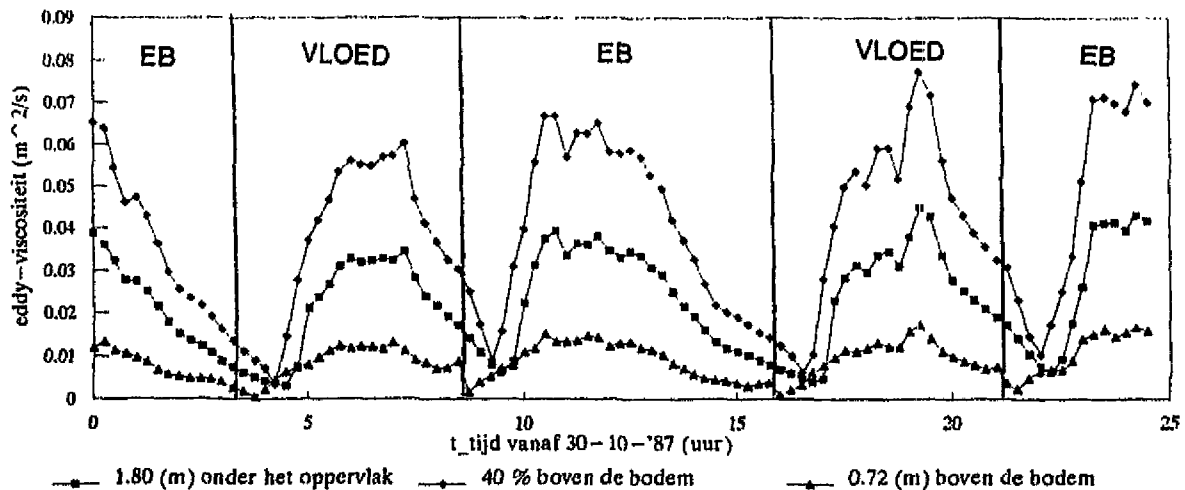
Zoals gezegd, wordt de turbulentie in het 1DV-model gesimuleerd door het $k-\epsilon$ model. Of het $k-\epsilon$ model een goede weergave geeft van de turbulentie is niet op een directe manier te controleren. Wel kan met de volgende formule, zie [6], geverifieerd worden of de orde van grootte van het gemiddelde van de maximale eddy-viscositeiten over de diepte juist is:

$$\nu_T = 0.067H\sqrt{g}\frac{\bar{u}}{Ch}$$

met H de waterhoogte die gemiddeld ± 18 meter is, $\bar{u} \approx 0.6$ de gemiddelde maximale snelheid, g de gravitatieconstante en $Ch=50$ de Chézy-waarde. Met deze waarden komt dat neer op een gemiddelde eddy-viscositeit van ongeveer $0.045 \frac{m^2}{s}$. De berekende eddy-viscositeit van het 1DV-model van de drie bekende lagen is te zien in figuur 3.1. Uit de grafiek valt op te maken dat de berekende gemiddelde maximale eddy-viscositeit van het $k-\epsilon$ model dicht in de buurt ligt van de waarde $0.045 \frac{m^2}{s}$. De orde van grootte van de eddy-viscositeit is dus juist.

Nu is het $k-\epsilon$ model via de eddy-viscositeit ν_T verantwoordelijk voor het stroomsnelheidsprofiel (de grootte van de van de gemiddelde stroomsnelheid over de diepte wordt

Figuur 3.1: Eddy-viscositeit bij verdeling waterkolom in 50 equivalente lagen



opgelegd door de in te voeren gemiddelde stroomsnelheid). Daarnaast zijn in '88 op zes verschillende hoogtes stroomsnelheidsmetingen gedaan door de meetdienst van de Directie Zeeland op de locatie te Middelgat. Door de daarmee te verkrijgen stroomsnelheidsprofielen te vergelijken met berekende stroomsnelheidsprofielen kan op een indirecte manier de werking van het $k-\epsilon$ model gecontroleerd worden.

Van de gemeten stroomsnelheden zijn twee soorten grafieken gemaakt. In de één staat de snelheid uitgezet tegen de hoogte en in de ander is voor de verschillende hoogtes de snelheid uitgezet tegen de tijd (zie bijlage D voor de grafieken van één van de meetsessies en meer over de stroomsnelheidsmetingen zelf). Uit de grafieken van de stroomsnelheid tegen de tijd is de tijdsduur¹ van de twee stroomkenteringen bepaald. De stroomkentering van eb naar vloed bleek onderin de waterkolom, net boven de bodem, te beginnen en grofweg 49 ± 11 minuten later bovenin de waterkolom te eindigen². Terwijl bij de stroomkentering van vloed naar eb de stroomkentering bovenin begint en grofweg 9 ± 5 minuten later bij de bodem eindigt. Dit staat in schril contrast ten opzichte van de stroomkenteringen in het 1DV-model, daar beginnen beide stroomkenteringen onderin de waterkolom en eindigen ongeveer 1-5 minuten later bovenin de waterkolom. In de grafiek van de gemeten slibconcentraties, zie figuur 2.3, is te zien dat de slibconcentraties rond beide kenteringen beduidend verschillend zijn. Het lijkt goed mogelijk dat het verschil tussen de beide stroomkenteringen hier grotendeels verantwoordelijk voor is. Als dit zo is, dan zal voor het goed kunnen simuleren van de slibconcentraties rond de kenteringen, het 1DV-model aangepast dienen te worden.

Daarnaast is in de grafieken waar voor verschillende hoogtes de stroomsnelheid is uitgezet tegen de tijd goed te zien dat het profiel van de stroomsnelheid voor eb beduidend

¹De tijdsduur dat de stroomsnelheid over de gehele diepte gekenterd/omgedraait is

²Dit geeft een verklaring voor het feit dat in de gemeten slibconcentraties van het onderste meetpunt, de slibpiek direct na deze kentering kan beginnen voordat de snelheid op 1.50 onder het wateroppervlak nul is geweest.

anders is dan voor vloed. Dit terwijl in het 1DV-model voor eb en voor vloed hetzelfde profiel voor de stroomsnelheid wordt gegenereerd. De stroomkenteringen en maximum stroomsnelheidsprofielen zoals ze uit de metingen van de meetdienst volgen zijn schetsmatig weergegeven in figuur 3.2. In figuur 3.3 is hetzelfde gedaan voor het 1DV-model. Wat de invloed is van de verschillen in de gemeten stroomsnelheidsprofielen op de hoogte van de slibconcentraties is niet bekend. Gezien de grote verschillen tussen de gemeten slibconcentraties van eb en van vloed, bestaat het vermoeden dat deze invloed niet te verwaarlozen is. Wat de oorzaken van de verschillen in de stroomsnelheidsprofielen zijn is niet bekend. Naar alle waarschijnlijkheid heeft het veel te maken met de toevoer van het zoete water van de Zeeschelde. Zij dit zo dan is er sprake van een externe kracht/invloed. Duidelijk is wel dat de simulatie van de stroomsnelheid over de verticaal grote afwijkingen vertoont. Blijft over de vraag in hoeverre het $k-\epsilon$ model hiervoor verantwoordelijk is.

Conclusie:

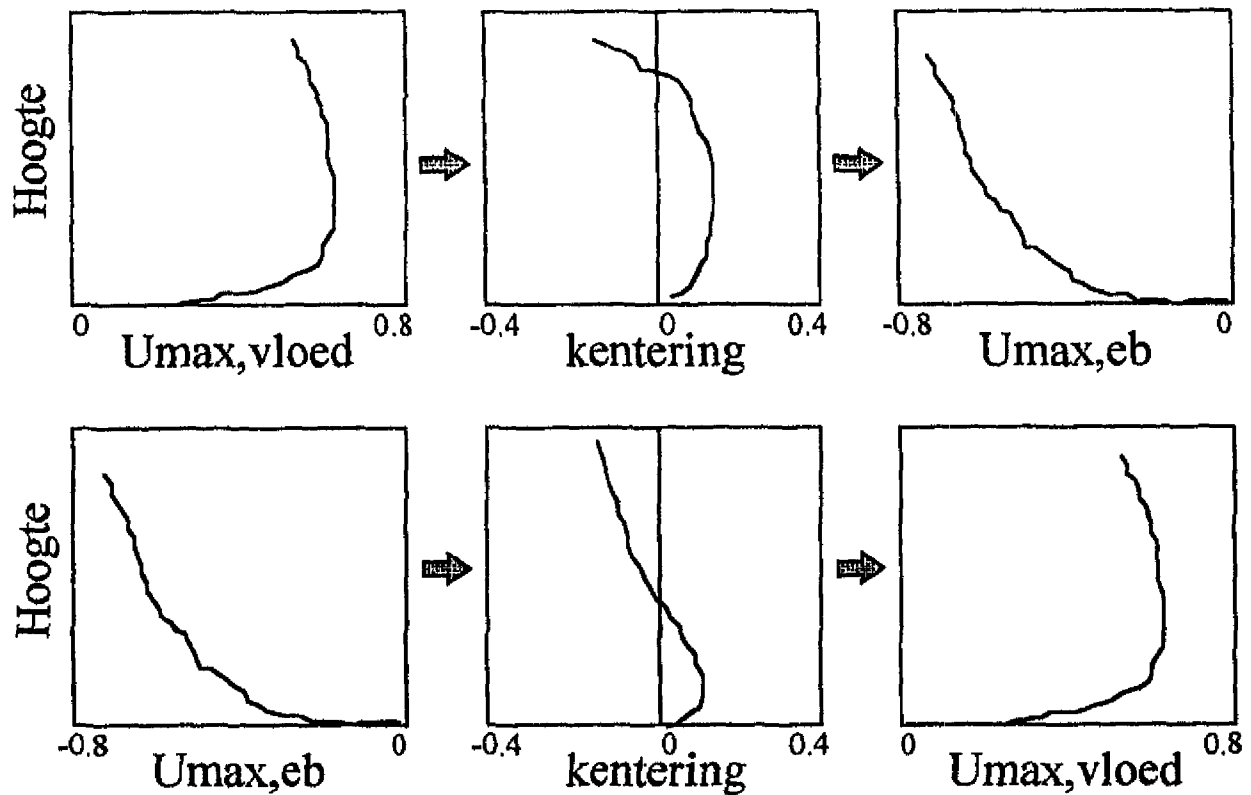
De orde van grootte van de eddy-viscositeit ν_T is juist. Verder is waargenomen dat de berekende stroomsnelheidsprofielen aanzienlijk afwijken van de gemeten stroomsnelheden, in hoeverre dit echter toegeschreven kan worden aan de simulatie van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model is niet duidelijk. Het is in ieder geval wel duidelijk geworden dat de invloed van de afwijkingen in de stroomsnelheidsprofielen op de hoogte slibconcentraties, vooral rond de kenteringen, niet te verwaarlozen is.

3.2 Gevoeligheidsanalyse

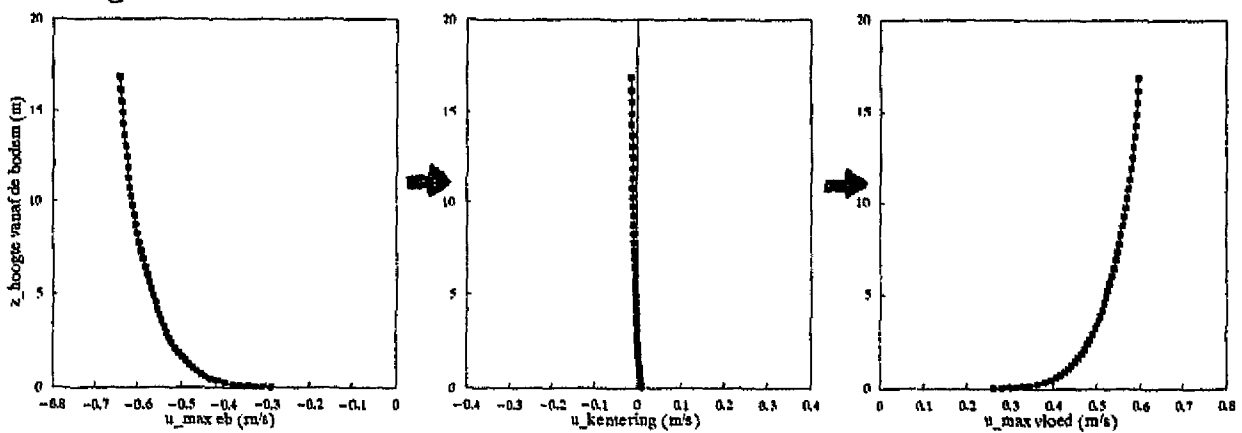
Om parameters te vinden waarvoor het model gevoelig is en waarmee met behulp van filtertechnieken ervoor gezorgd kan worden dat de berekende slibconcentraties de gemeten slibconcentraties zo goed mogelijk volgen, is een gevoeligheidsanalyse uitgevoerd. De waarden van de coëfficiënten van de vergelijkingen in bijlage A die niet in de invoerfile voor het 1DV-model staan, zijn door het Waterloopkundig Laboratorium bepaald op basis van literatuurgegevens. Deze waarden staan in (A.1m) en (A.1n) van dezelfde bijlage en zijn in de geleverde versies van het 1DV-model niet te veranderen. De waarden van de overige coëfficiënten en de invloed van de verandering hiervan op de grootte van de slibconcentraties en de vorm van de slibverdeling worden hieronder stuk voor stuk behandeld.

$z_o = 0.0095$ m De ruwheidshoogte van de bodem is z_o . Deze parameter is nodig voor de berekening van de schuifspanningssnelheid u_{*b} en de randvoorwaarde voor de bodem van het $k-\epsilon$ model, zie (A.1i) en (A.1j). De waarde van z_o ligt ergens tussen 0.0030 en 0.0207 meter. Voor het onderzoek is de waarde 0.0095 gebruikt omdat dit in de praktijk een veel gebruikte waarde is. De grootte van z_o is van belang voor de grootte van de turbulentie bij de bodem en is zo op een indirecte manier van belang voor de opwerveling en verspreiding van slib over de verticaal. De waarde van deze grootheid is afhankelijk van het materiaal waaruit de bovenste laag van de

Figuur 3.2: Schets van de gemeten stroomsnelheidsprofielen van eb, vloed en kentering



Figuur 3.3: Door het 1DV-model berekende stroomsnelheidsprofielen van eb, vloed en kentering



bodem bestaat en het reliëf van de bodem. De waarde van z_0 is groot voor grof zand en klein voor fijn slib. Gedurende een getij erodeert en sedimenteert er sediment van verschillende diameters. Zo bestaat het idee dat de bodem rond de kentering uit twee lagen bestaat, namelijk een dunne laag met fijn slib dat snel erodeert en daaronder een laag van slib vermengd met zand. De tweede laag is ruwer, daarnaast kan het reliëf variëren met de stroomsnelheid. Dit alles heeft tot gevolg dat de waarde van z_0 gedurende een getij varieert. Om de gevoeligheid van het model voor de waarde van deze grootte te testen zijn de uitersten van het bereik ingevuld met als resultaat de figuren 3.4 en 3.5. Te zien is dat de hoogten van de slibconcentraties van beide figuren duidelijk van elkaar verschillen. Tevens verdwijnt de piek na de stroomkentering omdat bij een kleine z_0 het slib rond de kentering alle gelegenheid krijgt om geheel uit de waterkolom te verdwijnen. Afgezien van het laatste verandert de vorm van de grafiek nauwelijks en blijft de diffusie van het slib over de verticaal hetzelfde.

Conclusie:

Het model blijkt gevoelig te zijn voor veranderingen in z_0 . Bovendien bestaat het vermoeden dat de waarde van z_0 gedurende een getij varieert.

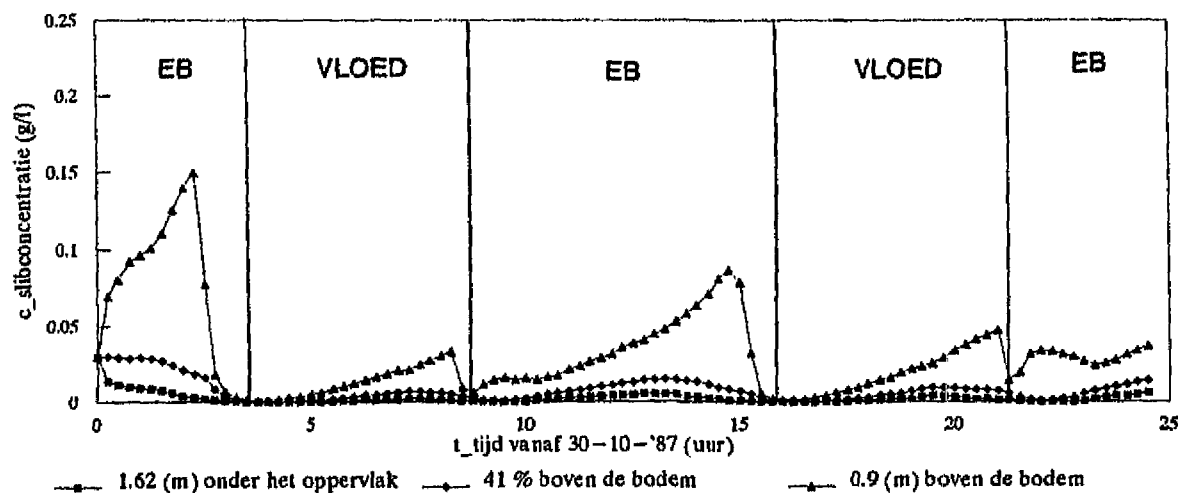
$\sigma_T = 0.7$ Het Prandtl-Schmidt nummer σ_T , geeft aan in hoeverre een stof met water meebeweegt. In [4] wordt een zwakke afhankelijkheid gevonden van de grootte van σ_T ten opzichte van de grootte van het sediment. Met als gevolg dat de waarde van σ_T licht varieert rond de waarde 0.7. Om te zien of deze variatie van belang zou kunnen zijn voor de grootte van de slibconcentraties zijn voor σ_T verschillende waarden ingevoerd variërend van 0.6-0.8. Het resultaat waren minieme verschillen in de berekende slibconcentraties.

Conclusie:

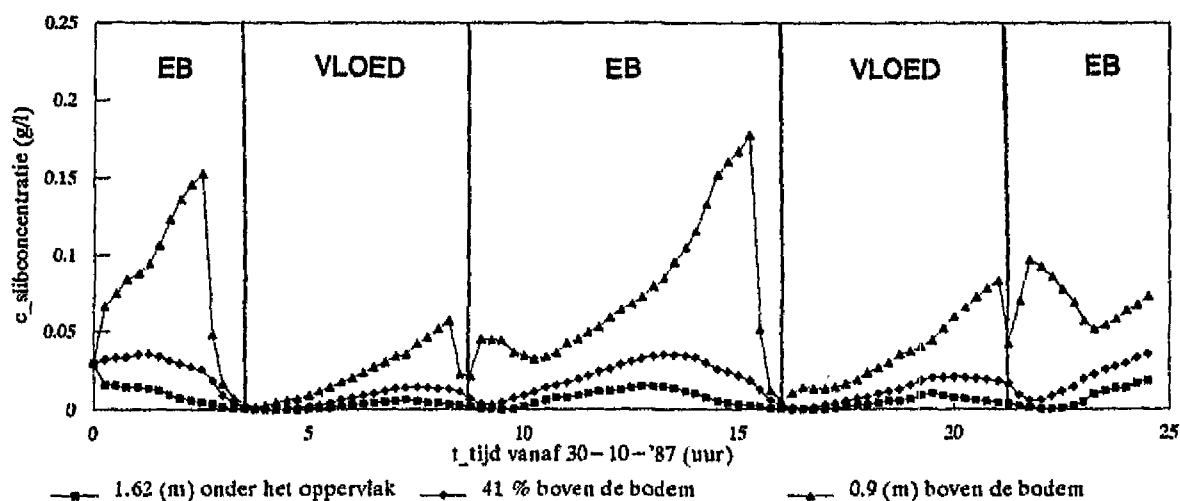
Het model is niet gevoelig voor veranderingen van σ_T . Het constant nemen van σ_T lijkt zodoende gerechtvaardigd.

$w_s = 0.0075 \frac{m}{s}$ De valsnelheid van slib w_s , wordt gebruikt in de slibvergelijking en in de bijbehorende randvoorwaarden, zie (2.6), (2.8) en (2.9). Als waarde is gekozen voor $0.0075 \frac{m}{s}$, omdat deze waarde het beste resultaat opleverde bij het afstellen van het 1DV-model. Ter vergelijking, in het verslag van S.J.C. Konings [11] waren de resultaten van het model het best bij een valsnelheid van $1 * 10^{-2} \frac{m}{s}$. De grootte van de valsnelheid van slib is in de praktijk een moeilijk te meten grootte. Door zout en organisch materiaal gaan slibdelen aan elkaar kleven, het flocculatieproces. Met als gevolg dat de valsnelheid toeneemt. Maar met het groter worden van de vlokken neemt ook de breekbaarheid ervan toe. De turbulentie levert krachten om die vlokken te kunnen breken. Aan de andere kant zorgt de turbulentie voor een groter aantal botsingen tussen de slibdeeltjes, wat het flocculatieproces weer bevordert. Omdat de turbulentie over de gehele waterkolom verschillend is en met de tijd varieert zal de grootte van de flokken en daarmee de valsnelheid ook van de tijd en de hoogte afhankelijk zijn. Blijft over de vraag of de verschillen in de valsnelheid in tijd en hoogte van wezenlijk belang zijn of dat volstaan kan worden

Figuur 3.4: *Berekende slibconcentraties bij $z_o = 0.0030$*



Figuur 3.5: *Berekende slibconcentraties bij $z_o = 0.0207$*



met één waarde. Om dit te bepalen is een bereik nodig waarin verwacht wordt dat de valsnelheid ligt. Echter eenvoudig is dit niet omdat de valsnelheid van zoveel factoren afhangt. Daarnaast is de valsnelheid moeilijk te meten. Pas recent zijn bruikbare meetmethoden ontworpen (o.a. onderwaterkamera's) waarmee reële (veel hogere) valssnelheden van slib gemeten kunnen worden. Zo wordt in het proefschrift van van Leussen [13] gevonden dat: $0.5 \leq w_s \leq 2.0 \cdot 10^{-3}$. Dit is een wel erg groot bereik. Daarom is ervoor gekozen om w_s te laten variëren van 0.00375-0.01500. Het resultaat, zie grafiek 3.6 en 3.7, is een groot verschil in de grootte van de slibconcentraties.

Conclusie:

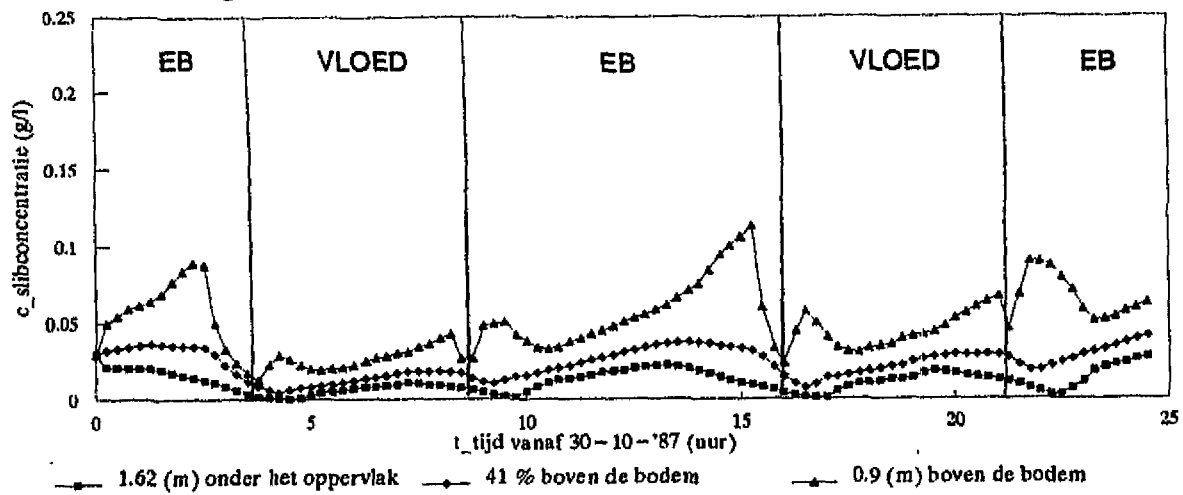
Het model is gevoelig voor veranderingen in de valsnelheid. Bovendien is in meerdere onderzoeken aangetoond dat de valsnelheid afhankelijk is van de hoogte en de tijd. Het constant nemen van de valsnelheid lijkt daarom niet gerechtvaardigd.

$\tau_e = 0.12 \frac{N}{m^2}$, $\tau_d = 0.07 \frac{N}{m^2}$, $M = 2.5 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m^2s}$. Deze coëfficiënten staan in de formules van Krone en Partheniades, zie (2.3) en (2.4). Deze formules zijn van belang voor de erosie en sedimentatie van slib en worden ingevoerd in de bodemrandvoorwaarde van de slibvergelijking, (2.9). Zo gauw de bodemschuifspanning τ_b boven de waarde van τ_e uitkomt vindt er erosie van slib plaats en zo gauw τ_b onder de waarde van τ_d komt sedimenteert er slib uit de waterkolom. Daarnaast is M de erosieparameter, waarmee de hoeveelheid slib die per seconde erodeert, in het geval dat $\tau_b \geq \tau_e$, lineair omhoog kan worden geschroefd. De waarden van τ_d en τ_e bepalen de grootte van het tijdsinterval dat er erosie optreedt en de grootte van het tijdsinterval rond de kentering dat er slib uit de waterkolom sedimenteert. τ_e en τ_d bepalen daarmee de hoeveelheid slib die zich gedurende het getij in de waterkolom bevindt.

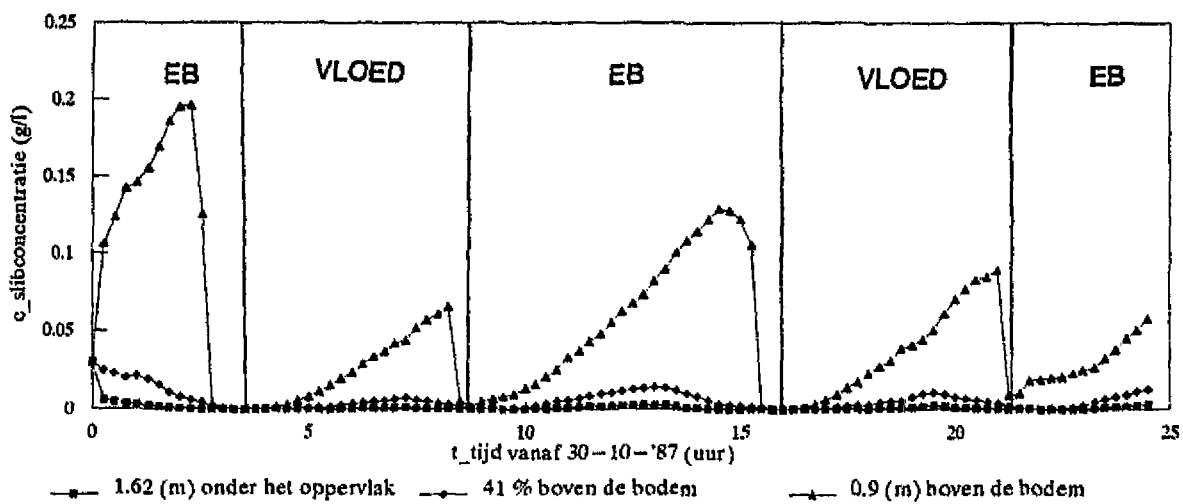
In het verslag van S.J.C. Konings [11] zijn schattingen gemaakt van de coëfficiënten. Daarin werd geconcludeerd dat $0.08 \leq \tau_e \leq 0.17$ en $0.06 \leq \tau_d \leq 0.08$. Daarnaast werd voor de waarde van M gevonden dat deze tussen $2 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3}$ moest liggen. Bij deze orde van grootte van M werden de berekende slibconcentraties, voor de locatie te Middelgat, echter veel te groot. Bij het handmatig afregelen van het 1DV-model bleek dat bij $M = 2.5 \cdot 10^{-6}$ de slibconcentraties in de juiste orde van grootte lagen. Om de gevolgen van veranderingen in τ_e en τ_d te testen zijn hun waarden één voor één binnen de zojuist gegeven bereiken gevarieerd. Het bereik van τ_d is zodanig klein dat de verschillende waarden slechts kleine verschillen teweeg brengen. Bij τ_e is dit anders, tussen de grafieken van beide uitersten zit een groot verschil, zie figuur 3.8 en 3.9.

Wordt de grafiek van de gemeten slibconcentraties nader bestudeerd, dan lijkt er slechts af en toe erosie op te treden. Daarnaast bestaat, zoals reeds eerder gezegd, het vermoeden dat rond de kentering de bodem uit twee lagen bestaat. Klopt dat vermoeden dan is er voor het eroderen van de tweede laag meer kracht nodig dan voor de eerste. Dit zou twee verschillende waarden voor τ_e inhouden en een eindige eerste laag. Dit terwijl in het 1DV-model er van één waarde voor τ_e wordt uitgegaan. Bovendien wordt er in het model verondersteld dat de te eroderen laag oneindig is.

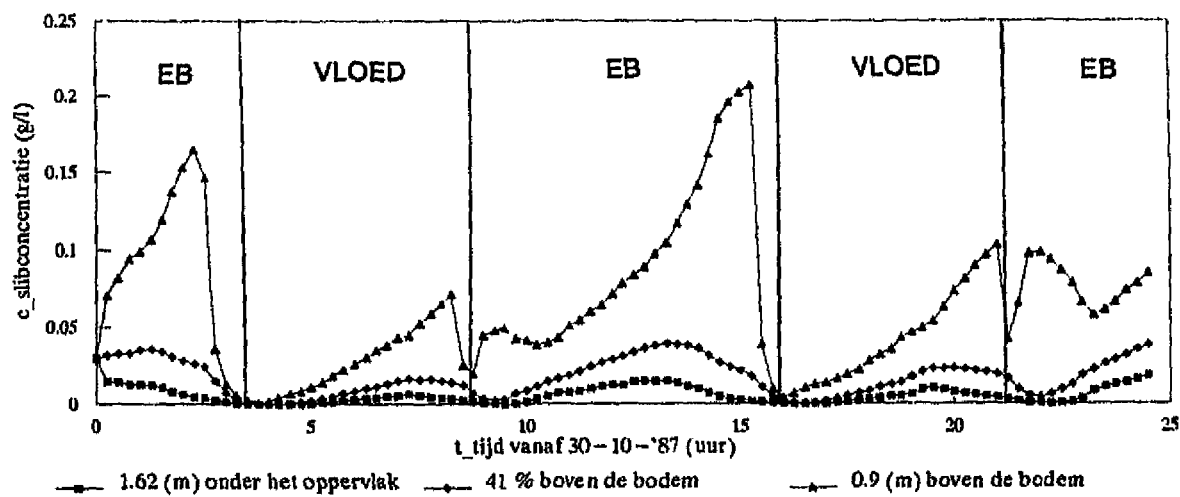
Figuur 3.6: *Berekende slibconcentraties bij $w_s = 0.00375$*



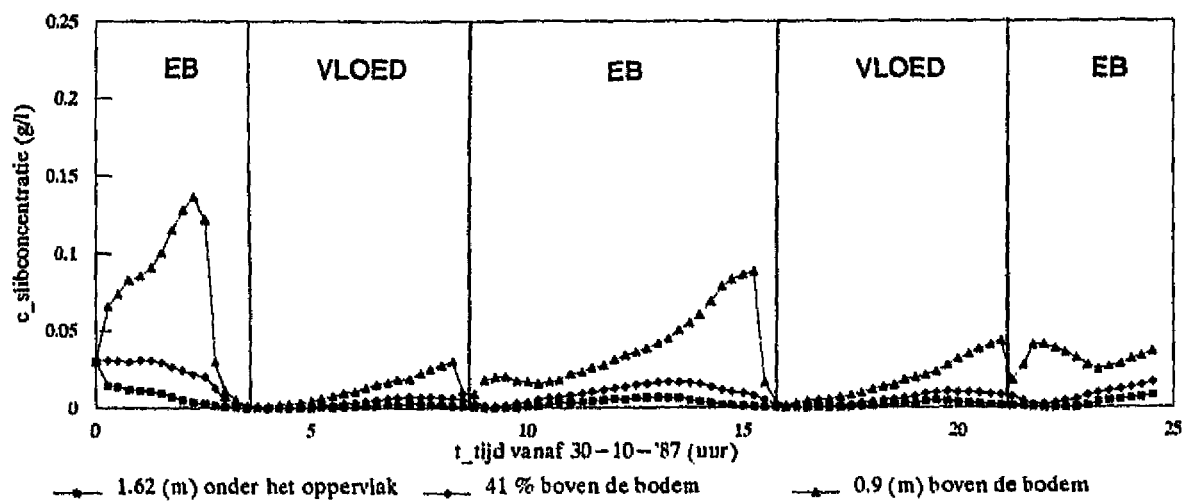
Figuur 3.7: *Berekende slibconcentraties bij $w_s = 0.01500$*



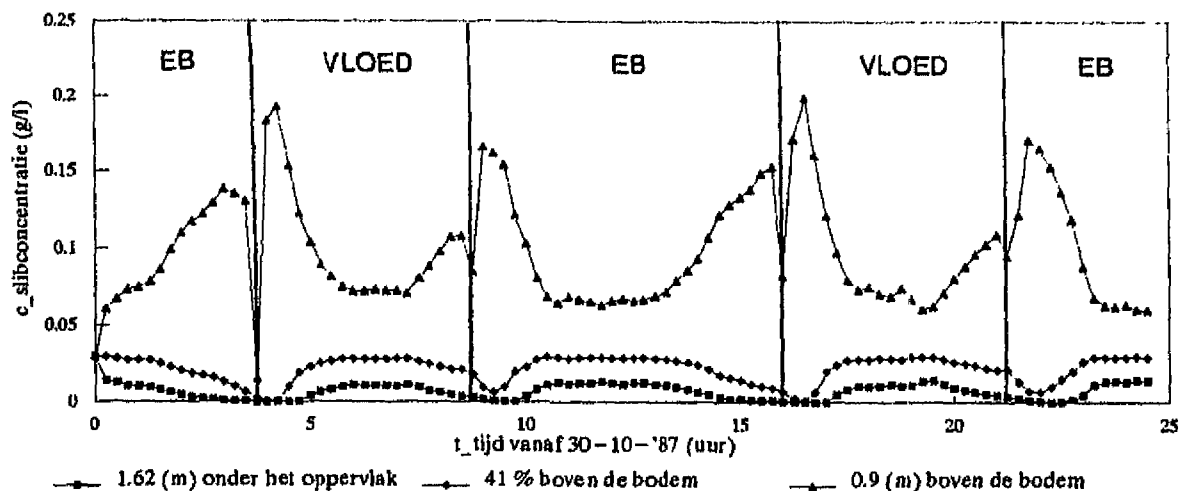
Figuur 3.8: Berekende slibconcentraties bij $\tau_e = 0.08$



Figuur 3.9: Berekende slibconcentraties bij $\tau_e = 0.17$



Figuur 3.10: Berekende slibconcentraties bij dichte bodem ($\tau_d = 0.0001$ en $\tau_e = 1000$)



Om te zien wat er gebeurt als er helemaal geen erosie en sedimentatie plaatsvindt, is de onderkant van de waterkolom dichtgeplakt ($\tau_e = 1000$ en $\tau_d = 0.0001$). De hoeveelheid slib die als beginconcentratie in de waterkolom is gebracht blijft zodoende constant. Bij een beginconcentratie van 0.03 g/l levert dit de grafiek in figuur 3.10. De vorm van de grafiek is aanzienlijk veranderd en lijkt daarmee meer op die van de gemeten slibconcentraties. In het midden tussen de twee kenteringen in nemen de slibconcentraties niet meer toe. Daarnaast is nu na beide kenteringen een steile piek te zien. In de gemeten slibconcentraties is deze piek na de kentering van eb naar vloed ook te zien.

Conclusie:

Het erosie- en sedimentatieproces is van groot belang voor het 1DV-model. De simulatie hiervan door de formules van Krone en Partheniades laat te wensen over.

Concentratie zout = 10 ‰, temperatuur = 5 °C Door het bijeenkomen van zoet rivierwater en zout zeewater kan zoutstratificatie (gelaagdheid) optreden. Het gevolg is dat de mate van turbulentie minder wordt omdat het meer moeite heeft om door die lagen heen te breken. Bovendien treedt bij het bijeenkomen van zout met zoet water sterke vlokvorming op. Voor de temperatuur geldt dat bij lagere temperaturen de biologische processen worden afgeremd. Het gevolg daarvan is dat de mate van vlokvorming afneemt.

Door het meetpunt 'De Zeekat' is zoals gezegd naast de slibconcentratie ook het chloridegehalte en de temperatuur gemeten. In het rapport van C.Storm en I.C.M. Helsloot [17] zijn de chloride gehalten en de temperatuur voor de meetlocatie te Middelgat in grafieken van de hoogte tegen de tijd weergegeven. In de grafieken met het zoutgehalte is naar de bodem toe een kleine geleidelijke toename van het zoutgehalte te zien. Blijkbaar wordt als gevolg van de grote variatie in de geometrie van het estuarium, het zoute zeewater goed gemengd met het zoete rivierwater

van de Zeeschelde. Van zoutstratificatie lijkt zodoende geen sprake te zijn. In de grafieken van de temperatuur is een geleidelijke afname naar de bodem toe te zien.

Bij het draaien van het 1DV-model met de gemeten toename van zoutconcentraties was een uur lang een lichte verandering zichtbaar. Maar na dat uur werd de 'oude' grafiek weer gevolgd. De oorzaak hiervan was dat de zoutconcentraties ondertussen over de gehele diepte naar dezelfde waarden waren geconvergeerd. Het resultaat van het invoeren van een afnemende temperatuur had hetzelfde resultaat. In beide gevallen zou er continu energie aan het systeem moeten worden toegevoerd om de gelaagdheid in stand te kunnen houden.

Conclusie:

De invloed van variaties in de temperatuur en de zoutconcentratie op de hoogte van de slibconcentraties is niet duidelijk geworden, vanwege het vrij snel over de diepte convergeren van de temperatuur en de zoutconcentratie naar een constante waarde. Vanwege de goede menging in het estuarium is het de verwachting dat de invloed van deze parameters op de hoogte van de slibconcentraties gering is.

Beginconcentratie slib = 0.03 % Voor de beginconcentratie is voor alle lagen dezelfde waarde genomen. Het naar de bodem verschillend zijn van de beginconcentraties is niet van belang omdat de invloed van deze beginconcentraties na de eerste kentering bijna niet meer zichtbaar zijn. Dit geldt zolang de beginconcentraties de gebruikte orde van grootte hebben. Wordt het erosie en sedimentatieproces echter uitgeschaald dan is de waarde van de beginconcentratie van belang voor de hoeveelheid slib die zich gedurende het runnen van het 1DV-model in de waterkolom bevindt.

Conclusie:

Als de beginwaardes van de slibconcentraties in de juiste orde van grootte liggen dan is de invloed van de beginconcentraties na de eerste stroomkentering zo goed als uitgewerkt. Wordt de bodem dichtgegooid, dat wil zeggen geen erosie en sedimentatie, dan bepaalt de grootte van de beginconcentratie de nu constante hoeveelheid slib in de waterkolom.

TSWIND = 0.00 Dit is de windschuifspanning. Hiervan is bekend dat de invloed hooguit merkbaar is tot enkele meters in de diepte. De invloed van TSWIND op de gemeten slibconcentraties is daarom niet onderzocht.

ZS = 0.01 Dit is de ruwheidshoogte van het wateroppervlak. Om dezelfde reden als hiervoor is de invloed van deze coëfficiënt niet onderzocht.

