

Grilligheid én regelmaat in de getijperiode

Van de bewegingen in de zee lijken er weinig zo regelmatig en voorspelbaar als het getij. Het is immers een periodiek verschijnsel. Of toch niet?

Theo Gerkema en Matias Duran Matute

Laaten we eens beginnen met die veronderstelde periodiciteit en de elementaire vraag stellen: hoe lang duurt een getijperiode? Aan mogelijke definities is geen gebrek! We zouden de tijdspanne kunnen nemen tussen opeenvolgende hoogwaters, tussen opeenvolgende laagwaters of tussen opeenvolgende kenteringen van eb naar vloed (of andersom). Voor de berekening van de eerste twee kunnen we data van waterstanden gebruiken, afkomstig van de getijstations langs de Nederlandse kust. Met behulp van een realistisch numeriek stromingsmodel kunnen we ook de laatste optie analyseren. Het blijkt dan al snel dat deze definities, per dag bekeken, verschillende antwoorden opleveren. Er bestaat dus kennelijk niet zoiets als 'de' getijperiode. Dit impliceert ook een ambiguïteit in getijgemiddelde grootheden, bijvoorbeeld van transporten van water of zich daarin bevindende stoffen; het is immers niet helemaal duidelijk over welke tijdsduur het gemiddelde moet worden genomen.

Beperken we ons tot één van de definities, dan blijkt dat deze op zichzelf al sterk varieert. Figuur 1 toont een histogram van de getijperiode, gedefinieerd als de tijd tussen opeenvolgende laagwaters, gebaseerd op een langjarige tijdreeks van getijstation Den Helder. De getijperiode waaiert uiteen van zo'n 11 tot 14 uur, met soms zelfs waarden buiten dit interval. Deels is dit een gevolg van de wind: wanneer deze bijvoorbeeld het water opstuwt, kan het zijn dat de laagste waterstand eerder of later bereikt wordt. Maar ook wanneer we naar de voorspelde tijden van laagwater kijken (waarin de wind geen rol speelt), vinden we nog steeds een vergelijkbaar breed histogram.

De oorzaak van deze brede verdeling ligt in de aanwezigheid van een groot aantal getijcomponenten, elk met een eigen periode. De optelsom van deze componenten geeft het voorspelde getijsignaal. Bij de Nederlandse kust is de belangrijkste component die van het dubbeldaagse maansgetij (aangeduid als M₂), met een gemiddelde periode van 12 uur, 25 minuten en 14 seconden. De dubbele waarde hiervan is de maansdag, de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende passages van de maan door een vaste meridiaan. Door de beweging van de maan om de aarde is deze periode iets langer dan de (gemiddelde) zonnedag van precies 24 uur. De helft van de zonnedag is de periode van het dubbeldaagse zonsgetij (S₂, 12 uur). Daarnaast zijn er nog vele andere getijcomponenten, samenhangend met de declinatie van de maan (dat wil zeggen de hoek die de maan maakt met het

equatoriale vlak), de ellipticiteit van de maanbaan enzovoort.

Deze perioden vinden dus hun oorsprong in de hemelmechanica. Er is daarmee een direct verband met de kalender, of beter gezegd: met het kalenderprobleem. Al in de verre oudheid probeerde men de drie fundamentele astronomische tijdseenheden samen te brengen tot een goedlopende kalender. Deze perioden zijn:

1. de zonnedag van 24 uur (hierna kortweg aangeduid als dag) – de gemiddelde tijd tussen passages van de zon door een vaste meridiaan,
2. de synodische maand van 29,53 dagen – de gemiddelde periode van de cyclus van volle maan tot volle maan,
3. het tropische jaar van 365,24 dagen, de periode tussen twee lente-equinoxen – de duur van een volle cyclus van de astronomische seizoenen.

Een echt bevredigende en duurzame oplossing werd echter nooit gevonden. Dit bleek intrinsiek onmogelijk doordat de verschillende perioden niet passen: ze zijn incommensurabel, oftewel ze verhouden zich niet als ratio-

