

## Chapitre II

### Analyse des systèmes marins

#### Construction d'un modèle mathématique interdisciplinaire

par

Jacques C.J. NIHOUL

#### 1.- Introduction

La présence de nombreuses variables indépendantes rend la description des écosystèmes difficile. La simple collecte des données et leur compilation sont des tâches tellement considérables que l'on a souvent ignoré la nécessité de faire plus.

La situation alarmante des problèmes écologiques réclame cependant une compréhension plus profonde et un contrôle plus strict et plus rationnel de l'environnement.

Surveillance, contrôle et gestion ne sont possibles que si, pour une *sélection de variables représentatives*, on peut *prédire l'évolution* et, dans le cadre de contraintes et de tolérances appropriées, déterminer, par *optimisation*, les compromis indispensables entre les impératifs d'une industrialisation croissante et d'une société d'abondance et les nécessités de préserver les irremplaçables ressources naturelles.

Afin de prédire l'évolution de variables sélectionnées, on doit avoir une idée, un modèle de leur comportement.

Il existe différents types de modèles. Il y a tout d'abord les *modèles littéraux*, comme les modèles articulés démontrant les mouvements

possibles d'une jambe ou d'un bras, il y a les *modèles à échelle réduite* comme la maquette d'avion que l'on teste au laboratoire, il y a, plus élaboré, les *modèles physiques* qui simulent les phénomènes par d'autres qui leurs sont complètement étrangers mais qui ont un comportement *analogue* comme un circuit électrique reproduisant une interaction écologique ou le mouvement d'un projectile. De tels modèles peuvent être appelés *iconiques* car ils s'inspirent essentiellement d'une image concrète du phénomène. Ils sont avantageux pour les études préliminaires des problèmes simples (on peut construire un modèle réduit de bassin pour y étudier la houle mais un tel modèle ne saurait servir à l'étude de la pollution chimique du bassin et de son écologie).

A l'opposé, le *modèle mathématique* s'inspire d'une image abstraite du phénomène, un système de symboles et d'équations adaptés au traitement numérique sur l'ordinateur.

Le modèle mathématique a non seulement une portée quasi illimitée mais il contient en lui tous les modèles iconiques concevables. En effet, si des processus physiques distincts peuvent être utilisés pour simuler le même phénomène c'est, fondamentalement, parce qu'ils sont décrits par les *mêmes équations* mathématiques et que les *mêmes équations* (soumises aux *mêmes conditions initiales* et aux *mêmes conditions aux limites*) donnent les *mêmes solutions*. Peu importe le sens du symbole mathématique : un potentiel électrique, une fonction de courant, une température, ...

Le modèle mathématique est adapté au calcul analogique, digital ou hybride et joue un rôle clef dans le processus de *simulation mathématique*.

Les étapes successives d'une simulation mathématique sont indiquées à la figure 7. Dans la suite, chacune d'elle est discutée en relation avec la simulation du système marin.

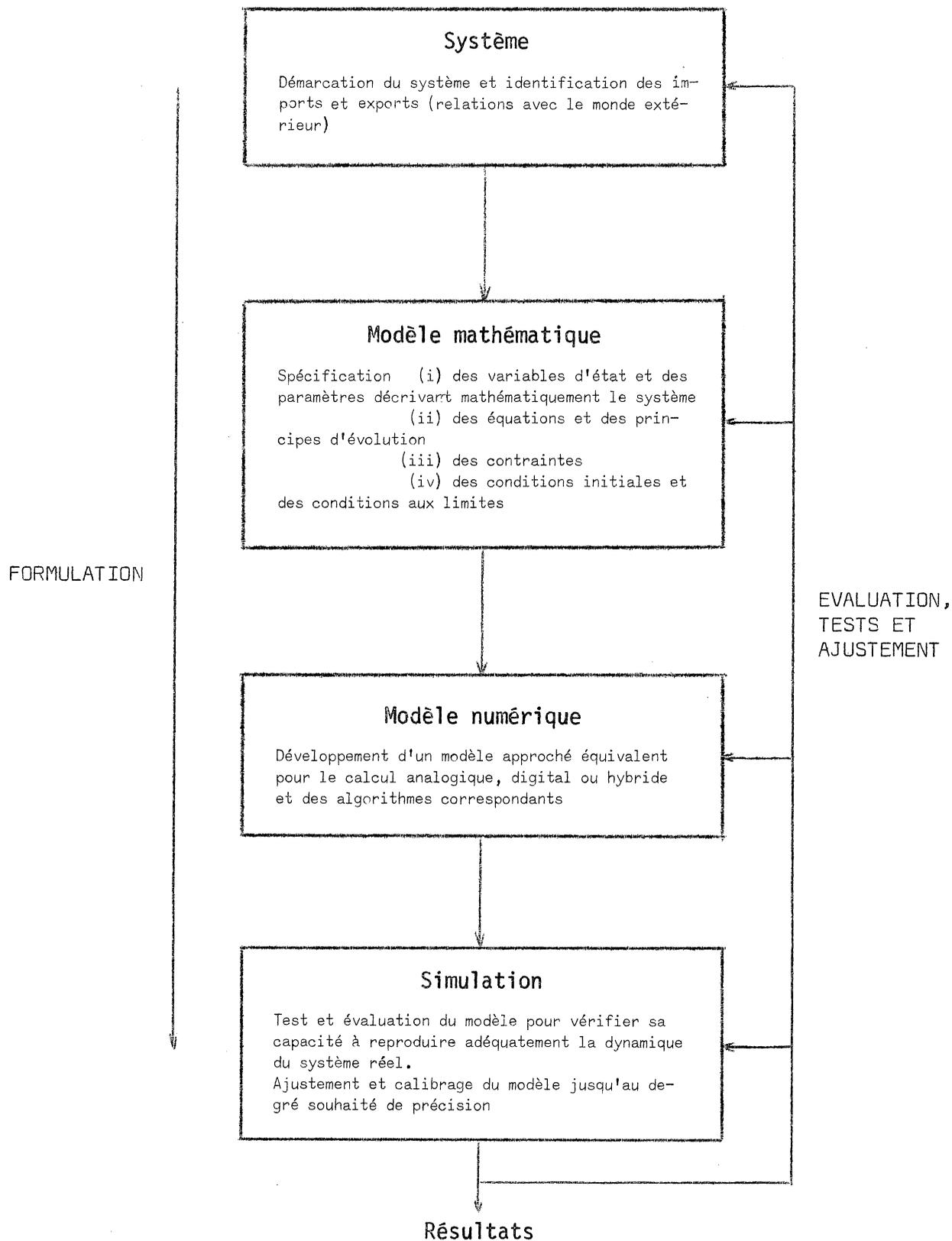


fig. 7.

