Beschrijving van een computer-programma voor Fourier-analyse

door

A. Sannes jr.

Stage-verslag

over

werkzaamheden verricht als onderwerp in het tijdvak

1 mei 1974 - tot 1 augustus

aan het

NIOZ te Texel

onder supervisie van

W.G. v. Arkel

NEDERLANDS INSTITUUT VOOR ONDERZOEK DER ZEE

PUBLICATIES EN VERSLAGEN:

nummer 1975 - 2

Beschrijving van een computer-programma voor

Fourier-analyse

door

A. Sannes jr.

Stage-verslag

Inhoud

1. SUMMARY

During my practical work at the Netherlands Institute for Sea Research, Texel, from May until August 1974, I have been engaged with the Fourier-transformation. The direct motive was the problem of a guest-investigator who studied the regularity in the frequency of pulsations of the hearts of guillemots. A computerprogram that can handle general Fourier-problems is written.

This program is tested with some exact ritmic functions and used for pulsation problem. Some recommendations are given about the formatting of the input-data.

SAMENVATTING

Tijdens mijn stage van 1 mei tot 1 augustus 1974 bij het NIOZ te Texel heb ik me enige tijd bezig gehouden met de Fourier transformatie. De direkte aanleiding was het probleem van een gastonderzoeker die naar een bepaalde regelmatigheid zocht in de hartslagfrequentie van een zeekoet.

Ik heb een computer-programma geschreven dat de algemene Fourier-problemen verwerken kan. Dit programma is getest met de eerder genoemde hartslagfrequentie en enige exact rithmische functies.

Verder worden enige aanbevelingen gedaan over het formaat van de data die getransformeerd moet worden.

2. FOURIER TRANSFORMATIE

Een reeks van de gedaante :

$$\tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \quad (1)$$

Waarin a_n en b_n onafhankelijk zijn van x heet een goniometrische reeks en staat in de wiskunde bekend als de reeks van Fourier.

Veronderstel dat we een reeks waarnemings-uitkomsten hebben die een zekere periodiciteit vertonen. Een dergelijke reeks kunnen we als een goniometrische functie beschrijven. De methode is dan via de functie:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \qquad (2)$$

(N is het aantal meetpunten)

Van deze reeks moeten de termen a_n en b_n berekend worden. Door integratie onstaat een eenvoudige betrekking tussen $f(x)$ en de te berekenen coëfficienten a_n en b_n.

Voor de berekening van a_n en b_n maken we gebruik van de volgende integralen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx).\cos(nx)\, dx = 0 \qquad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).\cos(nx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n \\ \pi & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx).\sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } M \neq n \\ \pi & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$$

We integreren (2) tussen de grenzen $-\pi$ en π ; volgens (3) wordt de hele reeks 0 , behalve de eerste term.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2} a_o \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi a_o$$

$$a_o = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

We vermenigvuldigen nu de beide leden van (2) met cos (mx) en integreren op de zelfde wijze.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(mx)\, dx = \tfrac{1}{2} a_o \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).\cos(nx)\, dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx).\sin(nx)\, dx$$

Volgens (3) zijn alle leden in het rechter lid 0 , behalve de integrand $\cos(mx)\cos(mx)$. Dus :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\, dx = a_m \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\, dx = \pi \cdot a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) \cdot dx \qquad (4)$$

vermenigvuldiging met $\sin(mx)$ levert verder :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(mx) \cdot dx \qquad (5)$$

2.1. EEN FOURIERREEKS DOOR EEN AANTAL MEETPUNTEN

Heeft men een rij waarnemingen dan kan daar een bepaalde periodiciteit in worden gevonden door de coëfficiënten van de Fourier-polynoom, die men door deze meetpunten kan aanpassen te gaan bepalen.

Zoals in de vorige paragraaf is gebleken, zijn de coëfficiënten a_n en b_n te berekenen met de formules (4) en (5), de gedaante van deze formules moet dan wel aangepast worden, omdat we $f(x)$ niet kennen.

De integraal :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx$$

wordt vervangen door een eindige som $\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \Delta x$

x_n is een meetpunt uit de meetvector, x

N is het aantal meetpunten.

Neemt men voor het stukje Δx een constante waarde, dan kan ook worden geschreven:

$$\Delta x \cdot \sum_{n=o}^{N-1} x_n$$

dit vereenvoudigt de berekening van de coëfficiënten a_n en b_n. De onderlinge afstand tussen de x-waarden van de metingen moet daarom ook constant zijn.

Bij de berekening van a_n en b_n zijn we uitgegaan van een lengte van 2π van het interval waarover we de periodiciteit wilden opsporen. In het algemeen zal deze lengte echter l zijn.

De coëfficiënten a_n en b_n zijn dan :

$$a_n = \frac{2}{l} \int_o^l f(x) \cos \left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \cdot dx \qquad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_o^l f(x) \sin \left(\frac{2\pi n x}{l}\right) \cdot dx \qquad (7)$$

Voor een gemeten vektor is dit dan te schrijven als :

$$a_n = \frac{2}{l} \sum_{k=o}^{N-1} y_k \cdot \cos \frac{(2\pi \cdot n \cdot x_k)}{l} \cdot \Delta x$$

met $\quad l = N * \Delta x \quad$ en $x_k = k * \Delta x$

$$a_n = \frac{2\,\Delta x}{l} \cdot \sum_{k=o}^{N-1} yk \cdot \cos \frac{(2\pi n \cdot k \cdot \Delta x)}{N \cdot \Delta x}$$

$$= \frac{2}{m} \sum_{k=o}^{N-1} y_k \cdot \cos \frac{(2\pi nk)}{N} \qquad (8)$$

evenzo voor b_n

$$b_n = \frac{2}{m} \sum_{k-o}^{N-1} y_k \cdot \cos \frac{(2\pi nk)}{N} \qquad (9)$$

De gedaante van de Fourierreeks wordt ook veranderd, deze wordt als volgt

$$a_o + \sum_{n=1}^{N/2} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{l} x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{l} x\right)\right) \qquad (10)$$

2.2. NUMERIEKE OPLOSMETHODEN

Oplossen van a_n en b_n is numeriek eenvoudig. Men moet echter voor de oplossing van de coëfficiënten N * N berekeningen uitvoeren. Dit is voor grote meetreeksen een zeer tijdrovende en dus kostbare methode.