3.3 Aanpassingen

In het gevoeligheidsonderzoek van het 1DV-model komen een aantal parameters naar voren waarvan het twijfelachtig is of het wel constanten zijn. Dit zijn de volgende parameters:

- De ruwheidshoogte z_o
- De valsnelheid w_s

Daarnaast zijn er twee fysische processen waarvan de simulatie niet naar tevredenheid is, dit zijn:

- De simulatie van het erosie en sedimentatieproces door de formules van Krone en Partheniades.
- Het simuleren van de stroomsnelheidsprofielen, waarschijnlijk voor een gedeelte het gevolg van afwijkende simulaties van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model.

3.3.1 Mogelijke aanpassingen

Zoals gebleken is, zijn de uitkomsten van het 1DV-model niet naar tevredenheid. Om te zorgen dat filtertechnieken straks zinvol zullen zijn, zal het 1DV-model aangepast moeten worden. Blijft over de vraag welke verbeteringen er mogelijk zijn voor het 1DV-model. Hieronder volgen een aantal mogelijke verbeteringen en/of parameters die mogelijk geschat kunnen worden met behulp van filtertechnieken:

De ruwheidshoogte z_o Het idee dat de ruwheidshoogte niet constant is, is niet nieuw. Voor zover bekend zijn er echter nog geen formules gevonden die de grootte van z_o beter weergeven. Omdat het systeem gevoelig is voor veranderingen van deze parameter zou het van belang kunnen zijn om door middel van filtertechnieken de waarde ervan te schatten, zodat de berekende slibconcentraties beter in de buurt komen van de gemeten slibconcentraties. De vraag is of dat mogelijk is. Zoals gezegd is de ruwheidshoogte van de bodem z_o in het 1DV-model van belang voor het berekenen van de randvoorwaarde van het $k-\epsilon$ model en de schuifspanningssnelheid, zie (A.1k). Het gevolg hiervan is dat z_o slechts indirect via de eddy-difusiteit Γ_T in de slibvergelijking te voorschijn komt. Hierdoor is het moeilijk dan wel onmogelijk om met behulp van filtertechnieken de waarde van z_o te gaan schatten.

De valsnelheid w_s Voor de valsnelheid w_s zijn meerdere formules bedacht. De meest recente en bekendste formule is die van W. van Leussen. In zijn proefschrift [13] komt hij tot de volgende formule:

$$w_s = w_0 c^{m_L} \frac{1 + aG}{1 + bG^2} \quad (3.1)$$

Hierin zijn a, b, w_0 en m_L empirische constanten en is G de absolute snelheidsgradiënt G die gedefinieerd wordt door:

$$G = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu_T}}$$

met ϵ de energie dissipatie en ν_T de moleculaire viscositeit. De vorm van de formule is zo gekozen, dat de teller rekening houdt met de invloed van zwakke turbulentie op het aantal botsingen van slibdeeltjes, die het flocculatieproces bevorderen. De noemer daarentegen representeert de invloed van het opbreken van vlokken door de turbulentie. De waarden van de empirische constanten in de formule zijn van meerdere factoren afhankelijk en dienen zodoende voor iedere locatie in een estuarium apart bepaald te worden. Terwijl het onderzoek liep werd een fax ontvangen van A. Malcherak, hierin werd gemeld dat er goede resultaten waren bereikt met de formule van 'van Leussen'. Deze resultaten waren bereikt voor een geschematiseerd Weser Estuarium met de volgende waarden voor de empirische constanten:

$$w_0 = 0.2 \quad , \quad a = 0.3 \quad , \quad b = 0.03 \quad \text{en} \quad m = 0.47 \quad (3.2)$$

Het schatten van de waarden van deze empirische constanten zou gedaan kunnen worden met behulp van filtertechnieken.

Sedimentatie/Erosie Uit de gemeten slibconcentraties wordt het vermoeden verkregen dat de erosie, sedimentatie dan wel de advectie³, over een getij sterk wisselen. Om deze invloeden onder controle te krijgen en om andere fysische processen, zoals de valsnelheid, beter te kunnen beschouwen zou de waarde van $D - E$ geschat kunnen worden. In de waarde van deze schatting vang je de erosie en sedimentatie en hoogstwaarschijnlijk ook de advectie van slib op.

Stroomsnelheidsprofielen Het verschil in de stroomsnelheidsprofielen heeft vermoedelijk veel te maken met dichtheidsverschillen als gevolg van de toevoer van het zoete rivierwater van de Zeeschelde. Voor het veranderen van de te berekenen stroomsnelheidsprofielen in het 1DV-model zijn helaas geen oplossingen voor handen. Vooral rond de kenteringen zal dit problemen op kunnen leveren bij het filteren van de slibconcentraties. Mochten de resultaten van het onderzoek niet naar wens zijn dan is dit een punt waar nadere aandacht aan geschonken kan worden.

Dichtheidsterugkoppeling Tijdens een bespreking met het Waterloopkundig Laboratorium (WL) kwam een nog niet meegenomen fysisch verschijnsel ter sprake. Het concept is dat als er meer slib in omloop komt, er meer energie nodig is voor de erosie van slib. Met andere woorden: hoe meer slib er in omloop is, hoe meer de turbulentie in de waterkolom wordt tegengewerkt. Het WL heeft dit proces onderzocht en het in het 1DV-model verwerkt door middel van de volgende dichtheidsterugkoppeling:

$$\rho(S, \theta, c_k) = \rho_w(S, \theta) + \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{\rho_w(S, \theta)}{\rho_{s,i}} \right) c_i \quad (3.3)$$

met 'n' het aantal sedimenten dat er gesimuleerd wordt, $\rho_{s,i}$ de dichtheid van het betreffende sediment en $\rho_w(S, \theta)$ de dichtheid van natuurlijk water zonder sediment

³De hoeveelheid slib die de waterkolom binnenkomt min de de hoeveelheid die de waterkolom verlaat

maar afhankelijk van de zoutconcentratie S en de temperatuur θ . De dichtheidsterugkoppeling is dus tevens afhankelijk van de concentraties van de sedimenten die naast de slibconcentratie berekend worden. Met deze dichtheidsterugkoppeling werden door het WL beduidend andere, soms niet te verklaren, slibconcentraties verkregen.

3.3.2 Gemaakte aanpassingen

Besloten is om voor de valsnelheid de formule van 'van Leussen' (3.1) in te voeren. De waarden van de empirische constanten a , b , w_o en m in deze formule dienen in de invoerfile te worden opgegeven. Daarnaast is er een flag in de invoerfile ingebouwd waarmee aangegeven kan worden of D-E uit de formules van Krone en Partheniades volgt of uit op te geven waarden. Tevens is er een flag ingebouwd waarmee aangegeven kan worden of er dichtheidsterugkoppeling moet plaatsvinden of niet. Daarnaast is ervoor gekozen om de coëfficiënt w_o en de variabele $D - E$ te gaan schatten met behulp van filtertechnieken. De ruwheidshoogte z_o wordt gelaten zoals die is. Tenslotte is het mogelijk gemaakt om door te starten, dit is nodig om te kunnen filteren. Dat wil zeggen dat het 1DV-model bijvoorbeeld voor 4 minuten de waarden van de parameters moet kunnen berekenen. Vervolgens moet het mogelijk zijn dat na aanpassing van de invoerfile het 1DV-model weer gerund kan worden vanaf het tijdstip waar zojuist gestopt is. Daarvoor dienen voor de beginwaarden van de variabelen c , ν_T etc. de laatst berekende waarden genomen te worden. Dit was eerst niet mogelijk gezien het feit dat bij het starten van het oude 1DV-model er een beginprofiel werd gemaakt voor de stroomsnelheid, de energie dissipatie ϵ en de turbulente energie k .

3.3.3 Resultaten aanpassingen

Tot slot van dit hoofdstuk worden de resultaten van de aanpassingen van het 1DV-model weergegeven. Verder is er een correctie op de meethoogte ingevoerd. Het was namelijk bekend geworden dat het onderste meetpunt niet op 1 meter boven de bodem hing maar op 2.25-2.75 meter boven de bodem. In plaats van laag 48 wordt in het vervolg de slibconcentratie van laag 44 afgedrukt, deze laag komt overeen met een hoogte van ongeveer 2.34 meter boven de bodem. Hieronder worden de belangrijkste waarden herhaald waarmee de tot nu toe beste resultaten zijn bereikt.

Figuur 2.4, erosie en sedimentatie berekend met de formules van Krone en partheniades:

$$z_o = 0.0095, \bar{z}_o = 0.03, w_s = 0.0075, M = 0.0000025, \tau_e = 0.12, \tau_d = 0.07 \quad (3.4)$$

Figuur 3.10, geen erosie en sedimentatie

$$z_o = 0.0095, \bar{z}_o = 0.03, w_s = 0.0075, D - E = 0 \quad (3.5)$$

Deze waarden zijn gebruikt als uitgangspunt voor de rest van de paragraaf.

Resultaat aanpassing af te drukken lagen Door deze wijziging is de slibconcentratie van het onderste meetpunt drastisch omlaag gegaan. Als gevolg daarvan is het model opnieuw afgesteld. Het beste resultaat werd vervolgens bereikt met de volgende aanpassingen van de op te geven waarden:

$$\varepsilon_0 = 0.06, w_0 = 0.0025, a = 0, b = 0, m = 0 \quad (3.6)$$

De waarden van a, b en m zijn gelijk aan nul genomen zodat de verbetering door de aanpassing van de meethoogte zichtbaar wordt. Als de erosie en sedimentatie berekend worden volgens Krone en Partheniades dan wordt grafiek 1 van figuur 3.11 verkregen. Wordt de erosie en sedimentatie gelijk aan nul genomen dan wordt grafiek 1 van figuur 3.12 verkregen. Wat in beide grafieken opvalt is dat rond de kentering de slibgehalten niet meer tot nul naderen. Tevens zijn de pieken van zowel voor als na de kentering van het onderste meetpunt een stuk kleiner. De grafieken lijken door deze aanpassingen reeds meer op de gemeten slibconcentraties, zie grafiek 4 van één van de figuren.

Valsnelheidsformule van 'van Leussen' In de formule staan vier onbekenden, te weten a, b, w_0 en m . Alleen van m is bekend dat de waarde ervan tussen 0.4 en 3 moet liggen, zie [13]. Van de andere coëfficiënten is niet bekend in welk bereik de waarden liggen, alleen dat met de waarden in (3.2) goede resultaten zijn bereikt. Daarom zijn die waarden als uitgangspunt genomen voor het handmatig vinden van het best lijkende resultaat. Met de volgende waarden werd handmatig het beste resultaat verkregen:

$$\varepsilon_0 = 0.06, w_0 = 0.0075, a = 0.3, b = 0.03, m = 0.47 \quad (3.7)$$

In het geval van Krone en Partheniades wordt dan grafiek 2 van figuur 3.11 verkregen. En in het geval $D - E = 0$ wordt dan grafiek 2 van figuur 3.12 verkregen. Ten opzichte van de eerste grafieken van beide figuren is er nauwelijks een verschil te zien.

Dichtheidsterugkoppeling Vervolgens is de dichtheidsterugkoppeling aangezet. Omdat c^m in de formule van 'van Leussen' hetzelfde fysische verschijnsel tracht te beschrijven is de waarde van m gelijk aan nul genomen. In het geval van Krone en Partheniades leverden de volgende waarden het beste resultaat op, zie grafiek 3 van figuur 3.11:

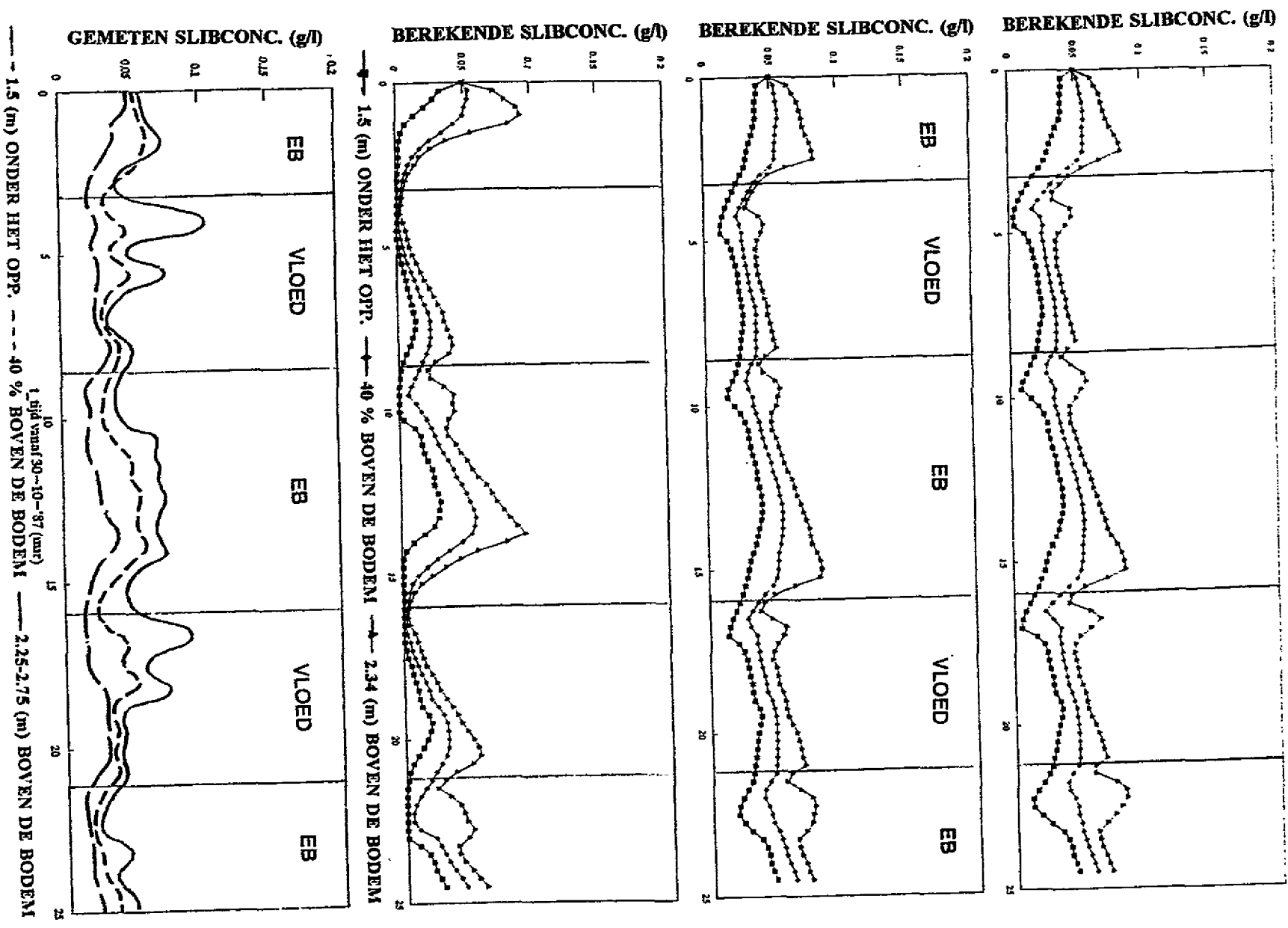
$$\varepsilon_0 = 0.06, w_0 = 0.0015, a = 0.3, b = 0.03, m = 0 \quad (3.8)$$

In het geval dat de erosie en sedimentatie nul is, leverden de volgende waarden het beste resultaat op, zie grafiek 3 van figuur 3.12:

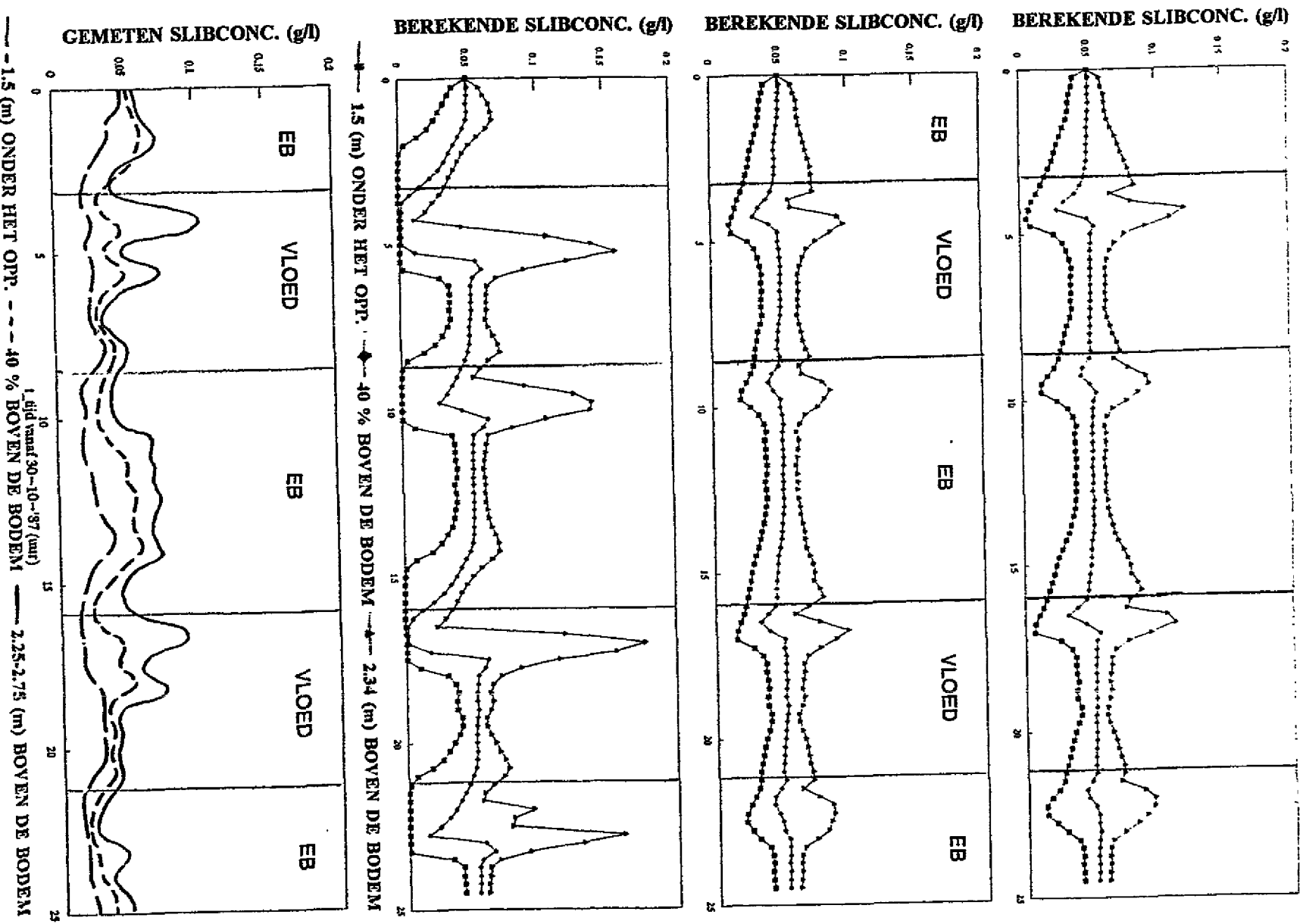
$$\varepsilon_0 = 0.06, w_0 = 0.0025, a = 0.3, b = 0.03, m = 0, M = 0.000005 \quad (3.9)$$

In beide grafieken zorgt de dichtheidterugkoppeling voor een verandering in de periodieke vorm van de berekende slibconcentraties. Bovendien neemt de duur van stroomkentering toe van 1-5 naar 5-20 minuten. Het resultaat wordt er echter er echter niet veel beter door.

Figuur 3.11: Erosie en sedim. volgens Kr. en Parth.; grafiek 1: Aanpassing meethoogte en (3.6), grafiek 2: 'van Leussen' en (3.7), grafiek 3: dichtheidsterugkoppeling en (3.8), grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentraties



Figuur 3.12: Erosie en sedim. is nul. Grafiek 1: Aanpassing meethoogte en (3.6), grafiek 2: 'van Leussen' en (3.7), grafiek 3: dichtheidsterugkoppeling en (3.9, grafiek 4: afvlakking gemeten slibconcentraties



Hoofdstuk 4

Discrete filter theorie

In dit hoofdstuk worden, voor een discreet niet-lineair systeem, de Extended Kalmanfiltervergelijkingen afgeleid. Van deze vergelijkingen wordt gebruik gemaakt in hoofdstuk 5 waar filtervergelijkingen voor het 1DV-model worden afgeleid ten behoeve van het schatten van de slibconcentraties en de parameters w_0 en $D - E$, in (3.1) respectievelijk (A.11). Voor de afleiding van de Extended Kalmanfiltervergelijkingen wordt gebruik gemaakt van het Kalmanfilter. Dit filter wordt gebruikt voor lineaire systemen. Daarom wordt in §4.2 het filteren van discrete lineaire systemen behandeld. Vervolgens wordt in §4.3 de niet-lineaire filtertheorie behandeld, met als resultaat de Extended Kalmanfiltervergelijkingen. Omdat de meetgegevens, in dit onderzoek de slibconcentraties, reeds bekend zijn is het mogelijk om te gaan smoothen. Dit houdt in dat voor een bepaald tijdstip schattingen van de toestand gemaakt kunnen worden aan de hand van de meetgegevens van voor dat tijdstip en van meetgegevens op latere tijdstippen. Hiermee kunnen naar alle waarschijnlijkheid betere schattingen verkregen worden. Bovendien vergroten de betere schattingen de stabiliteit van het filter. In dit rapport is nog geen gebruik gemaakt van smoothen. Omdat het van belang kan zijn voor een eventueel vervolg van het onderzoek wordt in §4.4 de theorie van het smoothen behandeld. De gebruikte filtertheorieën komen uit [1] en [2].

4.1 Definities

Symbol	Definitie	Dimensie
X	Symbool geschreven als hoofdletter is een matrix	
$\underline{X}$	Onderstreepte hoofdletter is stochastische vector variabele	
N	Aantal elementen in de toestand	
s	Aantal gemeten parameters	
r	Aantal systeemruiscomponenten	
$\underline{X}_n$	Toestand op $t = t_n$	$N * 1$
$\hat{\underline{X}}_{n n}$	Toestandsschatting op $t = t_n$ gegeven $\underline{Z}_n$	$N * 1$
$\hat{\underline{X}}_{n+1 n}$	Toestandsschatting op $t = t_{n+1}$ gegeven $\underline{Z}_n$	$N * 1$
$\underline{Z}_n$	Waarden gemeten parameters op $t = t_n$	$s * 1$
$P_{n n}$	Covariantiematrix van de fout in $\hat{\underline{X}}_{n n}$	$N * N$
$P_{n+1 n}$	Covariantiematrix van de fout in $\hat{\underline{X}}_{n+1 n}$	$N * N$
K_{n+1}	Kalmangainmatrix op $t = t_{n+1}$	$N * s$
F_n	Transpositiematrix van de toestand	$N * N$
G_n	Coëfficiëntenmatrix van de systeemruis	$N * r$
Q_{n+1}	Covariantiematrix van de systeemruis	$r * r$
M_n	Meetmatrix	$s * N$
R_{n+1}	Covariantiematrix van de meetruis	$s * s$

Tabel 4.1: Definities filtersymbolen

4.2 Lineaire filter theorie

In deze paragraaf worden de filtervergelijkingen afgeleid voor een eenvoudig lineair systeem, de Kalmanfiltervergelijkingen. Daar opvolgend wordt in §4.2.1 een beschrijving gegeven van het systeem waarop het Kalmanfilter van toepassing is. In §4.2.2 worden tenslotte de Kalmanfiltervergelijkingen afgeleid.

4.2.1 Systeembeschrijving

Gegeven zij het volgende stochastische lineaire systeem:

$$\underline{X}_{n+1} = F_n \underline{X}_n + G_n W_n \quad (4.1a)$$

$$\underline{Z}_n = M_n \underline{X}_n + V_n \quad (4.1b)$$

Met $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ witte Gaussische processen met verwachting 0. Verder wordt aangenomen dat $\underline{X}_0$, $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ onderling onafhankelijk zijn, dat $EW_n W_n' = Q(n)$, dat $EV_n V_n' = R(n)$ en dat $\underline{X}_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ een willekeurige witte Gaussische vector is.

4.2.2 Het Kalmanfilter

De eerste stap naar het discrete Kalmanfilter algoritme is de aanname dat de stochastische variabelen X , W en V in het model gaussisch zijn. Dit houdt in dat ze compleet gedefinieerd worden door twee parameters, te weten de verwachting en de variantie van de variabele. Deze aanname zorgt ervoor dat de filtervergelijkingen drastisch vereenvoudigd worden. De bedoeling is om de beste schatting $\hat{X}_{n+1|n}$ van X_{n+1} te bepalen aan de hand van de metingen die bekend zijn op tijdstip $t = t_{n+1}$, dit zijn de metingen Z_i , $0 \leq i \leq n$. Voor het bepalen van de algoritmestappen wordt ervan uitgegaan dat $\hat{X}_{n|n-1}$ en de bijbehorende variantie $P_{n|n-1}$ bekend zijn op dat moment. Daarnaast wordt bij de afleiding van de stappen gebruik gemaakt van de aannames die onder (4.1) staan. De eerste stap in het algoritme is dan de correctiestap $\hat{X}_{n|n}$.

$$\text{correctiestap: } \hat{X}_{n|n} = EX_n = \hat{X}_{n|n-1} + K_n(Z_n - M_n\hat{X}_{n|n-1}) \quad (4.2)$$

met variantie $P_{n|n}$:

$$\begin{aligned} P_{n|n} &= E(X_n - \hat{X}_{n|n})(X_n - \hat{X}_{n|n})' \\ &= E[X_n - \hat{X}_{n|n-1} - K_n(M_nX_n + V_n - M_n\hat{X}_{n|n-1})] \\ &\quad [X_n - \hat{X}_{n|n-1} - K_n(M_nX_n + V_n - M_n\hat{X}_{n|n-1})]' \\ &= [I_N - K_nM_n]E(X_n - \hat{X}_{n|n-1})(X_n - \hat{X}_{n|n-1})'[I_N - K_nM_n]' + K_nE(V_nV_n')K_n' \\ &= [I_N - K_nM_n]P_{n|n-1}[I_N - K_nM_n]' + K_nR_nK_n' \end{aligned} \quad (4.3)$$

en met Kalmangainmatrix K_n gelijk aan:

$$K_n = P_{n|n-1}M_n'[M_nP_{n|n-1}M_n' + R_n]^{-1} \quad (4.4)$$

Met behulp van de correctiestap en (4.1a), kan vervolgens de beste schatting van X_{n+1} bepaald worden. Dit wordt de voorspelstep genoemd.

$$\begin{aligned} \text{voorspelstep: } \hat{X}_{n+1|n} &= EX_{n+1} = E(F_nX_n + G_nW_n) = F_nEX_n + G_nEW_n \Rightarrow \\ &= F_n\hat{X}_{n|n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

met variantie $P_{n+1|n}$:

$$\begin{aligned} P_{n+1|n} &= E(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1|n})(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1|n})' \\ &= E(F_nX_n + G_nW_n - F_n\hat{X}_{n|n})(F_nX_n + G_nW_n - F_n\hat{X}_{n|n})' \\ &= E[F_n(X_n - \hat{X}_{n|n}) + G_nW_n][F_n(X_n - \hat{X}_{n|n}) + G_nW_n]' \\ &= F_nE(X_n - \hat{X}_{n|n})F_n' + G_nE(W_nW_n')G_n' \\ &= F_nP_{n|n}F_n' + G_nQ_nG_n' \end{aligned} \quad (4.6)$$

Met de correctiestap en de voorspelstep kan zo aan de hand van $\hat{X}_{n|n-1}$, $P_{n|n-1}$ en Z_n de beste schatting $\hat{X}_{n+1|n}$ van X_{n+1} bepaald worden. Om het algoritme te kunnen starten zijn beginwaarden voor $P_{0|-1}$ en $\hat{X}_{0|-1}$ nodig op starttijd $t = t_0$:

$$\hat{X}_{0|-1} = \bar{x}_0, \quad P_{0|-1} = \bar{P}_0 \quad (4.7)$$

De waarden van $\bar{P}_0$ en $\bar{x}_0$ zijn slechts zelden bekend en zullen zodoende zo goed mogelijk geschat moeten worden. Hiermee is het algoritme ter bepaling van de beste schatting van X_{n+1} , als niet meer metingen dan Z_i , $0 \leq i \leq n$ bekend zijn, voltooid. Het resultaat van deze paragraaf zijn de volgende filtervergelijkingen:

DE KALMANFILTERVERGELIJKINGEN

$$\hat{X}_{n|n} = \hat{X}_{n|n-1} + K_n[Z_n - M_n\hat{X}_{n|n-1}] \quad (4.8)$$

$$P_{n|n} = [I_N - K_n M_n] P_{n|n-1} [I_N - K_n M_n]' + K_n R_n K_n' \quad (4.9)$$

$$\hat{X}_{n+1|n} = F_n \hat{X}_{n|n} \quad (4.10)$$

$$P_{n+1|n} = F_n P_{n|n} F_n' + G_n Q_n G_n' \quad (4.11)$$

met kalmangainmatrix K_n :

$$K_n = P_{n|n-1} M_n' [M_n P_{n|n-1} M_n' + R_n]^{-1} \quad (4.12)$$

De beginvoorwaarden voor het algoritme zijn:

$$\hat{X}_{0|-1} = \hat{x}_0, \quad P_{0|-1} = \bar{P}_0 \quad (4.13)$$

4.3 Niet lineaire filter theorie

Het niet lineaire systeem dat verkregen zal worden in §5.5 is een eenvoudig systeem van de vorm zoals beschreven in §4.3.1. Voor zo'n niet lineair systeem zijn meerdere filters mogelijk. De meest bekende hiervan is het Extended Kalmanfilter. Met dit filter zijn in het verleden goede resultaten bereikt. In het onderzoek wordt daarom dit filter gebruikt. De filtervergelijkingen van het Extended Kalmanfilter worden afgeleid in §4.3.2.

4.3.1 Systeembeschrijving

Gegeven zij het volgende stochastische niet-lineaire systeem:

$$f_{n+1}(X_{n+1}) = X_n + W_n \quad (4.14a)$$

$$Z_n = M_n X_n + V_n \quad (4.14b)$$

waarbij $f_{n+1}(X_{n+1})$ een niet-lineaire functie is. Daarnaast zijn $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ witte Gaussische processen met verwachting 0. Verder wordt aangenomen dat X_0 , $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ onderling onafhankelijk zijn, dat $EW_n W_n' = Q(n)$, dat $EV_n V_n' = R(n)$ en dat $X_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ een willekeurige witte Gaussische vector is.

4.3.2 Het Extended Kalmanfilter

De niet-lineaire functie $f_n(\underline{X}_n)$ kan, als ze 'glad' genoeg is, uitgedrukt worden in een Taylorreeks rond $\hat{\underline{X}}_{n+1|n} = \tilde{x}_{n+1}$. Met $\tilde{x}_{n+1}$ de oplossing van:

$$f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) = \hat{\underline{X}}_{n|n} \quad (4.15)$$

De Taylorreeks ziet er dan als volgt uit:

$$f_{n+1}(\underline{X}_{n+1}) = f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) + F_{1_{n+1}}(\underline{X}_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}) + O((\underline{X}_{n+1} - \tilde{x}_{n+1})^2)$$

met:

$$F_{1_{n+1}} = \left. \frac{\partial f_{n+1}(x)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \quad (4.16)$$

Ingevuld in (4.14a) levert dit, na het weglaten van de orde term, het volgende op:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1}) + F_{1_{n+1}}(\underline{X}_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}) &= \underline{X}_n + W_n \implies \\ F_{1_{n+1}}\underline{X}_{n+1} &= \underline{X}_n + W_n + [F_{1_{n+1}}\tilde{x}_{n+1} - f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1})] \implies \\ \underline{X}_{n+1} &= F_{1_{n+1}}^{-1}\underline{X}_n + F_{1_{n+1}}^{-1}W_n + F_{1_{n+1}}^{-1}[F_{1_{n+1}}\tilde{x}_{n+1} - f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1})] \end{aligned}$$

Het niet lineaire systeem (4.14) kan zodoende omgezet worden in het volgende lineaire systeem:

$$\underline{X}_{n+1} = F_n \underline{X}_n + G_n W_n + L_n \quad (4.17a)$$

$$\underline{Z}_n = M_n \underline{X}_n + V_n \quad (4.17b)$$

met:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{1_{n+1}}^{-1} \\ G_n &= F_{1_{n+1}}^{-1} \\ L_n &= F_{1_{n+1}}^{-1}(F_{1_{n+1}}\tilde{x}_{n+1} - f_{n+1}(\tilde{x}_{n+1})) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Hierbij is aangenomen dat $F_{1_{n+1}}^{-1}$ bekend en inverteerbaar is. Op dit systeem (4.17), kan het Kalmanfilter toegepast worden. Door de L_n -term wordt de schatting van $\hat{\underline{X}}_{n+1|n}$ met behulp van (4.15) iets anders:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{X}}_{n+1|n} &= F_n \hat{\underline{X}}_{n|n} + L_n = F_{1_{n+1}}^{-1} \hat{\underline{X}}_{n|n} + F_{1_{n+1}}^{-1}[F_{1_{n+1}} \hat{\underline{X}}_{n+1|n} - f_{n+1}(\hat{\underline{X}}_{n+1|n})] \implies \\ \hat{\underline{X}}_{n+1|n} &= \tilde{x}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$(4.20)$$

De rest van de kalmanvergelijkingen blijven hetzelfde. Hiermee is de afleiding van de Extended Kalmanfiltervergelijkingen voltooid. Het resultaat zijn de volgende vergelijkingen:

DE EXTENDED KALMAN FILTER VERGELIJKINGEN

$$\hat{X}_{n|n} = \hat{X}_{n|n-1} + K_n[Z_n - M_n\hat{X}_{n|n-1}] \quad (4.21)$$

$$P_{n|n} = [I_N - K_n M_n] P_{n|n-1} [I_N - K_n M_n]' + K_n R_n K_n' \quad (4.22)$$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \bar{x}_{n+1} \quad (4.23)$$

$$P_{n+1|n} = F_n P_{n|n} F_n' + G_n Q_n G_n' \quad (4.24)$$

met kalmangainmatrix K_n :

$$K_n = P_{n|n-1} M_n' [M_n P_{n|n-1} M_n' + R_n]^{-1} \quad (4.25)$$

en met $\bar{x}_{n+1}$ de oplossing van (4.15). De beginvoorwaarden voor het algoritme zijn:

$$P_{0|-1} = \bar{P}_0, \quad \hat{X}_{0|-1} = \bar{x}_0 \quad (4.26)$$

4.4 Smoothen

Tot nu toe zijn de schattingen van X_n gemaakt met behulp van de meetset $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$ in het kort aangeduid met $\bar{Z}_{n-1}$. Is het echter mogelijk met vertraging de toestand te schatten, zeg L tijdstappen later, dan kan er gesmoothd worden. Dit komt er in het kort op neer dat dan de toestand X_n geschat wordt aan de hand van de meetset $\bar{Z}_{n+L}$:

$$\hat{X}_{n|n+L} = E[X_n | Z_0, Z_1, \dots, Z_{n+L}]$$

Elke schatter van deze vorm wordt een smoother genoemd. Aangezien er meer metingen bekend zijn voor het schatten van X_n is de verwachting dat hierdoor een nauwkeurigere schatting van de toestand verkregen kan worden. Een nadeel is dat de complexiteit van de schatter toeneemt naarmate L groter wordt. Een belangrijk punt bij het toepassen van een smoother is daarom de afweging tussen de mate van verbetering van de schatting ten opzichte van de toename van de complexiteit en de moeilijkheid van het ontwerpen ervan, bij toename van L .

In de rest van dit hoofdstuk wordt gekeken naar de klasse van smoothers die met behulp van Kalmanfiltering opgelost kunnen worden. In het verleden zijn er in deze klasse drie soorten smoothers bekeken, te weten:

Fixed-point smoothing Dit houdt in dat voor iedere j de schatting van $\hat{X}_{j|j+L}$ bepaald wordt met j vast en L variabel.

Fixed-lag smoothing Hier gaat het om 'on-line' smoothing van de gegevens als er een vaste vertraging L is tussen het ontvangen van het signaal en de beschikbaarheid van de schatting. Dit houdt in dat voor iedere j de schatting van $\hat{X}_{j|j+L}$ bepaald wordt met L een vaste waarde.

Fixed-interval smoothing Dit komt neer op het bepalen van de schatting $\hat{X}_{j|M}$ voor alle $j \in [0, \dots, M]$ met M vast. Bij een eindige set meetgegevens kan dit een uitkomst zijn.

In dit onderzoek zijn de meetgegevens bekend voor een lange periode. Bovendien is er geen sprake van een vaste vertraging tussen het ontvangen signaal en de beschikbaarheid van de meting. Bij het toepassen van een smoother op het verkregen systeem in hoofdstuk 5 kan daarom het beste gekozen worden voor Fixed-point smoothing. In het vervolg van de paragraaf worden de filtervergelijkingen voor deze smoother afgeleid.

4.4.1 Systeembeschrijving

De af te leiden filtervergelijkingen zijn van toepassing op het volgende stochastische lineaire systeem:

$$X_{n+1} = F_n X_n + G_n W_n \quad (4.27a)$$

$$Z_n = M_n X_n + V_n \quad (4.27b)$$

Met $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ witte Gaussische processen met verwachting 0. Verder wordt aangenomen dat X_0 , $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ onderling onafhankelijk zijn, dat $EW_n W_n' = Q(n)$, dat $EV_n V_n' = R(n)$ en dat $X_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ een willekeurige witte Gaussische vector is.

4.4.2 Fixed-point smoother

Bij het Fixed-point smoothen, zie [1], wordt voor iedere n ,

$$\hat{X}_{n|i} = E[X_n | Z_i] \quad (4.28)$$

en de daarmee geassocieerde covariantiematrix van de fout in deze schatting

$$P_{n|i} = E\{[X_n - \hat{X}_{n|i}][X_n - \hat{X}_{n|i}]' | Z_n\} \quad (4.29)$$

bepaald, met n vast, i variabel en $i > n$.

Hieronder worden de vergelijkingen afgeleid waarmee het probleem wordt opgelost.