## 2.- Démarcation du système marin

Afin de modéliser un système marin, il est tout d'abord nécessaire de *définir le système* sans ambiguïté, de le *distinguer du monde extérieur* et d'identifier les échanges entre le système et l'extérieur (imports et exports).

La définition du système implique, en premier lieu, la spécification de sa configuration géographique et de son époque. Autrement dit, le système doit être clairement situé dans l'espace physique  $X - t$ .

De toute évidence, ceci n'est pas suffisant pour définir le système à des fins de modélisation. Il ne suffit pas de dire où est le système, il faut dire ce qu'il est.

Ce qu'un système marin est en réalité est évidemment abominablement complexe et c'est pour cette raison qu'un modèle est nécessaire. Le modèle doit, pour commencer, identifier les propriétés du système réel qui sont essentielles et déterminer combien d'entre elles sont requises, dans le cadre des objectifs du modèle, pour fournir une description satisfaisante (la plus simple possible) du système. En d'autres termes, le modèle doit *identifier le système* pour son propre usage et spécifier les variables qui sont nécessaires et suffisantes pour décrire, avec la précision souhaitée, *l'état du système*.

La *démarcation* du système implique, par conséquent, sa délimitation dans l'espace  $X - t$  (le *support* du système) et la spécification de son *émergence* dans l'espace des *variables d'état* (fig. 8).

En principe, le système marin, limité à l'interface air-mer et au fond, devrait couvrir l'océan tout entier. Il est clair qu'une telle ambition n'est pas raisonnable et, en pratique, on est intéressé à modéliser, pendant une période de temps donnée, un estuaire, un golfe, une mer littorale ou continentale selon son objectif particulier. Il y a toujours des limites temporelles et géographiques au système.

L'envergure du système est en relation directe avec son propos. On songe naturellement à diviser le système marin en trois sous-systèmes, physique, chimique et biologique. La plupart des modèles, dans le passé, se sont d'une façon ou d'une autre conformés à cette approche

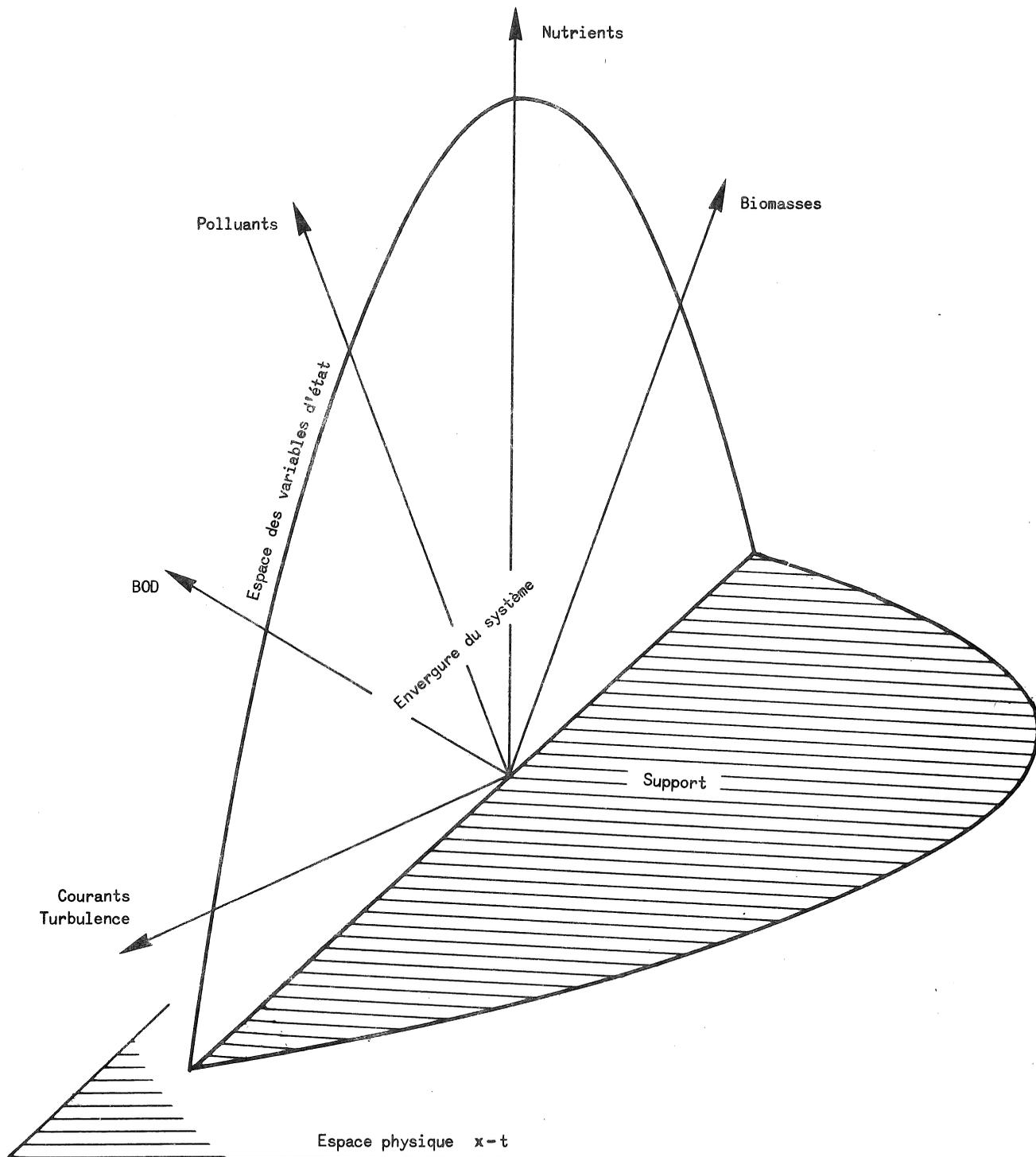


fig. 8.  
Schéma de démarcation du système marin

simplifiée. On réalise, cependant, aujourd'hui, en particulier dans les problèmes de pollution, les limites de tels modèles et la nécessité d'une *étude vraiment interdisciplinaire*.

Le caractère interdisciplinaire du modèle augmente son volume. Néanmoins, de même qu'il est confiné dans l'espace physique, le système doit être limité en envergure aux variables d'état qui sont essentielles pour décrire son comportement dans le cadre des objectifs qu'on s'est fixés.