In de laatste jaren is er echter een veel snellere methode ontwikkeld die bekend is onder de naam "Fast Fourier Transform" (FFT). Deze FFT is een efficiënte methode om de "Discrete Fourier Transform" (DFT) te berekenen.

De DFT is een wiskundige voorstelling van een goniometrische reeks en is gedefinieerd door :

$$A_r = \sum_{k=o}^{N-1} x_k \cdot \exp\left(-2\pi i\, rk/N\right) \qquad r=o, 1 \ldots, N-1$$

$$= \sum_{k=o}^{N-1} x_k \cdot W^{rk} \qquad (11)$$

met $W = \exp\left(-2\pi i/N\right)$

A_r . is de r^e coëfficiënt van de DFT, x_k is het k^e meetpunt

i is $\sqrt{-1}$

Voor het terugtransformeren van de data moet de inverse van de DFT bekend zijn , deze inverse is :

$$x_l = (1/N) \sum_{k=o}^{N-1} A_r \cdot W^{-r.l} \qquad l = o, 1 \ldots, N-1 \qquad (12)$$

Deze inverse vertoont veel overeenkomst met de DFT. Wordt voor numerieke oplossing een subroutine gebruikt, dan kan men deze subroutine met gewijzigde invoer ook gebruiken voor het terugtransformeren.

Uit de wiskunde is bekend :

$\exp(ix) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ en

$\exp(-ix) = \cos(x) - i \cdot \sin(x)$

De DFT kan daarom ook geschreven worden als :

$$A_r = \sum_{k=o}^{N-1} x_k \cdot (\cos(2\pi rk/N) - i \cdot \sin(2\pi rk/N))$$

terugtransformeren levert dan :

$$x_i = (1/N) \sum_{k=o}^{N-1} A_r \cdot (\cos(2\pi rl/N) + i \cdot \sin(2\pi rl/N))$$

A_r is een complexe grootheid, onafhankelijk van x_k . Het reële deel van A_r wordt steeds vermenigvuldigd met het stuk $\cos(2\pi rl/N)$, het imaginaire deel met het stuk $i \cdot \sin(2\pi rl/N)$. Dit laatste is dan ook weer reële. Het reëele deel van A_r zou de coëfficiënt a_n en het imaginaire deel de coëfficiënt b_n zijn, als de sommatie niet van o tot N-1 liep.

2.3. FAST FOURIER TRANSFORM

Bij de FFT wordt de data reeks x_k verdeeld in 2 reeksen y_k en z_k . De rij y_k bevat de even genummerde data en de rij z_k de oneven. Van deze rijen kan men m.b.v. de DFT de coëfficiënten B_r en C_r bepalen.

$$B_r = \sum_{k=o}^{N/2-1} y_k \cdot \exp(-4\pi irk/N) \qquad r=o,\ 1 \quad N/2-1 \qquad (13)$$

$$C_r = \sum_{k=o}^{N/2-1} z_k \cdot \exp\left(-\ 4\ \pi\ irk/N\right) \qquad (14)$$

We zijn echter geïntereseerd in de coëfficiënten A_r : deze zijn te berekenen uit B_r en C_r m.b.v. :

$$A_r = B_r + C_r \cdot \exp\left(-\ 2\ \pi\ ir/N\right) \qquad (15)$$

$$r = o,\ 1 \ldots N/2-1$$

$$A_{r+\frac{N}{2}} = B_r + \exp\left(-\ 2\ \pi\ i\ (r + \tfrac{N}{2})/N\right) \cdot C_r$$

$$= B_r - \exp\left(-\ 2\ \pi\ ir/N\right) \cdot C_r$$

met $\exp\left(-\ 2\pi\ i/N\right) = W$ geldt:

$$A_r = B_r + W^r \cdot C_r \qquad (16)$$

$$A_{r+N/2} = B_r - W^r \cdot C_r$$

De coëfficiënten B_r en C_r kunnen we nu weer op de zelfde wijze berekenen. Is het aantal meetpunten N nu gelijk aan 2^m, dan kan men doorgaan tot een serie DFT's van steeds 2 punten overgebleven is. Deze kan met de formule (11) worden berekend en met de formules (16) kunnen hieruit de coëfficiënten A_r worden bepaald.

Omdat er voor de periodiciteit geen verschil is tussen een sinus en een cosinus $\left(\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ worden het reële en imaginaire deel van de termen A_r kwadratisch opgeteld. Deze rij met sommen noemt men de optredende frequentie. De absolute grootte van deze frequentie geeft weinig informatie, de relative frequentie-grootte geeft echter een goede verhouding weer tussen de verschillende rithmieken die optreden.

2.4. REKENTIJD

Het aantal berekeningen voor de FFT is $N \cdot {}^{2}\log(N)$, die van de DFT is N^2 . Nemen we als voorbeeld een meet rij met $1024 = 2^{10}$ meetpunten dan is

$N \cdot {}^{2}\log(N) = 10 \cdot 1024 = 10240$

$N^2 = 1024 \cdot 1024 = 1048576$

dit is ruim 100 * groter.