Neem een toestandsvector $\underline{X}_{n+1}^a$, met dimensie ter grootte van $\underline{X}_{n+1}$, en laat daar de volgende recursieve vergelijking voor gelden, $i \geq n$:

$$\underline{X}_{i+1}^a = \underline{X}_i^a \quad (4.30)$$

Initialiseer deze vergelijking door op tijdstip $t = t_n$, $\underline{X}_n^a = \underline{X}_n$ te nemen. Met (4.30) volgt dan direct dat

$$\underline{X}_{i+1}^a = \underline{X}_n \quad , \quad \text{voor } i \geq n \quad (4.31)$$

Met de definities van de voorwaardelijke schattingen en voorwaardelijke covarianties kunnen vervolgens de volgende identificaties gemaakt worden:

$$\hat{\underline{X}}_{i+1|i}^a = \hat{\underline{X}}_{n|i} \quad (4.32)$$

$$P_{i+1|i}^{aa} = P_{n|i} \quad (4.33)$$

Wordt nu $\underline{X}_{n+1}^a$ bij $\underline{X}_{n+1}$ aangeplakt, dan wordt met (4.27) het volgende systeem verkregen voor $i \geq n$:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_{i+1} \\ \underline{X}_{i+1}^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_i \\ \underline{X}_i^a \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} G_i \\ 0 \end{bmatrix} W_i \quad (4.34a)$$

$$\underline{Z}_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_i \\ \underline{X}_i^a \end{pmatrix} + V_i \quad (4.34b)$$

met als initialisatie voor $i = n$:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_n \\ \underline{X}_n^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{n|n-1} \\ \hat{\underline{X}}_{n|n-1}^a \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} P_n & [P_n^a]' \\ P_n^a & P_n^{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n|n-1} & P_{n|n-1} \\ P_{n|n-1} & P_{n|n-1} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Wordt het Kalmanfilter op dit systeem toegepast dan worden de filtervergelijkingen voor de smoother verkregen:

FILTERVERGELIJKINGEN SMOOTHER

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{i|i} \\ \hat{\underline{X}}_{i|i}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{i|i-1} \\ \hat{\underline{X}}_{i|i-1}^a \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix} \left[\underline{Z}_i - \begin{bmatrix} M_i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{i|i-1} \\ \hat{\underline{X}}_{i|i-1}^a \end{pmatrix} \right] \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} P_{i|i} & [P_{i|i}^a]' \\ P_{i|i}^a & P_{i|i}^{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N - \begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & [P_{i|i-1}^a]' \\ P_{i|i-1}^a & P_{i|i-1}^{aa} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} I_N - \begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix}' \quad (4.37)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{i+1|i} \\ \hat{\underline{X}}_{i+1|i}^a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{X}}_{i|i} \\ \hat{\underline{X}}_{i|i}^a \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} P_{i+1|i} & [P_{i+1|i}^a]' \\ P_{i+1|i}^a & P_{i+1|i}^{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i} & [P_{i|i}^a]' \\ P_{i|i}^a & P_{i|i}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} \hat{G}_i \\ 0 \end{bmatrix} Q_i \begin{bmatrix} \hat{G}_i' & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

met kalmangainmatrix:

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_i^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & [P_{i|i-1}^a]^\top \\ P_{i|i-1}^a & P_{i|i-1}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i' \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{bmatrix} M_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & [P_{i|i-1}^a]^\top \\ P_{i|i-1}^a & P_{i|i-1}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i' \\ 0 \end{bmatrix} + R_i \right]^{-1} \quad (4.40)$$

De beginvoorwaarden voor het filter zijn:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{n|n-1} \\ \hat{X}_{n|n-1}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{n|n-1} \\ \hat{X}_{n|n-1}^a \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_{n|n-1} & [P_{n|n-1}^a]^\top \\ P_{n|n-1}^a & P_{n|n-1}^{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n|n-1} & P_{n|n-1} \\ P_{n|n-1} & P_{n|n-1} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Voor het berekenen van $\hat{X}_{n|n-1}$ en $P_{n|n-1}$ wordt gebruik gemaakt van het Kalmanfilter toegepast op (4.27).

Met $\hat{X}_{i+1|i}^a$ wordt zodoende de schatting $\hat{X}_{n|i}$ voor X_n verkregen, met $i \geq n$. De covariantie van de foutenmatrix van deze schatter is:

$$P_{n|i} = P_{i+1|i}^{aa} = P_{n|n-1} - \sum_{j=1}^i [P_{j|j-1}^a M_j (K_j^a)^\top] \\ = P_{n|n-1} - \sum_{j=1}^i [P_{j|j-1}^a M_j (M_j' P_{j|j-1} M_j + R_j)^{-1} M_j' (P_{j|j-1}^a)^\top] \quad (4.42)$$

De verbetering die het smoothen oplevert t.o.v. van het kalmanfilter is $(P_{n|i} - P_{n|n-1})$. Soms kan het helpen dit ruwweg in een percentage uit te drukken:

$$\text{procentuele verbetering door smoothing} = \frac{\text{tr}(P_{n|i} - P_{n|n-1})}{\text{tr}(P_{n|n-1})} * 100\% \quad (4.43)$$

Hoofdstuk 5

Filtervergelijkingen 1DV-model

In dit hoofdstuk worden de filtervergelijkingen afgeleid voor het 1DV-model. Met deze vergelijkingen, waarin gebruik wordt gemaakt van de gemeten slibconcentraties, kunnen voorspellingen worden verkregen voor de slibconcentraties. Daarnaast worden met de vergelijkingen schattingen van de parameters w_o en $D - E$ verkregen, waarmee de fluctuaties in de gemeten slibconcentraties (hopelijk) zo goed mogelijk gevolgd worden. Voor het afleiden van de filtervergelijkingen is de vergelijking voor de berekening van de slibconcentraties nodig. In het 1DV-model wordt hiervoor de slibvergelijking met bijbehorende voorwaarden gebruikt, zoals beschreven is in §2.2. Deze vergelijking is niet exact oplosbaar maar kan wel numeriek benaderd worden. Dit heeft tot gevolg dat de slibvergelijking gediscretiseerd dient te worden. Vervolgens worden de parameters w_o en $D - E$ aan de toestand van de discretisatie toegevoegd, zodat ze met behulp van de filtervergelijkingen geschat kunnen worden. Na het toevoegen van meetruis en systeemruis, voor de modellering van onnauwkeurigheden in de metingen en niet gemodelleerde fysica, wordt dan een niet lineair stochastisch systeem verkregen. Hierop kan het Extended Kalmanfilter, zoals beschreven in §4.3.2, toegepast worden. Het resultaat van deze toepassing zijn de gewenste filtervergelijkingen voor het 1DV-model.

In §5.1 worden de definities gegeven van de in dit hoofdstuk gebruikte coëfficiënten en variabelen. Vervolgens worden in §5.2 voor het overzicht de slibvergelijking en de bijbehorende voorwaarden herhaald, met daarin één kleine wijziging. Daarna wordt in §5.3 een transformatie toegepast die nodig is voor de discretisatie. Vervolgens wordt in §5.4 het systeem gediscretiseerd. Waarna in §5.5 de filtervergelijkingen voor het 1DV-model worden verkregen.

5.1 Definities

Symbol	Definitie	Eenheid
t	Tijd	$[s]$
z	Hoogte, met $z = z_0$ de bodem en $z = H$ het oppervlak	$[m]$
$c(t, z)$	Het slibgehalte als functie van t en z	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$w_s(t, z)$	Valssnelheid van slib als functie van t en z	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\Gamma_T(t, z)$	Eddy-diffusiteit als functie van t en z (variabele)	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
D_{kv}	Moleculaire diffusie coëfficiënt	$\left[\frac{m^2}{s}\right]$
$D(t)$	Hoeveelheid gesedimenteed slib als functie van t	$\left[\frac{kg}{sm^2}\right]$
$E(t)$	Hoeveelheid geërodeerd als functie van t	$\left[\frac{kg}{sm^2}\right]$
z_0	Ruwheidshoogte van de bodem (constante)	$[m]$
$H(t)$	Hoogte van de waterkolom als functie van de tijd	$[m]$
N	Aantal lagen waarin waterkolom is opgedeeld	

Tabel 5.1: *Definities symbolen*

5.2 De slibvergelijking

Voor de duidelijkheid worden hier de slibvergelijking met de bijbehorende voorwaarden, zoals beschreven in §2.2, herhaald. Door de aangebrachte aanpassingen, zie §3.3, is er echter één wijziging opgetreden. Dit is dat w_s , de valsnelheid van slib, niet meer constant is maar volgt uit de formule van 'van Leussen' zoals beschreven in §3.3. Met als gevolg dat w_s afhankelijk is geworden van de hoogte z (en de tijd t), wat van belang is voor de discretisatie.

DE SLIBVERGELIJKING MET BIJBEHORENDE VOORWAARDEN

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial w_s c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \quad (5.1a)$$

Met randvoorwaarde voor het oppervlak:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=H} = 0 \quad (5.1b)$$

en voor de bodem:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_T \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} = D - E \quad (5.1c)$$

De beginvoorwaarden voor de starttijd $t = t_0$ zijn:

$$c(t_0, z) = \bar{c}_0(z) \quad , \quad \Gamma_T(t_0, z) = \bar{\Gamma}_{T_0}(z) \quad \text{en} \quad w_s(t_0, z) = \bar{w}_{s_0}(z) \quad (5.1d)$$

5.3 Transformatie

In het systeem (5.1a) staan afgeleiden naar de tijd t en de hoogte z . Discretisatie van dit systeem zou betekenen discretisatie op het grid $\omega_{\Delta t, \Delta z}$. Met hierin Δt de grootte van de tijdstap voor het extended Kalmanfilter en Δz de stapgrootte in de hoogte. Nu is $\Delta z = \frac{H(t)}{N}$ met $H(t)$ de lengte van de waterkolom en N het vaste aantal lagen waarin de waterkolom wordt opgedeeld. Doordat de waterhoogte van de tijd afhangt is Δz ook tijdsafhankelijk. Dit is een ongewenste zaak omdat dit complicaties voor de discretisatie oplevert. Om deze complicaties te vermijden wordt daarom de hoogte z dimensieloos gemaakt door de volgende transformatie op het systeem toe te passen:

$$\sigma = \frac{z}{H(t)}, \quad (5.2)$$

Omdat z_0 verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de waterhoogte $H(t)$ wordt z_0 verwaarloosd, met als gevolg dat $\sigma \in [0, 1]$ (dit is bij de numerieke oplossingmethode van het 1DV-model ook gebeurd). De dimensies van de variabelen in de slibvergelijking zijn als volgt:

$$c = \left[\frac{kg}{m^3} \right], \quad w_s = \left[\frac{m}{s} \right], \quad z = [m], \quad \Gamma_r = \left[\frac{m^2}{s} \right], \quad t = [s], \quad D-E = \left[\frac{kg}{sm^2} \right] \quad (5.3)$$

Met hierbij de aantekening dat slechts één m van de dimensie van c voor de z -richting geldt en dat de m^2 , in de dimensie van $D - E$ de horizontale richtingen zijn. Voor de variabelen die afhankelijk zijn van z levert de transformatie van z naar σ :

$$c(t, z) = \frac{1}{H(t)} c(t, \sigma), \quad w_s(t, z) = H(t) w_s(t, \sigma), \quad \Gamma_r(t, z) = H^2(t) \Gamma_r(t, \sigma) \quad (5.4)$$

De transformatie van (5.1a) wordt dan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial w_s c}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{H(t)} c \right\} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ H(t) w_s \frac{1}{H(t)} c \right\} &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ H^2(t) \Gamma_r \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{H(t)} c \right\} \right\} \Rightarrow \\ \frac{1}{H(t)} \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{H^2(t)} \frac{\partial H}{\partial t} c - \frac{1}{H(t)} \frac{\partial w_s c}{\partial z} &= \frac{1}{H(t)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Rightarrow \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{H(t)} \frac{\partial H}{\partial t} c - \frac{\partial w_s c}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Transformatie van de randvoorwaarde voor de bodem levert:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} = D - E \Rightarrow$$

$$\left\{ H(t)w_s \frac{1}{H(t)}c + H^2(t)\Gamma_r \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{H(t)}c \right\} \right\} \Big|_{\sigma=0} = (D - E) \Rightarrow$$

$$\left\{ w_s c + \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{\sigma=0} = D - E \quad (5.6)$$

en voor de oppervlakte is dit:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{\sigma=1} = 0 \quad (5.7)$$

En de beginvoorwaarden worden dan:

$$c(t_0, \sigma) = \bar{c}_0(\sigma) \quad , \quad \Gamma_r(t_0, \sigma) = \bar{\Gamma}_{r_0}(\sigma) \quad \text{en} \quad w_s(t_0, \sigma) = \bar{w}_{s_0}(\sigma) \quad (5.8)$$

met $\sigma \in [0, 1]$ Hiermee is de transformatie van z naar σ voltooid, met als resultaat:

GETRANSFORMEERDE SLIBVERGELIJKING MET BIJBEHORENDE VOORWAARDEN

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial t} c - \frac{\partial w_s c}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \quad (5.9)$$

met randvoorwaarde voor het oppervlak:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{\sigma=1} = 0 \quad (5.10a)$$

en voor de bodem:

$$\left\{ w_s c + \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{\sigma=0} = D - E \quad (5.10b)$$

en beginvoorwaarde op starttijd $t = t_0$:

$$c(t_0, \sigma) = \bar{c}_0(\sigma) \quad , \quad \Gamma_r(t_0, \sigma) = \bar{\Gamma}_{r_0}(\sigma) \quad \text{en} \quad w_s(t_0, \sigma) = \bar{w}_{s_0}(\sigma) \quad (5.10c)$$

met $\sigma \in [0, 1]$

5.4 Discretisatie getransformeerd systeem

In de vorige paragraaf is het systeem getransformeerd met als resultaat een systeem dat gediscrètiseerd kan worden. De discretisatie zal in deze paragraaf uitgevoerd worden. Allereerst worden in §5.4.1 de gebruikte symbolen gedefinieerd. Vervolgens zal in §5.4.2 de slibvergelijking gediscrètiseerd worden. Daarna zullen de randvoorwaarden gediscrètiseerd worden in §5.4.3. Tenslotte wordt in §5.4.4 het discrete systeem oplosbaar gemaakt door het elimineren van twee onbekenden met behulp van de randvoorwaarden. Het resultaat is een discreet systeem waarop de filtertechnieken zoals besproken in hoofdstuk 4, toegepast kunnen worden.

5.4.1 Definities

Symbol	Definitie
$\underline{x}$	Onderstreept symbool is vector
$\underline{X}$	Onderstreepte hoofdletter is stochastische vector variabele
x_n^m	Waarde van $x(t, \sigma)$ op $t = t_n$ en $\sigma = \sigma_m$
N	Aantal lagen waarin waterkolom is opgedeeld
h	$= \Delta\sigma = \frac{1}{N}$ stapgrootte in de hoogte
k	$= \Delta t =$ stapgrootte in de tijd

Tabel 5.2: Definities van de bij de discretisatie gebruikte symbolen

5.4.2 Discretisatie slibvergelijking

De volgende slibvergelijking dient te worden gediscetiseerd, zie vergelijking (5.9):

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{c}{H} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial w_s c}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \quad (5.11)$$

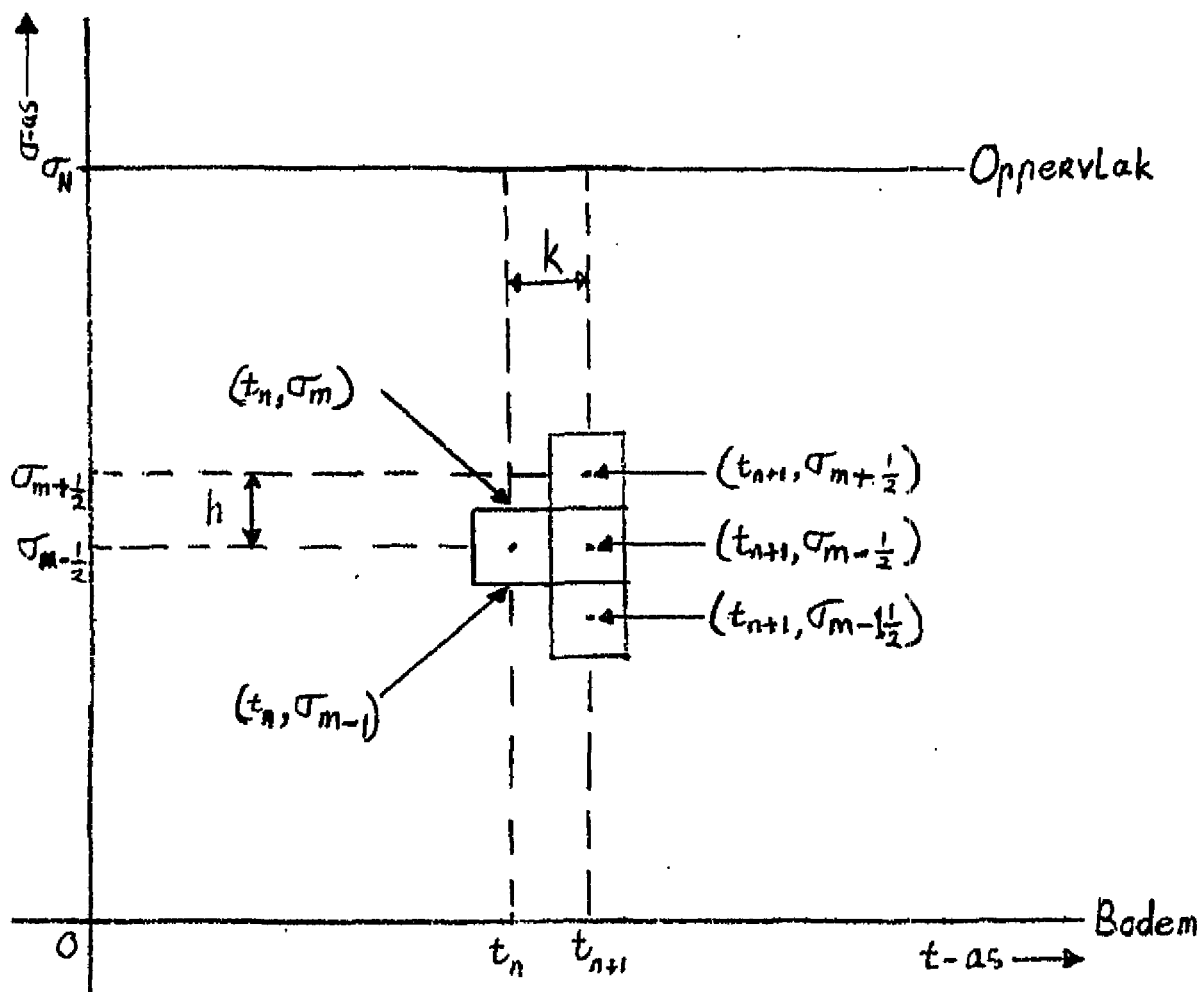
Nu kan een vergelijking op twee manieren gediscetiseerd worden, volgens een expliciete methode of een impliciete methode. Binnen deze methodes zijn weer verschillende uitbreidingen mogelijk waarmee de mate van nauwkeurigheid vergroot kan worden, dit houdt echter wel in dat de discretisatie er niet eenvoudiger op wordt. Het voordeel van de expliciete methode is dat deze het eenvoudigst is, een nadeel is dat hij niet altijd stabiel is. Een impliciete methode is daarentegen altijd stabiel. Een nadeel echter is dat er een matrix geïnverteerd moet worden en dit kan problemen opleveren.

Omdat stabiliteit zeer wenselijk is en gebleken is dat het inverteren van de benodigde matrix geen problemen oplevert, is gekozen voor de *impliciete methode*. Daarbij is de eenvoudigste vorm gekozen, aangezien een uitgebreidere vorm veel meer rekenwerk opleverde en eventuele onnauwkeurigheden naar verwachting wel gecorrigeerd zullen worden door het filter. Het eenvoudige impliciete differentieschema voor de slibconcentratie op $t = t_{n+1}$ en $\sigma = \sigma_{m-\frac{1}{2}}$ is te zien in figuur 5.1.

In die figuur zijn de coördinaten $(t_n, \sigma_{m+\frac{1}{2}})$ gelijk aan $(n * k, (m + \frac{1}{2}) * h)$ met daarin k de grootte van de tijdstap en h de stapgrootte in de hoogte, voor de eenvoud is t_0 gelijk aan nul genomen. Dit discretisatie schema geldt voor $m = 1, \dots, N$ en $n \geq 0$. In het 1DV-model wordt de slibconcentratie berekend voor het midden van de laag, in dit geval blokje. Dit terwijl Γ_r en ϵ_r voor de onderkant/bovenkant van elke laag berekend worden, dus op de hoogte σ_m voor $m = 0, \dots, N$. Hiermee wordt rekening gehouden bij de discretisatie van de slibvergelijking

Rechterlid (5.11) De discretisatie van het rechterlid van (5.11) is vrij standaard:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \right\} \Big|_{\sigma_{m-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h} \left[\left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_m - \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{m-1} \right] + O(h^2)$$



Figuur 5.1: Het impliciete differentieschema

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left[\Gamma_r^m \frac{\partial c}{\partial \sigma} \Big|_m - \Gamma_r^{m-1} \frac{\partial c}{\partial \sigma} \Big|_{m-1} \right] + O(h^2) \\
&= \frac{1}{h} \left[\Gamma_r^m \left(\frac{c^{m+\frac{1}{2}} - c^{m-\frac{1}{2}}}{h} \right) - \Gamma_r^{m-1} \left(\frac{c^{m-\frac{1}{2}} - c^{m-1\frac{1}{2}}}{h} \right) + O(h^2) \right] + O(h^2) \\
&= \frac{1}{h^2} [\Gamma_r^{m-1} c^{m-1\frac{1}{2}} - (\Gamma_r^{m-1} + \Gamma_r^m) c^{m-\frac{1}{2}} + \Gamma_r^m c^{m+\frac{1}{2}}] + O(h)
\end{aligned}$$

Het resultaat van de discretisatie van het rechterlid van (5.11) op $t = t_{n+1}$ is:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} \right\} \right\} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_{m-\frac{1}{2}})} &= \frac{1}{h^2} [\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} - (\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m) c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Gamma_{r_{n+1}}^m c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}}] + O(h)
\end{aligned} \quad (5.12)$$

Voor $m = 1, \dots, N$ en $n \geq 0$.

Linkerlid (5.11) De discretisatie van het linkerlid wordt voor iedere deelterm apart uitgevoerd. De discretisatie van $\frac{\partial c}{\partial t}$ levert:

$$\frac{\partial c}{\partial t} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_{m-\frac{1}{2}})} = \frac{1}{k} (c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - c_n^{m-\frac{1}{2}}) + O(k) \quad (5.13)$$

Discretisatie van $\frac{c}{H} \frac{\partial H}{\partial t}$ geeft:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{c}{H} \frac{\partial H}{\partial t} \right\} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_{m-\frac{1}{2}})} &= \frac{c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}}}{H_{n+1}} \left(\frac{H_{n+1} - H_n}{2} \right) + O(k) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H_n}{H_{n+1}} \right) c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + O(k)
\end{aligned} \quad (5.14)$$

en voor de discretisatie van $\frac{\partial w_s c}{\partial \sigma}$ is gekozen voor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_s c}{\partial \sigma} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_{m-\frac{1}{2}})} &= \frac{1}{h} (w_{s_{n+1}}^m c_{n+1}^m - w_{s_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-1}) + O(h^2) \\
&= \frac{1}{h} \left[w_{s_{n+1}}^m \left(\frac{c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}}}{2} \right) - w_{s_{n+1}}^{m-1} \left(\frac{c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}}}{2} \right) + O(h^2) \right] + O(h^2) \\
&= \frac{1}{2h} [w_{s_{n+1}}^m c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} + (w_{s_{n+1}}^m - w_{s_{n+1}}^{m-1}) c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + w_{s_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}}] + O(h) \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Worden de discretisaties van de drie deeltermen (5.13), (5.14) en (5.15) samengevoegd dan levert dit de volgende discretisatie van het linkerlid van (5.11) op:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{c}{H} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial w_s c}{\partial \sigma} \right\} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_{m-\frac{1}{2}})} &= \frac{1}{k} (c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - c_n^{m-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2h} [w_{s_{n+1}}^m c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} + (w_{s_{n+1}}^m \\
&\quad - w_{s_{n+1}}^{m-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right)) c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + w_{s_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}}] + O(h) + O(k) \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Samenvoegen van de discretisaties van de beide leden van de slibvergelijking, (5.12) en (5.16), levert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - c_n^{m-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1\right)c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2h}[w_{s_{n+1}}^m c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} + (w_{s_{n+1}}^m - w_{s_{n+1}}^{m-1})c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + w_{s_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}}] \\ + O(h) + O(k) = \frac{1}{h^2}[\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - (\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m)c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + \Gamma_{r_{n+1}}^m c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}}] + O(h) \implies \\ \left(\frac{k}{2h}w_{s_{n+1}}^{m-1} - \frac{k}{h^2}\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1}\right)c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1\right) + \frac{k}{2h}(w_{s_{n+1}}^{m-1} - w_{s_{n+1}}^m) + \frac{k}{h^2}(\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m)\right]c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{h^2}\Gamma_{r_{n+1}}^m + \frac{k}{2h}w_{s_{n+1}}^m\right)c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} = c_n^{m-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \end{aligned}$$

In een andere notatie levert dit de volgende discrete slibvergelijking op:

DISCRETE SLIBVERGELIJKING:

$$p_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} = c_n^{m-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \quad (5.17a)$$

met:

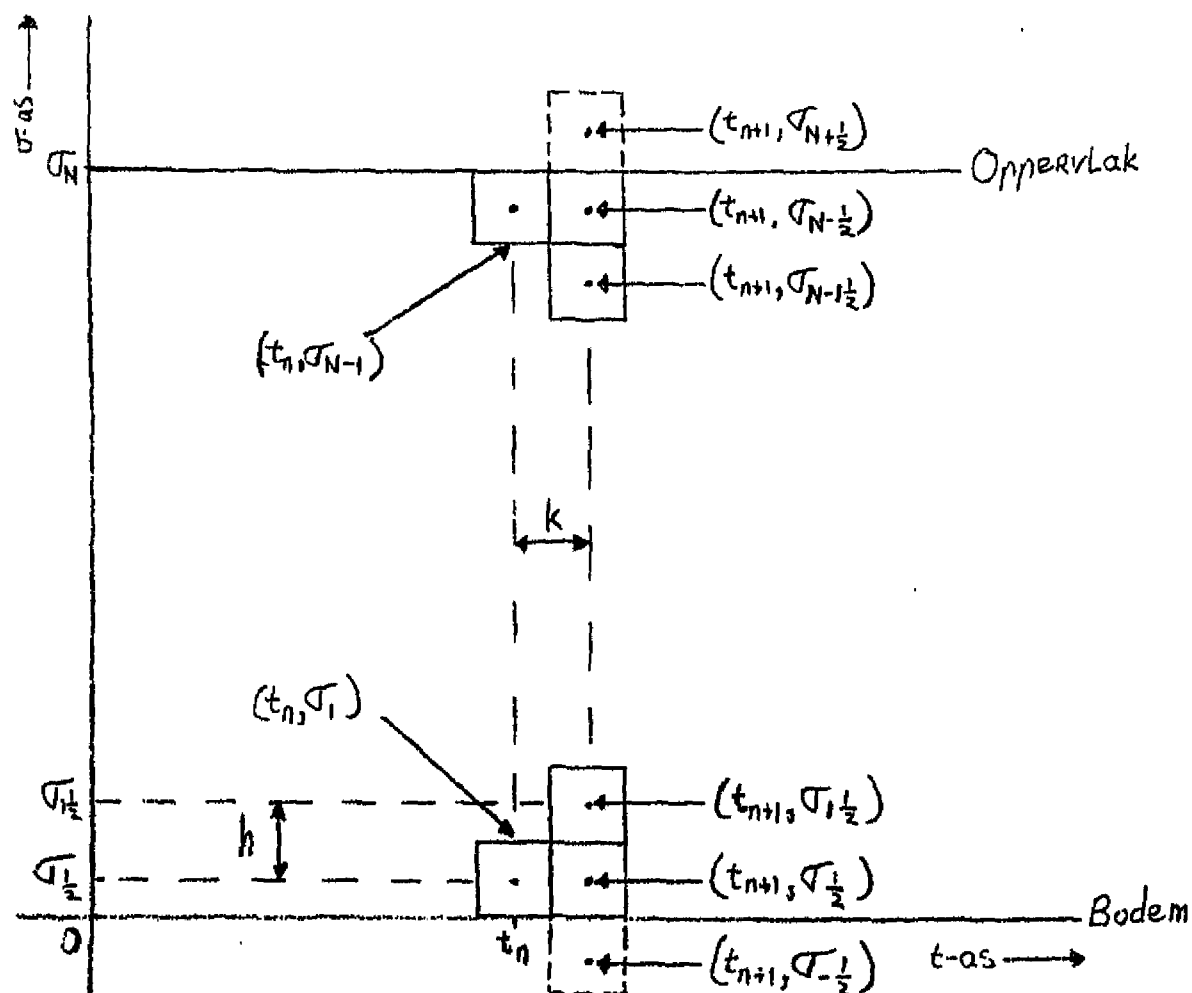
$$\begin{aligned} p_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} &= \frac{k}{2h}w_{s_{n+1}}^{m-1} - \frac{k}{h^2}\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} \\ q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1\right) + \frac{k}{2h}(w_{s_{n+1}}^{m-1} - w_{s_{n+1}}^m) + \frac{k}{h^2}(\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m) \\ r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} &= -\left(\frac{k}{h^2}\Gamma_{r_{n+1}}^m + \frac{k}{2h}w_{s_{n+1}}^m\right) \end{aligned} \quad (5.17b)$$

Voor $m = 1, \dots, N$ en $n \geq 0$. Dit zijn N vergelijkingen met $N+2$ onbekenden $c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}, c_{n+1}^{\frac{1}{2}}, \dots, c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}}$ (Γ_r en w_s worden verkregen uit het 1DV-model). Wil zo'n systeem oplosbaar zijn dan moet het aantal vergelijkingen groter of gelijk zijn aan het aantal onbekenden. Er moeten dus in ieder geval twee onbekenden weggewerkt worden. Daarvoor worden de randvoorwaarden gebruikt, hiermee kunnen de onbekenden $c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$ en $c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}}$ uit de N vergelijkingen geëlimineerd worden, zie figuur 5.2.

5.4.3 Discretisatie v.d. randvoorwaarden:

Alvorens de onbekenden $c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$ en $c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}}$ uit de N vergelijkingen te kunnen elimineren, dienen de randvoorwaarden te worden gediscetiseerd. De randvoorwaarden zijn, zie verg. (5.10b) en (5.10a):
voor het oppervlak

$$\left\{ \Gamma_r \frac{\partial c}{\partial \sigma} + w_s c \right\} \Big|_{\sigma=1} = 0$$



Figuur 5.2: Het impliciete differentieschema voor de randen

en voor de bodem

$$\left\{ \Gamma_x \frac{\partial c}{\partial \sigma} + w_s c \right\} \Big|_{\sigma=0} = D - E$$

Het eenvoudige impliciete schema voor de bodem en het oppervlak is te zien in figuur 5.2. In die figuur zullen de gestippelde blokken geleverd gaan worden door de discrete randvoorwaarden. Dit komt neer op het elimineren van $c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$ en $c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}}$ uit de discrete slibvergelijkingen. Met als gevolg dat de discrete slibvergelijkingen opgelost kunnen worden.

De $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ -term wordt als volgt gediscretiseerd voor het oppervlak, $\sigma = \sigma_N (= 1)$:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_N)} = \frac{1}{h} (c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}}) + O(h^2)$$

en voor de bodem, $\sigma = \sigma_0 (= 0)$:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} \Big|_{(t_{n+1}, \sigma_0)} = \frac{1}{h} (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + O(h^2)$$

Voor de randvoorwaarde van de bodem wordt dan de volgende discretisatie verkregen:

$$\begin{aligned} w_{s_{n+1}}^0 c_{n+1}^0 + \frac{1}{h} \Gamma_{T_n}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + O(h^2) &= (D - E)_{n+1} \implies \\ \frac{1}{h} \Gamma_{T_n}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) &= (D - E)_{n+1} - w_{s_{n+1}}^0 \left[\frac{c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}}{2} \right] + O(h^2) \implies \\ \frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) &= \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + O(h^2) \end{aligned}$$

Op dezelfde manier wordt de discretisatie van de randvoorwaarde voor het oppervlak verkregen. Het resultaat van deze paragraaf zijn de volgende discrete randvoorwaarden.

DISCRETE RANDVOORWAARDEN:

Voor het oppervlak:

$$\frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^N (c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}}) = -\frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^N (c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}}) + O(h) \quad (5.18)$$

en voor de bodem:

$$\frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) = \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + O(h) \quad (5.19)$$

5.4.4 Het discrete systeem

Voor de voltooiing van de discretisatie moeten alleen nog de randvoorwaarden ingevuld worden in de discrete slibvergelijking voor $m=N$ en $m=1$, oftewel $c^{-\frac{1}{2}}$ en $c^{N+\frac{1}{2}}$ moeten geëlimineerd worden. Dit gebeurt hieronder.

De discrete slibvergelijking (5.17a) met $m=N$ levert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{T_{n+1}}^{N-1} \right) c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} (w_{s_{n+1}}^{N-1} - w_{s_{n+1}}^N) + \frac{k}{h^2} (\Gamma_{T_{n+1}}^{N-1} + \Gamma_{T_{n+1}}^N) \right] c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{T_{n+1}}^N + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^N \right) c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} = c_n^{N-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \implies \\ \left(\frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^{N-1} \right) c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} + \frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^{N-1} \right] c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ - \frac{k}{h^2} \Gamma_{T_n}^N (c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}}) - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^N (c_{n+1}^{N+\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}}) = c_n^{N-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \implies \end{aligned}$$

Invullen van de discrete randvoorwaarde voor het vrije oppervlak (5.18) levert:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_n}^{N-1} \right) c_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_n}^{N-1} \right] c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ & = c_n^{N-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \end{aligned}$$

In beknopte vorm levert dit de volgende discrete slibvergelijking op voor $m = N$:

$$\alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} = c_n^{N-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \quad (5.20a)$$

met

$$\alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} = \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^{N-1} \quad (5.20b)$$

$$\beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^{N-1} \quad (5.20c)$$

De discrete slibvergelijking (5.17a) voor $m = 1$ levert:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^0 - \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^0 \right) c_{n+1}^{-\frac{1}{2}} + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} (w_{s_{n+1}}^0 - w_{s_{n+1}}^1) + \frac{k}{h^2} (\Gamma_{\tau_{n+1}}^0 + \Gamma_{\tau_{n+1}}^1) \right] c_{n+1}^{\frac{1}{2}} \\ & - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) c_{n+1}^{\frac{1}{2}} = c_n^{\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \implies \\ & \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_n}^0 (c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - c_{n+1}^{-\frac{1}{2}}) + \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_n}^1 - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) c_{n+1}^{\frac{1}{2}} \\ & - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_n}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) c_{n+1}^{\frac{1}{2}} = c_n^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + O(h) + O(k^2) \end{aligned}$$

met de gediscretiseerde randvoorwaarde voor de bodem (5.19) levert dit:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^1 - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right] c_{n+1}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} \\ & = c_n^{\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \end{aligned}$$

In beknopte vorm levert dit de volgende discrete slibvergelijking op voor $m = 1$:

$$\alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} = c_n^{\frac{1}{2}} + O(h^2) + O(k^2) \quad (5.21a)$$

met

$$\alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^1 - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \quad (5.21b)$$

$$\beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} = - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{\tau_{n+1}}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) \quad (5.21c)$$

Hiermee is de discretisatie van de slibvergelijking met bijbehorende randvoorwaarden voltooid. Het hieronder samengevatte resultaat volgt met behulp van (5.17), (5.20) en (5.21).

HET DISCRETE SYSTEEM

Voor $m = 1$ ($\approx$ Bodem!):

$$\alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} = c_n^{\frac{1}{2}} + O(h^2) + O(k^2) \quad (5.22)$$

Voor $m = 2, \dots, N - 1$:

$$p_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} + r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} = c_n^{m-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \quad (5.23)$$

Voor $m = N$ ($\approx$ Oppervlak!):

$$\alpha_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} = c_n^{N-\frac{1}{2}} + O(h) + O(k^2) \quad (5.24)$$

Dit alles voor $n \geq 0$ en met:

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} &= \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{m-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} \quad , \\ q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} (w_{s_{n+1}}^{m-1} - w_{s_{n+1}}^m) + \frac{k}{h^2} (\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m) \quad , \\ r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^m + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^m \right) \quad , \\ \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^1 - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \quad , \\ \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) \quad , \\ \alpha_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} &= \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{N-1} \quad , \\ \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} + \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{N-1} \end{aligned} \quad (5.25)$$

De discrete beginvoorwaarde op $t = t_0$ is:

$$c_0^m = \bar{c}_0^m \quad (5.26)$$

met $\sigma \in [0, 1]$

In matrixnotatie levert dit:

$$A_{n+1} \underline{c}_{n+1} + B(D - E)_{n+1} = \underline{c}_n \quad (5.27)$$

met:

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{\frac{1}{2}} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & q_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & p_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{k}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

en

$$\underline{c}_n = \begin{pmatrix} c_{\frac{1}{2}} \\ c_{1\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ c_{N-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

en met startwaarde $\underline{c}_0$ volgend uit de beginvoorwaarde.

5.5 Toepassen filtertechnieken

In de vorige paragraaf is een discreet systeem verkregen voor de berekening van de slibconcentratie. Zoals gezegd is het de bedoeling om de parameters w_0 en $D - E$ te gaan schatten, zodat bepaald kan worden in hoeverre de fysische processen verwerkt in het 1DV-model de gemeten slibgehalten naar tevredenheid kunnen benaderen. Het schatten van de parameters w_0 en $D - E$ wordt mogelijk gemaakt door ze aan de toestandsvector $\underline{c}$ toe te voegen. Door de toevoegingen wordt het rechterlid van het discrete systeem (5.27) niet-lineair. Door verder systeemruis W aan de niet-lineaire vergelijking toe te voegen wordt een niet-lineaire stochastische vergelijking verkregen met stochastische variabelen die weergegeven zullen worden met onderstreepte hoofdletters. Op het zo verkregen stochastische systeem kan de filtertechniek van het Extended Kalmanfilter toegepast worden. Maar eerst zal het stochastische systeem bepaald worden.

Het resultaat van de vorige paragraaf was de volgende lineaire discrete slibvergelijking, zie (5.27):

$$A_{n+1}\underline{c}_{n+1} + B(D - E)_{n+1} = \underline{c}_n \quad (5.31)$$

met A_{n+1} en B zoals in (5.28) t/m (5.29). Nu is A_{n+1} afhankelijk van $w_{s_{n+1}}^m$ en voor de bepaling van $w_{s_{n+1}}^m$ wordt de discrete vorm van de formule van van Leussen gebruikt, zie §3.3:

$$w_{s_{n+1}}^m = w_{o_{n+1}} (c_{n+1}^m)^{m_L} \frac{1 + aG_{n+1}^m}{1 + b(G_{n+1}^m)^2}, \quad \text{voor } m = 1, \dots, N-1 \quad (5.32)$$

met a, b en m_L empirische coëfficiënten, $w_{o_{n+1}}$ de te schatten coëfficiënt en G_{n+1}^m de absolute snelheidsgradiënt. Voor het schatten van de parameters w_o en $D - E$ zijn meerdere mogelijkheden. Gekozen is voor de meest gebruikte methode, het toevoegen van de te schatten parameters aan de toestand, zie [2]. Daarvoor wordt voor de eenvoud van schrijven eerst het volgende gedefiniëerd:

$$\underline{\theta}_{n+1} = \begin{pmatrix} w_{o_{n+1}} \\ (D - E)_{n+1} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Het toevoegen van de parameters w_o en $D - E$ aan de toestand $\underline{c}$ levert dan de volgende toestandsvector op:

$$\underline{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} \underline{c}_{n+1} \\ \underline{\theta}_{n+1} \end{pmatrix}$$

Tevens dient volgens de gekozen methode van het parameterschatten

$$\underline{\theta}_{n+1} = \underline{\theta}_n \quad (5.34)$$

genomen te worden voor $n \geq 0$. Deze toevoegingen aan (5.31) leveren het volgende niet-lineaire systeem op:

$$f_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) = \underline{x}_n \quad (5.35)$$

met

$$f_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) = \begin{pmatrix} \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + \frac{k}{h} (D - E)_{n+1} \\ p_{n+1}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + q_{n+1}^{\frac{1}{2}} c_{n+1}^{\frac{1}{2}} + r_{n+1}^3 c_{n+1}^3 \\ \vdots \\ p_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} + q_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} + r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} c_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ p_{n+1}^{N-2} c_{n+1}^{N-2} + q_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} + r_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ \alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} + \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} c_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ w_{o_{n+1}} \\ (D - E)_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

Het zo verkregen systeem, waarin naar verwachting de belangrijkste fysica is gemodelleerd, is een poging tot de benadering van de werkelijke slibgehaltenes in de verticaal in bijvoorbeeld de Westerschelde. Vervolgens wordt de niet gemodelleerde fysica in het model gemodelleerd door systeemruis W aan het systeem toe te voegen. Door de toevoeging van de ruis wordt een stochastisch systeem verkregen met stochastische variabelen. Het systeem is nu bijna compleet. Om de elementen in de toestandsvector zo goed mogelijk te kunnen schatten zullen de gemeten 'continue'-slibconcentraties gebruikt worden. Dit wordt mogelijk gemaakt door de volgende vergelijking aan het systeem toe te voegen:

$$Z_n = M_n X_n + V_n$$

Hierin stelt Z_n de vector met de gemeten slibconcentraties voor op $t = t_n$ en is M_n de matrix die aangeeft welke en hoe de elementen van X_n gemeten zijn. De meetruis V_n zorgt voor de modellering van onnauwkeurigheden in de metingen. Zoals eerder beschreven is werd om de $\pm$ vier minuten één slibconcentratie gemeten. De matrix M_n wordt daardoor:

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

met de één op de plek die overeen komt met de hoogte in de waterkolom waarop de slibconcentratie op $t = t_n$ gemeten is. Dit alles bij elkaar levert het volgende stochastische niet-lineaire systeem op:

$$f_{n+1}(X_{n+1}) = X_n + W_n \quad (5.38a)$$

$$Z_n = M_n X_n + V_n \quad (5.38b)$$

met $f_{n+1}(X_{n+1})$ een niet-lineaire functie volgend uit (5.36) en M_n volgt uit (5.37). Daarnaast wordt aangenomen dat $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ witte Gaussische processen zijn met verwachting 0. Verder wordt aangenomen dat X_0 , $\{W_n\}$ en $\{V_n\}$ onderling onafhankelijk zijn, dat $EW_n W_n' = Q(n)$, dat $EV_n V_n' = R(n)$ en dat $X_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ een willekeurige witte Gaussische vector is.