Le même *système naturel* peut, par conséquent, être représenté par plusieurs *systèmes modèles* qui, normalement, ont le même support mais qui diffèrent par leur envergure et qui engendrent des types différents de modèles mathématiques selon leurs desseins particuliers. Ces modèles doivent être considérés comme des sous-ensembles d'un modèle universel en gestation dont la construction doit être poursuivie afin de conserver la trace de tous les aspects qui ont été sacrifiés pour arriver rapidement à des résultats, partiels sans doute, mais déjà concluants.

### 3.- Réduction des dimensions du système

Dans de nombreux cas, on ne s'intéresse pas au détail de la dynamique du système mais seulement à son comportement "moyen" ou "global" dans un certain sens.

Des moyennes peuvent être faites dans l'espace d'état comme dans l'espace physique. De nombreux modèles d'estuaires, par exemple, se limitent à l'évolution dans le temps et dans le sens du fleuve de propriétés moyennes sur la profondeur et la largeur. Ceci revient à réduire le support à une dimension spatiale et une dimension temporelle. Dans un premier stade, un modèle hydrologique peut se borner à la description de la salinité et de la turbidité qui peuvent être définies respectivement comme les concentrations totales des substances en solution et en suspension. Dans une étape ultérieure, le modèle peut être perfectionné et inclure les concentrations totales de substances

chimiques essentielles (nutrients, polluants, ...) en solution et en suspension ou s'étendre à l'analyse des chaînes trophiques, considérées dans leur ensemble ou divisées en un nombre limité de groupes d'espèces (phytoplancton, zooplancton, benthos, ...). Dans ces derniers exemples, la réduction porte sur l'envergure du système.

Un domaine qui est décrit uniquement par ses propriétés moyennes ou globales est appelé une *boîte* dans l'espace physique et un *compartiment* dans l'espace d'état. Le transfert d'une propriété d'une boîte à une autre est appelé un *flow*, le transfert d'un compartiment à un autre une *translocation*.

Dans les exemples précédents, chaque section droite de l'estuaire est traitée comme une boîte, les substances dissoutes, les suspensions, les divisions des chaînes trophiques sont traitées comme des compartiments.

Ainsi, selon les objectifs particuliers du modèle, la démarcation du système peut être plus ou moins sévère. Elle implique, en général,

i) la définition du support, c'est-à-dire la délimitation de la région géographique et de la période de temps qui feront l'objet de l'étude;

ii) la définition de l'envergure, c'est-à-dire la spécification des variables d'état qui sont essentielles pour le problème posé;

iii) la réduction du support, c'est-à-dire l'intégration sur une ou plusieurs coordonnées spatiales ou sur le temps;

iv) la réduction de l'envergure, c'est-à-dire la restriction aux propriétés globales de compartiments appropriés de l'espace d'état.

En plus des propriétés moyennes des compartiments, il est parfois utile de suivre en tant que telle une substance chimique ou une espèce vivante qui a révélé un comportement illustratif du système tout entier. Des variables d'état additionnelles peuvent ainsi être introduites pour décrire des *traceurs* représentatifs.

#### 4.- Imports -- Exports

Les interactions du système avec "le monde extérieur" fournissent les *imports* et les *exports* au système.

L'identification de tous les imports et de tous les exports est essentielle à la construction du modèle mathématique.

La délimitation géographique du système introduit des frontières côtières et maritimes où ont lieu des échanges avec l'extérieur. Ces échanges constituent des *imports-exports "aux limites"*. Il en est de même des interactions entre la mer et l'atmosphère et entre la mer et les sédiments de fond.

En plus des interactions frontières, le monde extérieur influence le système par des *forces*, des *sources* et des *puits "de volume"* (forces de gravitation et de marées, radiation solaire, déversements, pêches, ...) (fig. 9).

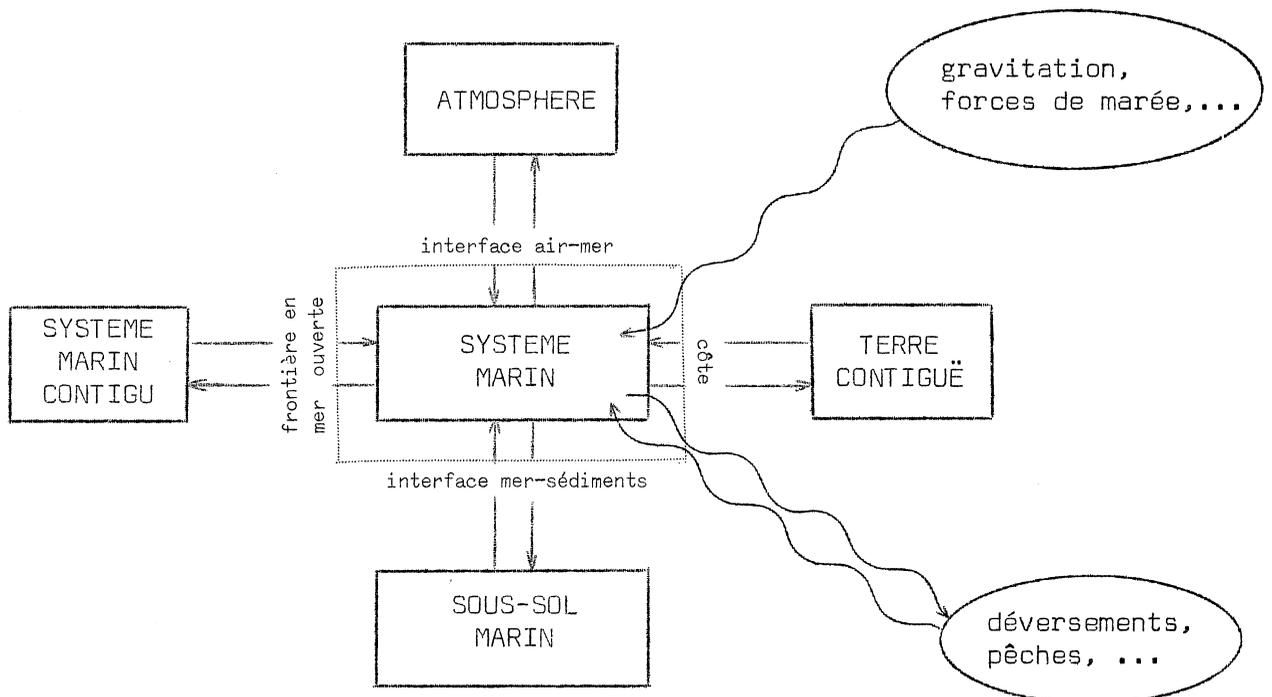


fig. 9.