De rekentijd zal van de DFT daarom ook bij een rij van 1024 meetpunten ongeveer 100 * zo lang zijn als die bij de FFT .

3. Programma-tekst

```
      PROGRAM FOURIER(INPUT,OUTPUT,TAPE1=INPUT,TAPE2=OUTPUT)
C ***
C ***    DIT PROGRAMMA LEVERT EEN FOURIER TRANSFORMATIE VAN EEN
C ***    MEET VECTOR MET EEN WILEKEURIG AAN TAL PUNTEN.
C ***
C ***    DE VOLGENDE DIMENSION STATEMENT MOET VOOR HET GEBRUIK VAN HET
C ***    PROGRAMMA AAN GEPAST WORDEN.
C ***
C *** DIMENSION COM(N),COSIN(N),IX(N),F(N/2+1)
C ***
C ***    N IS HET AANTAL MEETPUNTEN NAAR BOVEN AFGERONDT TOT EEN
C ***    MACHT VAN TWEE.
C ***    V.B.   AANTAL MEETPUNTEN IS 10  DAN N=16  (8<10)
C ***
      DIMENSION COM(300),COSIN(300),IX(300),F(151)
      COMPLEX COM
      CALL LEES(COM,N,M,NREAD,1)
      CALL TABLE(COM,N,2,11HMEASURED    ,.FALSE.)
      CALL INIT(COSIN,IX,N,M)
      CALL RFT(COM,M,COSIN,IX)
      CALL TABLE(COM,N,2,11HTRANSFORMED,.TRUE.)
      CALL FREQ(F,N,COM,1)
      CALL TABLE(COM,N,2,11HTRANSFORMED,.TRUE.)
      CALL HEAD(1,2)
      CALL GRAFIEK(F,N,2)
      DO 10 I=1,N
         COM(I)=CONJG(COM(I))/FLOAT(N)
   10 CONTINUE
      CALL RFT (COM,M,COSIN,IX)
      DO 20 I=1,N
         COM(I)=CONJG(COM(I))
   20 CONTINUE
      CALL TABLE(COM,N,2,13HRETRANSFORMED,.FALSE.)
      END
```

```
      SUBROUTINE LEES(C,N,M,NREAD,IUNIT)
      DIMENSION C(1)
      COMPLEX C
      NREAD=RN(IUNIT)
      M=IFIX(ALOG(FLOAT(NREAD))/ALOG(2.))+1
      N=2**M
      IF(N.EQ.2*NREAD) M=M-1
      IF(N.EQ.2*NREAD) N=N/2
      DO 30 K=NREAD,N
         C(K)=CMPLX(0.,0.)
   30 CONTINUE
      DO 40 I=1,NREAD
         HULP=RN(IUNIT)
         C(I)=CMPLX(HULP,0.)
   40 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE FREQ(F,N,C,IUNIT)
      DIMENSION F(1),C(1)
      COMPLEX C
      NF=N/2+1
      DO 10 I=1,NF
         A=REAL(C(I))
         B=AIMAG(C(I))
         F(I)=SQRT(A*A+B*B)
   10 CONTINUE
      CALL DESTROY(IUNIT,F,NF,C,N)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE GRAFIEK(F,N,IUNIT)
      DIMENSION F(1),IBLANK(100)
      DATA IBLANK,ISTER/100*1H ,1H*/
      HOOGST=0.
      NF=N/2+1
      DO 10 I=2,NF
         IF(F(I).GT.HOOGST) HOOGST=F(I)
   10 CONTINUE
      EENHEID=HOOGST/99.
      DO 20 I=2,NF
         M=F(I)/EENHEID+1.5
         WRITE(IUNIT,2) F(I),(IBLANK(J),J=1,M),ISTER
   20 CONTINUE
    2 FORMAT(E12.5,5H   . ,101A1)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DESTROY(IUNIT,F,NF,C,N)
      LOGICAL ERROR
      DIMENSION F(1),C(1)
      COMPLEX C
5     FAKTOR=RN(IUNIT)
      ERROR=(FAKTOR.LT.0.).OR.(FAKTOR.GT.1.)
      IF(ERROR) CALL DISPLA(42HINPUT ERROR DETECTED BY DESTROY,FAKTOR I
     1: ,FAKTOR)
      IF(ERROR) CALL DISPLA(13HPROGRAM STOPS ,0)
0     IF(ERROR) STOP
      HOOGST=0.
      DO 20 I=2,NF
         IF(HOOGST.LT.F(I)) HOOGST=F(I)
   20 CONTINUE
5     HOOGST=HOOGST*FAKTOR
      DO 30 I=2,NF
         IF(F(I).LT.HOOGST) C(I)=C(N-I+2)=CMPLX(0.,0.)