Dit systeem voldoet aan de systeembeschrijving van §4.3.1, zodat nu het Extended Kalmanfilter toegepast kan worden. Het resultaat zijn de volgende filtervergelijkingen, zie §4.3.2.

$$K_n = P_{n|n-1} M_n' [M_n' P_{n|n-1} M_n + R_n]^{-1} \quad (5.39)$$

$$\hat{X}_{n|n} = \hat{X}_{n|n-1} + K_n [Z_n - M_n \hat{X}_{n|n-1}] \quad (5.40)$$

$$P_{n|n} = [I_{N+2} - K_n M_n'] P_{n|n-1} [I_{N+2} - K_n M_n']' + K_n R_n K_n' \quad (5.41)$$

$$\hat{X}_{n+1|n} = \hat{x}_{n+1} \quad (5.42)$$

$$P_{n+1|n} = F_n P_{n|n} F_n' + G_n Q_n G_n' \quad (5.43)$$

met beginvoorwaarden:

$$\hat{X}_{0|-1} = \hat{x}_0$$

$$P_{0|-1} = \bar{P}_0$$

Daarnaast is $\tilde{x}_{n+1}$ de oplossing van, zie (4.15):

$$f_{1n}(\tilde{x}_{n+1}) = \hat{X}_{n|n} \quad (5.44)$$

Verder zijn $Q(n)$ en $R(n)$ op te geven covariantiematrices van de systeemruis respectievelijk meetruis. Tot slot zijn de matrices F_n en G_n gelijk aan de inverse van F_{1n+1} , zie (4.18). Met F_{1n+1} volgend uit, zie (4.16):

$$F_{1n+1} = \left. \frac{\partial f_{n+1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} \quad (5.45)$$

Rest nog de berekening van de matrix F_{1n+1} en de oplossing van (5.44).

Berekening F_{1n+1} aan de hand van (5.45), (5.36), (5.32) en $m_L = 0$

Opmerking: $x^1 = c^1$ is de slibconcentratie van de eerste laag boven de bodem, $x^N = c^N$ is de slibconcentratie van de laag tegen het vrije oppervlak aan, $x^{N+1} = w_o$ en $x^{N+2} = D - E$. Voor de elementen in de eerste rij van de matrix F_{1n+1} geldt dan:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n+1}^1}{\partial x^1} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= \left. \alpha_r^{\frac{1}{2}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} = \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} \\ \left. \frac{\partial f_{n+1}^1}{\partial x^2} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= \left. \beta_r^{\frac{1}{2}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} = \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} \\ \left. \frac{\partial f_{n+1}^1}{\partial x^{N+1}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= \left\{ c^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \alpha_r^{\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} + \left\{ c^{1\frac{1}{2}} \frac{\partial \beta_r^{1\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} \\ &= \frac{k\alpha}{2h} \left\{ (c^{1\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial w_s^{1\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} \\ &\cong l_{n+1}^1 \\ \left. \frac{\partial f_{n+1}^1}{\partial x^{N+2}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= \frac{k}{h} \end{aligned}$$

de rest van de elementen in de rij leveren de waarde nul op.

Voor de berekening van de elementen in de m^{de} -rij van de matrix met $m = 2, \dots, N - 1$ geldt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_{n+1}^m}{\partial x^{m-1}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= p^{m-1\frac{1}{2}} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} = p_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} \\ \left. \frac{\partial f_{n+1}^m}{\partial x^m} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= q^{m-\frac{1}{2}} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} = q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} \\ \left. \frac{\partial f_{n+1}^m}{\partial x^{m+1}} \right|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} &= r^{m-1\frac{1}{2}} \Big|_{\underline{x}=\tilde{x}_{n+1}} = r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_{n+1}^m}{\partial x^{N+1}} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} &= \left\{ c^{m-1\frac{1}{2}} \frac{\partial p^{m-1\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} + \left\{ c^{m-\frac{1}{2}} \frac{\partial q^{m-\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} + \left\{ c^{m+\frac{1}{2}} \frac{\partial r^{m+\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&= \frac{k\alpha}{2h} \left\{ c^{m-1\frac{1}{2}} \frac{\partial w_s^{m-1}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} + \frac{k\alpha}{2h} \left\{ c^{m-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial w_o} (w_s^{m-1} - w_s^m) \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&\quad + \frac{k\alpha}{2h} \left\{ c^{m+\frac{1}{2}} \frac{\partial w_s^m}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&= \frac{k\alpha}{2h} \left\{ (c^{m-\frac{1}{2}} + c^{m-1\frac{1}{2}}) \frac{\partial w_s^{m-1}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} - \frac{k\alpha}{2h} \left\{ (c^{m+\frac{1}{2}} + c^{m-\frac{1}{2}}) \frac{\partial w_s^m}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&\equiv l_{n+1}^m
\end{aligned}$$

de rest van de elementen in de rijen $m = 2, \dots, N-1$ leveren de waarde nul op.
De elementen in de N^{de} -rij in de matrix zijn:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_{n+1}^N}{\partial x^{N-1}} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} &= \alpha_r^{N-1\frac{1}{2}} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} = \alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} \\
\left. \frac{\partial f_{n+1}^N}{\partial x^N} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} &= \beta_r^{N-\frac{1}{2}} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} = \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} \\
\left. \frac{\partial f_{n+1}^N}{\partial x^{N+1}} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} &= \left\{ c^{N-1\frac{1}{2}} \frac{\partial \alpha_r^{N-1\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} + \left\{ c^{N-\frac{1}{2}} \frac{\partial \beta_r^{N-\frac{1}{2}}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&= \frac{k\alpha}{2h} \left\{ (c^{N-\frac{1}{2}} + c^{N-1\frac{1}{2}}) \frac{\partial w_s^{N-1}}{\partial w_o} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_{n+1}} \\
&\equiv l_{n+1}^N
\end{aligned}$$

de rest van elementen in de rij leveren de waarde nul op.
voor de elementen van de laatste twee rijen, de $(N+1)^{de}$ en $(N+2)^{de}$ -rij, geldt:

$$\left. \frac{\partial f_{n+1}^{N+i}}{\partial x^{N+i}} \right|_{x=\tilde{x}_{n+1}} = 1, \quad \text{voor } i = 1, 2$$

de rest van de elementen in de twee rijen leveren de waarde nul op.
In matrixnotatie levert dit de volgende matrix voor $F_{1_{n+1}}$ op:

$$F_{1_{n+1}} = \left[\begin{array}{ccccccccc|cc} \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{n+1}^1 & \frac{k}{h} \\ p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{\frac{2}{2}} & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{2}{2}} & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & q_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & p_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} & l_{n+1}^N & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Dit kan geschreven worden als:

$$F_{1_{n+1}} = \left[\begin{array}{cc} A_{n+1} & L_{n+1} \\ 0 & I_2 \end{array} \right] \quad (5.46)$$

met I_2 de eenheidsmatrix, A_{n+1} volgend uit (5.28) en L_{n+1} gelijk aan:

$$L_{n+1} = \left[\begin{array}{cc} l_{n+1}^1 & \frac{k}{h} \\ l_{n+1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ l_{n+1}^N & 0 \end{array} \right] \quad (5.47)$$

De oplossing van (5.44)

Definieer:

$$B_a = \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{k}{h} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right) \quad (5.48)$$

Daaruit volgt dat, zie (5.29) en (5.33):

$$B_a \theta_{n+1} = B(D - E)_{n+1}$$

Hiermee en met het feit dat (5.35), en daarmee (5.44), een combinatie is van (5.31) en (5.33), kan de oplossing van (5.44) geschreven worden als:

$$\left(\begin{array}{c} A_{n+1}(\tilde{\theta}_{n+1})\tilde{c}_{n+1} + B(D - E)_{n+1} \\ \tilde{\theta}_{n+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \hat{c}_{n|n} \\ \hat{\theta}_{n|n} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1}(\tilde{\theta}_{n+1})\tilde{z}_{n+1} \\ \tilde{\theta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_{n|n} - B_n\tilde{\theta}_{n+1} \\ \hat{\theta}_{n|n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_{n+1} \\ \tilde{\theta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n})\hat{z}_{n|n} - A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n})B_n\hat{\theta}_{n|n} \\ \hat{\theta}_{n|n} \end{pmatrix}$$

Vergelijking (5.42) kan hiermee geschreven worden als:

$$\hat{X}_{n+1|n} = \tilde{z}_{n+1} = A_{3n}\hat{X}_{n|n} \quad (5.49)$$

met

$$A_{3n} = \begin{pmatrix} A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n}) & A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n})B_n \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Hiermee is de afleiding van de filtervergelijkingen van het 1DV-model voltooid. Het resultaat van dit hoofdstuk zijn de gewenste filtervergelijkingen voor het schatten van z en de parameters w_0 en $D - E$.

DE FILTERVERGELIJKINGEN:

$$K_n = P_{n|n-1}M_n[M_n'P_{n|n-1}M_n + R_n]^{-1} \quad (5.50)$$

$$\hat{X}_{n|n} = \hat{X}_{n|n-1} + K_n[Z_n - M_n\hat{X}_{n|n-1}] \quad (5.51)$$

$$P_{n|n} = [I_{N+2} - K_nM_n']P_{n|n-1}[I_{N+2} - K_nM_n'] + K_nR_nK_n' \quad (5.52)$$

$$\hat{X}_{n+1|n} = A_{3n}\hat{X}_{n|n} \quad (5.53)$$

$$P_{n+1|n} = F_nP_{n|n}F_n' + G_nQ_nG_n' \quad (5.54)$$

met beginvoorwaarden:

$$\hat{X}_{0|-1} = \hat{x}_0, \quad P_{0|-1} = \bar{P}_0 \quad (5.55)$$

In deze vergelijkingen zijn $Q(n)$ en $R(n)$ op te geven covariantiematrices van normaal verdeelde witte ($N(0, \sigma^2)$) systeemruis respectievelijk meetruis. Daarnaast zijn F_n en G_n gelijk aan de inverse van F_{1n+1} , zie (4.18). Met F_{1n+1} volgend uit:

$$F_{1n+1} = \begin{bmatrix} A_{n+1} & L_{n+1} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

met hierin L_{n+1} gelijk aan:

$$L_{n+1} = \begin{bmatrix} l_{n+1}^1 & \frac{k}{h} \\ l_{n+1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ l_{n+1}^N & 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

en

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{\frac{1}{2}} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & p_{n+1}^{\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & q_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & p_{n+1}^{N-2\frac{1}{2}} & q_{n+1}^{N-1\frac{1}{2}} & r_{n+1}^{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} & \beta_{r_{n+1}}^{N-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Verder is A_{3_n} in (5.53) gelijk aan:

$$A_{3_n} = \begin{pmatrix} A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n}) & A_{n+1}^{-1}(\hat{\theta}_{n|n})B_a \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

met hierin:

$$\hat{\theta}_{n+1} = \begin{pmatrix} w_{\theta_{n+1}} \\ (D - E)_{n+1} \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

en

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{h} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Daarnaast is M_n in (5.51) en (5.52) gelijk aan:

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

met de één op de plek die overeen komt met de hoogte in de waterkolom waarop de slibconcentratie op $t = t_n$ gemeten is (ter verduidelijking: er zijn drie meethoogtes). De waarden van p, q, r, α en β in A_{n+1} volgen uit, $m \in 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{m-1\frac{1}{2}} &= \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{m-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} \\ q_{n+1}^{m-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} (w_{s_{n+1}}^{m-1} - w_{s_{n+1}}^m) + \frac{k}{h^2} (\Gamma_{r_{n+1}}^{m-1} + \Gamma_{r_{n+1}}^m) \\ r_{n+1}^{m+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^m + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^m \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^1 - \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \\
\beta_{r_{n+1}}^{\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^1 + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^1 \right) , \\
\alpha_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} &= \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} - \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{N-1} \\
\beta_{r_{n+1}}^{N-1\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H_n}{H_{n+1}} - 1 \right) + \frac{k}{2h} w_{s_{n+1}}^{N-1} + \frac{k}{h^2} \Gamma_{r_{n+1}}^{N-1}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Hierin volgen H_n en H_{n+1} uit de reeds bekende reeks met waterhoogten. Daarnaast wordt $\Gamma_{r_{n+1}}^m$ berekend door het 1DV-model en is $w_{s_{n+1}}^m$ gelijk aan, zie (5.32):

$$w_{s_{n+1}}^m = w_{o_{n+1}} (c_{n+1}^m)^{m_L} \frac{1 + a G_{n+1}^m}{1 + b (G_{n+1}^m)^2} , \quad \text{voor } m = 1, \dots, N-1 \tag{5.64}$$

met a, b en m_L in te voeren coëfficiënten, $w_{o_{n+1}}$ de schatting van w_o in $X_{n|n}$ (vanwege $\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_{n|n}$) en de absolute snelheidsgradiënt G_{n+1}^m volgt uit:

$$G_{n+1}^m = \sqrt{\frac{\epsilon_{n+1}^m}{\nu_{r_{n+1}}^m}} , \quad \text{voor } m = 1, \dots, N-1 \tag{5.65}$$

De grootheden ϵ_{n+1}^m en $\nu_{r_{n+1}}^m$ uit deze vergelijking worden berekend door het 1DV-model. Dat $\gamma_{r_{n+1}}^m$, ϵ_{n+1}^m en $\nu_{r_{n+1}}^m$ bekend zijn voor de voorspelling van de toestand X_{n+1} is niet vanzelfsprekend. Als er geen sprake is van dichtheidsterugkoppeling dan zijn de waarden van deze grootheden niet afhankelijk van de schattingen van c , w_o en $D - E$. In dat geval kunnen de grootheden $\gamma_{r_{n+1}}^m$, ϵ_{n+1}^m en $\nu_{r_{n+1}}^m$ van te voren met het 1DV-model berekend worden. Als er echter sprake is van dichtheidsterugkoppeling dan gaat dit niet meer op. De waarden van de genoemde grootheden zijn dan afhankelijk van de slibconcentratie en daarmee van de geschatte toestand. In dat geval zullen voor $\gamma_{r_{n+1}}^m$, ϵ_{n+1}^m en $\nu_{r_{n+1}}^m$ de bekende waarden van een tijdstap terug genomen moeten worden, dit hoeft geen problemen op te leveren voor de schattingen. Dit houdt tevens in dat zowel de slibconcentraties als de schattingen van w_o en $D - E$ berekend in de correctiestap $X_{n|n}$, zie (5.51), in het 1DV-model gebruikt dienen te worden als beginvoorwaarde voor het berekenen van $\gamma_{r_{n+1}}^m$, ϵ_{n+1}^m en $\nu_{r_{n+1}}^m$.

Hoofdstuk 6

Het filteren

In het vorige hoofdstuk zijn filtervergelijkingen afgeleid waarmee schattingen voor de slibconcentraties en schattingen voor de parameters w_0 en $D - E$ verkregen worden. Deze schattingen worden gemaakt aan de hand van bekende slibconcentraties. Voordat schattingen gemaakt gaan worden is het gewenst om te weten of het systeem wel waarneembaar is. Met andere woorden: is het filter in staat ervoor te zorgen dat de schatting van ieder element in de toestand naar de beste waarde toe gaat. Voor lineaire systemen geldt dat het systeem waarneembaar is als de waarneembaarheidsmatrix van het systeem volle rang heeft. Voor een niet-lineair systeem, waar hier sprake van is, is dit niet zo eenvoudig omdat de waarneembaarheidsmatrix voor iedere tijdstip anders is en er gebruik wordt gemaakt van een (lineaire) benadering. Om meer over de waarneembaarheid van het systeem te weten te komen wordt gebruik gemaakt van een truthmodel. Dit houdt in dat met behulp van fictieve gegevens het filtergedrag wordt onderzocht. Blijkt het gedrag naar wens te zijn dan wordt aangenomen dat het systeem waarneembaar is. In §6.1 wordt het filtergedrag getest met behulp van een truthmodel. Vervolgens is er in §6.2 een begin gemaakt van het filteren met de door het meetpunt 'De Zeekat' gemeten slibconcentraties vanaf 30-10-'87. Tenslotte wordt in §6.3 de balans opgemaakt van de tot nu toe verkregen filterresultaten.

6.1 Onderzoeken filtergedrag

Het onderzoeken van het filtergedrag wordt gedaan met behulp van een truthmodel. Dat wil zeggen dat er met behulp van de deterministische oplossing van het systeem, met bepaalde beginwaarden, fictieve meetgegevens gegenereerd zullen worden. De waarden van de slibconcentraties en de parameters w_0 en $D - E$ zijn zodoende bekend. Door daarna te filteren met de fictieve meetgegevens en andere beginwaarden zal bekeken kunnen worden of het filter in staat is om ervoor te zorgen dat de schattingen van de slibconcentraties en de parameters w_0 en $D - E$ naar de juiste waarden toe gaan. Daarbij zij vermeld dat in

het hele hoofdstuk wordt gefilterd met de volgende waarden voor de andere mogelijk te veranderen coëfficiënten en grootheden:

$$z_o = 0.0095, w_o = 0.0025, a = 0.3, b = 0.03, m = 0 \quad (6.1)$$

Het genereren van fictieve meetgegevens

Het discrete systeem waarmee de slibconcentraties kunnen worden berekend is (5.35). De deterministische oplossing van dit systeem is gelijk aan de voorspelstap van de filtervergelijkingen (5.53):

$$X_{n+1} = A_{3n} X_n \quad (6.2)$$

Hierin volgt A_{3n} uit (5.59). Daarnaast zijn de dakjes weggelaten omdat het nu geen schattingen meer zijn. Als beginwaarde voor deze recursieve vergelijking is gekozen voor:

$$X_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ \ell_0 \\ w_0 \\ (D-E)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ c_0^{N-\frac{1}{2}} \\ w_0 \\ (D-E)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06 \\ \vdots \\ 0.06 \\ 0.0025 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Verder dienen voor A_{3n} en F_{n+1} (benodigd in de volgende stap van het truthmodel) de waarden van $\Gamma_{T_{n+1}}^m = \frac{\nu_{T_{n+1}}^m}{\sigma_T}$ en $\epsilon_{T_{n+1}}^m$ bekend te zijn, voor $m = 1, \dots, N-1$ en $n \geq 0$ (zie (5.56), (5.58) en (5.63) t/m (5.65)). Begonnen wordt met het filteren zonder dichtheidsterugkoppeling. Daardoor zijn de zojuist genoemde grootheden niet afhankelijk van de toestandsschatting. De waarden van deze grootheden kunnen als gevolg daarvan berekend worden met het 1DV-model voordat er gefilterd wordt. Voor het berekenen van de toestand X_{n+1} met (6.2) zijn zodoende de waarden van $\Gamma_{T_{n+1}}$, $\nu_{T_{n+1}}$ en $\epsilon_{T_{n+1}}$ bekend. Verder zij opgemerkt dat in (6.2) geldt dat $\ell_{n+1} = \ell_0$ voor $n \geq 0$. De waarden van w_o en $D-E$ in deze recursieve vergelijking blijven zodoende gelijk aan hun startwaarde.

Vervolgens zijn met (6.2) de waarden van de toestand berekend voor $t=0,4,\dots,800$ [min]. Uit elk van de toestanden zijn de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 gehaald. Daarna is normaal-verdeelde witte ruis aan deze slibconcentraties toegevoegd met een standaarddeviatie van $0.005 \left\{ \frac{kg}{m^3} \right\}$, dit is ongeveer 10 % van het gemiddelde van de drie gemeten slibconcentraties. Bij het toevoegen van de ruis is de absolute waarde van de ruis plus slibconcentratie genomen omdat anders de fictieve slibconcentratie negatief zou kunnen worden (wat fysisch gezien niet mogelijk is). Zoals gezegd is door het meetpunt 'De Zeekat' per vier minuten één van de drie slibconcentraties gemeten. Daarom is per tijdstip, waarvoor de fictieve slibconcentraties zijn berekend en bewaard, het cijfer 1,2 of 3 toegevoegd. Dit om aan te geven welke van de drie slibconcentraties op dat tijdstip bekend wordt verondersteld. Zodoende zijn fictieve meetgegevens verkregen.

6.1.1 Per vier minuten één slibconcentratie bekend en geen dichtheidsterugkoppeling

Vervolgens is er gefilterd met de filtervergelijkingen (5.50) t/m (5.54) waarbij voor Z_n de gegenereerde fictieve meetgegevens zijn gebruikt. Zoals gezegd is bij het genereren van de fictieve meetgegevens $N(0,000025)$ -verdeelde meetruis toegevoegd, zodat de covariantiematrix R in de filtervergelijkingen gelijk dient te zijn aan:

$$\text{diag. } R = \begin{bmatrix} 0.000025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000025 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Om een instrument te hebben om te kunnen controleren of de elementen in de toestandschatting naar hun correcte waarde convergeren wordt de afwijking $\zeta_{n+1|n+1}$ gedefinieerd:

$$\zeta_{n+1|n+1} = \hat{X}_{n+1|n+1} - X_{n+1} \quad (6.5)$$

Hierin is X_{n+1} de deterministische oplossing van (6.2), die gebruikt is voor het genereren van de fictieve meetgegevens. De afwijking $\zeta_{n+1|n+1}$ is zodoende de fout in de schatting van X_{n+1} . Eenvoudig is af te leiden dat de verwachting van $\zeta_{n+1|n+1}$ gelijk is aan nul.

$$E(\zeta_{n+1|n+1}) = 0 \quad (6.6)$$

Vanwege het deterministisch zijn van X_{n+1} is de variantie van $\zeta_{n+1|n+1}$ gelijk aan de variantie van $\hat{X}_{n+1|n+1}$:

$$\text{Var } \zeta_{n+1|n+1} = E[(\zeta_{n+1|n+1})(\zeta_{n+1|n+1})'] = P_{n+1|n+1} \quad (6.7)$$

Volgens de tabel van de standaard normale verdeling dienen 68 % van de berekende afwijkingen binnen de grenzen van de standaarddeviatie $((P_{n+1|n+1})^{\frac{1}{2}})$ te liggen. Blijkt de afwijking $\zeta_{n+1|n+1}$ aan deze statistische eis te voldoen, dan is hiermee aangetoond dat het systeem waarneembaar is.

Voor het onderzoeken van het filtergedrag is er geëxperimenteerd met de variantie van de systeemruis, de variantie van X_0 en met de waarde van X_0 . Daarbij is gekeken naar de grafieken van vijf elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$ die tesamen met de bijbehorende varianties uitgezet zijn tegen de tijd. De afgebeelde elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$ zijn:

- de afwijking van de schatting van de slibconcentratie van laag 5 overeenkomend met 1.62 meter onder het wateroppervlak,

- de afwijking van de schatting van de slibconcentratie van laag 30 overeenkomend met 41 % (7.2 meter) boven de bodem,
- de afwijking van de schatting van de slibconcentratie van laag 44 overeenkomend met 2.34 meter boven de bodem,
- de afwijking van de schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o ,
- en de afwijking van de schatting van erosie en sedimentatie, $D - E$.

Het resultaat is dat de elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$ na enkele filterstappen meer dan de standaarddeviatie van $\zeta_{n+1|n+1}$ afwijken van de correcte waarde, ook als bij het genereren van de fictieve meetgegevens minder meetruis werd toegevoegd. Aan de statistische eis van $\zeta_{n+1|n+1}$ wordt zodoende niet voldaan, waaruit het volgende word geconcludeerd.

Conclusie: Het systeem is niet waarneembaar als er per vier minuten slechts één slibconcentratie van één van bekend wordt verondersteld.

6.1.2 Per vier minuten drie slibconcentraties bekend en geen dichtheidsterugkoppeling

Om tot een verbetering van het filtergedrag te komen is gekozen voor het per vier minuten bekend laten zijn van drie slibconcentraties. Later, bij het filteren met de gemeten slibconcentraties, kunnen de ontbrekende slibconcentraties verkregen worden door middel van interpolatie tussen opeenvolgende slibmetingen van dezelfde hoogte. Deze creatie van extra slibconcentraties zal naar verwachting het schatten van de toestand niet al te veel 'vervalslen' omdat de pieken in het signaal van de gemeten slibconcentraties minimaal twintig minuten duren. Het bekend zijn van drie slibconcentraties in de correctiestap van het filter heeft tot gevolg dat de meetmatrix M_n aangepast dient te worden tot het volgende:

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Hierin zijn de éénen zo gekozen dat ze overeenkomen met de drie hoogtes waarop het meetpunt 'De Zeekat' destijds de slibconcentraties gemeten heeft. Door vervolgens geen acht meer te slaan op de toegevoegde 1,2 of 3 (ter aanduiding van welke slibconcentratie op welk tijdstip bekend is) in de file met de fictieve meetgegevens, kunnen de 'oude' fictieve meetgegevens gebruikt worden voor het onderzoeken van het filtergedrag van de aangepaste filtervergelijkingen. Vervolgens zijn weer een aantal experimenten uitgevoerd.

Filteren zonder systeemruis

De 'oude' fictieve meetgegevens zijn gecreëerd met de oplossing van het discrete systeem, waarmee tevens gefilterd wordt. De systeemruis is zodoende gelijk aan nul. Met het filter is vervolgens getracht, naast het schatten van $\underline{c}$, één van de beide andere parameters te schatten. Voor het onderzoeken van het filtergedrag is daarbij weer gekeken naar de grafieken van de vijf eerder genoemde elementen van $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$. In al deze grafieken bleek meer dan 68 % van de berekende afwijkingen kleiner te zijn dan de standaarddeviatie van $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$. Aan de hand daarvan werd geconcludeerd dat alle elementen van $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$ voldoen aan de statistische eis en dus dat het filter waarneembaar is als de slibconcentraties $\underline{c}$ en één van de parameters w_o of $D - E$ geschat worden. Vervolgens is getracht naast het schatten van $\underline{c}$ beide parameters tegelijk te schatten, met de begintoestand $\bar{\underline{X}}_0$ en de diagonaal¹ van de covariantiematrix $\bar{P}_0$ gelijk aan:

$$\bar{\underline{X}}_0 = \begin{pmatrix} 0.057 \\ \vdots \\ 0.057 \\ 0.0015 \\ 0.0002 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } \bar{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ \vdots \\ 0.0001 \\ 0.000004 \\ 0.0000001 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

In de figuren 6.1 t/m 6.3 zijn de afwijkingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 afgebeeld. Daarnaast zijn in de figuren 6.4 en 6.5 de afwijkingen van de parameters w_o en $D - E$ afgebeeld. Verder zijn, ter verduidelijking van de grafieken met de afwijkingen, de geschatte slibconcentraties tesamen met fictieve slibconcentraties (zonder meetruis!) uitgezet tegen de tijd in figuur 6.6. Uit deze grafieken is het volgende afgeleid:

- Over het gehele interval genomen voldoen de afwijkingen van alle vijf de elementen van $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$ aan de genoemde statistische eis. Aan de hand daarvan is geconcludeerd dat het systeem waarneembaar is voor alle elementen van $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$.
- Het filter heeft moeite om de afwijking $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$ van de slibconcentraties klein te houden bij een snelle toe dan wel afname van de gemeten slibconcentraties.
- De schatting van $D - E$ convergeert snel naar de juiste waarde toe. De schatting van w_o gaat daarentegen een stuk trager naar de juiste waarde toe.

Filteren met systeemruis

Zoals te zien is in de figuren 6.4 en 6.5 gaan de standaarddeviaties van de afwijking $\underline{\zeta}_{n+1|n+1}$ naar nul voor de parameters w_o en $D - E$. Daardoor is het filter op latere tijdstippen niet meer in staat om het systeem bij te sturen door het aanpassen van de schatting van w_o dan wel van $D - E$. Om ervoor te zorgen dat het systeem hiertoe wel in staat is, wat gewenst is, wordt systeemruis aan de parameters w_o en $D - E$ toegevoegd

¹De diagonaalelementen van de covariantiematrix $\bar{P}_0$ komen overeen met de varianties van de elementen van $\bar{\underline{X}}_0$, de rest van elementen in de matrix worden gelijk aan nul genomen.

met een standaarddeviatie van $0.5 * 10^{-3} [\frac{m}{s}]$ respectievelijk $10^{-4} [\frac{kg}{m^2 s}]$. De diagonaal van de covariantiematrix Q ziet er dan als volgt uit:

$$\text{diag.} Q = \begin{pmatrix} Q_{c\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ Q_{cN-\frac{1}{2}} \\ Q_{w_o} \\ Q_{D-E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0.00000025 \\ 0.0000001 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

De rest van de startwaarden is gelijk aan 6.9. In de figuren 6.7 t/m 6.9 zijn de afwijkingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 afgebeeld. Daarnaast zijn in de figuren 6.10 en 6.11 de afwijkingen van de parameters afgebeeld. Verder zijn de geschatte slibconcentraties weer tesamen met fictieve slibconcentraties (zonder meetruis!) uitgezet tegen de tijd in figuur 6.12. Uit de resultaten is af te leiden dat:

- de afwijkingen van alle vijf de elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$ nog steeds voldoen aan de genoemde statistische eis. Aan de hand daarvan is geconcludeerd dat het systeem waarneembaar is voor alle elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$.
- het filter door het toevoegen van systeemruis voor w_o en $D - E$ beter in staat is om de afwijkingen niet groter te laten worden dan de standaarddeviatie van $\zeta_{n+1|n+1}$.

Conclusie:

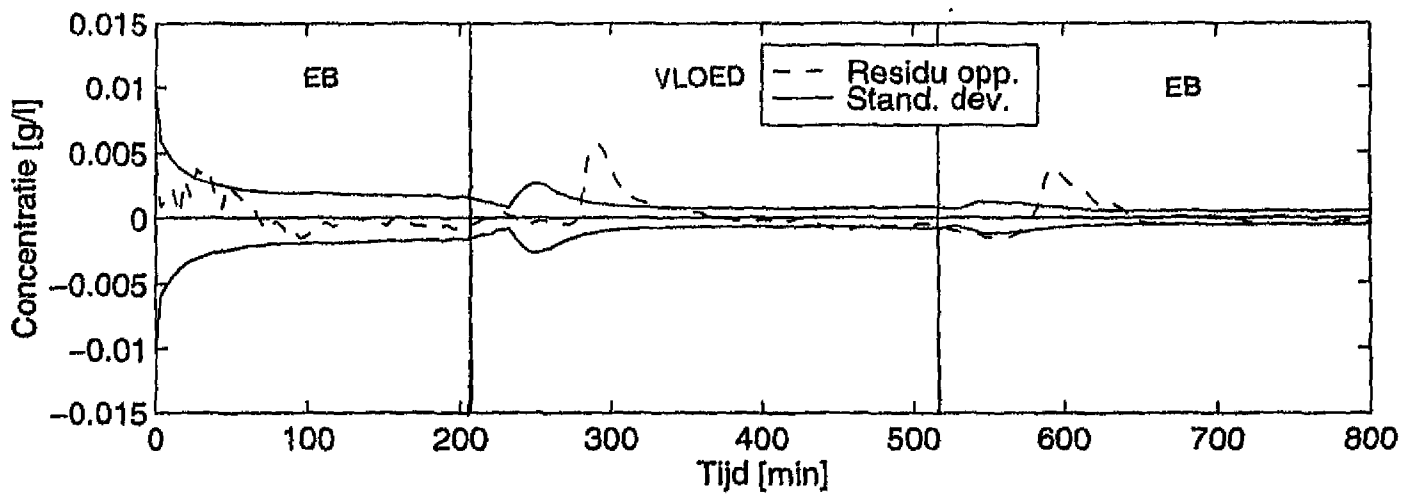
Het systeem is waarneembaar als per vier minuten drie slibconcentraties bekend zijn.

6.2 Filteren met gemeten slibconcentraties

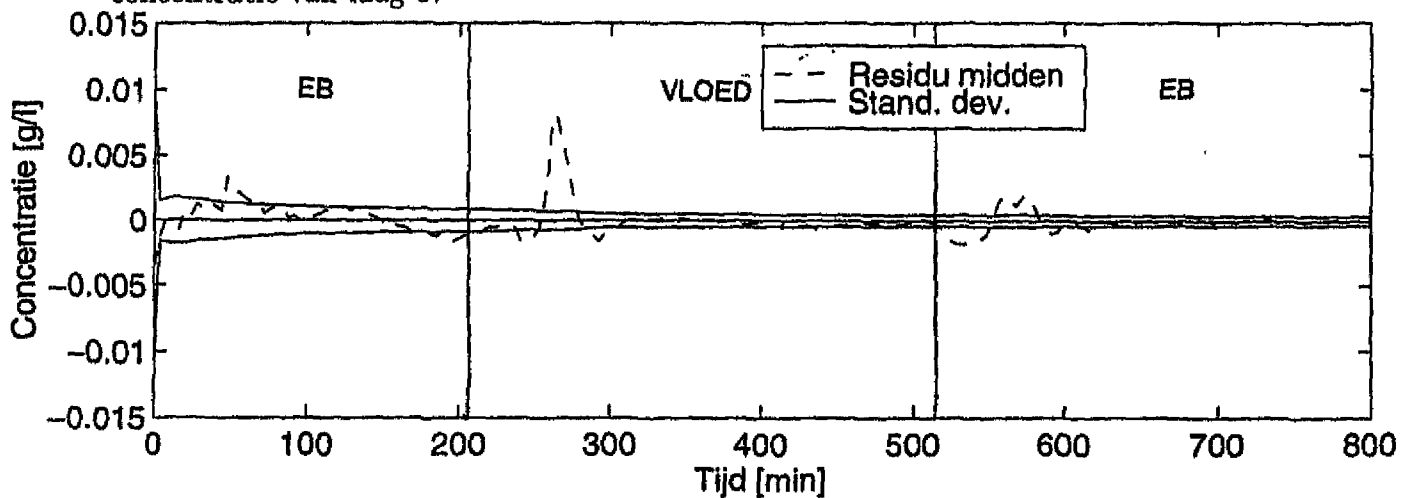
In deze paragraaf is er gefilterd met de door het meetpunt 'De Zeekat' gemeten slibconcentraties vanaf 30-10-'87. Door interpolatie tussen de opeenvolgende slibconcentraties van dezelfde meethoogte, is per vier minuten van alle drie de meethoogtes de slibconcentratie bekend. De afwijking $\zeta_{n+1|n+1}$ zoals gedefinieerd in (6.5) is nu niet meer bruikbaar omdat $\underline{X}_n$ niet meer bekend is. Om toch het filtergedrag bij het filteren met gemeten slibconcentraties te kunnen onderzoeken is het volgende residu gedefinieerd, zie [8]:

$$r_{n+1|n} = Z_{n+1} - E[Z_{n+1}|\bar{Z}_n] = Z_{n+1} - H_{n+1}\hat{X}_{n+1|n} \quad (6.11)$$

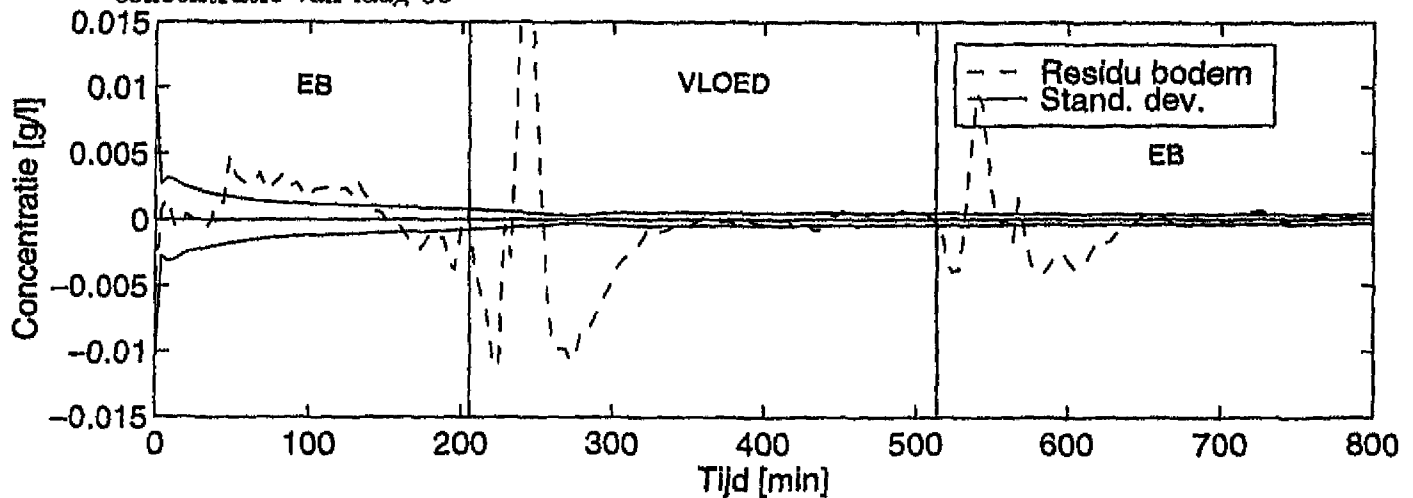
Dit wordt het voorspelde residu (meer precieser, de voorspelde meetfout van het residu) genoemd. De correctie van de toestandsschatting $\hat{X}_{n|n}$ is proportioneel aan het voorspelde



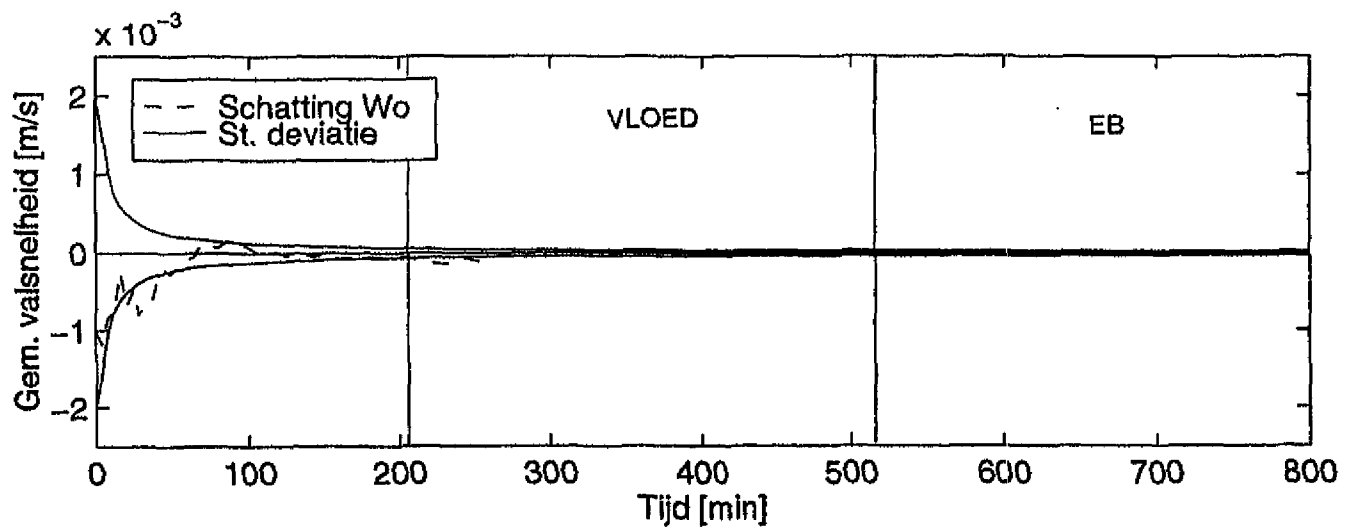
Figuur 6.1: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 5.