La limitation de l'envergure du système introduit une autre forme de séparation entre le système et l'extérieur correspondant à des échanges qui doivent apparaître également comme des imports et des exports.

Il faut insister sur ce point car on est naturellement tenté d'associer les concepts d'"intérieur" et d'"extérieur" à la démarcation physique du système seulement et de considérer erronément comme parties internes du système toute variable ou tout mécanisme qui se situe, dans l'espace et dans le temps, à l'intérieur du support du système.

En modélisation, cependant, un système est défini par son envergure autant que par son support et tous les éléments qui n'appartiennent pas à l'espace des variables d'état doivent être traités comme des composantes du monde extérieur même s'ils sont concomitants avec le système dans l'espace physique.

Par exemple, les modèles de productivité primaire décrivent habituellement les interactions entre la concentration totale de nutriments et les biomasses de phytoplancton et de zooplancton. Certains modèles incluent également les bactéries marines dans les variables d'état, d'autres modèles ne le font pas<sup>1</sup>. Les bactéries qui vivent dans la région marine étudiée font évidemment partie du système naturel mais elles n'appartiennent au système mathématique que dans le premier type de modèles. Dans les modèles du second type, elles font clairement partie du monde extérieur et leur influence sur la dynamique du système doit apparaître comme un import de l'extérieur.

##### 5.- Variables d'état

La première étape dans la construction d'un modèle mathématique est la définition du support et de l'envergure du système. La

---

1. Le rôle des bactéries a été discuté à la NATO Science Committee Conference on Modelling of Marine Systems, OFIR, Portugal, June 4-8, 1973 [e.g. Pichot (1973)].

définition de l'envergure implique la sélection d'un *nombre limité* de *variables d'état représentatives*. Il doit y en avoir suffisamment pour décrire adéquatement le comportement du système mais leur nombre doit être limité pour maintenir le modèle dans des limites raisonnables imposées par la capacité et le coût des outils de calcul.

D'une façon idéale, si l'on désirait — et si l'on pouvait — décrire le système marin naturel dans son énorme complexité, on devrait déterminer les concentrations et les vitesses de toutes formes de substances chimiques (dissoutes, particulières, ...) et de toutes les espèces vivantes en tous les points du support.

Une telle description est évidemment irréalisable et la première préoccupation d'un modèle est de remplacer le système naturel complexe par un système modèle plus simple.

i) La première simplification est obtenue en introduisant des variables globales pour décrire la mécanique du mouvement. L'eau de mer étant un *mélange* de substances dissoutes, de matières particulières, d'espèces vivantes, ..., si  $\rho_i$  et  $V_i$  représentent respectivement la masse spécifique (masse par unité de volume) et la vitesse du constituant  $C_i$ , on définit la masse spécifique du mélange :

$$(1) \quad \rho = \sum \rho_i ,$$

le vitesse du mélange :

$$V = \frac{\sum \rho_i V_i}{\sum \rho_i}$$

où les sommes sont effectuées sur tous les constituants.

La dynamique marine est analysée en termes de  $\rho$  et  $V$  et de variables associées telles que la pression et la température.

ii) Le second type de simplification est associé à la restriction des variables chimiques et biologiques à celles qui sont essentielles. En d'autres termes, on ne considère pas tous les constituants  $C_i$  mais un nombre limité d'entre eux.

iii) L'envergure du système est ensuite réduite davantage en renonçant à étudier toutes les formes, combinaisons et variétés des constituants

selectionnés et en se limitant pour la plupart d'entre eux à leurs concentrations globales dans un certain nombre de compartiments; un nombre très restreint étant éventuellement étudiés individuellement comme traceurs.

Les masses spécifiques totales des différents compartiments doivent évidemment figurer parmi les variables d'état. D'une importance particulière à cet égard sont la masse spécifique de toutes les substances dissoutes (la *salinité*)  $\rho_s$ , la masse spécifique des suspensions (la *turbidité*)<sup>1</sup>  $\rho_t$  et les biomasses spécifiques de compartiments vivants tels que le phytoplancton, le zooplancton, ... exprimées généralement en une unité universelle (teneur en carbone, par exemple).

Les variables d'état compartimentaires sont notées  $\rho_a$ . On dit que  $\rho_a$  désigne la masse spécifique du "constituant  $\alpha$ " en étendant le concept de constituant puisqu'il peut désigner, dans le contexte du modèle, un compartiment entier (toutes les substances dissoutes, ...) ou la teneur globale d'un compartiment en un élément donné (nutrient, polluant, ...).

iv) L'influence de la température sur la dynamique des systèmes marins a déjà été mentionnée. C'est une variable *thermodynamique* enracinée dans la mécanique statistique du système.

Des variables écologiques d'origine statistique similaire telles que l'indice de diversité ou l'indice de stabilité sont souvent utiles pour caractériser la *santé* d'un écosystème et fournir des informations précieuses, sans entrer dans le détail des biomasses et des concentrations de polluants. Le qualificatif "thermodynamique" — inspiré des récents progrès de la thermodynamique irréversible en biologie et en écologie — est souvent utilisé également pour indiquer ce type de variable.

v) Une simplification importante est introduite en séparant chaque variable en une moyenne et une fluctuation dont seul l'effet global —

---

1. Il faut noter que la distinction entre salinité et turbidité est, dans un sens, arbitraire car l'expérimentateur définit comme dissous tout ce qui passe à travers un filtre d'une finesse conventionnelle.

pas les détails -- apparaît dans le modèle. Cette simplification résulte en fait d'une réduction du support temporelle du système.

En effet, on construit un modèle dans le but de simuler une certaine gamme de phénomènes. Soit  $T$  le temps caractéristique le plus petit de ceux-ci. Des processus oscillants ou erratiques dont les temps caractéristiques sont beaucoup plus petits que  $T$  tendent à s'annihiler mutuellement sur une période d'ordre  $T$ . Ils ne contribuent, par conséquent, à la dynamique du système qu'à travers des termes non-linéaires que l'on peut espérer représenter globalement grâce à une hypothèse de fermeture appropriée. Cet argument qualitatif peut être exprimé mathématiquement en introduisant une moyenne temporelle -- au sens de la méthode de Krylov, Bogoliubov et Mitropolsky -- sur une période de temps intermédiaire suffisamment petite pour que les phénomènes étudiés ne soient pas sensiblement affectés par la moyenne mais suffisamment grande pour éliminer les détails des rapides processus erratiques et oscillatoires encombrant l'analyse.

vi) La réduction du support en intégrant sur une ou plusieurs coordonnées de l'espace conduit à d'importantes simplifications additionnelles. L'intégrale ou la moyenne dans une direction spatiale élimine, par exemple, la composante correspondante de la vitesse qui reste uniquement à déterminer aux frontières pour connaître les imports et les exports dans la boîte. Ainsi, dans un modèle intégré sur la profondeur, le vecteur vitesse est réduit à un vecteur horizontal à deux composantes, dans un modèle d'estuaire intégré sur la profondeur et la largeur, la vitesse se réduit à une seule composante dans l'axe du fleuve; dans un modèle boîte complètement intégré sur une région entière de l'espace, les déplacements des masses d'eau à l'intérieur de la boîte deviennent sans objet et, pourvu que les imports et les exports aux frontières de la boîte puissent être évalués, la vitesse disparaît des variables d'état.