   30 CONTINUE
      RETURN
0     END
```

```
      SUBROUTINE TABLE(C,N,IUNIT,IARRAY,COMPLX)
      LOGICAL COMPLX
      DIMENSION C(1),IARRAY(2)
      N2=N+N
5     WRITE(IUNIT,1) (IARRAY(I),I=1,2)
      IF(COMPLX) WRITE(IUNIT,2) (C(I),I=1,N2)
      IF(.NOT.COMPLX) WRITE(IUNIT,3) (C(I),I=1,N2,2)
    1 FORMAT(1H1,*THIS LISTING CONTAINS THE *,A10,A4,*DATA.*)
    2 FORMAT(1H ,*EVERY SECOND NUMBER IS THE IMAGINARY PART OF THE TRAN
0     1FORMED DATA*/1H0/(10E13.6))
    3 FORMAT(1H0/(10E13.6))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE HEAD(INP,OUTP)
      INTEGER INP,OUTP
      DIMENSION I(8)
      K=RN(INP)
5     WRITE(OUTP,2)
      IF(K.EQ.0) RETURN
      DO 10 J=1,K
         READ(INP,3) I
         WRITE(OUTP,4) I
0   10 CONTINUE
    2 FORMAT(1H1)
    3 FORMAT(8A10)
    4 FORMAT(1H ,8A10)
      RETURN
5     END
```

```
      SUBROUTINE RFT(Z,M,CS,IX)

C     FOURIERTRANSFORM OF Z OF 2**M POINTS
C     Z(K) = SUM(EXP(2*PI*I*.*K/N)*Z(.)).
C     ASSUMING : CS(K) = COS(2*PI*(K-1)/2**M), K = 1 TO N/4+1.
C     AND IX(I+1) = 1+BIT-REVERSE OF I FOR I = 0 TO N-1.

      COMPLEX Z(M),T,Y
      DIMENSION CS(M),IX(M)

      N4 = 2**(M-2)
      N2 = 2*N4
      N = 2*N2
      M2MAX = 1
      M1MAX = N2
      NDIF = 2

C     M2MAX = 2**(L-1), WHERE L = 1,M
C     M1MAX = 2**(M-L), WHERE L = 1,M
C     NDIF = 2**L     , WHERE L = 1,M

      DO 10 I = 2,N2
      J = IX(I)
      IF (I.GE.J) GOTO 10
      T = Z(I)
      Z(I) = Z(J)
      Z(J) = T
   10 CONTINUE
      NF = N2+4
      NL = N-2**((M+1)/2)
      DO 11 I = NF,NL,2
      J = IX(I)
      IF (I.GE.J) GOTO 11
      T = Z(I)
      Z(I) = Z(J)
      Z(J) = T
   11 CONTINUE
      DO 100 L = 1,M
      DO 90 M2 = 1,M2MAX

C     M2 = 1,2**(L-1)

      K = (M2-1)*M1MAX
      IF (K-N4) 20,30,30
   20 W = CS(1+K)
      GOTO 40
   30 W = -CS(1+N2-K)
   40 CONTINUE
      T = CMPLX(W,CS(1+IABS(K-N4)))

C     T = EXP(2*PI*I*K/N), K=1 TO N/2-1

      DO 80 M1 = 1,M1MAX

C     M1 =1,2**(M-L)
```

```
      NP = (M1-1)*NDIF+M2
      Y = T*Z(NP+M2MAX)
      Z(NP+M2MAX) = Z(NP)-Y
      Z(NP) = Z(NP)+Y
   80 CONTINUE
   90 CONTINUE
      M2MAX = 2*M2MAX
      M1MAX = M1MAX/2
      NDIF = 2*NDIF
  100 CONTINUE
      Z(N+1) = Z(1)

      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE INIT(CS,IX,N,M)

      DIMENSION CS(N),IX(N)

C     NON ANSI FORTRAN EXT.  4.0
C     ASSUMED  N = 2**M
C     CS(I) = COS(2*PI*(I-1)/2**M) , K = 1 TO N/4 + 1
C     OUTPUT : CS,IX

      PI = 3.141592653590
      TWOM1 = 2.0/N
      IUP = N/4 + 1
      DO 1 K = 1,IUP
    1 CS(K) = COS(PI*(K-1)*TWOM1)

C     IX(I) = 1 + BIT-REVERSE OF I-1 FOR I = 1 TO N
C     THE CASE M = 1  (N = 2) GOES WRONG

      M1 = M-1
      DO 3 K = 1,N
      K1 = K-1
      L = K1 .AND. 1
      DO 2 J = 1,M1
    2 L = SHIFT(L,1) + (SHIFT(K1,-J) .AND. 1)
      IX(K) = L+1
    3 CONTINUE

      RETURN
      END
```