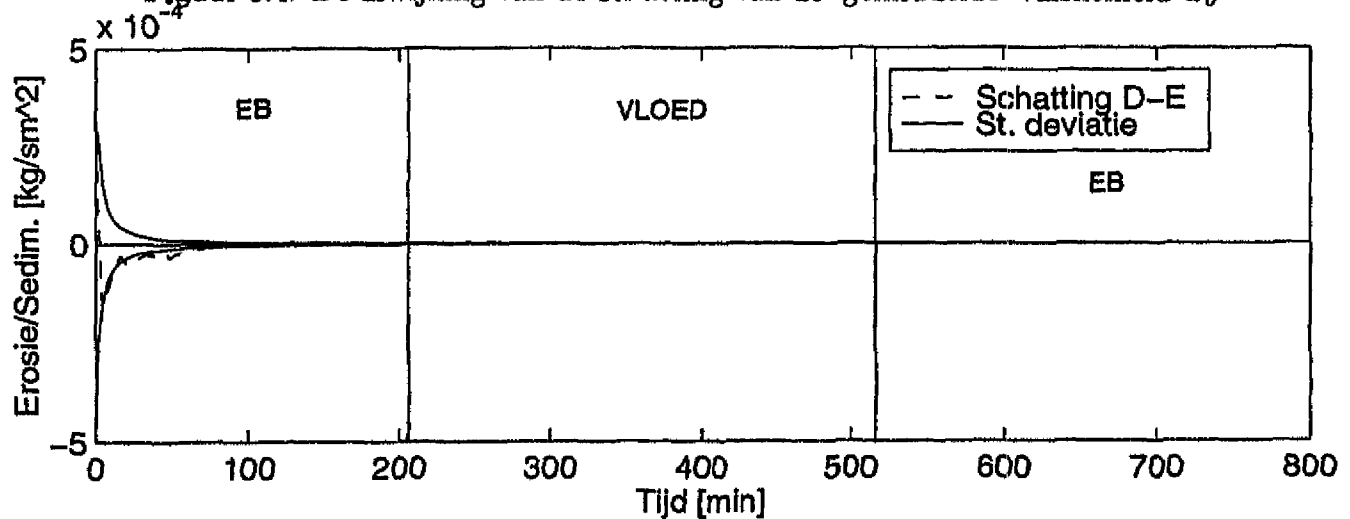
Figuur 6.2: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 30



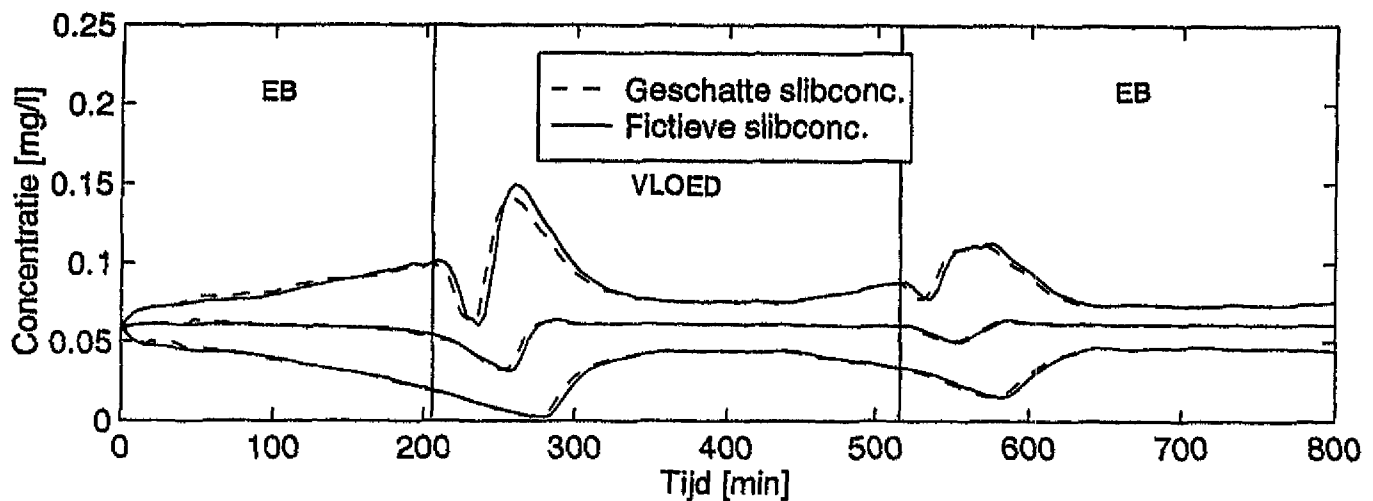
Figuur 6.3: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de geschatte slibconcentratie van laag 44



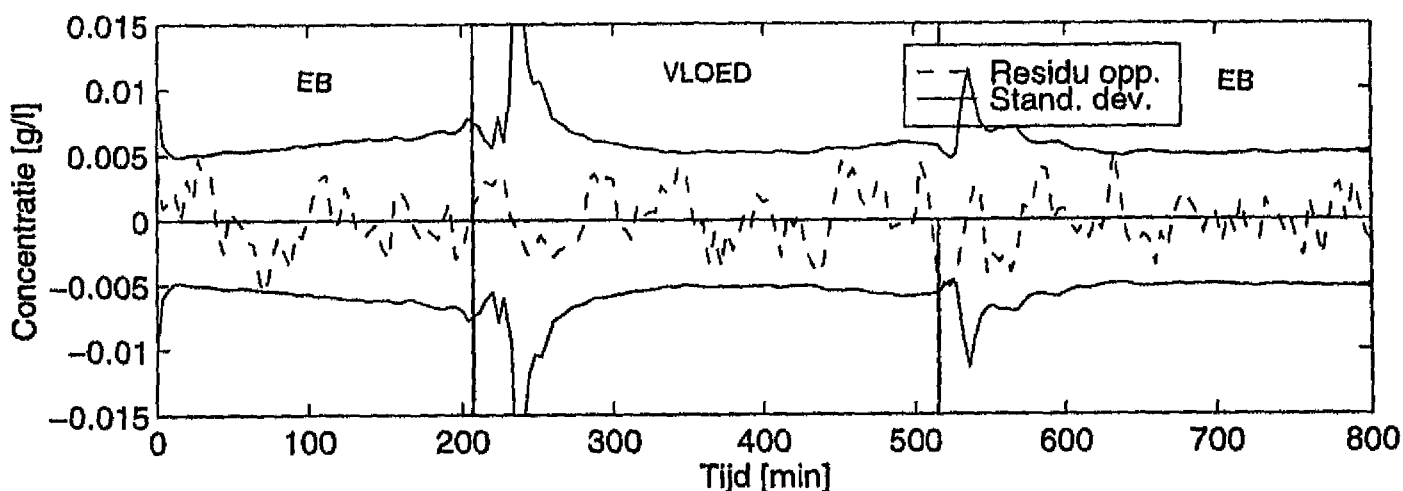
Figuur 6.4: De afwijking van de schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o



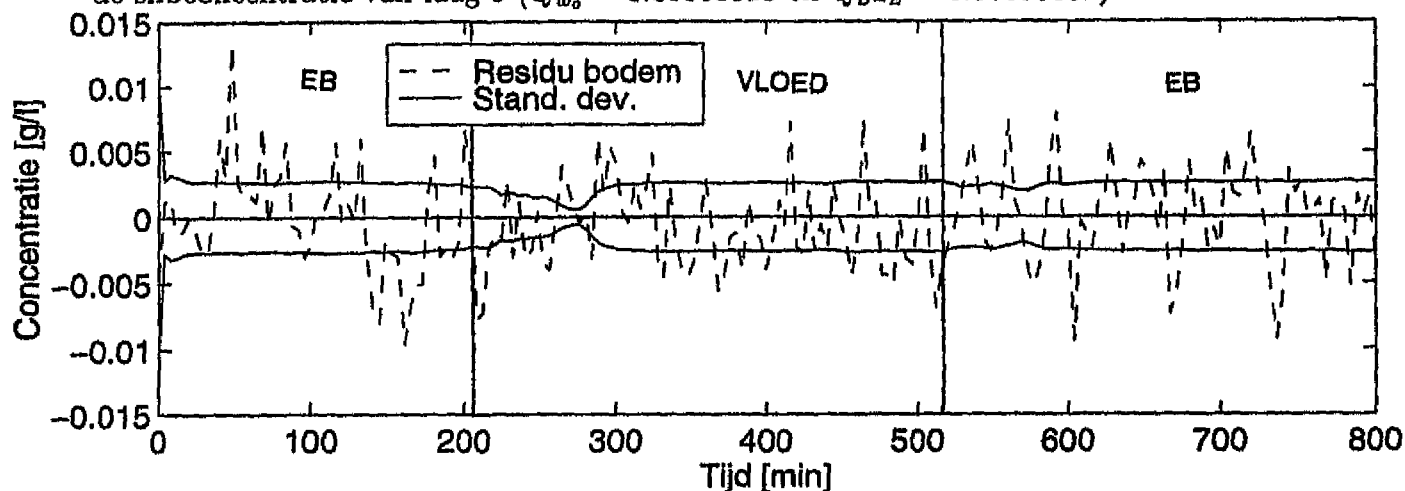
Figuur 6.5: De afwijking van de schatting van de erosie en sedimentatie $D - E$



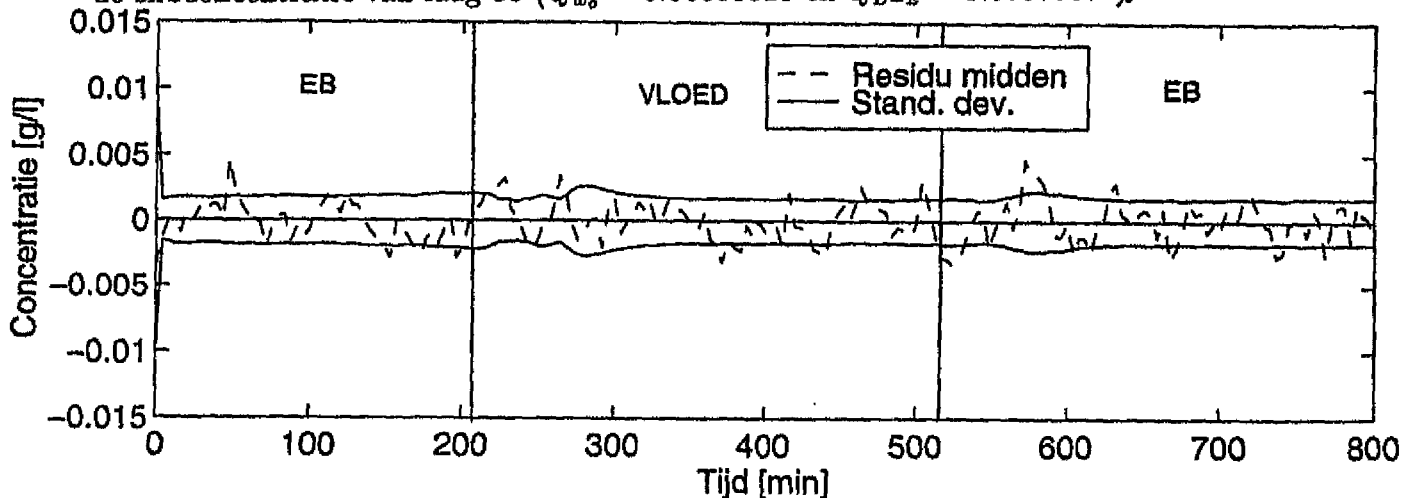
Figuur 6.6: De fictieve slibconcentraties (zonder ruis!) tesamen met de geschatte slibconcentraties uitgezet tegen de tijd, met van boven naar beneden de slibconcentraties van lagen de 5,30 en 44.



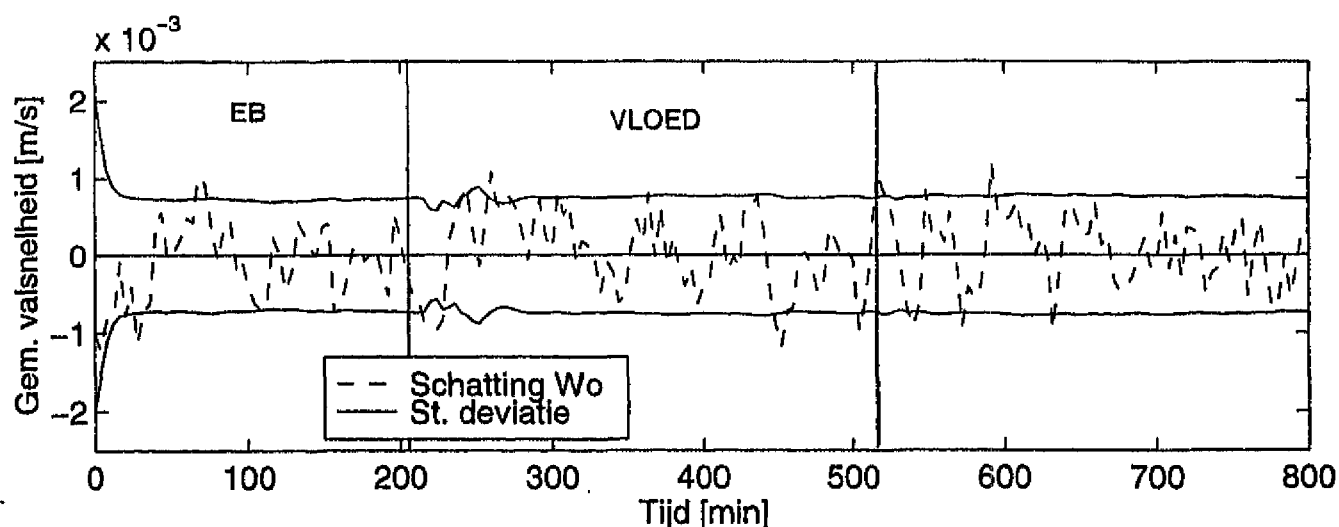
Figuur 6.7: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 5 ($Q_{w_0} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



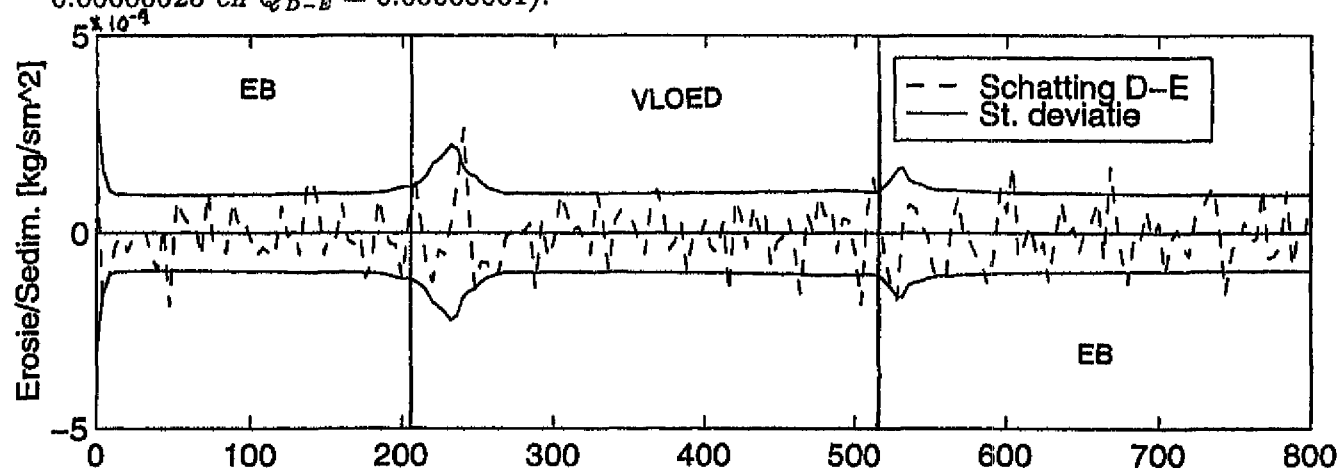
Figuur 6.8: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 30 ($Q_{w_0} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



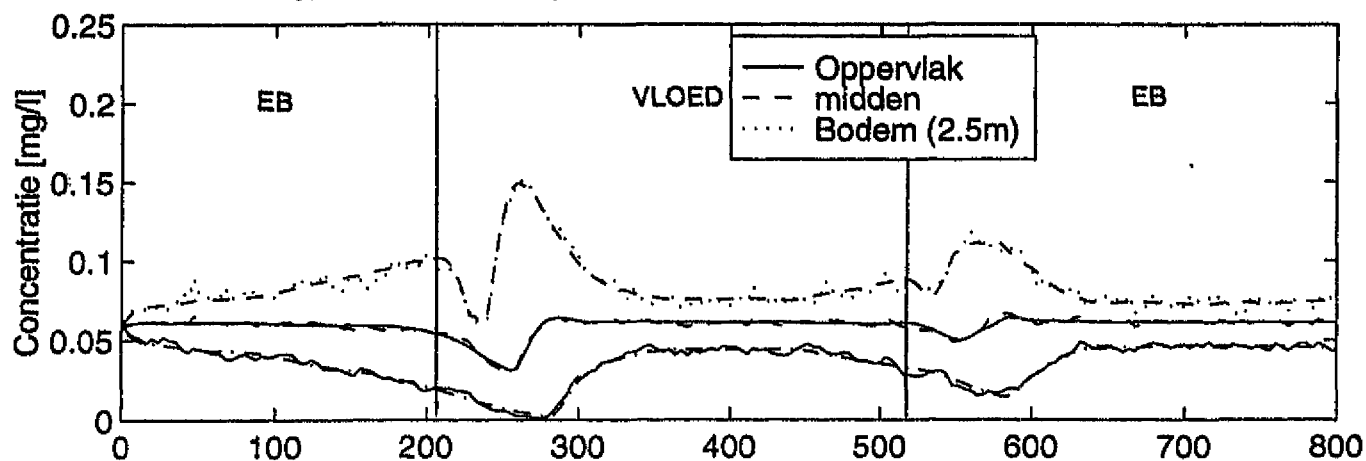
Figuur 6.9: De afwijking, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de schatting van de slibconcentratie van laag 44 ($Q_{w_0} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



Figuur 6.10: De afwijking van de schatting van 'gemiddelde' valssnelheid w_o ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



Figuur 6.11: De afwijking van de schatting van de erosie en sedimentatie, $D - E$ ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



Figuur 6.12: De fictieve slibconcentraties (zonder ruis!) tesamen met de geschatte slibconcentraties uitgezet tegen de tijd, met van boven naar beneden de slibconcentraties van lagen de 5,30 en 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).

residu. Eenvoudig is te berekenen dat de verwachting van het voorspelde residu nul is. De variantie ervan is als volgt:

$$\text{Var } x_{n+1|n} = E[x_{n+1|n} x_{n+1|n}'] = H_{n+1} P_{n+1|n} H_{n+1}' + R_{n+1} \quad (6.12)$$

Ook hier geldt weer dat de schatting betrouwbaar is als de berekende residuen voor meer dan 68 % binnen het gebied van de standaarddeviaties liggen.

Filteren zonder systeemruis

Vervolgens is er gefilterd met de volgende startwaarden:

$$\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ \vdots \\ 0.06 \\ 0.0025 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } \bar{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ \vdots \\ 0.0001 \\ 0.000004 \\ 0.0000001 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Daarnaast wordt voor de meetruis de standaarddeviatie van $0.005 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ aangehouden, de covariantiematrix R blijft gelijk aan (6.4). In de figuren 6.15 t/m 6.17 zijn de voorspelde residuen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 afgebeeld. Daarnaast zijn in de figuren 6.18 en 6.19 de schattingen van de parameters w_0 en $D - E$ weergegeven. Verder zijn de schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44, overkomend met de meethoogten van 'De Zeekat', uitgezet in figuur 6.25. In figuur 6.27 zijn de gemeten slibconcentraties te zien. In de figuren is te zien dat de voorspelde residuen van de geschatte slibconcentraties merendeels groter zijn dan de standaarddeviatie van het voorspelde residu. Ook bij het filteren met grotere waarden van de meetruis wordt niet voldaan aan de statistische eis. Tevens heeft het toevoegen van systeemruis weinig invloed. Het systeem blijkt zodoende niet waarneembaar als alleen meetruis wordt toegevoegd.

Filteren met systeemruis

Vervolgens is systeemruis voor w_0 en $D - E$ aan het filter toegevoegd. De startwaarden voor het filter zien er dan als volgt uit:

$$\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ \vdots \\ 0.06 \\ 0.0025 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } \bar{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ \vdots \\ 0.0001 \\ 0.000004 \\ 0.0000001 \end{pmatrix}, \quad \text{diag. } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0.00000025 \\ 0.00000001 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Verder blijft de standaarddeviatie van de meetruis $0.005 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$. In de figuren 6.20 t/m 6.22 zijn de voorspelde residuen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 weergegeven. Daarnaast zijn in de figuren 6.23 en 6.24 de schattingen van de parameters w_0 en $D - E$

afgebeeld. Verder zijn de schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44, overkomend met de meethoogten van 'De Zeekat' uitgezet in figuur 6.26. Zoals gezegd is de grafiek van de gemeten slibconcentraties te zien in figuur 6.27. Uit de grafieken is het volgende afgeleid:

- De afwijkingen van alle vijf de elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$ voldoen aan de genoemde statistische eis. Aan de hand daarvan is geconcludeerd dat het systeem waarneembaar is voor alle elementen van $\zeta_{n+1|n+1}$.
- Voor w_o en $D - E$ wordt een goede schatting gevonden. Zo blijkt de gemiddelde waarde van de schatting van w_o rond $0.003 \left[\frac{m}{s}\right]$ te liggen, deze orde van grootte komt overeen met de waarden die handmatig gevonden zijn, zie §3.3.3. Bovendien blijkt het filter met het schatten van w_o en $D - E$ in staat te zijn de te berekenen slibconcentraties bij te sturen. Bij de gebruikte startwaarden wordt de schatting van w_o af en toe negatief, dit duidt op een afwijking van de simulatie door de turbulentie.

Helaas was er geen tijd meer om nog meer experimenten te doen met het filter. De verkregen schattingen van w_o en $D - E$ zijn zodoende naar alle waarschijnlijkheid nog niet optimaal. Zo dient er nog geëxperimenteerd te worden met systeemruis en zou er vanwege het hoger worden van de slibconcentraties naar de bodem toe aan gedacht kunnen worden om de variantie van de systeemruis dan wel meetruis naar de bodem toe te laten afnemen. Tevens kan nog bekeken worden wat het veranderen van de waarden in (6.1) voor gevolgen heeft voor de schattingen van beide parameters.

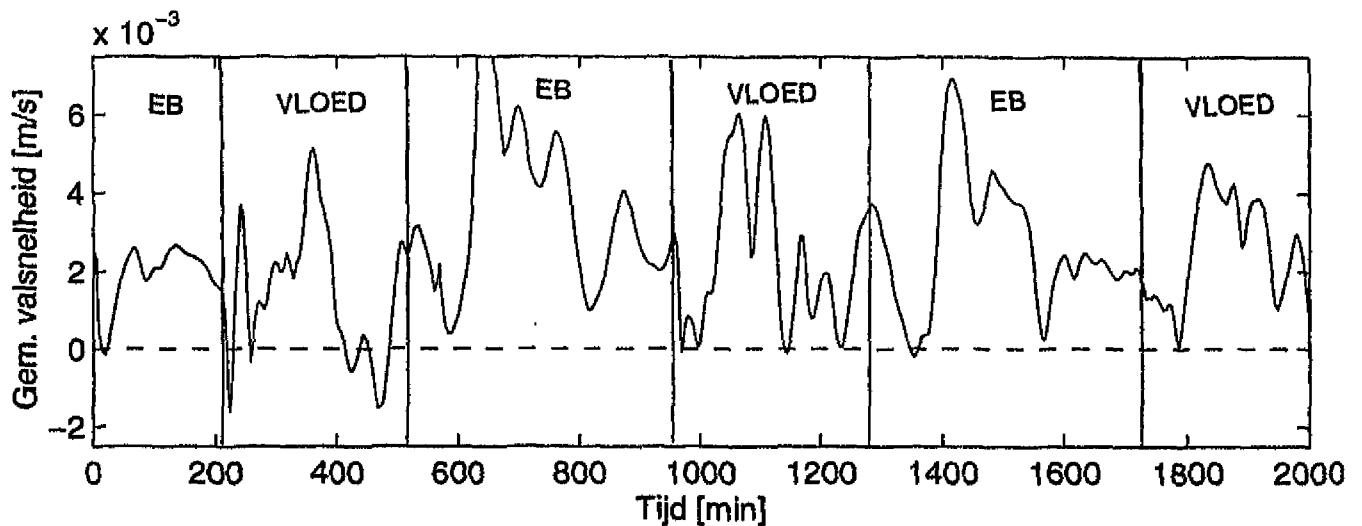
6.3 Balans filterresultaten

Uit filterresultaten tot nu toe worden de volgende conclusies getrokken:

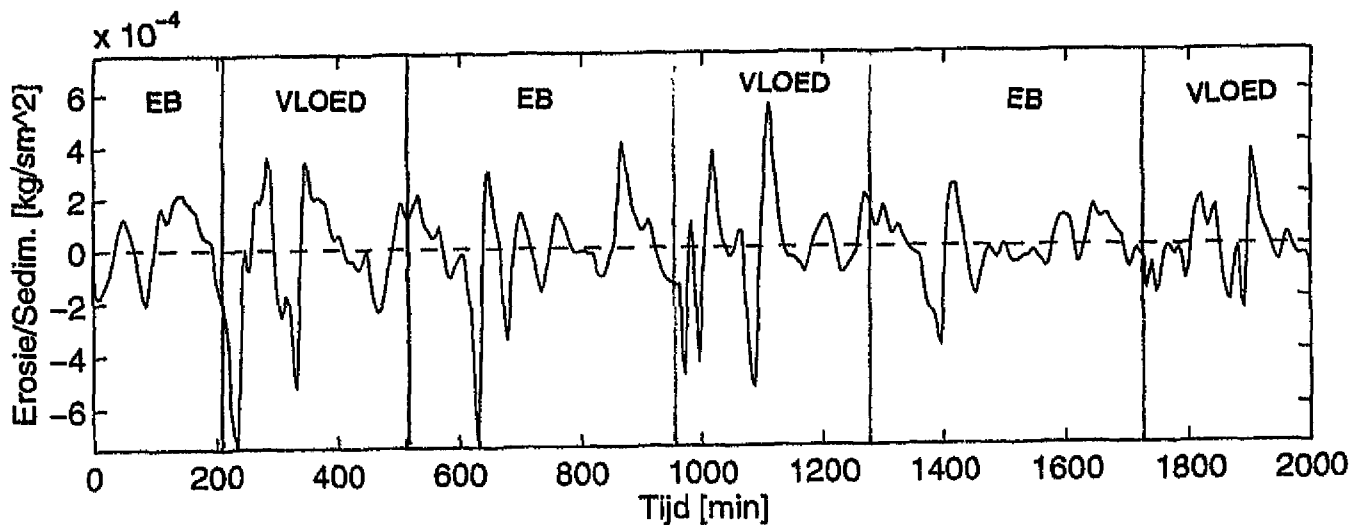
- Door het toevoegen van systeemruis voor w_o en $D - E$, of te wel door het filter de mogelijkheid te geven om gedurende de hele filterperiode de schatting van deze parameters bij te schaven, is het filter in staat om de schattingen van de slibconcentraties het signaal van de gemeten slibconcentraties te laten volgen.
- Het filteren met de gemeten slibconcentraties levert een aannemelijk schatting op voor w_o . De schatting is aannemelijk vanwege het feit dat de gemiddelde orde van grootte overeenkomt met de handmatig gevonden waarde van w_o in §3.3.3.
- Uit de schatting van w_o volgt, vanwege het af en toe negatief worden van de schatting (wat fysisch gezien natuurlijk niet mogelijk is), dat in ieder op die momenten de simulatie van de turbulente diffusie niet in orde is.
- Van de orde van grootte van $D - E$ dient nog onderzocht te worden of deze aannemelijk is. Daarbij dient vermeld te worden dat eventuele advection, dus slib afkomstig van elders, in de schatting zit verwerkt.

Maar wat is nu het nut van het schatten van de parameters w_o en $D - E$? Dit wordt in de volgende punten uitgelegd aan de hand van schattingen van w_o en $D - E$ over een langere tijdreeks, met de startwaarden gelijk aan (6.14). Deze lange tijdreeks van schattingen is te zien in de figuren 6.13 en 6.14.

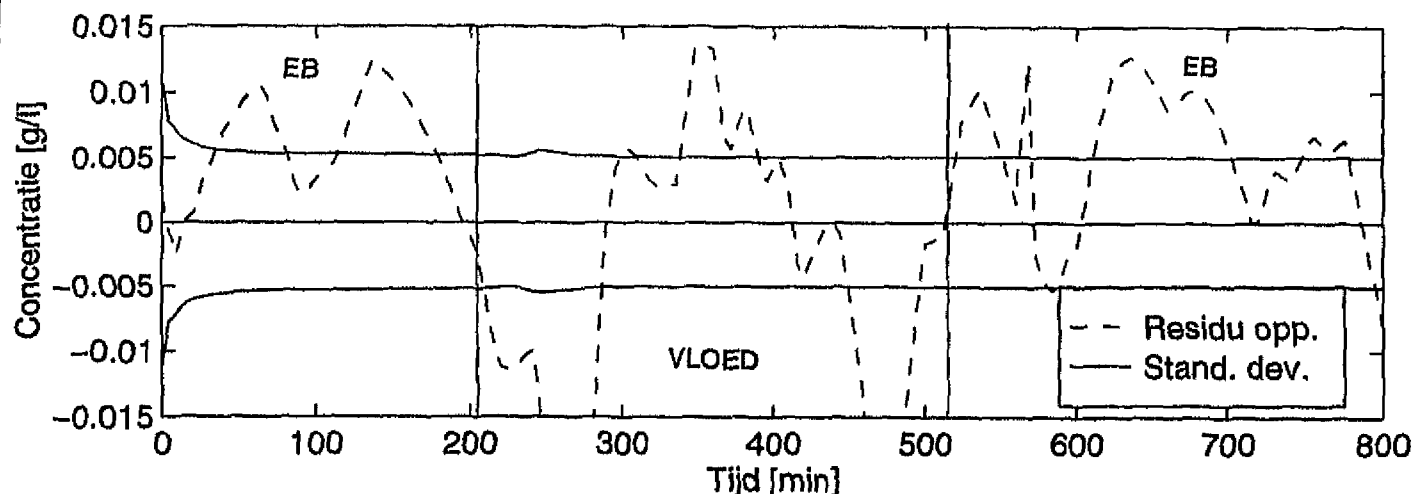
- Ten eerste wordt er met het schatten van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o een idee gekregen van de orde van grootte van de valsnelheid van slib te Middelgat. Tevens volgt uit die schatting dat de (gemiddelde) valsnelheid over het getij varieert.
- Daarnaast wordt met de schatting van $D - E$ een idee verkregen van wanneer er nu erosie en sedimentatie plaatsvindt (hierin zit mogelijk ook advectie van slib van elders verwerkt).
- Verder is het natuurlijk gewenst dat de simulatie van de slibconcentraties door het 1DV-model verbeterd wordt. Zoals in grafiek 1 van de figuren 3.11 en 3.12 is te zien vertoont het simuleren met een constante waarde van w_o , die in de buurt ligt van het gemiddelde van de schatting van w_o , nog grote afwijkingen. Nu is het zo dat er verwacht wordt dat de tijdsafhankelijke invloeden op de hoogte van de slibconcentraties, zoals de 0.5-daagse invloed en doottij/springtij, in de in te voeren gemeten stroomsnelheden zitten verwerkt. Zij dit zo dan zal naar verwachting de schatting van de valsnelheid redelijk robuust zijn. Met robuust wordt hier bedoeld het overeenkomen van de schattingen van w_o en $D - E$ voor meerdere getijden. Door nu de meest robuuste schattingen van w_o en $D - E$ voor een heel getij in het 1DV-model in te voeren zal het 1DV-model beter in staat moeten zijn om de slibconcentraties voor andere getijden te schatten. In de figuren 6.13 en 6.14, dit zijn schattingen van w_o en $D - E$ waarbij de startwaarden gelijk zijn aan (6.14), is te zien dat de schattingen van w_o en $D - E$ van de twee getijden redelijk goed overeenkomen. Naar verwachting zal de robuustheid nog verbeterd kunnen worden als er verder wordt geëxperimenteerd met het filter.



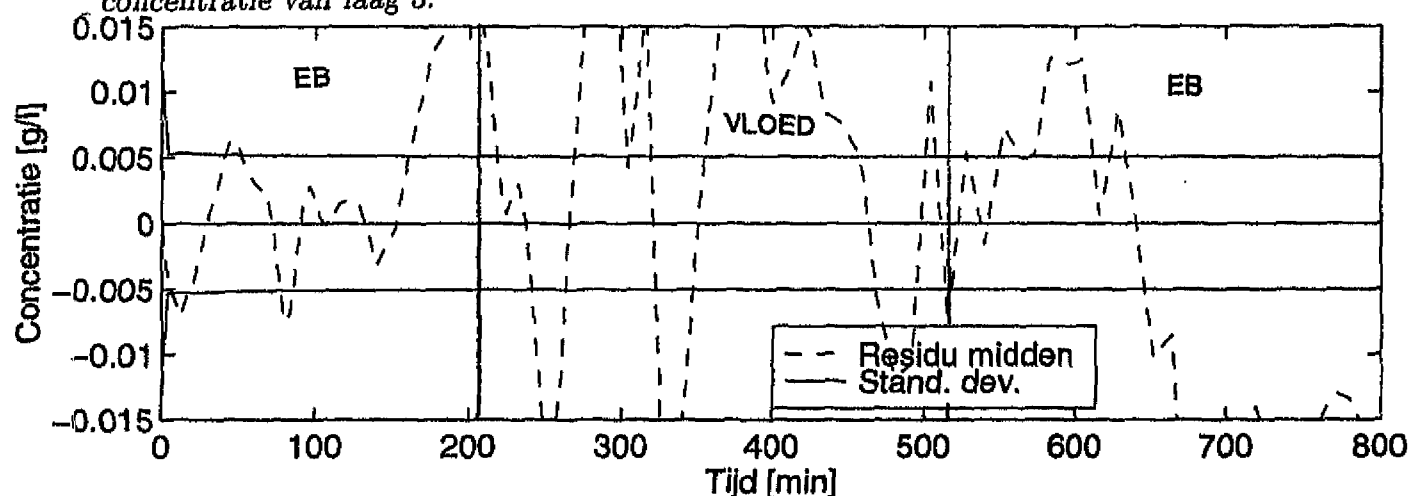
Figuur 6.13: Schatting van w_o voor langere tijdsperiode, met de startwaarden van het filter gelijk aan (6.14).



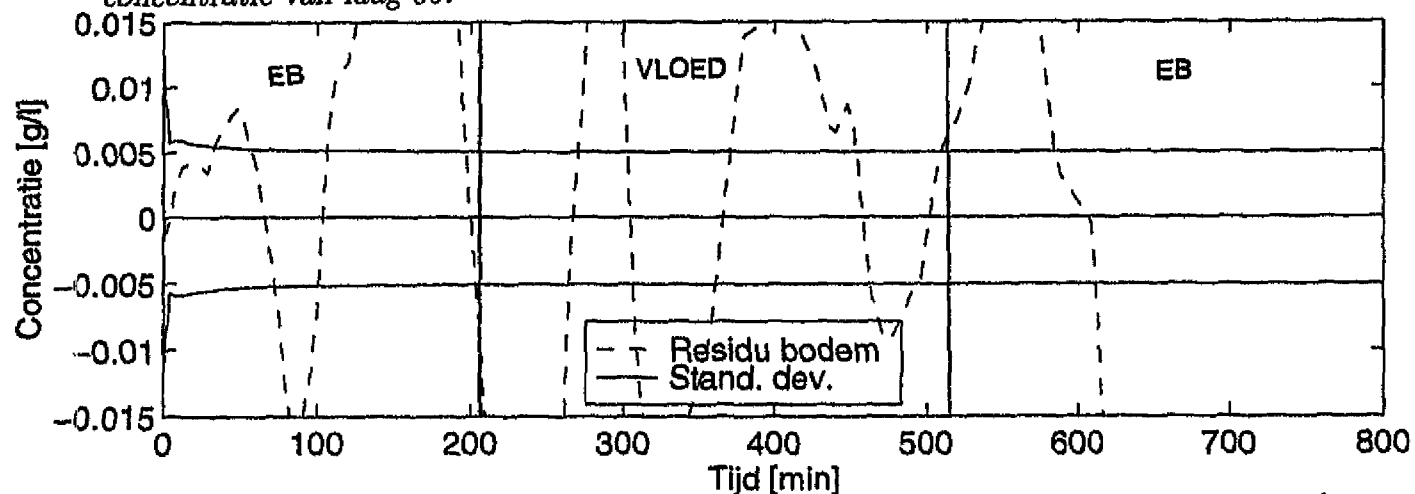
Figuur 6.14: Schatting van $D - E$ voor langere tijdsperiode, met de startwaarden van het filter gelijk aan (6.14).



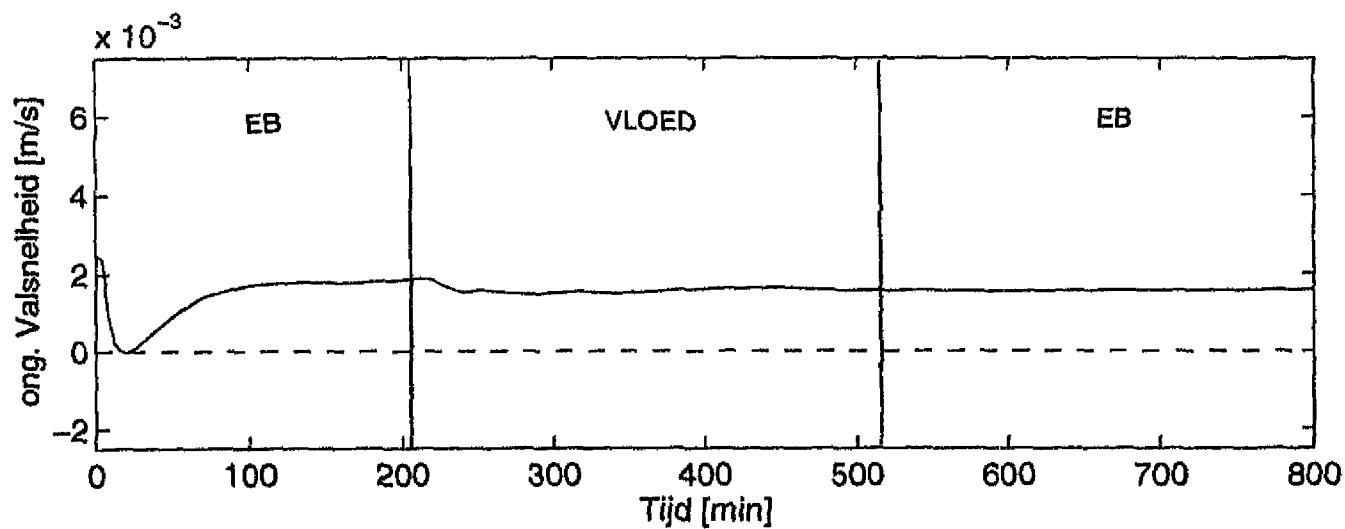
Figuur 6.15: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 5.