## 6.- Paramètres de commande

En plus des variables d'état, différents types de paramètres apparaissent inévitablement dans la description mathématique du système. On peut les considérer comme des *paramètres de commande* car ils influencent l'évolution du système (et par conséquent apparaissent dans les équations d'évolution) mais ne sont pas prédits par le modèle lui-même (il n'y a pas d'équation d'évolution spécifique à leur endroit).

La première catégorie de paramètres de commande à laquelle on pense sont les *paramètres de guidage* qui sont à la disposition de l'homme pour gérer le système marin selon quelque dessein optimal.

La plupart des paramètres, cependant, ne peuvent pas être choisis conformément à des préoccupations de gestion. Ils sont imposés par la nature. Ces paramètres sont issus de la démarcation initiale du système de la nécessité de restreindre le nombre des variables d'état et du besoin de formuler les lois d'évolution d'une façon simple et d'un traitement facile. Ils reflètent tous les aspects du système naturel que le modèle ne peut prendre en charge parce que les équations additionnelles requises pour leur prédiction compromettraient la simulation par leur difficulté, l'incertitude de leur formulation ou simplement parce qu'elles augmenteraient les dimensions du système au-delà des limites des ordinateurs.

Bien qu'ils soient rarement connus *a priori* et doivent, dans la plupart des cas, être déterminés approximativement par des modèles séparés, des données expérimentales et l'intuition théorique, les paramètres de commande qui résultent de la fermeture du système doivent être regardés, dans la terminologie de la théorie de la commande optimale, comme *fixés* et distincts, par conséquent des paramètres de guidage évoqués plus haut.

La séparation entre variables d'état et paramètres de commande est, évidemment, plus ou moins arbitraire et fonction des capacités et des ambitions du modèle. Par exemple, tous les modèles de productivité primaire (variables d'état : nutriments, bactéries et plancton) sont commandés par la lumière incidente. Dans une première étape, la lumière

incidente peut être prise comme un paramètre de commande fixé et remplacée par sa valeur empirique à chaque période de l'année. Le modèle peut être raffiné et donner la lumière incidente à chaque profondeur en fonction de l'intensité lumineuse à la surface faisant usage de la transparence de l'eau comme nouveau paramètre de commande. Dans une version encore plus élaborée du modèle, la transparence de l'eau peut être incluse dans les variables d'état et induite de la turbidité qui elle même peut être prédite par le modèle.

Les exemples de paramètres de commande sont nombreux : le coefficient d'échange à travers la thermocline dans des modèles à deux couches, les vitesses de réactions chimiques à déterminer indépendamment par des expériences de laboratoires ou une théorie moléculaire fondamentale conduite en parallèle avec le modèle sans faire partie de celui-ci, les coefficients d'interactions écologiques, etc.

La dynamique des translocations (transfert d'un élément chimique d'un compartiment à un autre) doit être mise sous une forme mathématique appropriée. Ceci n'est possible en général qu'à condition d'introduire plusieurs paramètres de commande dont les valeurs ne peuvent être déterminées qu'expérimentalement.

Les variables d'état sont, comme on l'a vu, séparées en leurs valeurs moyennes et leurs fluctuations associées à des mouvements rapides oscillatoires ou erratiques. Le modèle construit pour décrire les variables moyennes est fortement affecté par les fluctuations qui agissent à travers les termes non-linéaires même si, en gros, elles se détruisent sur toute période de temps caractéristique du processus moyen.

Les oscillations rapides désordonnées, l'agitation erratique de la mer produisent une dispersion accélérée, semblable à la diffusion moléculaire mais, de loin, beaucoup plus efficace. Sur le modèle de la diffusion moléculaire, des *coefficients de dispersion* (ou "diffusivités tourbillonnaires") sont introduits pour décrire le mélange produit par l'agitation macroscopique de l'eau. Ces coefficients sont des paramètres de commande très importants. On leur donne en général

une forme semi-empirique en partie induite des observations, en partie suggérée par les études théoriques de la *turbulence*.

### 7.- Equations, principes et contraintes d'évolution

Les variables d'état sont gouvernées par un système d'équations d'évolution qui peuvent être algébriques ou différentielles. Elles expriment la conservation de quantité de mouvement, de masses, d'énergie, etc. et se traduisent par des relations entre les variations temporelles des variables d'état et les causes de ces variations : forces extérieures, imports et exports locaux, interactions internes, entraînément par les courants, dispersion par la turbulence et migration.

Le mot migration indique un mouvement individuel relatif au mouvement d'ensemble défini par la vitesse du mélange  $V$ . En général, en effet, les vitesses individuelles  $V_a$  ne sont pas exactement égales à  $V$ . Ainsi

$$(3) \quad \rho_a V_a = \rho_a V + \rho_a (V_a - V) .$$

Le premier terme du membre de droite représente le *flow* du "constituant  $\alpha$ " tandis que le second terme est le *flux*. Le flux est dû en première instance à la *diffusion moléculaire*. Celle-ci, cependant, est presque toujours négligeable vis-à-vis de la *dispersion turbulente* qui est due à cette partie du *flow* qui correspond aux fluctuations erratiques de mouvement et qui apparaît explicitement dans les équations d'évolution une fois que le champ de vitesse a été séparé en un champ moyen d'advection et des fluctuations autour de cette moyenne. En pratique, la diffusion moléculaire est incluse *de facto* dans les termes de dispersion turbulente.

D'autres contributions au flux proviennent du déplacement des animaux "de leur propre gré" à travers les masses d'eau (migration horizontale des poissons, mouvement vertical du plancton avec la lumière, ...), de la sédimentation des particules lourdes ou de l'élévation de constituants légers ou de gaz.

Les flux de ce type sont groupés sous l'appellation générale de "migration".