4. PROGRAMMA BESCHRIJVING

Het programma Fourier is geschreven in Fortran -- Extended voor de CDC - 6600 en heeft gedraaid met de FTN 4.1 + P370 compiler.
Het is een algemeen programma met een flexibele invoer.

4.1. OPBOUW

Het programma is, zoals dit tegenwoordig steeds gebruikelijker is, opgebouwd uit modulen. De modulen zijn de subroutines die zoveel mogelijk een logische naam hebben, zodat de programma-voortgang voor iedereen eenvoudig te lezen is. In het kort zal de funktie van de verschillende subroutines in het hoofd--programma beschreven worden.

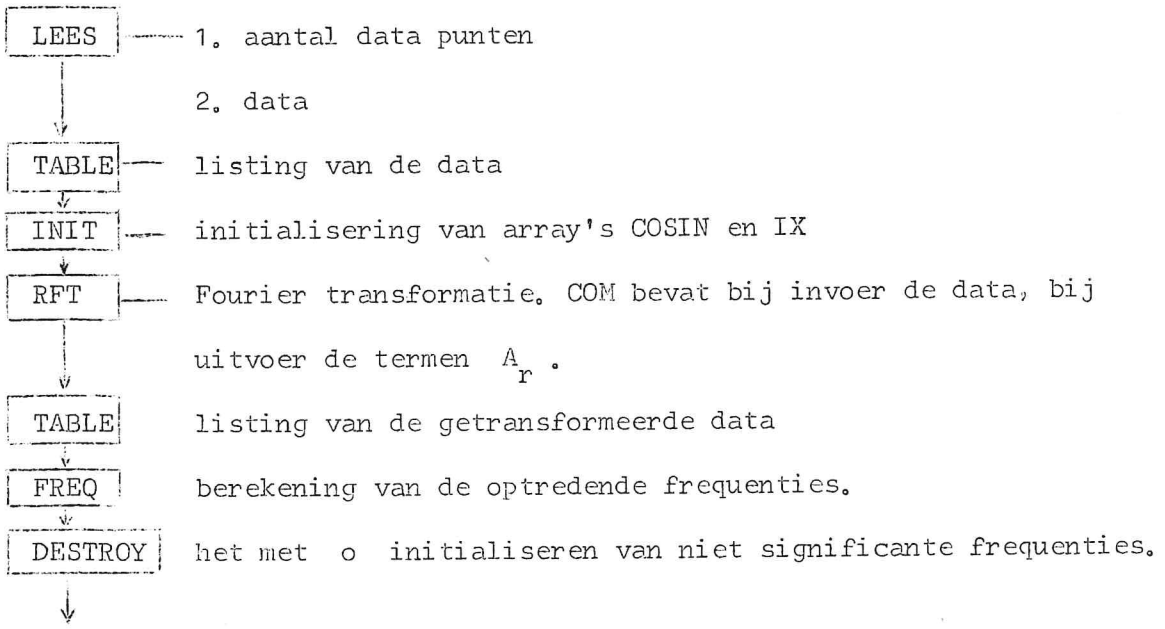
- LEES --- Met deze routine wordt het getal gelezen dat het aantal data-punten aangeeft; vervolgens worden de data-punten gelezen. Het aantal data (nread) wordt nu naar boven afgerond tot een macht van 2, dit is n. De gelezen waarden worden toegekend aan het reële deel van het complexe array COM. De overige elementen van het array COM worden met o geinialiseerd, evenals het imaginaire deel.
  (De lengte van COM is n = 2 ** n)
- TABLE -- Deze subroutine maakt een listing van de data. De laatste parameter is . FALSE. d.w.z. dat alleen het reële deel van COM wordt geprint.
- INIT --- Dit is een routine die de arrays COSIN en IX initialiseert voor het gebruik in de routine RFT.
- RFT --- Dit is de FFT routine. De array COM bevat bij de invoer de data, zoals hierboven beschreven, bij de uit voer bevat het de termen A_r.

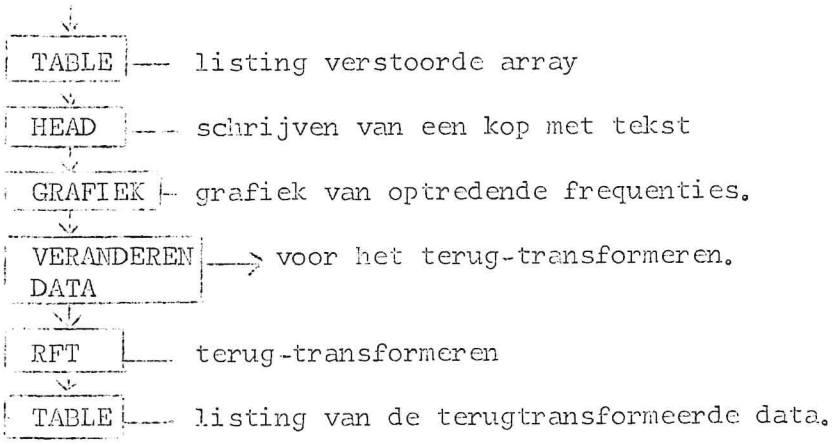
- TABLE -- (Zie boven) de laatste parameter is nu . TRUE. dan wordt ook het imaginaire deel gelist.
- FREQ -- Deze routine berekent uit de termen A_r de frequentie-grootte zoals deze in de meet-vector optreedt. Vervolgens wordt er een faktor (tussen de o en 1) gelezen die aangeeft welke frequenties niet significant zijn. Deze frequenties worden vervolgens bepaald, en de elementen in de array COM, waaruit deze frequenties berekend zijn worden met o geïnitialiseerd.
- TABLE -- (Zie boven)
- HEAD -- Deze routine leest een aantal records met tekst van de input-file en schrijft deze als kop boven de hierna beschreven grafiek.
- GRAFIEK -- Deze routine maakt een grafiek van de optredende frequenties op de regeldrukker.

Voor het terug-transformeren moet de data veranderd worden (Zie theorie) om de zelfde routine weer te kunnen gebruiken. Dit is de volgende stap in het programma.

- RFT -- Hiermee wordt nu de data teruggetransformeerd.
- TABLE -- (Zie boven)

4.1.2. SCHEMATISCHE OPBOUW





4.2. INVOER

De invoer is verdeeld in 3 groepen t.w.

- de te transformeren data.
- de signifikantie faktor.
- de tekst boven de grafiek.

Het formaat van de groepen zal hier worden beschreven :

a) De te transformeren data :

Dit is een willekeurig aantal data punten (alleen y-waarde). Als eerste getal moet het aantal data punten gegeven worden, dit moet een integer getal zijn. Daarna komen de data punten. De getallen moeten gescheiden worden door een komma. Ook tussen het eerste getal en de volgende data moet een komma. Het formaat van de data en het aantal per kaart is geheel vrij.

b) De signifikantie-faktor :

Dit is een getal tussen o en 1 en kan direkt na de data, gescheiden door een komma, ingevoerd worden. (Op een aparte kaart ponsen is echter wel overzichtelijker.)

De signifikantie is een getal waarmee de waarde van de sterkste frequentie wordt vermenigvuldigd. Iedere frequentie die een kleinere waarde heeft dan dit produkt is dan niet signifikant.