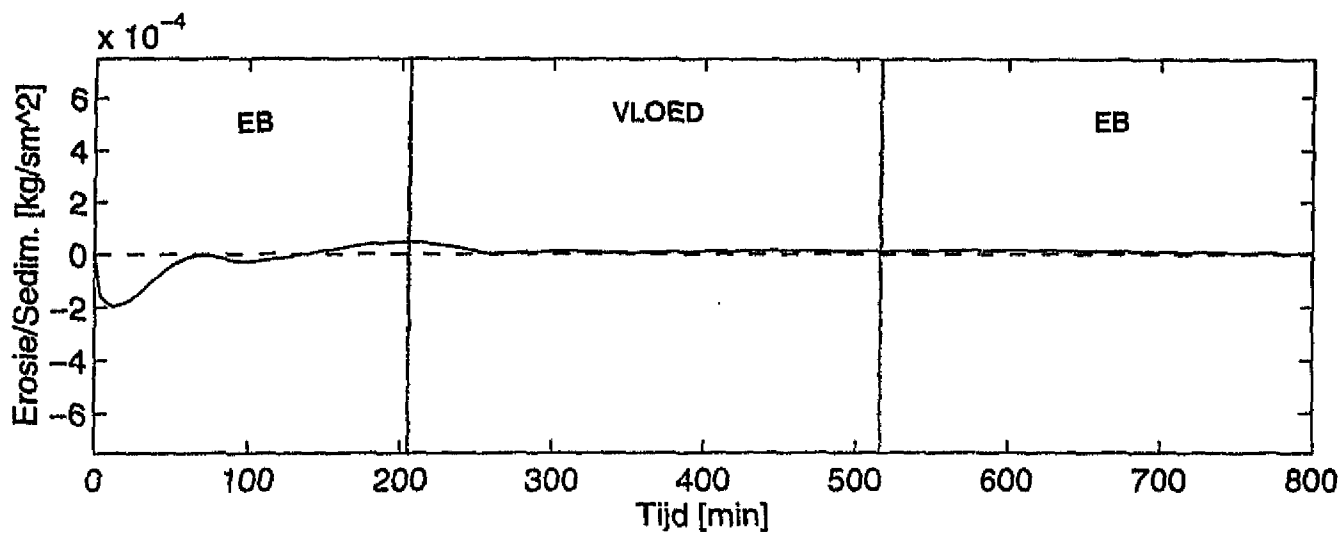
Figuur 6.16: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 30.



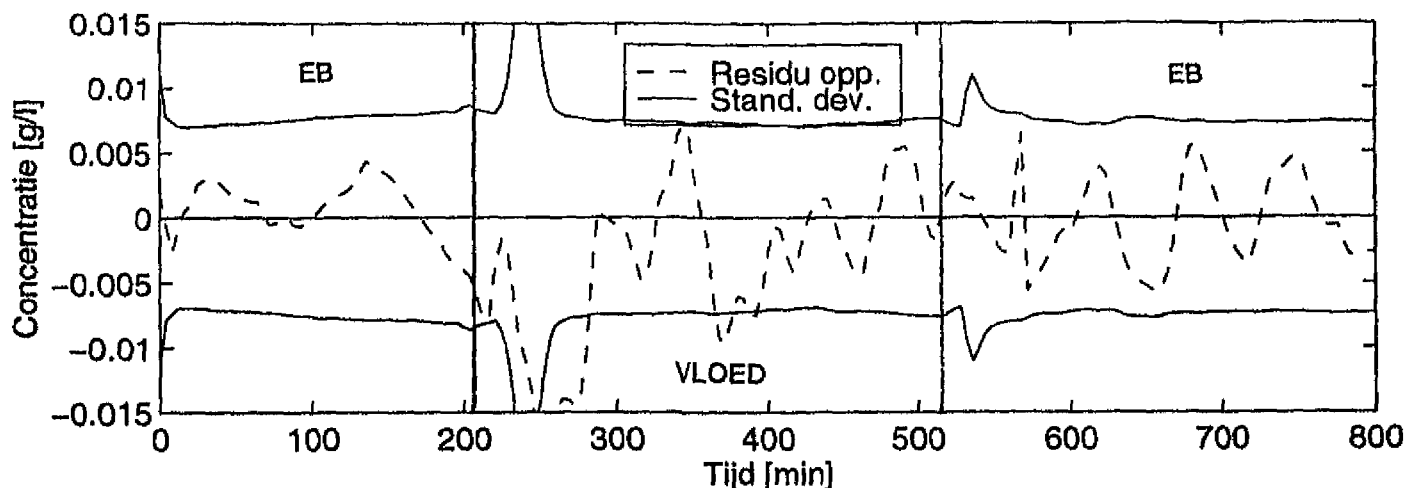
Figuur 6.17: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 44.



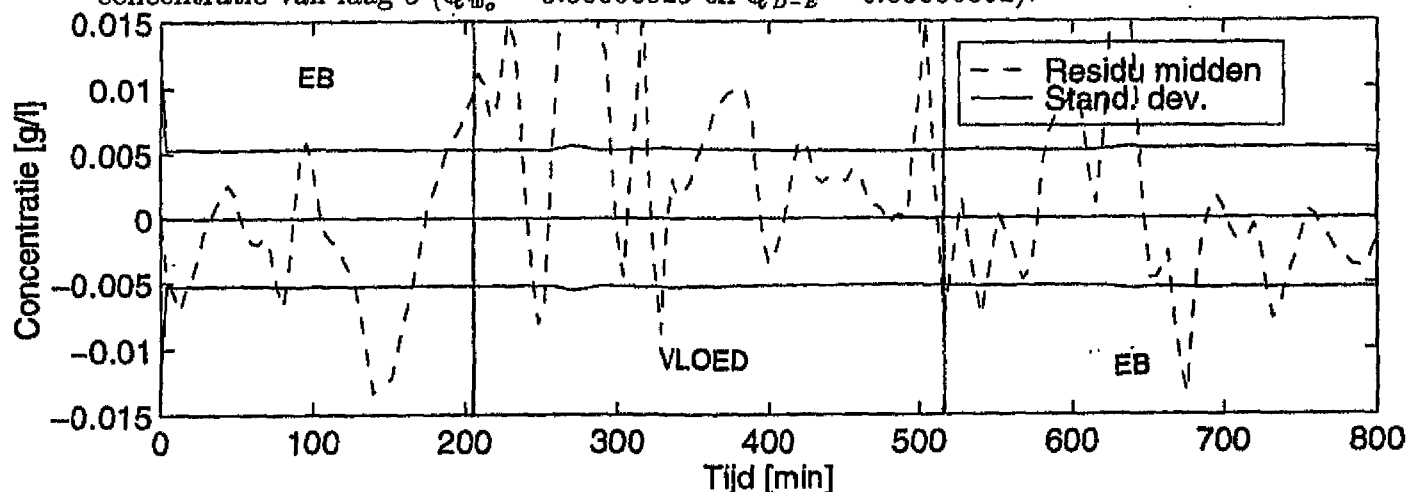
Figuur 6.18: De schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_0 .



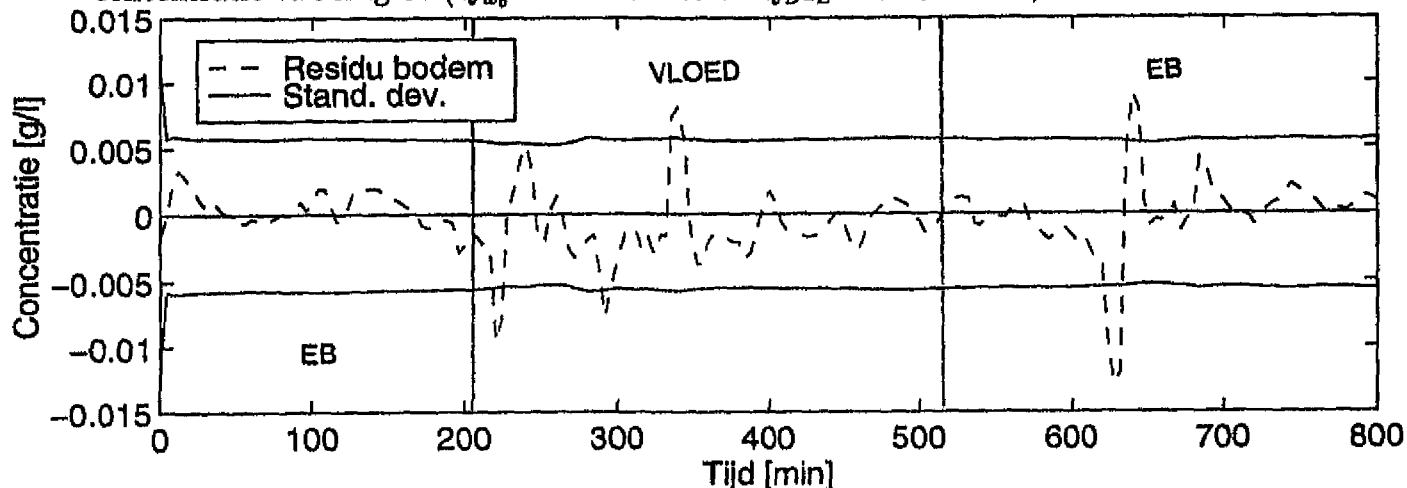
Figuur 6.19: De schatting van de erosie (negatief) en sedimentatie (positief) $D - E$.



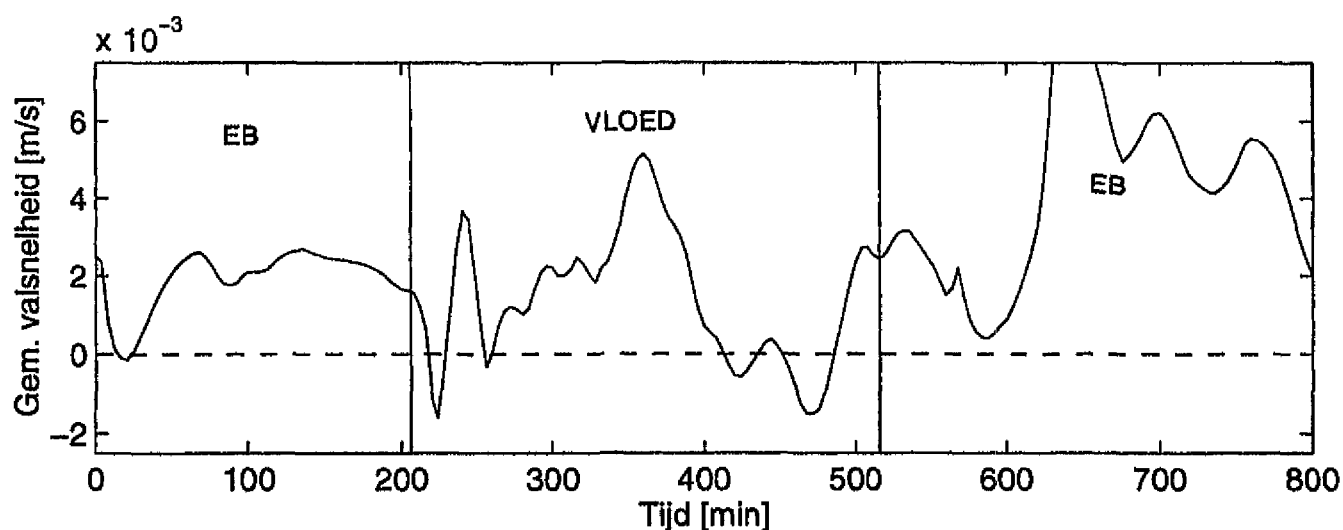
Figuur 6.20: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 5 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



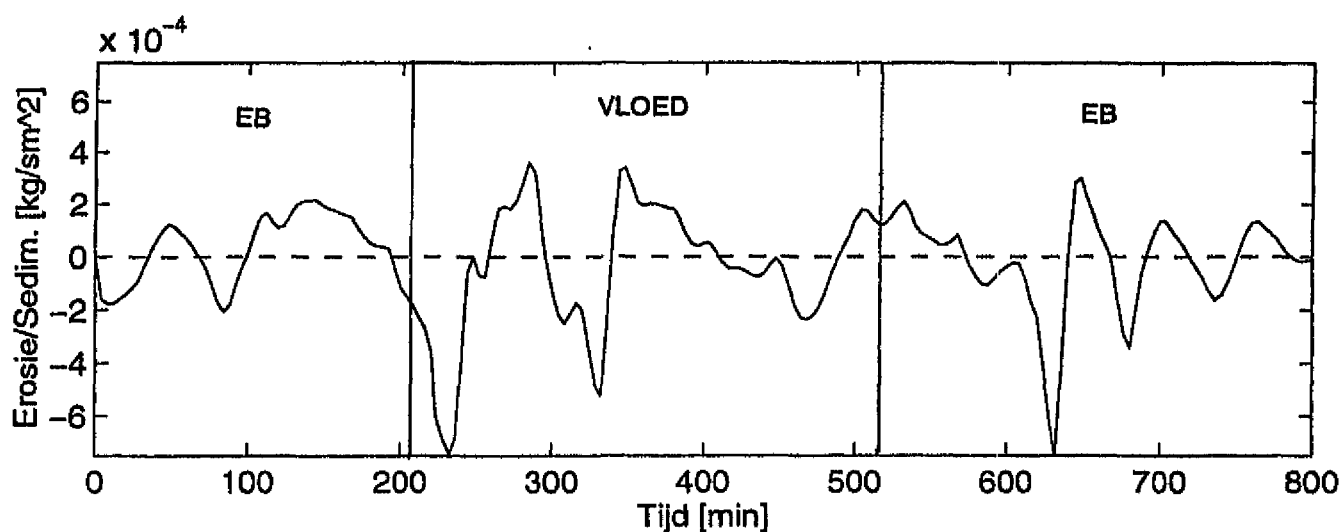
Figuur 6.21: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 30 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



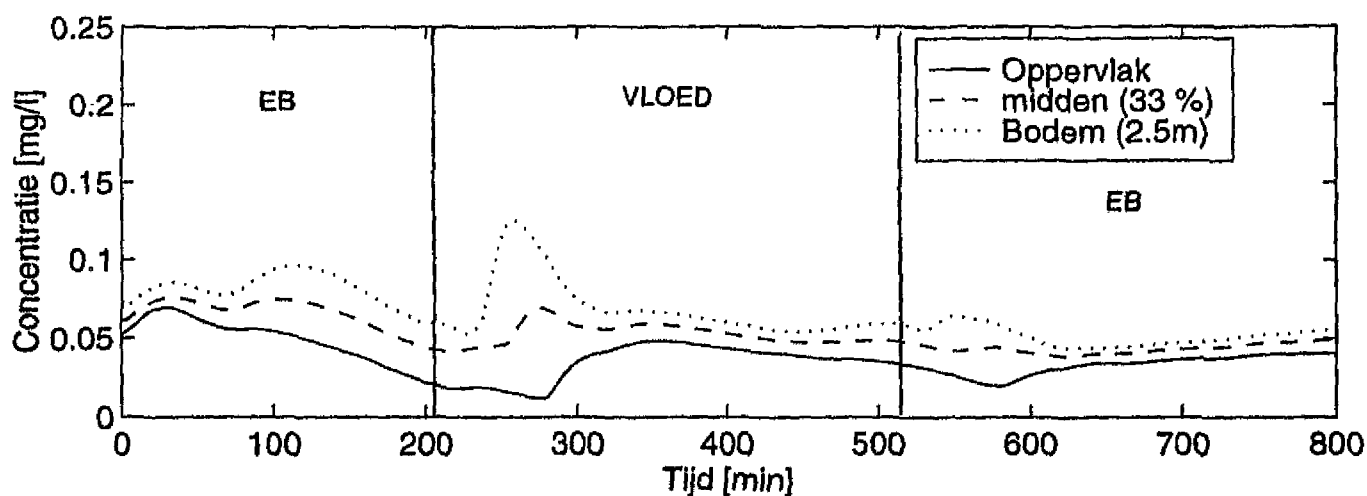
Figuur 6.22: Het voorspelde residu, met de bijbehorende standaarddeviaties, van de slibconcentratie van laag 44 ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



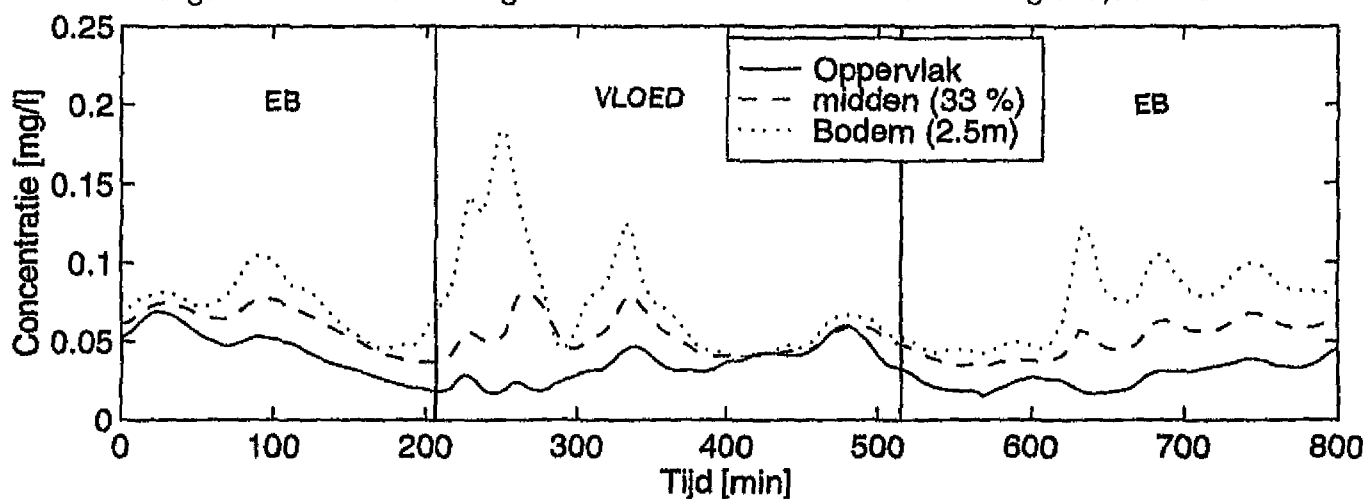
Figuur 6.23: De schatting van de 'gemiddelde' valsnelheid w_o ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



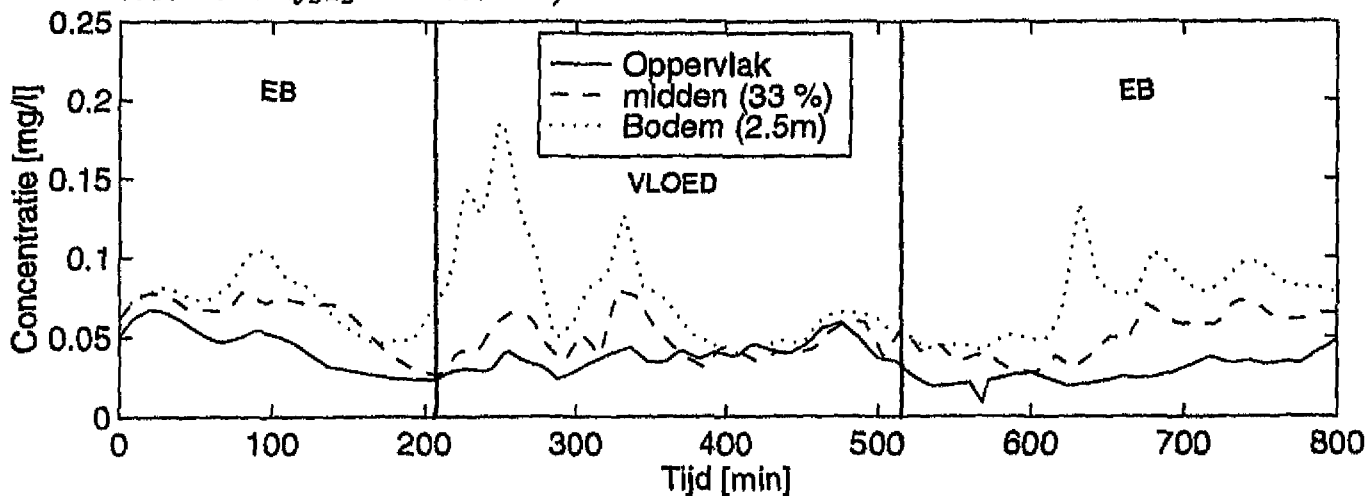
Figuur 6.24: De schatting van de erosie (negatief) en sedimentatie (positief) $D - E$ ($Q_{w_o} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



Figuur 6.25: De schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44.



Figuur 6.26: De schattingen van de slibconcentraties van de lagen 5,30 en 44 ($Q_{w_0} = 0.00000025$ en $Q_{D-E} = 0.00000001$).



Figuur 6.27: De gemeten slibconcentraties van de drie hoogten gemeten door het meetponton 'De Zeekat'.

Hoofdstuk 7

Conclusies & Aanbevelingen

Het doel van het onderzoek is meer te weten te komen over de verspreiding van slib in de verticale richting. Daartoe is een 1 Dimensionaal Verticaal model aangekocht van het WL, waar de bekende slibprocessen zo goed mogelijk in zijn verwerkt. Vervolgens is handmatig getracht de berekende slibconcentraties zo goed mogelijk op de gemeten slibconcentraties te laten lijken. De daarmee gevonden beste benadering, zie figuur 2.4, wijkt nog veel af van de gemeten 'continue'-slibconcentraties. Daarom zijn er een aantal fysische aanpassingen gemaakt. Zo is:

- voor de valsnelheid van slib de formule van 'van Leussen' ingevoerd.
- de mogelijkheid tot dichtheidsterugkoppeling ingebouwd.
- het mogelijk geworden zelf waarden in te vullen voor de sedimentatie en erosie.

Daarnaast bleek het onderste meetpunt van het meetponton 'De Zeekat' op een andere hoogte te hebben gemeten dan werd verondersteld. De aanpassing van deze meethoogte leidde tot een duidelijke verbetering van de uitkomsten, zie grafiek 1 van figuur 3.11. De valsnelheidsformule van 'van Leussen' leverde geen verbetering op. Het toepassen van de dichtheidsterugkoppeling had een verandering in de periodieke vorm van de slibconcentraties tot gevolg. Bovendien neemt hierdoor de duur van de stroomkentering toe van 1-4 minuten naar ongeveer 5-20 minuten. Het resultaat werd er echter weinig beter van. Vervolgens zijn, met behulp van het Extended Kalmanfilter, filtervergelijkingen afgeleid voor het schatten van slibconcentraties en de parameters w_0 en $D - E$. Na het onderzoeken van het gedrag van het filter met behulp van fictieve meetgegevens is er gefilterd met de gemeten 'continue'-slibconcentraties. In de volgende paragraaf zullen de conclusies van het onderzoek behandeld worden. Daarna volgen in §7.2 de aanbevelingen.

7.1 Conclusies

- De simulatie van de stroomsnelheid over de verticaal is verre van optimaal. Vooral rond de stroomkenteringen vertonen de berekende stroomsnelheidsprofielen grote afwijkingen met de gemeten stroomsnelheidsprofielen. Vermoed wordt dat deze afwijkingen grotendeels het gevolg zijn van een gebrekkige simulatie van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model en dichtheidsverschillen die het gevolg zijn van de toevoer van zoet rivierwater via de Zeeschelde.
- Het onderzoeken van het filtergedrag met behulp van fictieve meetgegevens leverde een positief resultaat op. Als namelijk in het filter per vier minuten de slibconcentratie van drie verschillende hoogten bekend wordt verondersteld, dan is het systeem waarneembaar. Anders gezegd: het filter is dan in staat om zowel de slibconcentraties als de parameters w_o en $D - E$ goed te schatten.
- Bij het filteren met behulp van de gemeten 'continue'-slibconcentraties zijn reeds veelbelovende schattingen verkregen. Zo lijkt de waarde van w_o rond de 0.003 (m/s) te schommelen. Dit komt aardig overeen met de handmatig gevonden 0.0025 (m/s) die in grafiek 2 van figuur 3.11 en 3.12 is gebruikt. De waarde van $D - E$ schommelt zoals verwacht wordt rond de waarde nul. Verder blijkt het filter met het schatten van w_o en $D - E$ in staat om de berekende slibconcentraties bij te sturen, zodat de fluctuaties in de gemeten slibconcentraties goed gevolgd worden.
- Uit de schattingen van w_o komt naar voren dat de simulatie van de diffusie op sommige momenten tekortkomingen vertoont. Dit blijkt uit het af en toe negatief worden van de schatting van w_o , wat fysisch gezien niet mogelijk is.

7.2 Aanbevelingen

- Met het schatten van de parameters $D - E$ en w_o , met de filtervergelijkingen en de gemeten slibconcentraties is slechts een begin gemaakt. In een vervolg onderzoek zal onder andere onderzocht dienen te worden bij welke covarianties van de systeem- en meetruis de beste schattingen van de parameters worden verkregen.
- Zoals gezegd vertoont de simulatie op sommige momenten gebreken, dit wordt in het filter opgelost door het aanpassen van w_o . Om de schatting van w_o hieraan minder onderhevig te laten zijn, zou getracht kunnen worden het niet correct zijn van de diffusie te verbeteren door het schatten van het turbulente Prandtl Schmid nummer σ_T .
- Tevens kan er aan gedacht worden om te gaan smoothen, zie §4.4. Daarmee zou getracht kunnen de schattingen van de parameters w_o en $D - E$ nog robuuster te maken. Met robuust wordt hier bedoeld het voor meerdere getijden overeenkomen van de schattingen van w_o en $D - E$.

- De hoeveelheid slib die zich in de waterkolom bevindt en de verspreiding hiervan over de waterkolom is vooral afhankelijk van de stroomsnelheid bij de bodem. Vanwege het door het 1DV-model niet goed simuleren van de stroomsnelheid rond de stroomkentering zou er aan gedacht kunnen worden om de in te voeren reeks met stroomsnelheden aan te passen. Door de tijdstappen tussen de gemeten stroomsnelheden voor eb iets te verkleinen en voor vloed iets te vergroten zou ervoor gezorgd kunnen worden dat de tijdstippen van de berekende stroomkenteringen bij de bodem beter overeenkomen met de werkelijkheid. Dit zou de simulatie van de diffusie, en daarmee het schatten van w_o , ten goede kunnen komen.
- Naast het schatten van w_o en $D - E$ zou er aan gedacht kunnen worden om de empirische coëfficiënten a, b en m_L in de valsnelheidsformule van 'van Leussen' te gaan schatten, zie (3.1). Zodoende kunnen betere waarden voor deze coëfficiënten worden verkregen.
- Tevens zou onderzocht kunnen worden hoe het berekenen van de stroomsnelheidsprofielen verbeterd kan worden. Tenslotte worden met de stroomsnelheid de processen aangestuurd die verantwoordelijk zijn van de verspreiding van het slib over de verticaal. Vooral voor het simuleren van de slibconcentraties rond de kentering is dit gewenst. Voor het kunnen verbeteren van die simulering dient er meer bekend te zijn van de werkelijke stroomsnelheidsprofielen. Aanbevolen wordt daarom om bij volgende metingen van slibconcentraties tevens op meerdere dieptes de stroomsnelheid te meten. Daarbij is het gewenst de tijdstap tussen opeenvolgende metingen rond de vijf minuten te nemen, dit omdat de pieken in de slibconcentraties rond de twintig minuten duren. Met de zo verkregen metingen zou eveneens het verband tussen pieken in de stroomsnelheid (interne golven) en de gevolgen daarvan op hoogte van de slibconcentraties onderzocht kunnen worden.
- Zoals in §1.1 is vermeld zijn met het meetpunt 'De Zeekat' op drie verschillende locaties metingen verricht. Een volgende stap in het onderzoek is het toepassen van het 1DV-model en de filtervergelijkingen op de gemeten 'continue'-metingen van de andere twee meetlocaties.
- In een eerder onderzoek door H. Hilberink, B. de Jong en A. Langerak is onderzoek gedaan naar de herkomst van de slibpieken, door het terug rekenen van stroomsnelheden. De conclusie was dat de slibpieken geen eenduidige herkomst hadden, met als gevolg daarvan dat de slibpieken dus veroorzaakt moesten zijn door de lokale omgeving. Toen was echter nog niet het grote verschil tussen de stroomkenteringen van eb naar vloed en van vloed naar eb bekend. Bij het terug rekenen van de stroomsnelheden is hier zodoende geen rekening mee gehouden. Er zou aan gedacht kunnen worden de gedane berekeningen te corrigeren.

Opmerking: Mochten interne golven een grote invloed hebben op de slibconcentraties dan zal de simulatie van de turbulentie door het $k-\epsilon$ model volgens [20] grote afwijkingen vertonen. De turbulentie zal dan door een ander model gesimuleerd dienen te worden.

Bibliografie

- [1] Anderson, B.D.O. & Moore, J.B., *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Australië, 1979.
- [2] Bagchi, A., *Optimal control of stochastic systems*, Prentice Hall, Nederland, 1993
- [3] Chiu, C.L. & Iso, E.O., 'Kalman Filters in Open Channel Flow Estimation', *Journal of the Hydraulic Division*, ASCE, 104 (HY8) (1978).
- [4] Coleman, N.L., 'Velocity profiles with suspended sediment', *J. Hydr. Res.*, Volume 19, No 3 (1980).
- [5] Doe, van der J., Maldegem, van D., 'Definitieve meethoogtes op de drie meetlocaties van het meetponton de Zeekat', memo, zie archief Zeekat, 28 januari 1997.
- [6] Fischer, H.B., en anderen, *Mixing in Inland and Coastal waters*, pag. 106.
- [7] Hilberink, H., Jong, de B., *Het normeren van slibgegevens in de Westerschelde en het uitvoeren van een trendanalyse over de periode 1970-1990 op basis van deze genormeerde slibgegevens*, rapportage Universiteit Twente, faculteit Toegepaste Wiskunde, 1996.
- [8] Jazwinski, A.H., *Stochastic processes and filtering theory*, Volume 64, Academic Press, Maryland, 1970.
- [9] Jones, W.P. & Launder, B.E., 'The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence', *J. Heat Mass Transfer*, volume 15 (1972), pag. 312-314.
- [10] Jong, de H., 'Keuze van een brutoreeks uit de beschikbare Zeekataresultaten t.b.v een nadere interpretatie', notitie GWAO-89.1305, 10 oktober 1989.
- [11] Konings, S.J.C., *Tidal effects on cohesive sediment transport in the Western Scheldt*, doctoraalverslag Universiteit Twente, faculteit Toegepaste Wiskunde / Rijksinstituut voor Kust en Zee Middelburg, 1994.
- [12] Launder, B.E. & Spalding, B.D., 'The numerical computation of turbulent' flow, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 3 (1974), pag. 269.

- [13] Leussen van, W., *Estuarine macroflocs and their role in fine-grained sediment transport*, Proefschrift universiteit utrecht, 1994.
- [14] Maybeck, P.S., *Stochastic models, estimation and Control*, volume 2, mathematics in science and engineering, volume 141-2, Academic Press, Ohio, 1982.
- [15] Meetdienst Directie Zeeland, 'SAWES-8 Middelgat', 17 maart 1988 (D. van Maldegem (RIKZ) weet er meer van).
- [16] Sas, M., *K.I.V.I. Hydraulica in de praktijk twee*, 1991.
- [17] Storm, C., Helsloot, I.C.M., *Ruimtelijke en temporele variabiliteit van slibtransporten in de westerschelde*, rapportage Rijksuniversiteit Twente, faculteit Fysische Geografie, 1988.
- [18] Uittenbogaard, R.E., Kester van, J.A.Th.M. & Stelling, G.S., *Implementation of an Algebraic eddy-viscosity, a $k-L$ and the $k-\epsilon$ turbulence model in TRISULA for rectangular horizontal grids. Including 2DV-testcases*, Delft Hydraulics, rapport Z78, 1992.
- [19] Uittenbogaard, R.E., Winterwerp, J.C., Kester, van J.A.Th.M en Leepel, H., *3D Cohesive Sediment Transport*, Documentatie 1DV-model, maart 1996.
- [20] Wilcox, D.C., *Turbulence Modelling for CFD*, DCW Industries, Californië, tweede editie, 1994.

Bijlage A

Vergelijkingen 1DV-Model

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + T(u, z, t) \quad , \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{u_{*s}^2 - u_{*b}^2}{H} + \frac{\bar{u}(t) - u_o(t)}{T_{rlx}} \quad ; \quad \bar{u}(t) = \frac{1}{H - z_o} \int_{z_o}^H u(z', t) dz' \quad , \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial w_s^{(\phi)} \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (D_{kv}^{(\phi)} + \Gamma_T^{(\phi)}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} + S^{(\phi)} \quad , \quad (\text{A.1c})$$

$$\nu_T = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad ; \quad \Gamma_T^{(\phi)} = \frac{\nu_T}{\sigma_T^{(\phi)}} \quad , \quad (\text{A.1d})$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \Gamma_T^{(k)}) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} + P - B - \epsilon \quad , \quad (\text{A.1e})$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \Gamma_T^{(\epsilon)}) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right\} + P_\epsilon - B_\epsilon - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad , \quad (\text{A.1f})$$

$$P = \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad ; \quad B = \Gamma_T^{(\rho)} N^2 \quad ; \quad P_\epsilon = c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P \quad ; \quad B_\epsilon = (1 - c_{3\epsilon}) \frac{\epsilon}{k} B \quad , \quad (\text{A.1g})$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad ; \quad \rho = \rho(\phi_1, \phi_2, \dots) \quad , \quad (\text{A.1h})$$

$$z_o = H \exp \left(-1 - \frac{\kappa}{\sqrt{C_b}} \right) \quad ; \quad u_{*b} = \frac{u(z_o + \frac{1}{2} \Delta z_b)}{\kappa \log(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta z_b}{z_o})} \quad ;$$

$$u_{*b} = \frac{u(\frac{1}{2} \Delta z_b)}{\kappa \log(\frac{1}{2} \frac{\Delta z_b E u_{*b}}{\nu})} \quad ; \quad u_{*s} = \left(\frac{|\tau_s|}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1i})$$

$$\text{voor } \frac{1}{2} \frac{\Delta z_b}{z_o} < 1 \quad : \quad u_{*b} = \frac{u(\frac{1}{2} \Delta z_b)}{12} \quad ;$$

$$\text{voor } Re_+ \equiv \frac{\Delta z_b u(\frac{1}{2} \Delta z_b)}{2\nu} < 122.4 \quad : \quad u_{*b} = \frac{u(\frac{1}{2} \Delta z_b)}{\sqrt{Re_+}}$$

$$\left\{ (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_o} = u_{*b}^2 \quad ; \quad \left\{ (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \Big|_{z=H} = \frac{\tau_s}{\rho_w} \quad , \quad (\text{A.1j})$$

$$k|_{z=z_0} = \frac{u_{*b}^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad ; \quad \epsilon|_{z=z_0} = \frac{u_{*b}^3}{\kappa z_0} \quad ; \quad k|_{z=H} = \frac{u_{*s}^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad ; \quad \epsilon|_{z=H} = \frac{u_{*s}^3}{\kappa z_s} \quad , \quad (\text{A.1k})$$

$$\left\{ w_s^{(\phi)} \phi + (D_{kv}^{(\phi)} + \Gamma_r^{(\phi)}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_0} = D^{(\phi)} - E^{(\phi)} \quad ;$$

$$\left\{ w_s^{(\phi)} \phi + (D_{kv}^{(\phi)} + \Gamma_r^{(\phi)}) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \Big|_{z=H} = 0 \quad (\text{A.1l})$$

$$c_\mu = 0.09 \quad ; \quad c_{1\epsilon} = 1.44 \quad ; \quad c_{2\epsilon} = 1.92 \quad ; \quad \sigma_r^{(k)} = 1.0 \quad ; \quad \sigma_r^{(\epsilon)} = 1.3 \quad ;$$

$$\sigma_r^{(\rho)} = 0.7 \quad ; \quad \kappa = 0.41 \quad ; \quad E = 8.8 \quad (\text{A.1m})$$

$$N^2 \geq 0 : c_{3\epsilon} = 1 \quad ; \quad N^2 < 0 : c_{3\epsilon} = 0. \quad (\text{A.1n})$$

In (A.1a) is T een toegevoegde volume kracht. Deze is toegepast voor de ruwe simulatie van de wrijving aan de zijkanten. De drukgradiënt in (A.1a) volgt uit (A.1b). De eerste term van het rechterlid van de eerste vergelijking van (A.1b) is het gevolg van de integratie over de diepte van de momentenbalans. De tweede term van het rechterlid is een simpele drukcorrectie. In de tijd staat deze drukcorrectie toe dat de diepte gemiddelde snelheid $u_o(t)$ wordt voorgeschreven door de gebruiker. Empirisch gezien moet de relaxatietijd T_{rlx} , voor het netjes volgen van $u_o(t)$, twee keer zo groot zijn als de grootte van de tijdstap van de numerieke oplossings procedure. In het door het WL geleverde model wordt (A.1b) gebruikt met $u_o(t)$ voorgeschreven door de gebruiker d.m.v. een tijdserie of d.m.v. een harmonische reeks.

In (A.1c) wordt met ϕ een scalaire hoeveelheid aangeduid zoals zout, temperatuur (eigenlijk warmte inhoud) en sediment(fracties). De input en de berekening van de temperatuur en de zoutconcentratie zijn gescheiden van het sediment. Dit omdat sediment een valsnelheid ongelijk aan nul, een ander turbulent Prandtl/Schmidt nummer en speciale opties voor de bodemflux kan hebben, zie appendix B deel 2 [19].

De temperatuur en het zout komen de toestandsvergelijking binnen voor de dichtheid van zeewater. Deze procedure is gecopieerd van het hydronamische gedeelte van het DELFT3D systeem. Verder wordt de dichtheid van het mengsel van water en sediment verhoogd in overeenstemming met

$$\rho(S, \theta, c_k) = \rho_w(S, \theta) + \sum_k \left(1 - \frac{\rho_w(S, \theta)}{\rho_{s,k}} \right) c_k$$

met ρ_w de dichtheid van natuurlijk water zonder sediment maar afhankelijk van het zoutgehalte S en de temperatuur θ , $\rho_{s,k}$ de dichtheid van het sediment en k het aantal sedimentfracties. Waarbij $\rho_{s,k}$ voor iedere sedimentfractie k door de gebruiker gedefinieerd dient te worden en de sedimentconcentratie c_k berekend wordt.