Certains types de migration (comme la sédimentation) peuvent être formulés relativement aisément, d'autres (comme la migration des poissons) sont beaucoup plus difficiles à exprimer et, souvent, seules des données statistiques rudimentaires existent pour les estimer.

On admet en général que la masse spécifique  $\rho$  de l'eau de mer obéit à une équation de conservation de la forme :

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

où  $\nabla$  est l'opérateur vecteur,

$$(5) \quad \nabla \equiv \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

L'équation (4) peut être considérablement simplifiée si  $\rho$  peut être considéré comme la somme d'une masse spécifique de référence  $\rho_m$  et d'une petite déviation  $\rho'$  autour de  $\rho_m$  due aux variations de température, salinité, turbidité, etc. Si

$$(6) \quad \rho = \rho_m + \rho' \quad \text{avec} \quad \rho' \ll \rho_m ,$$

l'équation (4) implique

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \sim O\left(\frac{v}{\ell} \frac{\rho'}{\rho_m}\right) \ll \frac{v}{\ell}$$

où  $v$  est une vitesse caractéristique et  $\ell$  une longueur caractéristique de ses variations spatiales. Il s'ensuit que, pour toute variable  $q$  :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla q \gg q \nabla \cdot \mathbf{v} .$$

Dans ces conditions, (4) peut être remplacée par la condition d'incompressibilité

$$(7) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

L'équation d'évolution du champ de vitesse est obtenue en exprimant la conservation de la quantité de mouvement et s'écrit :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + 2 \rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = - \nabla \pi + \rho \mathbf{F} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

où  $2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$  est l'accélération de Coriolis,  $\pi$  la pression,  $\mathbf{F}$  la résultante des forces extérieures par unité de masse et  $\mu$  la viscosité moléculaire.

En général, l'équation (6) est applicable. Dans ce cas, on peut remplacer  $\rho$  par  $\rho_m$  dans tous les termes du membre de gauche. On doit toutefois conserver  $\rho$  dans  $\rho \mathbf{F}$  car  $\mathbf{F}$  contient l'accélération de la pesanteur  $\mathbf{g}$  qui est grande, comparée aux accélérations typiques du fluide [si bien que  $(\rho - \rho_m) \mathbf{g}$  peut ne pas être négligeable].

L'approximation de  $\rho$  par  $\rho_m$  dans tous les termes de (8) sauf éventuellement dans la force de pesanteur et l'hypothèse d'incompressibilité (7) constituent l'*approximation de Boussinesq*.

Dans des mers peu profondes, bien mélangées comme le sud de la mer du Nord, la différence  $\rho - \rho_m$  est tellement faible qu'on peut supposer la masse spécifique constante dans tous les termes.

Si maintenant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  est séparé en une partie moyenne  $\mathbf{u}$  et une fluctuation  $\mathbf{w}$  de moyenne nulle et si  $p$  désigne la pression moyenne associée à  $\mathbf{u}$ , prenant la moyenne de (8), on obtient, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq :

$$(9) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = - \nabla \left( \frac{p}{\rho_m} \right) + \left\langle \frac{\rho}{\rho_m} \mathbf{F} \right\rangle + \mathcal{D}$$

introduisant

$$(10) \quad \mathcal{D} = - \nabla \cdot \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle + \frac{\mu}{\rho_m} \nabla^2 \mathbf{u}$$

où  $\langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle$  désigne la moyenne du terme quadratique  $\mathbf{w} \mathbf{w}$  et représente l'effet non-linéaire des fluctuations, responsable d'une dispersion de la quantité de mouvement semblable à la diffusion moléculaire mais considérablement plus efficace.

En raison de leurs effets similaires, il semble raisonnable d'exprimer  $\mathcal{D}$  sur le modèle de la diffusion moléculaire. On introduit pour cela un nouveau coefficient de dispersion  $\nu$  et, si en première instance on le suppose constant, on écrit :

$$(11) \quad \mathcal{D} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} ;$$

$\nu$  joue le rôle d'un paramètre de commande.

Dans un modèle plus élaboré, on peut considérer des coefficients de dispersion différents dans les différentes directions et admettre, de façon plus générale, qu'ils sont fonctions de la position, auquel cas on ne peut plus les sortir du signe de divergence.

Ainsi par exemple,  $\mathcal{D}_j$  étant une composante quelconque de  $\mathcal{D}$ , on écrira :

$$(12) \quad \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \nu_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \nu_3 \frac{\partial u_j}{\partial x_3} \right)$$

où des expressions encore plus sophistiquées faisant intervenir davantage de paramètres de commande  $\nu_i$ .

Exprimant la conservation de la masse, on peut écrire pour chacune des variables  $\rho_a$  une équation du type :

$$(13) \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_a \mathbf{V} = R_a + J_a$$

où  $R_a$  et  $J_a$  représentent les taux de productions (ou destructions) locales du "constituant  $\alpha$ " respectivement par des interactions entre l'extérieur et le système et par des interactions intérieures au système.

Le second terme du membre de gauche peut être écrit :

$$(14) \quad \nabla \cdot \rho_a \mathbf{V}_a = \nabla \cdot \rho_a \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho_a (\mathbf{V}_a - \mathbf{V})$$

mettant en évidence les effets différents du *flow* dû au transport par le mouvement d'ensemble et du flux dû à la diffusion moléculaire et à la migration.

Si, à nouveau, une séparation est faite entre moyennes et fluctuations, le terme non-linéaire  $\rho_a \mathbf{V}$  donne deux contributions. La première représente l'*advection* par le courant moyen, la seconde la *dispersion* résultant de l'agitation turbulente.

Si  $\mathcal{D}_a$  représente les effets combinés de la dispersion turbulente et de la diffusion moléculaire,  $\mathcal{D}_a$  peut être exprimé en terme de la concentration moyenne par des formules analogues à (11) et (12)

introduisant de nouveaux paramètres de commande  $\kappa_i$ . Soient :

$$(15) \quad \mathcal{D}_a = \kappa \nabla^2 r_a$$

$$(16) \quad \mathcal{D}_a = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \kappa_1 \frac{\partial r_a}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \kappa_2 \frac{\partial r_a}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right)$$

où  $r_a$  désigne la valeur moyenne de  $\rho_a$ .

On admet généralement que la migration moyenne peut être écrite sous la forme  $\nabla \cdot r_a \sigma_a$  où  $\sigma_a$  est appelé la *vitesse de migration* et constitue un nouveau paramètre (vecteur) de commande.