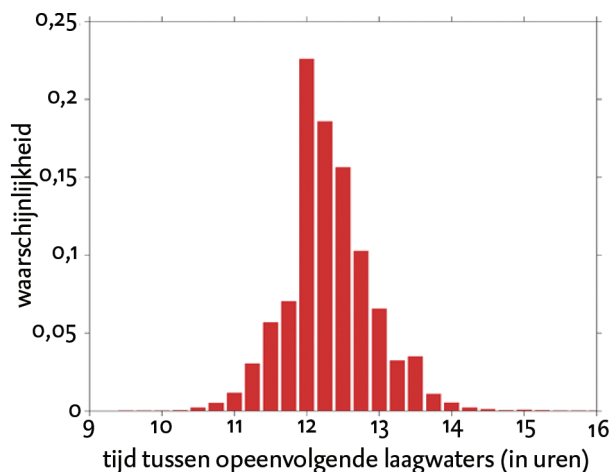
Theo Gerkema studeerde theoretische natuurkunde en is sindsdien werkzaam op het terrein van de fysische oceanografie. Voor een artikel over zijn promotieonderzoek won hij in 1995 de eerste prijs bij de NTvN-Prijsvraag. Hij houdt zich thans bezig met kustdynamica en is werkzaam aan het Koninklijk Nederlands Instituut voor Onderzoek der Zee (NIOZ), op de afdeling Estuariene en Delta Systemen, Yerseke.



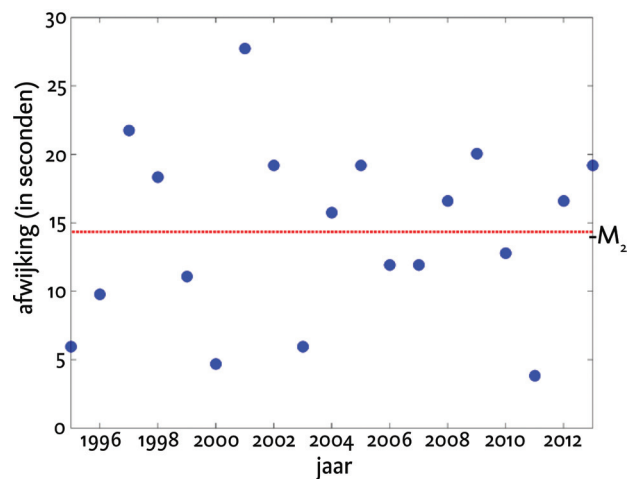
Theo.Gerkema@nioz.nl

Matias Duran Matute studeerde natuurkunde en fysische oceanografie in Mexico en is gepromoveerd aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e), waar hij thans werkzaam is. Eerder werkte hij als postdoctoraal onderzoeker aan LEGI (Frankrijk) en NIOZ, Texel. Zijn onderzoeksactiviteiten liggen op het terrein van vloeistofdynamica, kustprocessen en sedimenttransport.





Figuur 1 Histogram van de getijperiode voor getijstation Den Helder, gebaseerd op meetgegevens van 1995-2013 (data ontleend aan Rijkswaterstaat).



Figuur 2 Duur van de jaarlijks gemiddelde getijperiode in Den Helder (blauwe punten), weergegeven als het surplus ten opzichte van 12 uur en 25 minuten. De rood gestreepte lijn toont het gemiddelde over alle jaren.

nale getallen. In de moderne tijd is het probleem niet opgelost maar omzeild, doordat onze 'maand' is losgekoppeld van de cycli van de maanfasen.

Aangezien dezelfde perioden ten grondslag liggen aan de getijden, geldt ook hier dat de verschillende getijcomponenten incommensurabel zijn: de getijcomponenten, bij elkaar opgeteld, leveren een niet-periodiek signaal op: het getij herhaalt zich nooit precies.

Uit figuur 1 bleek dat er geen eenduidig antwoord te geven is op de vraag hoe lang een getijperiode duurt. Niettemin blijkt de *gemiddelde* getijperiode over een langere termijn, bijvoorbeeld een jaar, een verbluffende regelmaat te vertonen. In figuur 2 staat de jaarlijks gemiddelde getijperiode weergegeven, gebaseerd op de tijd tussen opeenvolgende laagwaters. Deze gemiddelde duur blijkt telkens 12 uur en 25 minuten te zijn, plus een variabel aantal seconden. We geven daarom alleen die laatste weer. In alle gevallen ligt de periode dus zeer dicht bij die van het dubbeldagse maansgetij (M_2). Nemen we vervolgens het gemiddelde over de gehele tijdreeks (over alle jaargemiddelden) dan komen we uit op 14 seconden. Gemiddeld genomen is de getijperiode dus 12 uur, 25 minuten en 14 seconden – precies gelijk aan de periode van het dubbeldagse maansgetij! Het is verwonderlijk dat te midden van de veelheid van getijcomponenten die een rol spelen in het getijsignaal, nu juist deze ene volledig de gemiddelde getijperiode bepaalt. Bij nader inzien blijkt hier een wiskundige eigenaardigheid achter te zitten. Als voorbeeld kunnen we de som nemen van twee

sinussen met verschillende perioden (zeg M_2 en S_2) en verschillende amplituden. De gemiddelde tijdsduur tussen opeenvolgende toppen ('hoogwaters'), of tussen opeenvolgende dalen ('laagwaters') blijkt dan precies gelijk te zijn aan de periode behorend bij de grootste van de twee sinussen. Alleen wanneer de amplituden vrijwel gelijk zijn, kan de gemiddelde periode liggen tussen die van de sinussen zelf. Voor de gemiddelde getijperiode geldt dus: *the winner takes all*. Het wiskundige bewijs volgt hieronder.