De bronterm $S^{(\phi)}$ in (A.1c) is nog niet in dit model verwerkt. In de toekomst zou deze

bron/putterm gebruikt kunnen worden voor de wederzijdse uitwisseling van concentratie door flocculatie en deflocculatie wanneer het cohesieve sediment onderverdeeld is in meerdere fracties. De moleculaire diffusie coëfficiënt $D^{(\phi)}$ is voor warmte gelijk genomen aan de kinematische viscositeit van water, dit is $\nu = 10^{-6} [\frac{m^2}{s}]$. De verspreiding van deeltjes veroorzaakt door het tegen elkaar botsen of door dispersieve effecten, als gevolg van verschillen in de valsnelheid van de individuele deeltjes, kan de $D_a^{(\phi)}$ van sediment verhogen in vergelijking tot degene voor opgeloste stoffen, deze optie is echter nog niet aanwezig in dit model. In de eerste versies van het 1DV-model werd w_s constant verondersteld. In de laatste twee geleverde versies wordt voor het berekenen van de valsnelheid de formule van van Leussen gebruikt, zie (fvdv).

In (A.1d) worden de eddy-viscositeit en de verschillende eddy-diffusiteiten gerelateerd aan k en ϵ . Het k - ϵ model in dit 1DV-model is beschreven in (A.1e) en (A.1f) met de bronnen en putten gedefinieerd in (A.1g).

De gebruiker kan kiezen tussen een hydraulisch-ruwe (IRO=1) of een hydraulisch-gladde bodem (IRO=0) en de procedure in [18] is toegepast voor het berekenen van bodemwrijvingssnelheid u_{*b} .

Voor IRO=1 is de hoogte van de bodemruwheid z_o gekoppeld aan de bodemwrijving c_b zoals beschreven in (A.1i). Bij diepte gemiddelde berekeningen volgt de schuifspanning τ_b uit de kwadratische wrijvingswet $\tau_b = \rho_0 u_{*b}^2 = \rho_0 c_b |\bar{u}| \bar{u}$ met bodemwrijving c_b waarbij geldt dat $c_b \equiv g/Ch^2$ met Ch de Chézy-coëfficiënt, hier is het symbool Ch gebruikt om verwarring met het symbool C voor de genormaliseerde concentratie te vermijden. Met de eerder gedefinieerde bodemwrijvingscoëfficiënt c_b volgt z_o uit de eerste vergelijking van (A.1i). Deze vergelijking zorgt ervoor dat zowel de bodemwrijving als de totale energiedissipatie van het 1DV-model gelijk is aan die van de diepte gemiddelde stromings berekeningen. Deze verbinding veronderstelt een logaritmische snelheidsprofiel dat niet noodzakelijk juist is voor windgedreven en/of gelaagde stromingen.

Voor een ruwe bodem (IRO=1) wordt de bodem schuifspanningssnelheid u_{*b} bepaald door de tweede vergelijking van (A.1i), waarin Δz_b de dikte van de eerste laag boven de bodem voorstelt; de bodemhoogte is gedefinieerd als $z = z_o$. Deze formulering zorgt bij het verdwijnen van Δz_b voor het convergeren naar een logaritmisch snelheidsprofiel in de bodem grenslaag. Het eerste criterium in de tweede regel van (A.1i) zorgt voor het afbreken van een ruwe bodem in overeenstemming met de overeenkomstige Chézy-coëfficiënt van $38 [m^{1/2}/s]$. De laatst genoemde waarde is een aanname voor het geval dat de snelheid van het onderste punt beneden de meeste pieken van de meetkundige ruwe bodem ligt. Dit criterium is in later geleverde versies weggewerkt maar niet meer gecontroleerd.

Voor een gladde bodem (IRO=0) wordt de derde vergelijking van (A.1i) toegepast, voor de waarde van de coëfficiënten zie (A.1m). Deze vergelijking wordt iteratief opgelost. De gebruiker wordt geadviseerd om $z_o = \frac{1}{2} \Delta z_b$ te nemen, ondanks zijn keuze voor een gladde

bodem. De reden hiervoor is dat de waarde gebruikt wordt voor het initialiseren van het verticale profiel van k en ϵ , dit is alleen van belang voor de eerste tijdstap.

Het tweede criterium in de tweede regel van (A.1i) is van toepassing op een hydraulisch gladde bodem. Als geldt dat het locale Reynoldsgetal $z_+ < 122.4$ dan zit de hoogte $\frac{1}{2}\Delta z_b$ in de visceuze sublaag zie pagina 92-95 [18] voor de relevante afleidingen. De geïmplementeerde versie van het k - ϵ model is echter niet uitgerust met termen die rekening houden met de directe visceuze dissipatie, zie in plaats hiervan het laag-Reynolds k - ϵ model in bijv. [9]. Het afbreken van de visceuze sublaag is merendeels een poging om voorbij te gaan aan de doortij fase van de getijstromings experimenten in hydraulisch gladde (laboratorium) kanalen.

De laatste vergelijking van (A.1i) bepaalt de windschuifspanningssnelheid u_{*s} in water voor een door de gebruiker gedefinieerde constante windschuifspanning τ_s , gedefinieerd door:

$$\tau_s = \rho_{air} C_D |U_{10}| U_{10} \quad , \quad (A.2)$$

met sleep coëfficiënt C_D en windsnelheid U_{10} gedefinieerd op 10 meter boven de vrije oppervlakte. Eventueel kan, in andere onderzoeksversies van het 1DV-model, een tijdelijke windsnelheid gegenereerd worden of geïnterpoleerd worden van een gegeven tijdreeks. In deze versies kan ook de temperatuur dichtbij het vrije oppervlak, de zogenaamde Sea Surface Temperature (SST), gegenereerd of gelezen worden. Natuurlijk kan voor de laatstgenoemde situatie de relevantie voorwaarde in (A.1i) vervangen worden door de Dirichlet voorwaarde met SST voorgeschreven.

Voor zout zijn de rechterleden van de randvoorwaarden in (A.1i) gelijk genomen aan nul. Bovendien is voor zout de valsnelheid gelijk aan nul. In het geval van sediment transport wordt de flux aan het oppervlak gelijk aan nul genomen. Voor de flux bij de bodem geldt dan de depositieflux D en de erosieflux E berekend met de formules van Krone en Partheniades.

In (A.1j) zijn de bodem- en oppervlakteschuifspanning voorgeschreven.

In (A.1k) zijn de Dirichlet voorwaarden voorgeschreven voor k en ϵ aan het oppervlak en bij de bodem. De lengte van de oppervlakteruwheid z_s kan door de gebruiker gekozen worden.

De standaard instellingen voor de coëfficiënten van het k - ϵ model volgens [12] zijn gedefinieerd in (A.1m). Met als uitzondering dat de coëfficiënt $c_{3\epsilon}$, in het ϵ -equation, in het geval van een instabiele gelaagdheid omgeswitched wordt, zie (A.1n). Deze wissel is in overeenstemming met de theoretische overwegingen die laten zien dat in het geval van een instabiele gelaagdheid Rayleigh-Taylor instabiliteiten worden geproduceerd op de kleine schalen waar ϵ van belang is.

Bijlage B

Invoerfile voor 1DV-model met 10 lagen

```
*****General   Input*****
0.00            DP   : depth
0.00            ZETA  : water-level (or)
871030m1.whe    FILTSZ: file time serie ZETA (or)
                FILFOZ: file harmonic comp. ZETA (or)
0.0            UMEAN  : depth averaged velocity (or)
871030m3.snl    FILTSU: file time serie UMEAN (or)
                FILFOU: file harmonic comp. UMEAN (or)
min            TUNIT  : time unit (SEC/MIN)
0.1            TIMEST: time step (in TUNIT)
1500           NUMTIM: number of timestep simulation
0.2            RELTIM: relaxationtime (in TUNIT)
0.0 15. 1470.  TIMEWR: STRT-INC-STOP time frame to write output (in TUNIT)
1.0            TETA   : par. theta-method (rec: theta = 1)
ZO            ROUMET: roughness meth. MANN/CHEZ/ZO
0.009500      ROUCOF: roughness height (ROUMET)
1             IRO    : IRO=0: hydr.smooth, IRO=1: hydr.rough
0.0           TSWIND: windstress
0.01          ZS     : roughness height water surface
1000.0        RHOW   : reference density
*****Layer     Input*****
10            KMAX   : number of layers
0.200         THICK(1-KMAX): layer distribution
0.200         1 = free surface, KMAX = bottom
0.150
0.120
0.100
0.080
0.060
0.040
0.030
0.020
```

*****Constituent Input*****

2		LMAX : number of constituents
1		LSAL : index nr for salinity
2		LTEM : index nr for temperature
10.0		SALEQS: eq. of state salinity (always input)
5.0		TEMEQS: eq. of state temperature (always input)
10.0	5.0	(R0(1-KMAX,L),L=1,LMAX) :
10.0	5.0	initial concentration per layer
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	
10.0	5.0	

*****Sediment Input*****

3			LSED : number of sediment
sand			SED TYP(L): type of sediment
0.7			SIGSED(L): prandtl schmidt number
1080			RHOSOL(L): density sand
0.002			SEDDIA(L): median diameter
0.5			TCRERO(L): critical bed stress Shields
floc			SED TYP(L): type of sediment
0.7			SIGSED(L): prandtl schmidt number
2650			RHOSOL(L): density sediment
2.0			SALMAX(L): max salinity Sc in flocculation equ.
0.002e-3			WS0(L) : settling s=0
0.0075			WSM(L) : settling s=Sc
0.07			TCRDEP(L): stress deposition
0.12			TCRERO(L): stress erosion
0.0000025			EROPAR(L): erosion parameter
fine sediment			SED TYP(L): type of sediment
0.7			SIGSED(L): prandtl schmidt number
2650			RHOSOL(L): density sediment
0.0075			WS0(L) : settling velocity
0.07			TCRDEP(L): stress deposition
0.12			TCRERO(L): stress erosion
0.0000025			EROPAR(L): erosion parameter
0.1	0.2	0.3	RSED0(1-KMAX,1-LSED)
0.1	0.2	0.3	initial sediment concentrations per layer
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	
0.1	0.2	0.3	

*****End Input*****

Bijlage C

Uitleg invoerfile

In deze file wordt de werking en betekenis van de variabelen in de invoerfile uitgelegd. Hiervoor is de invoerfile van de HPversie gebruikt, deze is hetzelfde als die van versie5.

DP (m) De ingevulde waarde, die ≥ 0 moet zijn, is de referentiediepte ten opzichte waarvan de waterhoogte(s) moet(en) worden ingevoerd. De ingevoerde waarde wordt in de uitvoer als negatieve diepte gezien en fungeert tevens als bodemhoogte. Voorbeeld: stel $DP=8$ en de opgegeven waterhoogte $ZETA=6$ dan loopt in de uitvoerfile de totale waterhoogte van -8 tot 6.

ZETA (m) Hier moet een getal ≥ 0 worden ingevoerd. Dit getal geeft de waterhoogte weer. Voor de tijdsintervallen waarvoor bij de volgende twee variabelen geen waterhoogte is gedefinieerd wordt deze waarde gebruikt.

FILTSZ: Hier kan een file met waterhoogten worden ingevoerd. Hierbij moet rekening worden gehouden met de referentiediepte DP. De op te geven file moet uit de volgende twee twee kolommen bestaan: kolom 1 de tijd, kolom 2 de waterhoogte

FILFOU: Als voor FILTSZ niets is ingevoerd dan kan hier een harmonisch signaal worden ingevoerd.

KALMAN (Y/N) Staat hier 'N' dan kan er niet doorgestart worden. Dit houdt in dat bij het runnen van het 1DV-model altijd begonnen zal worden met het beginstroomsnelheidsprofiel berekend door het 1DV-model en de beginconcentraties voor temp, zout, zand, flokken en fijn sediment zoals die in de invoerfile staan.

Als het 1DV-model gerund wordt dan worden meerdere uitvoerfiles gemaakt. In één van die files, kalman.ext, worden de laatst berekende waarden van de benodigde parameters voor het doorstarten afgedrukt. Wordt voor de parameter KALMAN 'Y' ingevoerd dan zal er bij het runnen van het 1DV-model gezocht worden naar de file kalman.ext. Bestaat deze file dan worden de daarin staande waarden gebruikt als beginwaarden voor het model. Zodoende kan er doorgestart worden. Bestaat

kalman.ext nog niet dan worden de beginvoorwaarden van het 1DV-model gebruikt.

Opmerking 1: Bij het doorstarten dient TSTART ook aangepast te worden!

Opmerking 2: Wordt weer een nieuwe doorstart gemaakt dan dient in ieder geval restart.exe te zijn verwijderd!

TUNIT (SEC/MIN) Hier dient de eenheid MIN(uten) of SEC(onden) gekozen worden.

TIMEST (TUNIT) De hier ingevoerde waarde geeft de tijdstapgrootte weer van de numerieke oplossingsmethode van het 1DV-model.

TSTART (TUNIT) Vanaf dit tijdstip zal het 1DV-model waarden gaan berekenen.

NUMTIM Hier dient het gewenste aantal simulatie tijdstappen ter grootte van TIMEST te worden ingevoerd.

RELTIM (TUNIT) Dit is de relaxatie tijd. De waarde hiervan is van belang voor de drukcorrectie van de eerste vergelijking van (A.1b). Door het Waterloopkundig Laboratorium wordt geadviseerd hiervoor een twee keer zo grote waarde als TIMEST te nemen, opdat de gemiddelde stroomsnelheid $u_o(t)$ netjes gevolgd wordt.

TIMHIS (TUNIT) Hier dient het volgende ingevoerd te worden: de begintijd van de af te drukken simulaties, spatie, de grootte van de tijdstap tussen de af te drukken simulaties, spatie, het eindtijdstip van de af te drukken simulaties. Het model moet deze tijdstappen wel berekend hebben, zie NUMTIM en TIMEST.

TETA (0.5-1.0) Deze parameter houdt verband met de gekozen discretisatiemethode voor de tijd. Alhoewel gekozen kan worden voor een waarde tussen een half en één wordt door het Waterloopkundig Laboratorium geadviseerd de waarde 1.0 te gebruiken.

ROUMET (MANN/CHEZ/ZO) Hier dient de 'eenheid' voor de ruwheidshoogte ROUCOF te worden ingevoerd. Gekozen kan worden voor MANN(ing), CHEZ(zy) of ZO. Alledrie de eenheden zijn in elkaar om te zetten, waarbij voor CHEZ naar ZO gebruikt kan worden gemaakt van de eerste vergelijking van (A.1i) met daarin c_b vervangen door $\frac{g}{Ch^2}$.

ROUCOF (ROUMET) Het hier ingevoerde getal geeft de ruwheidshoogte van de bodem weer in de eenheid opgegeven bij ROUMET.

IRO (0/1) De waarde 0 laat het model rekenen met een hydraulisch gladde bodem. Terwijl bij de waarde 1 het model rekent met een hydraulische ruwe bodem.

TSWIND ($\frac{N}{m^2}$) Deze parameter geeft de windschuifspanning weer.

ZS (m) Dit is de ruwheidshoogte van het wateroppervlak.

RHOW ($\frac{kg}{m^3}$) Hier dient de (refentie) dichtheid van het water ingevoerd te worden.

SEDRHO (Y/N) Wordt 'N' ingevoerd dan vindt er geen dichtheidsterugkoppeling plaats.
Bij 'Y' wel.

*****Layer input*****

KMAX (1-100) Het hier ingevoerde getal geeft weer in hoeveel lagen de verticaal verdeeld zal worden. Het max aantal lagen is op het moment 100. De ingevoerde waarde is tevens van belang voor het aantal op te geven laagdiktes, beginconcentraties, temperaturen en zoutconcentraties

THICK(1-KMAX): Hier dient per laag, onder elkaar, in percentages aangegeven worden hoe dik elke laag is. Door het Waterloopkundig Laboratorium wordt geadviseerd bij opeenvolgende laagdiktes de verhouding 2:3 niet te laten overschreiden.

*****Constituent Input*****

LMAX Het ingevoerde getal geeft het aantal 'constituents' weer, in dit geval die van de zoutconcentratie en de temperatuur.

LSAL Het ingevoerde getal geeft het index nummer weer van het constituent zout.

LTEMP Index nummer voor de temperatuur

SALEQS Hier moet wat ingevuld worden. Verder heeft deze parameter geen nut

TEMEQS Hier moet wat ingevuld worden. Verder heeft deze parameter geen nut

(ro(1-KMAX,L),L=1,LMAX): Voor iedere laag dient zowel de zoutconcentratie als de temperatuur worden ingevoerd. De eerste kolom stelt de zoutconcentratie voor en de tweede de temperatuur in graden celcius.

*****Sediment Input*****

LSED (1-6) Er zijn drie typen sediment, te weten: zand, flokken en fine sediment. Ieder van deze drie typen hebben hun eigen specifieke op te geven parameters. Het model kan maximaal 6 setjes paramaters met bijbehorende types tegelijk berekenen. Hieronder staan de setjes parameters van alledrie de typen.

SED TYP(L): SAND Dit is het type zand.

SIGSED(L) Het turbulente Prandtl-Schmidt nummer.

RHOSOL(L) ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) Dichtheid van het zand.

SEDDIA(L) (m) Diameter van de zandkorrels.

TCRERO(L) ($\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) Kritieke erosie schuifspanning van zand

SED TYP(L): FLOC Dit is het type flokken.

SIGSED(L) Het turbulente Prandtl-Schmidt nummer.

RHOSOL(L) ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) Dit is de dichtheid van de flokken. Hier bestaat geen vaste waarde voor, maar licht in het algemeen tussen de 1030 en de 1100.

Opmerking: Deze waarde is alleen van invloed op de sedimentconcentratie als er dichtheidsterugkoppeling plaatsvindt.

SALMAX(L) ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) De ingevoerde waarde geeft aan bij welke zoutconcentratie (S), de valsnelheid WSO(L) overgaat in die van WSM(L) en andersom.

WSO(L) ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) Het ingevoerde getal is de waarde van w_o in de valsnelheidsformule van van Leussen, zie §3.3, als de zoutconcentratie beneden SALMAX(L) ligt.

Opmerking: In de bijgeleverde documentatie [19] staat dat in veel estuaries in Europa en Amerika geen toename van de valsnelheid te meten is als gevolg van een toename van de zoutconcentratie.

WSM(L) ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) Het ingevoerde getal is de waarde van w_o in de valsnelheidsformule van van Leussen, zie §3.3, als de zoutconcentratie groter of gelijk is aan SALMAX(L).

TCRDEP(L) ($\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) Dit is de kritische sedimentatieschuifspanning τ_d

TCRERO(L) ($\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) Dit is de kritische erosieschuifspanning τ_e

EROPAR(L) ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$) Dit is de erosieconstante M.

A-BPAR(L) Er dienen twee getallen gescheiden door een spatie te worden ingevoerd. Het eerste getal wordt gelezen als de waarde van 'a' in de valsnelheidsformule van van Leussen, zie §3.3. Het tweede getal stelt de waarde van 'b' in die formule voor.

EXPO M(L) Dit is de waarde van de exponent in de valsnelheidsformule van van Leussen.

SED TYP(L): fine sediment Dit is het type fijn sediment, in het onderzoek is deze gebruikt voor het berekenen van de slibconcentratie.

SIGSED(L) Het Prandtl-Schmidt nummer.

RHOSOL(L) ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) De dichtheid van het fijne sediment.

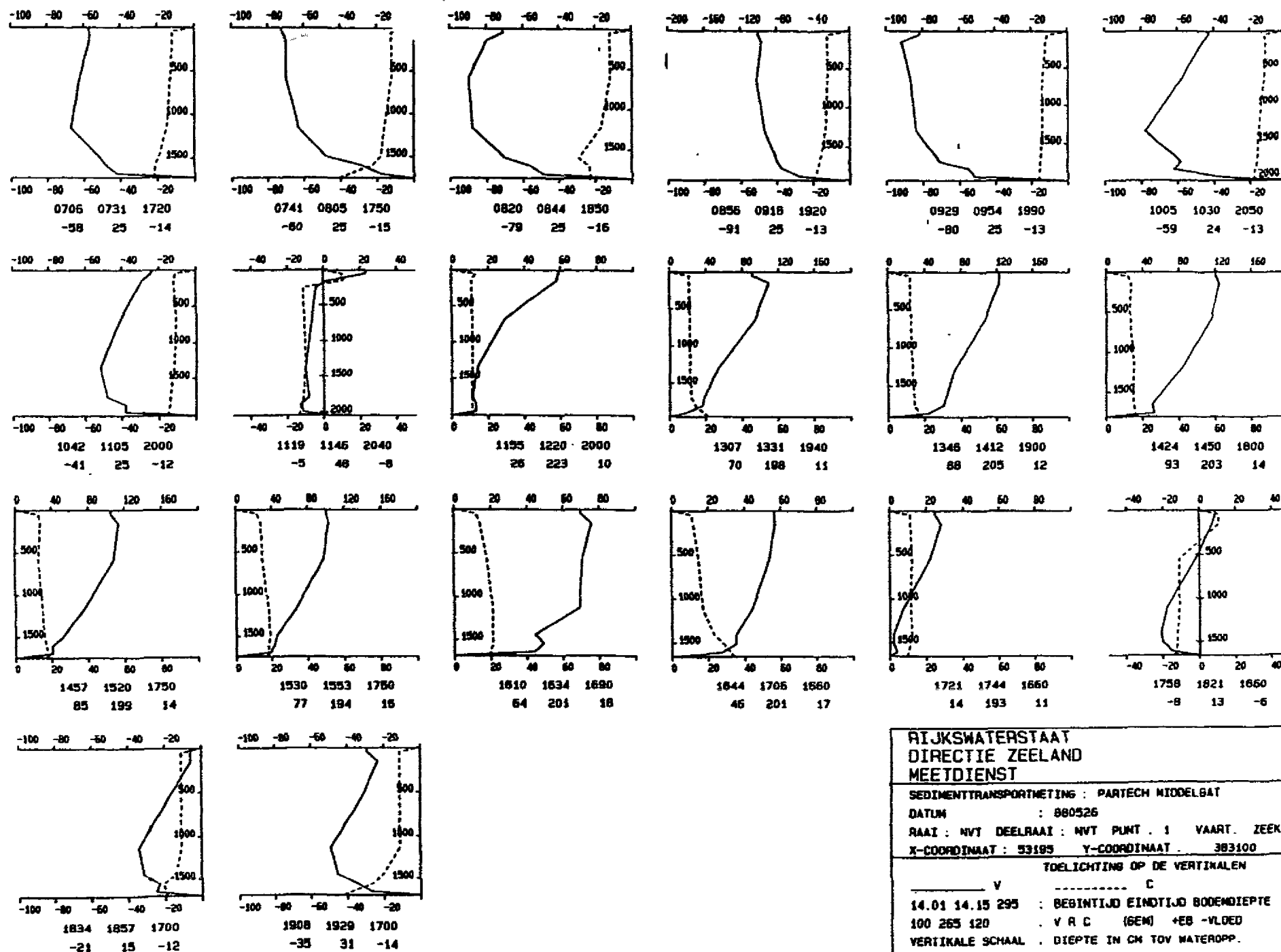
Opmerking: Deze waarde is alleen van invloed op de sedimentconcentratie als er dichtheidsterugkoppeling plaatsvindt.

- WSO(L)** ($\frac{m}{s}$) Het ingevoerde getal is de waarde van w_o in de valsnelheidsformule van van Leussen.
- DEFLUX (STRESS/FLUX)** Wordt 'STRESS' ingevoerd dan worden de erosie (E) en sedimentatie (D) berekent met de formules van Krone en Partheniades. Wordt 'FLUX' ingevoerd dan worden de waarden van TCRDEP(L) en TCRERO(L) gelezen als de waarden van E respectievelijk D.
- TCRDEP(L)** ($\frac{N}{m^2}$) of ($\frac{kg}{m^2s}$) De betekenis van de parameter hangt van de parameter DEFLUX af. Als DEFLUX=STRESS dan is TCRDEP de kritische sedimentatieschuifspanning. Is DEFLUX=FLUX dan wordt TCRDEP gelezen als de hoeveelheid slib die per seconde uit de waterkolom sedimenteert, oftewel $D=TCRDEP$.
- TCRERO(L)** ($\frac{N}{m^2}$) De betekenis van de parameter hangt van de parameter DEFLUX af. Als DEFLUX=STRESS dan is TCRERO de kritische erosieschuifspanning. Is DEFLUX=FLUX dan wordt TCRERO gelezen als de hoeveelheid slib die per seconde erodeert, oftewel $E=TCRERO$.
- EROPAR(L)** ($\frac{kg}{m^2s}$) Dit is erosieconstante M uit de formules van Krone en Partheniades
- A-BPAR(L)** Er dienen twee getallen gescheiden door een spatie te worden ingevoerd. Het eerste getal wordt gelezen als de waarde van 'a' in de valsnelheidsformule van van Leussen, zie §3.3. Het tweede getal stelt de waarde van 'b' in die formule voor.
- EXPO M(L)** Dit is de waarde van de exponent in de valsnelheidsformule van van Leussen.
- RSEDO(1-KMAX,1-LSL)** Hier moet per laag, onder mekaar, in (g/l) aangegeven worden wat de beginconcentratie is van in dit geval zand (kolom 1), flokken (kolom 2) en fijn sediment (kolom 3), waarbij alle kolommen door een spatie gescheiden dienen te worden.

Bijlage D

Stroomsnelheidsmetingen

Door de meetdienst van directie Zeeland is zo af en toe op verschillende locaties in de Westerschelde gedurende een bepaalde periode onder andere de stroomsnelheid gemeten op meerdere hoogtes in de verticaal. Een van die locaties was bij Middelgat op de plek waar de Zeekat gelegen heeft. Daar is in de periode maart t/m mei 1988 op zes hoogtes in de verticaal de stroomsnelheid gemeten. In die periode is zes maal een meetsessie verricht die meestal zo'n twaalf uur duurde. In zo'n meetsessie werd om de 30-40 minuten van boven naar beneden de stroomsnelheid gemeten. Waarbij het meten van de stroomsnelheden van onder naar boven zo'n 15-25 minuten duurde. Van deze meetgegevens zijn twee soorten grafieken gemaakt. In de één staat de snelheid uitgezet tegen de hoogte en in de ander is voor de verschillende hoogtes de snelheid uitgezet tegen de tijd. Deze grafieken zijn te vinden in [15]. Uit de grafieken van de snelheid uitgezet tegen de diepte is de duur van de stroomkenteringen bepaald. De tijdstippen van de meetsessies ten opzichte van doortij of springtij zijn vrij willekeurig. Voor het maken van de twee maximum stroomheidsprofielen in figuur 3.2 is gebruik gemaakt van de grafieken van de stroomsnelheid tegen de hoogte. Om een indruk te krijgen van de gemeten stroomsnelheidsprofielen gedurende een getij zijn op de volgende pagina de grafieken van de stroomsnelheid tegen de diepte van één meetsessie afgedrukt.



**RIJKSWATERSTAAT
DIRECTIE ZEELAND
MEETDIENST**

SEDIMENTTRANSPORTMETING : PARTECH MIDDELBAT

DATUM : 880526

RAAI : NVT DEELRAAI : NVT PUNT : 1 VAART. ZEEKAT R

X-COORDINAAT : 53195 Y-COORDINAAT : 383100

TOELICHTING OP DE VERTIALEN

——— V ——— C
14.01 14.15 295 : BEGINTIJD EINDTIJD BOEDENDEPTE
100 265 120 : V R C (GEM) +EB -VLOED
VERTIKALE SCHAAL : DIEPTE IN CM TOV WATEROPP.
HORIZONTALE SCHAAL : SNELHEID IN CM/S (BOVEN)
CONCENTRATIE IN MG/L (ONDER)

Bijlage E

Rijks Instituut voor Kust en Zee (RIKZ)

Het onderzoek is uitgevoerd bij het Rijks Instituut voor Kust en Zee (RIKZ). Dit instituut heeft drie vestigingen, één in Den Haag, één in Haren en één in Middelburg. Dit onderzoek heeft plaatsgevonden op de vestiging in Middelburg. Het instituut is een tak van het ministerie van Verkeer en Waterstaat en levert als zodanig advies en gegevens gericht op:

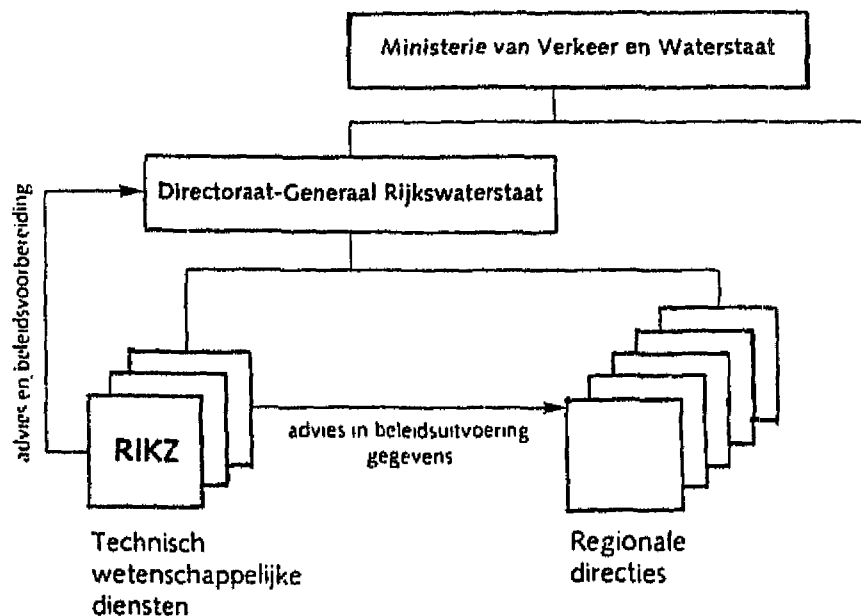
- Duurzaam gebruik van estuaria en zeeën
- Bescherming tegen overstroming door de zee

Het Rijksinstituut voor Kust en Zee ontwikkelt en onderhoudt daartoe de kennis- en gegevensinfrastructuur. Als kenniscentrum staat het RIKZ ook ten dienste van andere delen van de rijksoverheid en neemt het Rijksinstituut voor Kust en Zee deel aan internationale samenwerkingsverbanden. Als opdrachtgever heeft het RIKZ, onderdeel van het Ministerie van Verkeer en Waterstaat, de Hoofddirectie van de Rijkswaterstaat voor beleidsvoorbereiding. Voor de beleidsuitvoering krijgt het instituut opdrachten van regionale directies zoals de directie Zeeland, de directie Zuid-Holland, de directie Noord-Holland, de directie Noordzee en de directie Noord Nederland.

Het RIKZ is onderverdeeld in een aantal afdelingen, in tabel E.1 is dit in beeld gebracht. De afdeling waar dit onderzoek heeft plaatsgevonden was de afdeling 'Onderzoek en Strategie' onderdeel Fysica (OSF).

Adviezen en gegevens

De uitvoering van het beleid stelt regionale directies van de Rijkswaterstaat dagelijks voor keuzes. Over het onderhoud van een vaargeul, het ontwerp van een zeewering, het al of niet - en waar en hoe - bergen van baggerspecie, of over de afstemming van gebruiksfuncties als visserij, natuur en recreatie. Het RIKZ adviseert bij zulke keuzes.



Figuur 12.1: *Overzicht plaats Rikz binnen het ministerie van V & W*

Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ)		
Directiesecretariaat en Facilitaire Zaken		
Stafafdeling Controller		
Personeelszaken		
Onderzoek en Strategie	Advies en Beleidsanalyse	Informatie en Technologie
Programmabureau BEON Fysica Biologie Chemie	Landelijke Zaken Noordzee Wadden Delta	Informatiesystemen Hydro-Instrumentatie Laboratoria Informatica

Tabel 12.1: *Overzicht afdelingen RIKZ*

De uitvoering van het beleid confronteert de beheerder ook met vragen. Hoe schadelijk is de lozing van afvalstoffen? Hoeveel moeten de lozingen worden vermindert om aan de waterkwaliteitseisen te voldoen? Hoe realiseer je natuurontwikkeling? Maar ook, hoe passen we ons land aan bij stijging van de zeespiegel? Door middel van onderzoek wordt door het RIKZ gezocht naar een passend antwoord op zulke vragen.

Beleidsmakers, politici, maar ook burgers willen weten of beleidsvoornemens ook werkelijkheid worden. Wat is de ontwikkeling in het gehalte schadelijke stoffen in zeewater? Hoe verandert de ligging van de kustlijn? Is de afname in de populatie zeehonden al tot staan gebracht? Meetprogramma's van het RIKZ bieden inzicht in de trends en toestand van de zoute watersystemen. Wanneer geconstateerd wordt dat ontwikkelingen afbreuk doen aan veiligheid tegen overstroming en aan duurzaam gebruik dan zijn extra maatregelen nodig. Alternatieven worden door het RIKZ op voor- en nadelen onderzocht en via de minister aan de politiek voorgelegd.

Bescherming tegen overstroming

Een belangrijk deel van Nederland ligt beneden gemiddeld zeeniveau. Dijken en duinen moeten sterk zijn en op hun plaats worden gehouden. Voor alle zeewaterkeringen berekent het RIKZ de veiligheidseisen waaraan getoetst wordt. Voor een doelmatig beheer is kennis van het kustsysteem onontbeerlijk. Het onderzoek richt zich op de zandbewegingen en op voorspellingen van de kustontwikkeling voor de lange termijn.

Van de 250 km duinenkust van Nederland is 60 % aan erosie onderhevig. Het jaarlijks zandverlies bedraagt vijf à zes miljoen m^3 . Over kustachteruitgang die wordt gecompenseerd met zansulppleties adviseert het RIKZ aan de regionale directies.

Kennisinfrastructuur

Het RIKZ is in Nederland de grootste opdrachtgever van toegepast kust- en zeeonderzoek. Hiermee voorziet het RIKZ niet alleen in de directe behoefte van de advisering, maar ook in de voortdurende aanvulling en vernieuwing van kennis en technologie. Samenwerking in het toegepast kust- en zeeonderzoek wordt vormgegeven in het Beleidsgericht Ecologisch Onderzoek Noordzee/Waddenzee, de Raad van Overleg voor het Fysisch-Oceanografisch Onderzoek van de Noordzee en het Nederlands Centrum voor Kustonderzoek. Het eigen onderzoek van het RIKZ is hierin ingebed. Daarnaast wordt gebouwd aan een internationaal netwerk voor deelname aan onderzoeksprojecten in EG-verband. De onderzoekers van het RIKZ initiëren kennisontwikkeling op terreinen die van belang zijn: getij en golven, kustdynamiek, stoftransporten, verontreiniging en ecologie. Hierbij wordt ingespeeld op maatschappelijke en technologische ontwikkelingen. De resultaten vormen de basis voor advisering ten aanzien van complexe vraagstukken op het gebied van veiligheid, erosiebestrijding, vaargeulonderhoud, giftigheid van stoffen, duurzaam gebruik, etc.

Gegevensinfrastructuur

Het RIKZ vervult in Nederland een centrale rol bij de monitoring van kust en zee. Hiertoe ontwikkelt het instituut in samenwerking met de (inter)nationale universitaire- en onderzoekswereld meetmethoden en meetinstrumenten voor bepalingen zowel in het veld en het laboratorium als vanuit vliegtuigen en satellieten. De monitoring omvat fysische, chemische en biologische grootheden. Dit vormt een compleet beeld van de toestand van onze watersystemen en de veranderingen hierin. De gegevens worden ingewonnen met behulp van eigen meetnetten, door andere directies van de Rijkswaterstaat of via uitbesteding aan andere instanties.

Het monitoringsprogramma wordt periodiek geëvalueerd en geoptimaliseerd met gebruikmaking van nieuwe inzichten op statisch gebied en de informatietechnologie als ook ten aanzien van maatschappelijke ontwikkelingen. Het RIKZ zorgt voor kwaliteit, uniformiteit en beschikbaarheid van de gegevensstroom, onder andere door ontwikkeling en beheer van het opslagsysteem DONAR.

De laatste schakel in de gegevensinfrastructuur bestaat uit gebruikersvriendelijke en breed inzetbare presentatiesystemen om de veelheid van gegevens beschikbaar te maken voor onderzoek en beleid. De informatie wordt ook operationeel gebruikt voor de stormvloedwaarschuwingdienst.

Rijksinstituut voor Kust en Zee Internationaal

Internationaal loopt het RIKZ voorop in het stimuleren van een integrale aanpak van kust- en zeebeheer. Zo werkt het RIKZ binnen het Intergovernmental Panel on Climate Change mee aan de wereldwijde reactie op klimaatverandering en zeespiegelstijging. Er is hiertoe in internationaal verband een gemeenschappelijke methode ontwikkeld ter versterking van de planning voor kustzonebeheer. Voor dit soort internationale taken is bij het RIKZ het Coastal Zone Management Centrum geplaatst. In dit centrum worden de diverse Nederlandse Initiatieven in internationaal verband gecoördineerd. Voor het beheer van de Noordzee is een gezamenlijke aanpak door de kuststaten essentieel. Het RIKZ bevordert deze samenwerking actief, zoals bij de voorbereidingen van de Noordzee ministerconferenties, het Verdrag van Parijs en de North Sea Task Force. Internationaal wordt de aandacht gevestigd op een systematische analyse van gebruiksfuncties van de Noordzee en de invloeden daarvan op het ecosysteem.

Bijlage F

Meetpontoon 'De Zeekat'

In deze bijlage wordt een korte toelichting gegeven over het hoe en waarom van het meetpontoon 'De Zeekat', een uitgebreidere toelichting is te vinden in notitie DDMI-84.427 van het RIKZ te Middelburg. Verder wordt weergegeven welke metingen er reeds verricht zijn met het meetpontoon in de Westerschelde.

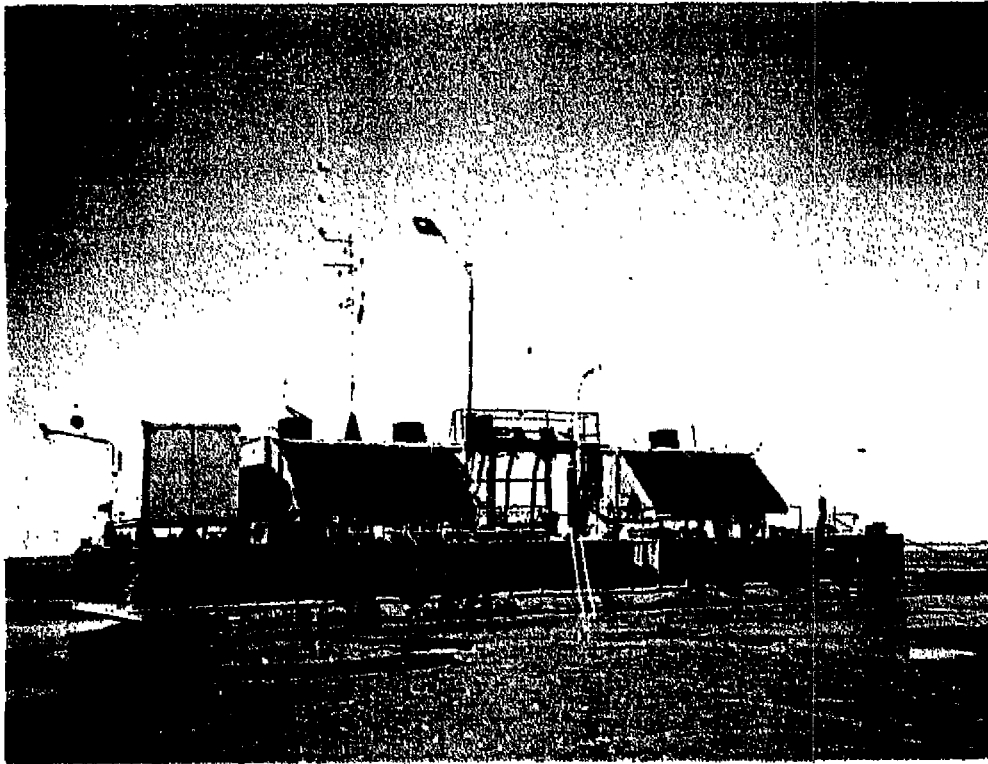
Motief bouw Zeekat

Teneinde het inzicht te verbeteren in de slib- en P.O.C. huishouding in de Oosterschelde en de Westerschelde is in 1984 door de deelprojectengroep BALANS-transport gekozen voor het opstellen van lange meetreeksen. Op die manier kunnen seizoensfluctuaties, maar vooral ook veranderingen van de slib- en P.O.C.-concentraties onder invloed van weersinvloeden, het beste worden bepaald en begrepen. De te meten parameters die daarvoor in aanmerking kwamen waren de troebelheid en de fluorescentie. Om die reden is het verplaatsbare meetpontoon 'De Zeekat' gebouwd, zie figuur F.1.