Par conséquent si  $Q_a$  et  $I_a$  désignent respectivement les moyennes de  $R_a$  et  $J_a$ , on tire de (13)

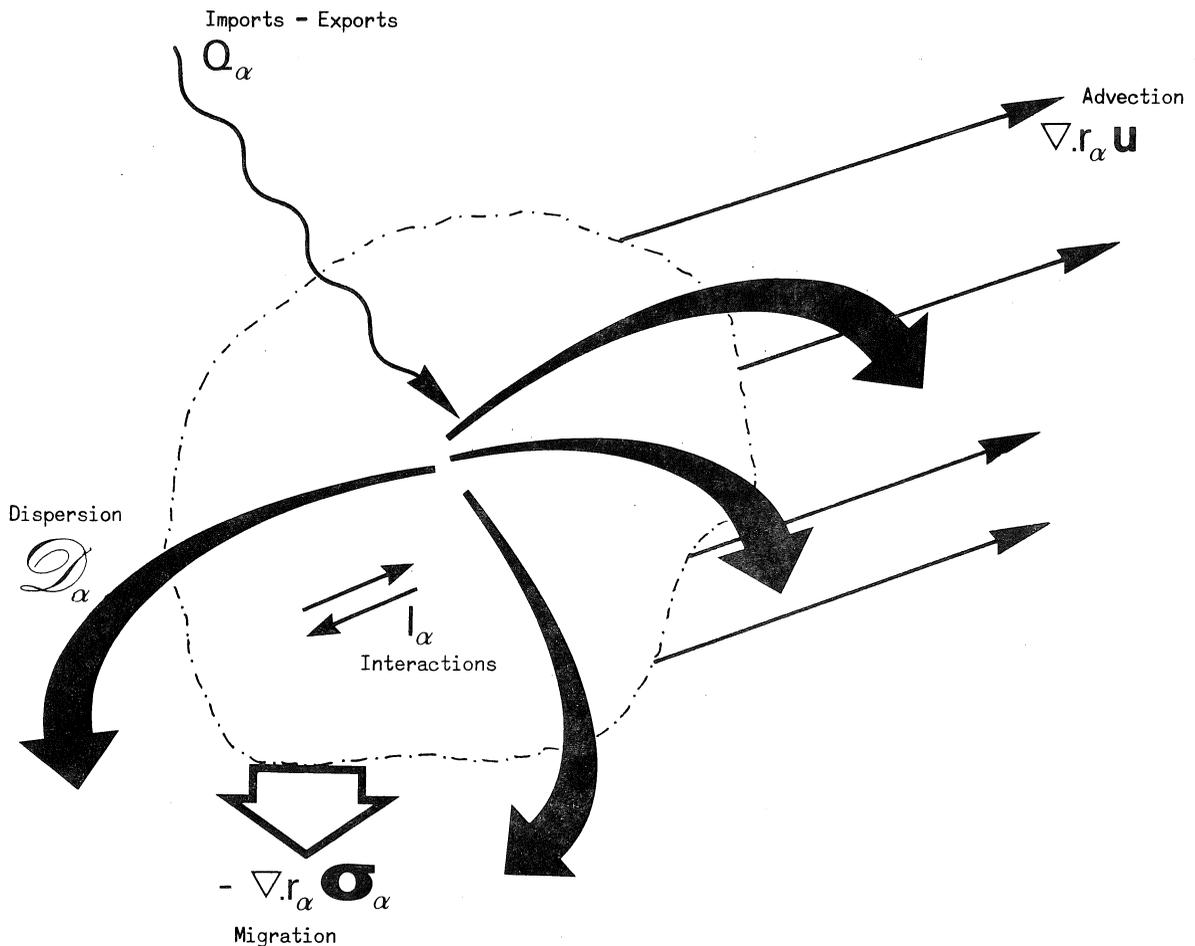


fig. 10.

$$(17) \quad \frac{\partial r_a}{\partial t} + \nabla \cdot r_a \mathbf{u} = Q_a + I_a - \nabla \cdot r_a \sigma_a + \mathcal{D}_a .$$

Les rôles des différents termes de l'équation (17) sont aisément identifiés (fig. 10).

- $\nabla \cdot r_a \mathbf{u}$  représente l'advection par le courant moyen. Il introduit un couplage avec les variables mécaniques.
- $Q_a$  représente les imports et les exports extérieurs (les déversements sont en particulier inclus dans  $Q_a$ ).  $Q_a$  doit être donné avant de pouvoir opérer le modèle.
- $I_a$  représente les interactions chimiques, biochimiques et écologiques.  $I_a$  introduit un couplage entre la variable d'état  $r_a$  et les variables  $r_\beta$ ,  $r_\gamma$ , ... intervenant dans les interactions.
- $-\nabla \cdot r_a \sigma_a$  représente la migration. Les vitesses de migration sont habituellement exprimées sous formes semi-empiriques induites des observations et des réflexions théoriques sur les propriétés écologiques, chimiques et physiques des compartiments (espèces vivantes, suspensions, flocons, ...).  $\sigma_a$  est en fait un paramètre de commande et sa détermination fait partie du calibrage du modèle.
- $\mathcal{D}_a$  représente la dispersion moléculaire et turbulente.  $\mathcal{D}_a$  s'exprime en terme de la concentration moyenne  $r_a$  par des formules semi-empiriques où interviennent un ou plusieurs paramètres de commandes.

La conservation de l'énergie totale fournit, à l'intervention de quelques hypothèses complémentaires, une équation pour la température. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq ou pour une mer parfaitement mélangée ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ), cette équation prend une forme semblable à (17). Si  $\theta$  désigne la température moyenne, on peut écrire :

$$(18) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \theta \mathbf{u} = Q_\theta + I_\theta + \mathcal{D}_\theta .$$

Le second terme du membre de gauche représente la *convection de chaleur*; les deux premiers termes du membre de droite représentent la production locale de chaleur respectivement par des sources extérieures (la

radiation par exemple) et par des sources intérieures (les réactions chimiques ou biochimiques par exemple). Le dernier terme  $\mathcal{D}_\theta$  combine la dispersion turbulente et la diffusion moléculaire, plus connue sous le nom de *conduction*.

Des équations analogues pour les indices de diversité et de stabilité sont encore à l'étude.

Dans le cas d'une mer parfaitement mélangée où on peut supposer la masse spécifique  $\rho$  strictement constante, les équations (7), (8) et (13) constituent un système fermé. Dans le cas d'une mer stratifiée à laquelle l'approximation de Boussinesq s'applique, il manque une équation pour  $\rho$  ou, si l'on veut, pour la *poussée* :

$$(19) \quad b = \frac{\rho - \rho_m}{\rho_m} g .$$

L'équation manquante est ce qu'on appelle communément l'*équation d'état* établissant une relation entre la masse spécifique et des variables telles que la pression, la température, etc.