Voorbeeld :

F1 = 10 , F2 = 12 , F3 = 2 , F4 = 15 , F5 = 6 F6 = 3 .

de signifikantie-faktor is 0.5

het produkt is 0.5 * Fu = 7.5 dus de frequenties F3 , F5 en F7 zijn niet signifikant.

Leest het programma een faktor die niet ligt tussen de 0 en 1 dan wordt het programma beëindigd. De waarde van de gelezen variabele wordt in de dayfile geprint, na de mededeling :

"Input error detected by DESTROY factor is :"

c) Tekst boven de grafiek

Na de kaart met de signifikantie-faktor komt een kaart met het aantal tekst-kaarten. (mag ook 0 zijn). De daarna volgende kaarten worden als tekst gelezen en volgens gelijk formaat boven de frequentie-grafiek geprint. (Een blanke kaart is een regel overslaan).

4.3. UITVOER

De uitvoer komt normaal op de Regeldrukker en bestaat uit 5 groepen, t.w.:

- Een listing van de gelezen data
- Een listing van de getransformeerde data
- Een listing van de getransformeerde en gereduceerde data.
- Een frequentie-grafiek
- Een listing van de geretransformeerde data

(heeft men als signifikantie-faktor 0 genomen, dan moet de geretransformeerde data gelijk zijn aan de gelezen data).

4.4 Invoer-voorbeeld en Uitvoervoorbeeld

```
   JOBCARD.
   ACCOUNTCARD.
   FTN.
   REQUEST,LIB,*PF.
5  EDITLIB,USER.
   CATALOG,LIB,BIBLIOTHEEK,ID=NIOZSAN,RP=0.
   7/8/9

         PROGRAMMA TEKST
0        MET SUBROUTINES

   7/8/9
   LIBRARY(LIB,NEW)
   REWIND(LGO)
5  ADD(*,LGO)
   SETAL(FOURIER,1)
   FINISH.
   ENDRUN.
   6/7/8/9
```

```
   JOBCARD.
   ACCOUNTCARD.
   ATTACH,LIB,BIBLIOTHEEK,ID=NIOZSAN.
   LIBRARY,LIB.
 5 FOURIER.
   FOURIER.
   7/8/9
   200
    0.0000,  .0314,  .0628,  .0941,  .1253,  .1564,  .1873,  .2180,  .24
10   .3089,  .3386,  .3679,  .3970,  .4256,  .4538,  .4815,  .5088,  .53
     .5875,  .6126,  .6372,  .6610,  .6843,  .7068,  .7287,  .7498,  .77
     .8087,  .8268,  .8441,  .8605,  .8760,  .8908,  .9046,  .9175,  .92
     .9509,  .9601,  .9684,  .9758,  .9822,  .9876,  .9920,  .9955,  .99
    1.0000,  .9995,  .9981,  .9956,  .9922,  .9878,  .9825,  .9761,  .96
15   .9514,  .9412,  .9301,  .9182,  .9053,  .8915,  .8768,  .8613,  .84
     .8097,  .7908,  .7712,  .7509,  .7298,  .7080,  .6854,  .6622,  .63
     .5888,  .5631,  .5369,  .5102,  .4829,  .4552,  .4270,  .3984,  .36
     .3104,  .2804,  .2501,  .2196,  .1889,  .1579,  .1268,  .0956,  .06
     .0016, -.0298, -.0612, -.0925, -.1237, -.1548, -.1857, -.2165, -.24
20  -.3074, -.3371, -.3665, -.3955, -.4241, -.4524, -.4801, -.5074, -.53
    -.5862, -.6114, -.6359, -.6598, -.6831, -.7057, -.7276, -.7488, -.76
    -.8078, -.8259, -.8432, -.8597, -.8753, -.8900, -.9039, -.9169, -.92
    -.9504, -.9597, -.9680, -.9754, -.9819, -.9873, -.9918, -.9953, -.99
   -1.0000, -.9996, -.9982, -.9958, -.9924, -.9881, -.9827, -.9765, -.96
25  -.9518, -.9417, -.9307, -.9188, -.9059, -.8922, -.8776, -.8621, -.84
    -.8106, -.7918, -.7723, -.7519, -.7309, -.7091, -.6866, -.6634, -.63
    -.5901, -.5645, -.5383, -.5115, -.4843, -.4566, -.4285, -.3999, -.37
    -.3119, -.2819, -.2517, -.2211, -.1904, -.1595, -.1284, -.0972, -.06
   0.
30 3
      TEST MET EEN SINUS

                PROGRAMMEUR   A.SANNES
   7/8/9
35
          DATA

   7/8/9
   6/7/8/9
```