Eisen

Het meetpontoon is zo ontworpen dat het aan de volgende eisen voldoet:

- onder alle getij- en weersomstandigheden kunnen er continu een aantal waterkwaliteitsparameters worden gemeten en kunnen er bemonsteringen worden uitgevoerd.
- het benodigde proceswater wordt opgepompt van drie diepten, maximaal kan een diepte van 38 meter worden bereikt.
- één monsternamepunt meet op een vaste afstand van het wateroppervlak, de twee andere monsternamepunten (midden en bodem) worden op een vaste afstand van de bodem gehouden door een afviersysteem.
- het ponton is tot maximaal 6 dagen zelfsupporting ten aanzien van energievoorziening en gegevensopslag



Figuur 13.1: Foto van het verplaatsbare meetpontoon 'De Zeekat'

Werking

Het meetpontoon bestaat uit een bak van 25*8*2 meter met in het midden een beun (opening). Door het beun wordt aan kettingen een ballast-lichaam afgevierd. Aan het ballast-lichaam zit een trigger-gewicht waarop een trigger, gemonteerd in de hijsinstallatie, reageert. Daarmee wordt het ballast-lichaam intermitterend tot nabij de bodem afgevierd, de frequentie waarmee dat gebeurt is instelbaar. Vanaf de drie monsternamepunten lopen zuigleidingen naar één pomp. Met die pomp wordt achtereenvolgens van de verschillende monsterniveaus water opgepompt. Met dit proceswater worden continue metingen met sensoren of semi-continue bemonsteringen gedaan.

Continue metingen Het meten van de troebelheid en de fluorescentie in het continue meetprogramma geschiedt met behulp van sensoren die in de leiding na de pomp zitten. De meetprocedure is als volgt:

Per monsternamepunt wordt gedurende 1 minuut de leiding doorgespoeld. Daarna wordt op de volgende manier gemeten: iedere 10 seconden wordt er een meetwaarde genomen en na drie minuten wordt uit de verzamelde gegevens (18 stuks) het gemiddelde en de spreiding berekend en worden deze getallen opgeslagen. De benodigde rekentijd valt in de periode dat de leiding van het volgende niveau wordt doorgespoeld. Zo worden de drie monsternamepunten van boven naar beneden afgewerkt.

Op deze manier wordt om de twaalf minuten van iedere diepte een gemiddelde waarde met de bijbehorende spreiding verkregen over een meetperiode van 3 minuten. De troebelheid wordt daarbij in ME (Monitek Eenheden) weergegeven en de fluorescentie in FE (Fluoresc. Eenheden).

Semi-continue metingen

Naast deze metingen kan per monsterniveau een automatisch monsternameapparaat worden ingeschakeld. Daarin zit voor ieder niveau een carroussel met een capaciteit van 12 flessen van 3 liter. De monsterfrequentie van deze apparatuur is instelbaar. Verder is er een stroomsnelheidsmeter gemonteerd bij het bovenste meetpunt, deze meet om de vier minuten de stroomsnelheid plus de richting ervan.

Naast deze (semi-)continue metingen en bemonsteringen zijn er mogelijkheden voor incidentele metingen of bemonsteringen zoals:

- Het meten van zandtransport met een AZTM
- Het meten van het onderwaterlichtklimaat met een fotocel
- Het bemonsteren van water voor fyto- of zoöplanktononderzoek, voor het bepalen van chloride- of nutriëntengehaltes etc.

Voor de AZTM staat een speciale zware davit met lier op het ponton en voor extinctiementingen zijn twee meetpunten ontworpen. Verder kunnen er altijd watermonsters worden

genomen van de diepte van waar tijdens het continue-programma het water wordt opgepompt. Het zal echter niet mogelijk zijn in te grijpen in de pompcyclus die hoort bij het continue-programma.

IJking van het continue meetsysteem

Tijdens een meetsessie van continuemetingen vinden er drie soorten ijkingen plaats, te weten:

- Een nulpuntscontrole van de sensoren die eenmaal per 24 uur automatisch wordt uitgevoerd.
- Bepaling van de steilheid van het signaal met behulp van standaarden; die bepaling vindt eenmaal per 14 dagen plaats tijdens een groot onderhoud.
- Bepaling van een ijklijn voor elk van de drie dieptes waarmee uit de gemeten troebelheid resp. de gemeten fluorescentie kan worden berekend, wat de slib- (zwevende stof) resp. chlorofyllgehalten zijn. Hiervoor wordt het monsternameapparaat gebruikt.

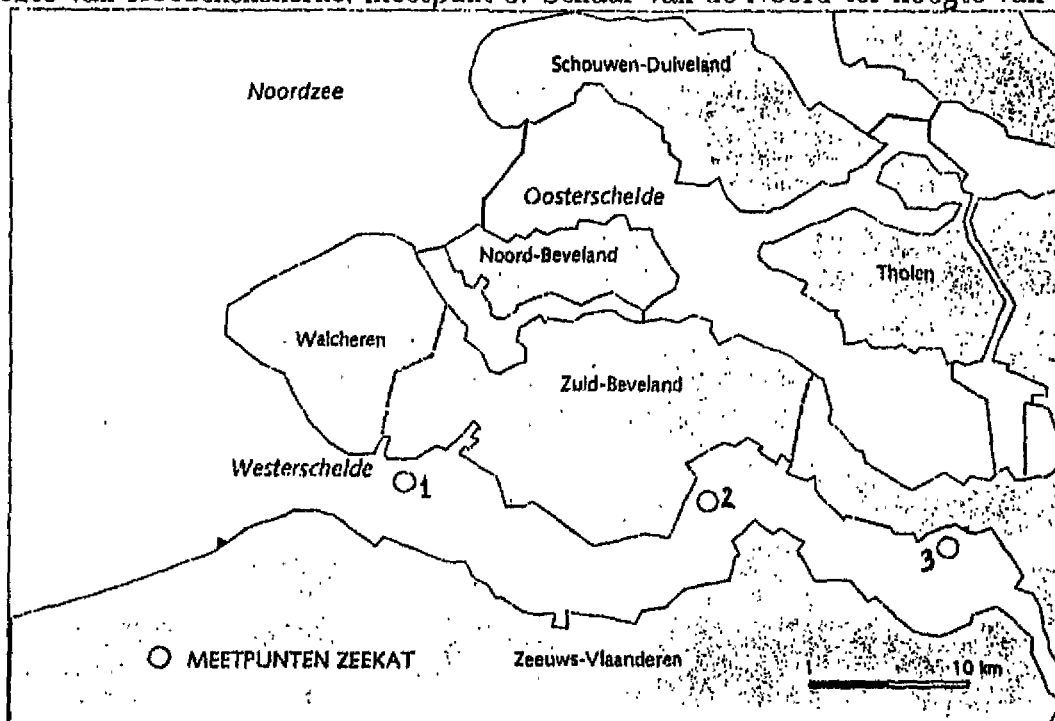
De ijklijn moet eenmaal per 14 dagen worden bepaald omdat die seizoensafhankelijk is en wordt beïnvloed door de weersomstandigheden. Deze ijklijn wordt bepaald zowel voor als na de controle van de steilheid van het meetsignaal. Op die manier kan het verloop van de ijklijn over de voorafgaande periode worden gebruikt ter correctie van de meetwaarden.

Verrichtingen Zeekat in de Westerschelde

In de periode najaar 1987 tot en met voorjaar 1990 heeft het meetpunt 'De Zeekat' continu slibtransporten gemeten. Deze metingen zijn verricht op drie verschillende locaties in de Westerschelde, zie figuur 13.2. In tabel 13.1 volgt een nadere specificatie van de metingen op de drie meetlocaties. Op die locaties zijn volgende parameters gemeten: de troebelheid, de stroomsnelheid in horizontale en verticale richting, de fluorescentie, de windsnelheid, de geleidendheid, de watertemperatuur en de radioactiviteit.

Verder zij vermeld dat, in ieder geval op de locatie te Middelgat, om de ± 8 minuten de hoogtes van de onderste twee meetpunten gecorrigeerd werden aan de hand van de waterhoogte op dat moment.

Figuur 13.2: Overzicht van de meetpunten van de Zeekat in de Westerschelde. Met meetpunt 1: Schaar van Spijkerplaat ter hoogte van Vlissingen, meetpunt 2: Middelgat ter hoogte van Hoedekenskerke, meetpunt 3: Schaar van de Noord ter hoogte van Bath



Tabel 13.1: Nadere specificaties van de drie meetlocaties van 'De Zeekat'

Meet- periode	Lokatie	Pos. XY tov Parijs	WN	meethoogte (m)			Meet- instrument
				OPP	MID	BOD	
1-9-'87 t/m 27-6-'88	Middelgat bij Hoede- kenskerke	53195 383100	18	1.5	7.25 tot 7.75	2.25 tot 2.75	alles 1 Monitek
22-8-'88 t/m 30-6-'89	Schaar v.d. Noord bij Bath	70670 378237	16	1.5	7.25 tot 7.75	2.25 tot 2.75	alles 2 Monitek
				Hieronder MSS			
1-9-'89 t/m 30-6-'90	Schaar van Sp.pl bij Vlissingen	32878 383780	13	1.5	6.0	9.0	alles 2 Monitek

Verklaring van de meethoogten en de betekenis van WN:

OPP = Meethoogte bovenste meetpunt in meters beneden het wateroppervlak.

MID = Meethoogte middelste meetpunt in meters boven de bodem.

BOD = Meethoogte onderste meetpunt in meters boven de bodem.

MSS = Meethoogte van de drie meetpunten in meters onder het wateroppervlak.

WN = Waterhoogte boven de bodem ten opzichte van N.A.P.

Bijlage G

Geschreven matlabprogramma's voor het filteren

```
unix('/bin/rm *.kk5');
unix('cp in1dv.cop in1dv.kk5');
%
% *****
% *
% *
% *          EDVIENDI.M
% *          Met deze file worden de eddy-viscositeiten en energie
% *          dissipaties berekend met het 1DV-model en opgeslagen in een file.
% *          Deze file kan dan gebruikt worden bij het filteren, mits er
% *          geen dichtheidsterugkoppeling plaatsvind.
% *
% *****
%
N=50;          % Aantal lagen waar het model mee rekent
ts=4;          % De tijdsduur [in min] die het 1DV-model berekent
u0=0;          % u0*ts is tijdstip na 0.00 uur 30-10-87 vanaf waar gekalmanfilterd wordt.
du=1;          % input(' 1=kg/m^3, 1000=g/m^3 type in naar keuze: ');
k=ts*60/st;    % [in sec] dit is de dimensieloze grote van de kalman tijdstap
THV=input('Hoeveel stappen moet er geextended kalmanfiltert worden THV : ');
%
%   Aanpassen NUMTIM voor het draaien van normale 1DV-Model tot
%   tijdstip vanaf waar het Extended Kalmanfilteren begint.
%
[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,841,-1);
fprintf(fid,'%1.0f    ',u0*ts/0.1);
fclose(fid);
%
```



```

% Het draaien van het 1DV-model om waarden voor V,E etc. te krijgen
% op t=0.
%
unix('./onedv.exe');
if u0==0
    unix('/bin/rm restart.kk5');
end
%
% Op goede tijd zetten NUMTIM
%
[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,841,-1);
fprintf(fid,'%1.0f    ',ts/(0.1));
fclose(fid);
%
THV=THV+u0;
%
% Begin van het Doorstarten
%
for u=(1+u0):THV
    u
%
% inlezen van v,e [in kg/m^3 !!] uit de uitvoerfiles met fscanf
%
    [fid,message1]=fopen('kalman.kk5');
    fseek(fid,131,-1);
    [M1,count]=fscanf(fid,'%g',[4,N+1]);
    M1=M1';
    fclose(fid);
    for j=1:N-1
        E(j)=M1(N-j+1,3);
        V(j)=M1(N-j+1,4);
    end
% Voor het afdrukken van de energie dissipatie E en eddy-viscositeit V
    GD(1,u-u0)=ts*(u-1);
    for j=1:N-1
        GD(1+j,u-u0)=E(j);
        GD(1+j+N-1,u-u0)=V(j);
    end
%
% Het aanpassen van de starttijd van het 1dvmodel
%
    [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
    fseek(fid,766,-1);
    fprintf(fid,'%2.1f    ',ts*(u-1));
    fclose(fid);
%
% Het runnen van het 1dvmodel
%
```

[illegible]

```

unix('/bin/rm *.kk5');
unix('cp in1dv.cop in1dv.kk5');
%
% *****
% *
% *
% *
% *
% *
% *
% *
% *
% *****
%
flag=[1,2,0,4,5,6]; % als 'flag=[0,2,3,4,5,6]' dan 1 slibconcentraties bekend
% als 'flag=[1,0,3,4,5,6]' dan is er dichtheidsterugkoppeling met 1
% als 'flag=[1,2,0,4,5,6]' dan 3 slibconcentraties bekend
% als 'flag=[1,2,3,0,5,6]' dan is er dichtheidsterugkoppeling met 3
% als 'flag=[1,2,3,4,0,6]' dan worden er meetgegevens gegenereerd met
% als 'flag=[1,2,3,4,5,6]' dan worden er meetgegevens gegenereerd met
ss=0.7; % Gemiddelde Prandtl-Schmidt nummer
N=50; % Aantal lagen waar het model mee rekt
ts=4; % De tijdsduur [in min] die het 1DV-model berekent
n=2;
if all(flag+[1,2,0,0,0,0])
    lb=1; % Is aantal laagconcentraties dat bekend is per tijdstap
end
if all(flag+[0,0,3,4,5,6])
    lb=3; % Is aantal laagconcentraties dat bekend is per tijdstap
end
u0=0; % u0*ts is het tijdstip vanaf waar gekalmanfiltert wordt
du=1; % input(' 1=kg/m^3, 1000=g/m^3 type in naar keuze: ');
opp=5; % nr. laag van 1.50 m onder het wateropp.
mid=34; % nr. laag van 40 procent boven de bodem
bod=44; % nr. laag van 1.00 m boven de bodem
agl=3; % Is het aantal in werkelijkheid gemeten lagen
h=1/N; % Dit is de stapgrootte in de hoogte
beta=sv*st/(ss*sz^2);
alfa=sw*st/sz;
k=ts*60/st; % [in sec] dit is de dimensieloze grote van de kalman tijdstap
Wo=input('Geef de startwaarde voor Wo in m/s: ');
DminE=input('Geef de startwaarde voor D-E in kg/sm^2: ');
if all(flag+[1,0,3,0,5,0])
    fa=input('Geef waarde (fa) voor de beginconcentratie 0.03*fa (g/l) : ');
end
if all(flag+[0,0,0,0,5,6])

```

```

cde=input('Geef waarde maximum erosie/sedimentatie cde (g/l) : ');
end
BewWo=Wo;
a=0.3;      % Beginwaarde voor 'a' in de van Leussen-formule
b=0.03;    % Beginwaarde voor 'b' in de van Leussen-formule
Sde=0;     % Waarde FLUX 1DV-model
%
%   Inlezen P,Q,THV
%
% P1=0.0005; PN=0.0005; Pwo=0.001; Pde=0.1; QO=0; Qwo=0; Qde=0.1;
%
if all(flag+[1,2,3,4,0,0])
    P1=input('Geef een beginwaarde P1 voor de variantie C(1) (in [mg/l]): ');
    PN=input('Geef een beginwaarde PN voor de variantie C(N) (in [mg/l]): ');
    Pwo=input('Geef een beginwaarde Pwo voor de variantie Wo : ');
    Pde=input('Geef een beginwaarde Pde voor de variantie van D-E : ');
    QO=input('Geef een waarde voor de variantie van de systeemruis Q(C) (in [mg/l]) : ');
    Qwo=input('Geef een waarde voor de variantie van de systeemruis Qwo : ');
    Qde=input('Geef een waarde voor de variantie van de systeemruis Qde : ');
    RuBo=input('Geef meetruis bovenste meetpunt in (g/l) : ');
    RuOn=input('Geef meetruis onderste meetpunt in (g/l) : ');
end
if all(flag+[0,0,0,0,5,6])
    P1=0; PN=0; Pwo=0; Pde=0; QO=0; Qwo=0; Qde=0; RuBo=0; RuOn=0;
end
THV=input('Hoeveel stappen moet er geextended kalmanfiltert worden THV : ');
%
if all(flag+[0,2,0,4,0,6])
    %
    %   Aanpassen NUMTIM voor het draaien van normale 1DV-Model tot
    %   tijdstip vanaf waar het Extended Kalmanfilteren begint.
    %
    [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
    fseek(fid,841,-1);
    fprintf(fid,'%1.0f   ',u0*ts/0.1);
    fclose(fid);
    %
    %   Flag van STRESS/FLUX op FLUX zetten
    %
    [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
    fseek(fid,5134,-1);
    fprintf(fid,'FLUX      ');
    fclose(fid);
end
%
%   Het aanmaken van lege matrices en gedeelten van matrices die niet
%   meer veranderen
%
staDHWDe;

```

```

%
if all(flag+[0,2,0,4,0,6])
%
% Het draaien van het 1DV-model om waarden voor V,E etc. te krijgen
% op t=0.
%
unix('./onedv.exe');
if u0==0
    unix('/bin/rm restart.kk5');
end
%
% Op goede tijd zetten NUMTIM
%
[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,841,-1);
fprintf(fid,'%1.0f    ',ts/(0.1));
fclose(fid);
end
%
THV=THV+u0;
%
% Inlezen van de gemeten waterhoogtes [in m]
%
[fid,message3]=fopen('871030m1.wh4');
[M4,count]=fscanf(fid,'%g',[2,THV+1]);
M4=M4';
fclose(fid);
%
% Inlezen van de gemeten concentraties [in g/m^3 !!!]
%
if all(flag+[1,2,0,0,0,0])
    [fid,message3]=fopen('rugenka2.dat');
    [M3,count]=fscanf(fid,'%g',[3,THV+1]);
    M3=M3';
    fclose(fid);
    for j=3:(2+lb)
        for i=1:(THV+1)
            M3(i,j)=M3(i,j)*du/1000;
        end
    end
end
if all(flag+[0,0,3,4,5,6])
    [fid,message3]=fopen('??rugenkal.dat');
    [M3,count]=fscanf(fid,'%g',[4,THV+1]);
    M3=M3';
    fclose(fid);
    for j=1:3
        for i=1:(THV+1)
            M3(i,j)=M3(i,j)*du/1000;
        end
    end
end

```

```

    end
end
end
%
%   Inlezen van matrix met waarden van de eddy-viscositeit V en
%   energie dissipatie E
%
if all(flag+[1,0,3,0,5,0])
    [fid,message1]=fopen('edviendi.dat');
    fseek(fid,131,-1);
    [M1,count]=fscanf(fid,'%g',[1+2*(N-1),THV+1]);
    M1=M1';
    fclose(fid);
end
if all(flag+[0,2,0,4,0,6])
    %
    %   inlezen van c [in kg/m^3 !!] vanuit de uitvoerfile
    %
    [fid,message2]=fopen('kalman.kk5');
    fseek(fid,3327,-1);
    [M2,count]=fscanf(fid,'%g',[7,N]);
    M2=M2';
    fclose(fid);
    for j=1:N
        CV(j)=M2(N+1-j,7)*du;
        BewCV(j)=CV(j);
    end
    BewCV=BewCV';
end
if all(flag+[1,0,3,0,5,0])
    for j=1:N
        C(j)=0.03*fa*du;
    end
end
for j=1:lb
    Z(j)=M3(u0+1,lb+3-j);
end
if all(flag+[1,2,0,0,0,0])
    for i=1:(N+n)
        H(i,1)=HO(i,4-M3(u0+1,1));
    end
end
Xk1k=[C';du*Teta'];
Pk1k=PO;
Kk=Pk1k*H*[H'*Pk1k*H+R]^(-1);
Xkk=Xk1k+Kk*[Z'-H'*Xk1k];
Pkk=[I-Kk*H]*Pk1k*[I-Kk*H]'+Kk*R*Kk';
XC=Xk1k;      % zet ber. concentraties op verschillende tijdst.
               % in een matrix

```

```

BewPteta=[Pkk(N+1,N+1)/du,Pkk(N+2,N+2)/du];
%
%   Begin van het Doorstarten
%
for u=(1+u0):THV
    u
    if all(flag+[0,2,0,4,0,0])
        %
        %   Aanpassen van de slibconcentraties in het 1DV-model
        %
        [fid,message]=fopen('???kk5');
        fseek(fid,???,-1);
        for i=1:N
            fprintf(fid,'%??f\n',);
        fclose(fid);
    end
    if all(flag+[0,2,0,4,0,6])
        %
        %   Het aanpassen van de starttijd van het 1dvmodel
        %
        [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
        fseek(fid,766,-1);
        fprintf(fid,'%2.1f   ',ts*(u-1));
        fclose(fid);
        %
        %   Aanpassen van Wo in de invoer
        %
        [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
        fseek(fid,5063,-1);
        fprintf(fid,'%2.5f           ',Wo);
        fseek(fid,5425,-1);
        fprintf(fid,'%2.4f %2.4f           ',[a,b]);
        fclose(fid);
        %
        %   Het aanpassen van DminE in de invoerfile. Als DminE positief dan
        %   deze waarde invullen parameter stress deposition (let wel de flag
        %   in invoerfile ervoor moet op flux staan). Stress erosion moet dan
        %   op nul gezet worden. Als DminE negatief is moet de absolute (!)
        %   waarde ingevuld worden in de parameter stress erosion en de
        %   parameter stress moet dan op nul gezet worden.
        %
        if DminE<0
            [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
            fseek(fid,5215,-1);
            fprintf(fid,'%2.5f           ',0);
            fseek(fid,5286,-1);
            fprintf(fid,'%2.5f           ',abs(DminE));
            fclose(fid);
        else

```

```

[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,5215,-1);
fprintf(fid,'%2.5f      ',DminE);
fseek(fid,5286,-1);
fprintf(fid,'%2.5f      ',0);
fclose(fid);
end
%
%   Het runnen van het 1dvmodel
%
unix('./onedv.exe');
%
%   Bepalen van v,e
%
[fid,message1]=fopen('kalman.kk5');
fseek(fid,131,-1);
[M1,count]=fscanf(fid,'%g',[4,N+1]);
M1=M1';
fclose(fid);
for j=1:N-1
    E(j)=M1(N-j+1,3);
    V(j)=M1(N-j+1,4)/sv;
end
end
if all(flag+[1,0,3,0,5,0])
    for j=1:N-1
        E(j)=M1(u-u0+1,1+j);
        V(j)=M1(u-u0+1,N+j);
    end
end
if all(flag+[0,0,0,0,0,6])
    %
    %   Inlezen van de slibconcentratie c uit de uitvoerfiles
    %
    [fid,message2]=fopen('kalman.kk5');
    fseek(fid,3327,-1);
    [M2,count]=fscanf(fid,'%g',[7,N]);
    M2=M2';
    fclose(fid);
    for j=1:N
        CV(j)=M2(N+1-j,7)*du;
    end
    BewCV=[BewCV,(CV)'];
end
if all(flag+[1,2,3,4,0,0])
    C(i)=Xkk(i);
end
if all(flag+[0,0,0,0,5,6])
    C(i)=Xk1k(i);
end

```



```

end
%
% Bepalen van de discrete waterhoogtes
%
WH1=M4(u,2);    % WH1 is waterhoogte op t=t_n
WH2=M4(u+1,2);  % WH2 is waterhoogte op t=t_{n+1}
%
% bepalen van de matrix F
%
bepDHWDDe;
%
BewWo=[BewWo;Wo];
if all(flag+[0,0,0,0,5,6])
    Teta(1,2)=cde*sin(2*pi/700(u*ts+540));
end
BewDE=[BewDE,Teta(1,2)];
%
% Voorspelstap Extended Kalmanfilter
%
Xk1k=[Cs*du;du*Teta'];
Pk1k=Fk*Pkk*Fk'+G*Q*G';
%
for j=1:lb
    Z(j)=M3(u+1,lb+3-j);
end
if all(flag+[1,2,0,0,0,0])
    for i=1:(N+n)
        H(i,1)=HO(i,4-M3(u+1,1));
    end
end
%
% Correctiestap Extended Kalmanfilter
%
Kk=Pk1k*H*[H'*Pk1k*H+R]^(-1);
Xkk=Xk1k+Kk*[Z'-H'*Xk1k];
Pkk=[I-Kk*H]*Pk1k*[I-Kk*H]'+Kk*R*Kk';
%
% Bewaren van de toestand en de covarianties van teta
%
XC=[XC,Xk1k];
BewPteta=[BewPteta,[Pkk(N+1,N+1)/du,Pkk(N+2,N+2)/du]];
%
% Aanpassen van Teta
%
Wo=Xkk(N+1)/du;
DminE=Xkk(N+2)/du;
Teta=[Wo,DminE];
Bewteta=[Bewteta,Teta];
end

```

```

for i=1:(THV+1-u0)
    GD(1,i)=XC(N+1-opp,i);
    GD(2,i)=XC(N+1-mid,i);
    GD(3,i)=XC(N+1-bod,i);
    % GD(4,i)=ts*(i-1)+u0*4;
    DT(1,i)=ts*(i-1)+u0*4;
end
if all(flag+[0,0,0,0,5,0])
    [fid,message]=fopen('gendanie.dat','w');
    fprintf(fid,'%7.2f %7.2f %7.2f %7.1f\n',[GD;DT]);
    fclose(fid);
end
if all(flag+[0,0,0,0,0,6])
    for i=1:(THV-1-u0)
        GD(1,i)=BewCV(N+1-opp,i);
        GD(2,i)=BewCV(N+1-mid,i);
        GD(3,i)=BewCV(N+1-bod,i);
    end
    [fid,message]=fopen('gen1Dnie.dat','w');
    fprintf(fid,'%7.2f %7.2f %7.2f %7.1f\n',[GD;DT]);
    fclose(fid);
end

```

```

%
% *****
% *
% *
% *          bepDHWDDe.M
% *          In deze file wordt o.a. matrix Fk berekend..
% *           $A(k+1)*X(k+1) = B(k)*X(k) + W(k) \implies$ 
% *           $X(k+1) = Fk*X(k) + G(k)*W(k)$  , met  $Fk=A^{(-1)}B(k)$  en  $G(k)=A^{(-1)}$ 
% *
% *****
%
for i=1:N-1
    Gw(i)=sqrt(E(i)/(sv*V(i)));
end
for i=1:N-1
    W(i)=(Wo*(1+a*Gw(i))/(1+b*Gw(i)^2))/sw;
    BewWs(i,u)=W(i);
end
for i=2:N-1
    p(i-1)=k*(alfa*W(i-1)/(2*h)-beta*V(i-1)/(h^2));
    q(i)=1 + 1/2*(WH1/WH2-1) - k*alfa*(W(i)-W(i-1))/(2*h) + k*beta*(V(i)+V(i-1))/(h^2);
    r(i+1)=-k*(beta*V(i)/(h^2)+alfa*W(i)/(2*h));
end
alfa1=1+1/2*(WH1/WH2-1)+k*(beta*V(1)/(h^2)-alfa*W(1)/(2*h));
beta1=k*(beta*V(1)/(h^2)+alfa*W(1)/(2*h));
alfaN=k*alfa*W(N-1)/(2*h)-k*beta*V(N-1)/(h^2);
betaN=1+1/2*(WH1/WH2-1)+k*alfa*W(N-1)/(2*h)+k*beta*V(N-1)/(h^2);
As(1,1)=alfa1; As(1,2)=beta1;
for i=2:N-1
    As(i,i-1)=p(i-1); As(i,i)=q(i); As(i,i+1)=r(i+1);
end
As(N,N-1)=alfaN; As(N,N)=betaN;
S(1)=-k/h;
if all(flag+[1,2,3,4,0,0])
    Cs=(As^(-1)*Bs*C'+As^(-1)*S*Xkk(N+2))/du;
end
if all(flag+[0,0,0,0,5,6])
    Cs=(As^(-1)*Bs*C'+As^(-1)*S*Xk1k(N+2))/du;
end
for i=1:N-1
    z1(i)=((1+a*Gw(i))/(1+b*Gw(i)^2))/sw;
    z2(i)=k*alfa/(2*h)*(Cs(i+1)+Cs(i));
end
Ls(1,1) = -z2(1)*z1(1); Ls(1,2) = k/h;
for i=2:N-1
    Ls(i,1) = z2(i-1)*z1(i-1)-z2(i)*z1(i); Ls(i,2) = 0;
end
Ls(N,1) = z2(N-1)*z1(N-1); Ls(N,2) = 0;
A=[As Ls;Leeg In]; B=[Bs Leeg';Leeg In];
Fk=A^(-1)*B; G=A^(-1);

```

```

%
% *****
% *
% *
% *          staDHWDe.M
% *      In deze file worden de dingen aangemaakt die slechts eenmalig
% *      hoeven te worden aangemaakt.
% *
% *****
%
S=0;      HO=0;      GD=0;      DT=0;      PkkWo=0;      PkkDe=0;
BewWs=0;  BewCV=0;  BewWo=0;  BewDE=0;  teller=0;  XC=0;
Gw=0;     Bs=0;     As=0;     Leeg=0;     Leeg2=0;     I=0;
IS=0;     L=0;      A=0;      B=0;      Fk=0;      In=0;
HL=0;     H=0;      PO=0;     Pk1k=0;    Pkk=0;      Xk1k=0;
Xkk=0;     Kk=0;     Teta=0;    Q=0;      R=0;      M1=0;
M2=0;     M3=0;     E=0;      V=0;      Z=0;      C=0;
for i=1:N+n
    for j=1:N+n
        L(i,j)=0; I(i,j)=0;
    end
end
for i=1:N+n
    I(i,i)=1;
end
for i=1:N
    for j=1:N
        Bs(i,j)=0; As(i,j)=0;
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        In(i,j)=0;
    end
end
for i=1:n
    for j=1:N
        Leeg(i,j)=0;
    end
end
for i=1:agl
    for j=1:N+n
        HO(j,i)=0;
    end
end
for i=1:N
    S(i)=0;
end
S(1)=-k/h;
HO(N+1-opp,3)=1;  HO(N+1-mid,2)=1;  HO(N+1-bod,1)=1;

```

```

if all(flag+[0,0,3,4,5,6])
    H=HO;
end
for i=1:N
    Bs(i,i)=1;
end
for j=1:n
    In(j,j)=1;
end
%
% Startwaarden
%
for i=1:N+n
    for j=1:N+n
        PO(i,j)=0; Q(i,j)=0;
    end
end
PN=PN*du/1000; P1=P1*du/1000;
for i=1:N
    PO(i,i)=(i-1)*(PN-P1)/(N-1)+P1; Q(i,i)=QO*du/1000;
end
PO(N+1,N+1)=Pwo*du; PO(N+2,N+2)=Pde*du;
Q(N+1,N+1)=Qwo*du; Q(N+2,N+2)=Qde*du;
for i=1:lb
    for j=1:lb
        R(i,j)=0;
    end
end
%
% Variantie ruis metingen in [kg/m^3]
%
if all(flag+[1,2,0,0,0,0])
    R(1,1)=RuBo*du;
end
if all(flag+[0,0,3,4,5,6])
    R(1,1)=RuBo*du; R(2,2)=0.5*(RuBo+RuOn)*du; R(3,3)=RuOn*du;
end
%
% Aanpassen van a,b,Wo in de invoer op t=0
%
[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,5063,-1);
fprintf(fid,'%2.5f ',Wo);
fseek(fid,5425,-1);
fprintf(fid,'%2.4f %2.4f ',[a,b]);
fclose(fid);
%
% startwaarde voor DminE
%
```

```

if Sde<0
    [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
    fseek(fid,5215,-1);
    fprintf(fid,'%2.2f      ',0);
    fseek(fid,5286,-1);
    fprintf(fid,'%2.2f      ',abs(Sde));
    fclose(fid);
else
    [fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
    fseek(fid,5215,-1);
    fprintf(fid,'%2.2f      ',Sde);
    fseek(fid,5286,-1);
    fprintf(fid,'%2.2f      ',0);
    fclose(fid);
end
Teta=[Wo,DminE];
Bewteta=Teta;
IS=[I,I,I,I];
%
%   Op nul zetten van de starttijd voor het 1dvmodel
%
[fid,message]=fopen('in1dv.kk5','r+');
fseek(fid,766,-1);
fprintf(fid,'%2.1f      ',u0);
fclose(fid);

```

```

%
% *****
% *
% *
% *          RUISTOE2.M
% *    programmetje waarmee ruis aan gegenereerd meetgegevens toegevoegd
% *    kan worden, waarbij per tijdstap alledrie de concentraties
% *    bekend blijven.
% *
% *****
%
R=0;
M2=0;
Mu=0;
MD=0;
Mz=0;
Mt=0;
R(1)=5.0; % st. dev. ruis opp. in (mg/l)!
R(2)=5.0; % st. dev. ruis mid. in (mg/l)!
R(3)=5.0; % st. dev. ruis bod. in (mg/l)!
kk=4;      % Is tijd + aantal geselecteerde concentraties per tijdstap
du=1;      % mg/l --> g/l neem du=1000 (omg. du=0.001), onverandert neem du=1
THV=input('Over hoeveel stappen moet ruis geplaatst worden: ');
%
THV=THV+1;
[fid1,message]=fopen('gendakal.dat','r+');
[Mz,count]=fscanf(fid1,'%g',[kk,THV]);
Mz=Mz';
fclose(fid1)
Ru=randn(THV,kk);
Mt=Mz;
for j=1:(kk-1)
    for i=1:THV
        Mt(i,j)=abs(Mz(i,j)/du + R(j)*Ru(i,j)/du) ;
    end
end
MD=Mt';
[fid2,message]=fopen('rugenkal.dat','w+');
fprintf(fid2,'%8.4f %8.4f %8.4f %5.0f\n',MD);
fclose(fid2);

```

```

%
% *****
% *
% *
% *          TPlotCON.M
% *      Door het runnen van dit programmaatje na het draaien van een
% *      de ext*. * files wordt een grafiek verkregen van de concentr.
% *      tegen de tijd van de drie verschillende hoogtes voor en na
% *      kalmanfiltering
% *
% *****
%
MC=0;
DG=0;
MCE=0;
[fid,message3]=fopen('conc4.dat');
[MC,count]=fscanf(fid,'%g',[4,THV+1]);
MC=MC';
fclose(fid);
for i=1:(THV+1)
    for j=1:3
        MCE(i,j)=MC(i,j);
    end
end
DG=GD';
subplot(211),plot(DT,1000*DG/du);
title('Geschatte slibgehalten op drie hoogtes in de verticaal');
xlabel('Tijd [min]');
ylabel('Concentratie [mg/l]');
legend('Oppervlak','midden (33 %)','Bodem (2.25m)');
figure(1),axis([0 4*THV 0 250]);
subplot(212),plot(DT,MCE);
title('Gemeten slibgehalten op drie hoogtes in de verticaal');
xlabel('Tijd [min]');
ylabel('Concentratie [mg/l]');
legend('Oppervlak','midden (33 %)','Bodem (2.25m)');
figure(1),axis([0 4*THV 0 250]);
anpr=input('Grafiek printen (j=1)/(n=0)) ? : ');
if anpr==1
    print -dps2;
end

```



```

%
% *****
% *
% *
% *          PLOTBOD.M
% * Door het runnen van dit programmaatje na het draaien van een
% * de ext*. * files wordt een grafiek verkregen van het residu van laag 44
% * tegen de tijd van de drie verschillende hoogtes voor en na
% * kalmanfiltering
% *
% *****
%
MC=0;
DG=0;
Sig1=0;
Sig2=0;
Nul=0;
[fid,message3]=fopen('conc4.dat');
[MC,count]=fscanf(fid,'%g',[4,THV+1]);
MC=MC';
fclose(fid);
for i=1:(THV+1)
    DG(i)=GD(3,i)-MC(i,3)/1000;
    Sig1(i)=sqrt(BewPc(i,3));
    Sig2(i)=-sqrt(BewPc(i,3));
    Nul(i)=0;
end
subplot(211),
plot(DT,DG,'--',DT,Sig1,'-',DT,Sig2,'-',DT,Nul,'.');
title('Residu schatting slibconcentratie 2.25 meter boven de bodem');
xlabel('Tijd [min]');
ylabel('Concentratie [g/l]');
%legend('Bodem (2.25m)');
figure(1),axis([0 4*THV -0.06 0.06]);
anpr=input('Grafiek printen (j=1)/(n=0) ? : ');
if anpr==1
    print -dps2;
end

```

Zo zijn ook PLOTMID.M, PLOTOPP.M geschreven voor het plotten van residuen plus bijbehorende varianties van de slibconcentraties met fictieve meetgegevens van laag 30 en laag 5. Tevens zijn nog EPLOTBOD.M, EPLOTMID.M en EPLOTOPP.M voor het plotten van de residuen van de schattingen met de gemeten slibconcentraties.

```

%
% *****
% *
% *
% *          TPlotDE.M
% *          Door het runnen van dit programmaatje na het draaien van een
% *          de ext*. * files wordt een grafiek verkregen van het residu
% *          van de schatting van DminE tegen de tijd + de bijhorende
% *
% *****
%
MC=0;
DG=0;
MCE=0;
Sig1=0;
Sig2=0;
Nul=0;
gh=input('Wat is de juiste waarde van DminE? : ');
for i=1:(THV+1)
    MCE(i)=BewPteta(i,2)-gh;
    Sig1(i)=+sqrt(BewPteta(i,2));
    Sig2(i)=-sqrt(BewPteta(i,2));
    Nul(i)=0;
end
DG=GD';
subplot(212),plot(DT,MCE,'--',DT,Sig1,'-',DT,Sig2,'-',DT,Nul,'');
title('Schatting van DminE met bijbeh. Var. ');
xlabel('Tijd [min]');
ylabel('Erosie/Sedimentatie [kg/sm^2]');
% legend('Schatting Dmin','Var schatter','Var schatter');
figure(1),axis([0 4*THV -0.0025 0.0025]);
anpr=input('Grafiek printen (j=1)/(n=0) ? : ');
if anpr==1
    print -dps2;
end

```

Evenzo TPlotTWO.M voor het plotten van het residu van de schatting van Wo met fictieve meetgegevens

```

%
% *****
% *
% *
% *          PLOTDE.M
% * Door het runnen van dit programmaatje na het draaien van een
% * de ext*. * files wordt een grafiek verkregen van de schatting
% * van DminE tegen de tijd..
% *
% *****
%
MC=0;
DG=0;
MCE=0;
gh=input('Wat is de juiste waarde van DminE? : ');
for i=1:(THV+1)
    for j=1:3
        MCE(i,1)=Bewteta(i,2);
% MCE(i,2)=Bewteta(i,2)+BewPteta(i,2);
% MCE(i,3)=Bewteta(i,2)-BewPteta(i,2);
        MCE(i,2)=gh;
    end
end
DG=GD';
subplot(212),plot(DT,MCE);
title('Schatting van DminE met bijbeh. Var. ');
xlabel('Tijd [min]');
ylabel('Erosie/Sedimentatie [kg/sm^2]');
% legend('Schatting Dmin','Var schatter','Var schatter');
figure(1),axis([0 4*THV -0.0025 0.0025]);
anpr=input('Grafiek printen (j=1)/(n=0)) ? : ');
if anpr==1
    print -dps2;
end

```

Evenzo PLOTWO.M voor de schatting van W_o met de gemeten slibconcentraties