Het bewijs

We bekijken het geval van een getijsignaal dat bestaat uit de som van twee sinusoidale functies met verschillende frequenties, die van het dubbeldagse maans- en zonsgetij, ω_M en ω_S . We beschrijven het signaal als:

$$\zeta = \cos(\omega_M t) - \epsilon \cos(\omega_S t), \quad (1)$$

waarin t de tijd is; we veronderstellen dat ϵ een kleine parameter is, formeel $\epsilon \ll 1$. Allereerst moeten we de momenten van hoog- en laagwater bepalen. Deze extremen vinden we door de afgeleide $d\zeta/dt$ gelijk te stellen aan nul:

$$\sin(\omega_M t) = \epsilon \mu \sin(\omega_S t), \quad (2)$$

waarin $\mu = \omega_S / \omega_M$, de verhouding van de frequenties. Vervolgens nemen we van beide zijden de arcsinus:

$$\omega_M t = \sin^{-1}[\epsilon \mu \sin(\omega_S t)]. \quad (3)$$

We kunnen nu gebruikmaken van het

feit dat ϵ , en daarmee het argument van de arcsinus, klein is. De eerste term van de Taylorontwikkeling van de arcsinus is gelijk aan het argument zelf, dus $\epsilon \mu \sin(\omega_S t)$, met dien verstande dat we vervolgens de vrijheid hebben alle hoeken mee te nemen waarvan de sinus hetzelfde is. We vinden dus

$$\omega_M t = \begin{cases} \epsilon \mu \sin(\omega_S t) + 2\pi n + \dots \\ \pi - \epsilon \mu \sin(\omega_S t) + 2\pi n + \dots \end{cases} \quad (4)$$

met $n=0,1,2,3,\dots$. Formeel geldt de stap van (3) naar (4) voor $\epsilon \ll 1$, maar in de praktijk is de benadering nog heel acceptabel voor bijvoorbeeld $\epsilon \sim 0.5$. Dit geeft een ruimere geldigheid aan het bewijs.

We werken de eerste vergelijking van (4) verder uit. Deze heeft de structuur van het zogenaamde Keplerprobleem (zij bijvoorbeeld Goldstein, *Classical Mechanics*). Met behulp van $E_n = \omega_S t$, $\epsilon' = \epsilon \mu^2$ en $\lambda = 2\pi \mu$ kunnen we de vergelijking schrijven als

$$E_n - \epsilon' \sin E_n = \lambda n \quad (5)$$

Vanuit het Keplerprobleem is de oplossing bekend:

$$E_n = \lambda n + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} J_k(k\epsilon') \sin(k\lambda n), \quad (6)$$

met Besselfuncties J_k . We kunnen eenvoudig numeriek verifiëren dat het hier om de momenten van hoogwater gaat. Het verschil $\Delta_n = E_{n+1} - E_n$ bepaalt dus de tijdspanne tussen opeenvolgende hoogwaters:

$$\Delta_n = \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} J_k(k\epsilon') \times$$

$$[\sin(k\lambda(n+1)) - \sin(k\lambda n)]. \quad (7)$$

We nemen nu de som van N van deze tijdsintervallen Δ_n ,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta_n = N\lambda + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} J_k(k\epsilon') \sin(k\lambda N) =$$

$$= N\lambda + \epsilon' \sin E_n, \quad (8)$$

waarbij we in de laatste stap gebruik-

maakten van (6) en (5), beide toegepast op $n = N$. Door ten slotte te delen door N , voor grote $N \gg 1$, krijgen we het langetermijngemiddelde van Δ :

$$\langle \Delta \rangle = \lambda + \frac{\epsilon' \sin E_n}{N} \rightarrow \lambda. \quad (9)$$

In termen van de oorspronkelijke variabelen zien we dat de getijperiode geschreven kan worden als $T_n = \Delta_n / \omega_s$ en dat zijn langetermijngemiddelde dus gelijk is aan

$$\langle T \rangle = \frac{\lambda}{\omega_s} = \frac{2\pi\mu}{\omega_s} = \frac{2\pi}{\omega_M}. \quad (10)$$

Met andere woorden, de gemiddelde getijperiode is gelijk aan die van de grootste component.

Op analoge wijze kan het probleem worden uitgewerkt voor de getijperiode gebaseerd op de momenten van laagwater, uitgaande van de tweede vergelijking in (4), met hetzelfde resultaat.