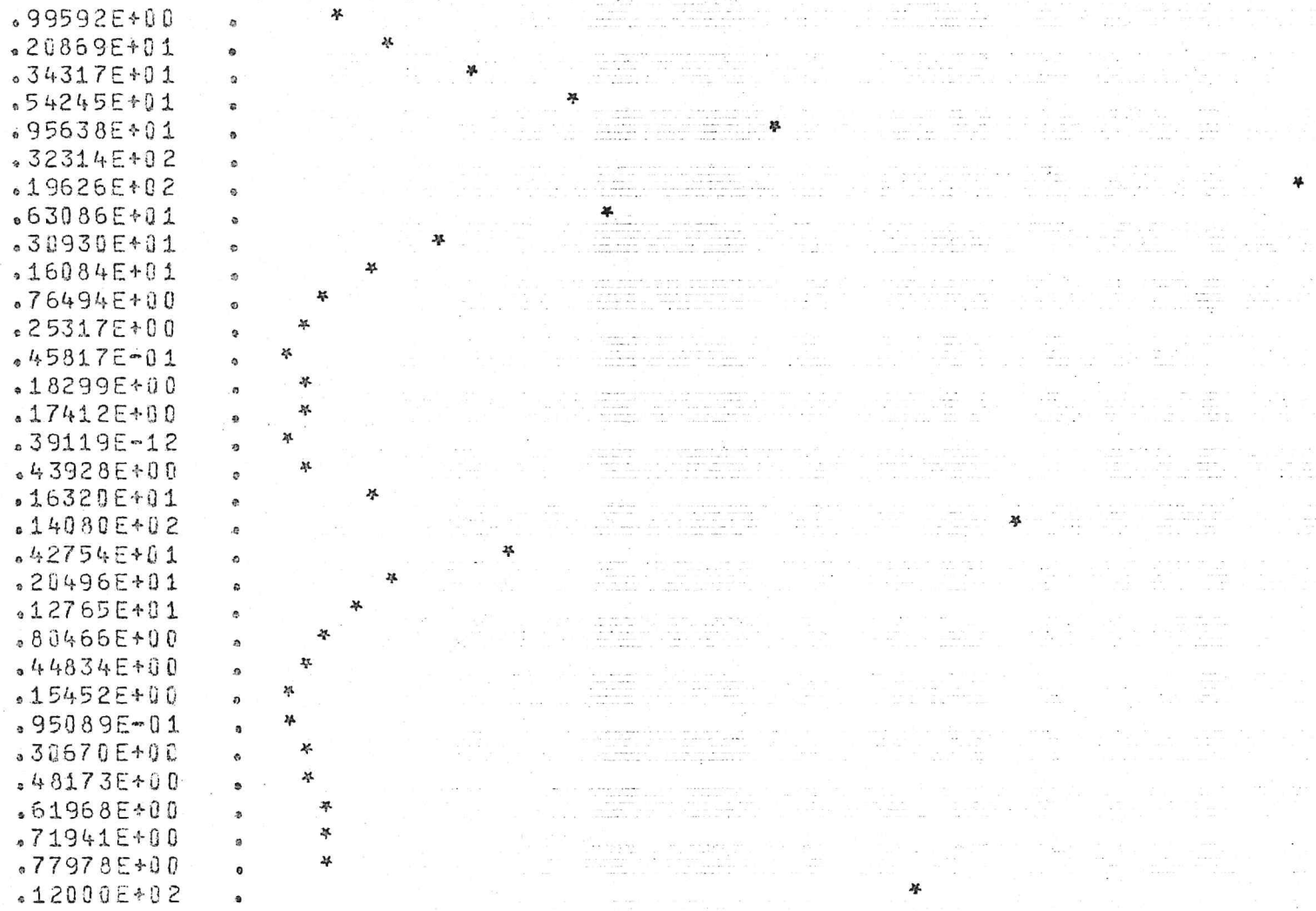
LISTING CONTAINS THE TRANSFORMED DATA.
Y SECOND NUMBER IS THE IMAGENAIR PART OF THE TRANSFORMED DATA

3687E-12 .141668E-11 .241989E+00 .966076E+00 .983741E+00 .184045E+01
0469E+01 .322193E+01 .321586E+02 .316734E+01 -.194139E+02 .287978E+01
2038E+01 .124333E+01 -.327052E+00 .691494E+00 -.493905E-01 .248303E+00
5162E-01 -.149349E+00 .303573E-12 .246730E-12 .376787E+00 .225838E+00
9325E+01 .834089E+00 -.185281E+01 .876314E+00 -.986729E+00 .809787E+00
6725E-01 .152846E+00 -.932032E-02 -.946308E-01 -.103323E+00 -.288768E+00
4467E+00 -.339130E+00 -.756414E+00 -.189472E+00 .120000E+02 -.364288E-11
9156E+00 .416155E+00 -.267635E+00 .400544E+00 -.103323E+00 .288768E+00
1573E+00 -.414214E+00 -.479333E+00 -.646305E+00 -.986729E+00 -.809787E+00
0627E+02 -.690856E+00 .156171E+01 -.473739E+00 .376787E+00 -.225838E+00
1183E-01 .175108E+00 -.224816E-02 .457622E-01 -.493905E-01 -.248303E+00
8434E+01 -.184251E+01 -.582843E+01 -.241421E+01 -.194139E+02 -.287978E+01
1028E+01 -.301367E+01 .230461E+01 -.254274E+01 .983741E+00 -.184045E+01

.230461E+01 .254274E+01 .451028E+01 .301367E+01
-.582843E+01 .241421E+01 -.248434E+01 .184251E+01
-.224816E-02 -.457622E-01 -.531183E-01 -.175108E+00
.156171E+01 .473739E+00 .140627E+02 .690856E+00
-.479333E+00 .646305E+00 -.171573E+00 .414214E+00
-.267635E+00 -.400544E+00 -.459156E+00 -.416155E+00
-.756414E+00 .189472E+00 -.634467E+00 .339130E+00
-.932032E-02 .946308E-01 -.226725E-01 -.152846E+00
-.185281E+01 -.876314E+00 -.419325E+01 -.834089E+00
-.303573E-12 .360417E-12 -.895162E-01 .149349E+00
-.327052E+00 -.691494E+00 -.102038E+01 -.124333E+01
.321586E+02 -.316734E+01 .900469E+01 -.322193E+01
.241989E+00 -.966076E+00

TEST PROGRAMMA MET BLOKGOLF

PROGRAMMEUR A.SANNES



5. GEBRUIK VAN HET PROGRAMMA

Voor het gebruik van het programma moet men het hoofdstuk invoer goed lezen!