Dans le cas de la mer, l'influence de la pression peut être négligée et, les variations de masse spécifique étant faibles, on peut les représenter par les premiers termes d'un développement en série de Taylor des variations de température, de salinité et, dans certains cas, de turbidité.

L'équation d'évolution pour la poussée  $b$  est alors déduite des équations pour  $\theta$ ,  $\rho_s$  et  $\rho_t$ .

- 
1. Cette équation ne peut être obtenue en substituant (7) dans (4) comme certains le font parfois erronément.

Utilisant (6), on peut en effet écrire (4) sous la forme

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho' + \rho' \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 .$$

Dans cette équation, le troisième terme est négligeable mais non le quatrième où  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  est multiplié par  $\rho_m \gg \rho'$ .

En réalité, cette équation ne fournit rien d'autre que l'estimation

$$\nabla \cdot \mathbf{V} \sim O\left(\frac{V}{L} \frac{\rho'}{\rho_m}\right) \ll \frac{V}{L} .$$

Il faut prendre garde de n'appliquer l'inégalité  $\mathbf{V} \cdot \nabla q \gg q \nabla \cdot \mathbf{V}$  que lorsque c'est la même variable  $q$  qui apparaît dans les deux membres.

En général, l'évolution d'un système peut être sujette à des *principes d'évolution* (des principes variationnels, par exemple) et à des *contraintes*. Dans certains cas, ces principes ne constituent qu'une autre façon d'exprimer les lois de l'évolution (par exemple, les équations d'Euler-Lagrange des principes variationnels sont identiques aux équations d'évolution). Dans d'autres cas, ils peuvent constituer des exigences additionnelles portant sur les paramètres de commande ou sur les imports extérieurs.

Certains des paramètres de commande, on l'a vu, sont fixés par des modèles séparés, des données expérimentales ou des considérations semi-empiriques. D'autres sont accessibles au gestionnaire pour répondre à des critères de comportement optimal. Ce sont les paramètres de guidage auxquels correspondent des principes et des contraintes de guidage.

Dans le cas d'un système marin, les principes et les contraintes de guidage naissent naturellement de la nécessité de préserver les ressources naturelles, de limiter la pollution, bref de gérer le système. Les impératifs de gestion peuvent déterminer certains paramètres de commande. Ils peuvent aussi imposer des limites aux apports extérieurs et s'exprimer en recommandations économiques.

#### 8.- Conditions initiales et conditions aux limites

Pour résoudre les équations d'évolution, il faut connaître les conditions initiales et les conditions aux limites.

En principe, les premières doivent être données en tout point du domaine à un instant de référence choisi comme point de départ. Les secondes, à l'opposé, doivent être données à tout instant mais sur les frontières seulement de la région étudiée. En pratique, l'état de référence initial est déterminé par une ou plusieurs campagnes de mesures et l'étalement dans le temps de ces données qui devraient être simultanées est une source importante d'erreurs. Il est d'autre part très difficile de maintenir un réseau permanent suffisamment serré pour

déterminer les conditions aux limites à tout instant. Le manque d'informations continues exige souvent des extrapolations dont l'approximation se reflète sur la qualité des résultats du modèle. Parmi les problèmes les plus importants, on peut citer :

- i) la fiabilité des données sur les frontières en mer ouverte,
- ii) la formulation des conditions au fond et à l'interface air-mer et l'évaluation des apports atmosphériques,
- iii) l'identification des imports côtiers (en particulier, les décharges de polluants par les émissaires et les rivières).

Il n'est pas exagéré de dire, qu'au stade actuel, les modèles sont beaucoup meilleurs que les données aux frontières sur lesquelles ils élaborent.

Une remarque importante doit être faite à cet endroit. Lorsqu'on réduit le support du système en intégrant sur une ou plusieurs coordonnées spatiales, on diminue en même temps ses frontières. Par exemple, le système marin esquissé à la figure 9 s'étend sur trois dimensions et est limité par des frontières latérales (côtes et frontières en mer ouverte), par l'interface air-mer et par le fond.

Si on intègre sur la profondeur, réduisant ainsi les dimensions spatiales du support à deux, le système simplifié qui en résulte n'a plus que des frontières latérales. C'est sur ces frontières qu'il faut imposer des conditions aux limites appropriées pour résoudre les équations d'évolution (intégrées sur la profondeur).

Les conditions au fond et à l'interface air-mer ne sont pas pour autant devenues inutiles. Au contraire, elles apparaissent à présent dans les nouvelles équations d'évolution où elles ont été introduites par le processus d'intégration. On s'en convainc aisément en considérant par exemple le flux vertical d'un constituant  $\alpha$ . Dans un modèle à trois dimensions, ce flux est représenté par un terme de la forme :

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \kappa_3 \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_3} \right)$$

où  $x_3$  est la coordonnée verticale et  $\kappa_3$  le coefficient de dispersion verticale.

Dans un modèle intégré sur la profondeur, ce terme devient :

$$(21) \quad \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right) dx_3 = \left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right)_{x_3=\zeta} - \left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right)_{x_3=-h}$$

où

$$(22) \quad x_3 = \zeta$$

et

$$(23) \quad x_3 = -h$$

sont les équations de la surface et du fond respectivement et où

$$\left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right)_{x_3=\zeta}$$

et

$$\left( \kappa_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \right)_{x_3=-h}$$

sont les flux à la surface et au fond.

Ces flux sont, en principe, des conditions aux limites. Par intégration sur la profondeur, ils ont été introduits dans les équations d'évolution.

La remarque reste vraie lorsqu'on intègre sur plus d'une direction spatiale : les imports et les exports frontières sont transformés en des imports-exports "de volume". Ils disparaissent des conditions aux limites mais ils doivent être inclus dans le terme de source-puit  $Q_a$ .

Il est généralement difficile d'exprimer les conditions aux limites sans avoir recours à des coefficients empiriques. Si, par intégration spatiale, les données aux frontières sont insérées dans les équations d'évolution, elles apportent avec elles des paramètres de commande supplémentaires jouant le plus souvent un rôle capital dans le comportement du système.

Références

NIHOUL, J.C.J., (1975). *Modelling of Marine Systems*, Elsevier Publ., Amsterdam.

PICHOT, G., (1973). Working Papers NATO Science Committee Conference on Modelling of Marine Systems, OFIR, June 4-8, 1973.