Verder moet het programma aangepast worden aan de grootte van het probleem. Hiervoor moet het 2^e statement gewijzigd worden. De lengten van de te gebruiken arrays zijn gegeven in de comment-kaarten. Voor een probleem met 200 meetpunten wordt het 2^e statement :

DIMENSION COM (256) , COSIN (256), IX (256), F (129)

Om onnodig dragen met kaarten tegen te gaan heb ik de job in tweeën verdeeld.

In het eerste deel wordt het programma vertaald en op permament file opgeborgen, in het tweede deel wordt dit programma geladen en tot uitvoer gebracht. Gaat het programma nu door een invoer fout, dan hoeft men het hele carddeck niet meer in te lezen en te vertalen.

6. AANBEVELINGEN VOOR DE METINGEN

Uit de theorie volgt dat de afstand tussen de meetpunten (x-as) gelijk moet zijn. De x-waarden worden voor de transformatie niet gebruikt, en daarom ook niet ingelezen.

Heeft men nu bij bepaalde metingen grote hoeveelheden meet-gegevens dan doet zich vaak snel het probleem voor, "hoe krijg ik ze op ponskaarten". Het tekenen van grafieken is hiervoor waarschijnlijk wel de slechtste oplossing. Ervaring heeft geleerd dat het opmeten vanaf deze grafieken en vervolgens het ponsen en zeer tijdrovende en vervelende bezigheid is.

Een betere oplossing zou al zijn om de data met een digitale meter de bepalen en vervolgens op papier de laten typen door een printer, maar hierbij blijft de ponstijd.

De beste oplossing is waarschijnlijk om een ponsband-ponser te gebruiken. Het programma zal hiervoor wel moeten worden aangepast, maar deze methode

bespaart zeer veel ponswerk.

De programma wijziging komt doordat de in leesroutine RN(N), die gebruikt wordt voor het in-lezen, gemaakt is voor ponskaarten. Het is echter altijd mogelijk om de getallen m.b.v. een zeer eenvoudig programma in te lezen vanaf de ponsband en ze daarna op ponskaarten te schrijven. Het is misschien ook mogelijk dat de in leesroutine RN aangepast wordt. Heeft U Uw gegevens op ponsband staan, dan is het aan te bevelen om eens kontakt op te nemen met M Helvensteyn op het Reken Centrum van het R.C.N. te Petten. Hij is namelijk de maker van de in leesroutine RN.

Het is verder aan te bevelen om bij metingen met een hoge gemiddelde waarde in vergelijking tot de maximale variantie, een constante van de meet waarden af te trekken, daar anders de belangrijk frequenties niet zichtbaar worden.

Als voorbeeld wil ik dit noemen:

een rij :

1 , - 1 , 1 , - 1 , 1 , - 1 zal betere resultaten geven als de rij:

1001, 999, 1001, 999, 1001, 999

Dit reduceren kan eventueel nog aan het programma toegevoegd worden.

7. DE IMSL -- ROUTINES

Ook zijn er in de systeem-bibliotheek een aantal Fourier-routines opgenomen. Van deze routines wordt in mindere mate gebruik gemaakt, omdat de RFT routine sneller en efficiënter is dan de vergelijkbare IMSL routines.

Ik heb de beschrijving van deze routines als bijlage aan dit verslag toegevoegd.

8. LITERATUUR

— Hogere Wiskunde voor het Technisch Onderwijs
uitgeverij H. Stam.

— Idee transactions on audio and electroacoustics,
vol. AU-15, no. 2, June 1967.

Bijlage : IMSL - Routines.

```
      SUBROUTINE FFCSIN (X,N,A,B,IWK)                                    FFCS0010
C                                                                        FFCS0020
C-FFCSIN--------S--------LIBRARY 3-------------------------------------FFCS0030
C                                                                        FFCS0040
C   FUNCTION            - TO COMPUTE THE SINE AND COSINE TRANSFORMS      FFCS0050
C                           OF A SET OF REAL DATA.                       FFCS0060
C   USAGE               - CALL FFCSIN(X,N,A,B,IWK)                       FFCS0070
C   PARAMETERS   X      - ON INPUT, THE VECTOR X (LENGTH N) CONTAINS     FFCS0080
C                           THE DATA TO BE TRANSFORMED. ON OUTPUT,       FFCS0090
C                           X IS DESTROYED.                              FFCS0100
C                N      - NUMBER OF DATA POINTS (LENGTH OF X).           FFCS0110
C                           N MUST BE EVEN.                              FFCS0120
C                A      - OUTPUT VECTOR OF LENGTH N/2 + 1, CONTAINING    FFCS0130
C                           THE COSINE TRANSFORMS. (VECTORS X AND A MAY  FFCS0140
C                           COINCIDE.                                    FFCS0150
C                B      - OUTPUT VECTOR OF LENGTH N/2 + 1, CONTAINING    FFCS0160
C                           THE SINE TRANSFORMS.                         FFCS0170
C                IWK    - WORK AREA VECTOR. IF N=2**M, THEN THE LENGTH   FFCS0180
C                           OF IWK IS M. OTHERWISE, IWK HAS LENGTH OF    FFCS0190
C                           3(F+N)+26, WHERE F IS THE NUMBER OF PRIME    FFCS0200
C                           FACTORS IN N/2.                              FFCS0210
C   PRECISION           - SINGLE                                         FFCS0220
C   REQD. IMSL ROUTINES - FFRDR2,FFTR,FFTP,FFT2                          FFCS0230
C   LANGUAGE            - FORTRAN                                        FFCS0240
C--------------------------------------------------------------------FFCS0250
```

CALL FFCSIN(X,N,A,B,IWK)

Purpose

FFCSIN computes the sine and cosine transformations of a real data vector X. It is assumed that the length of the data set is even.

Algorithm

Given a set of N(even) data points $X=(x_1,x_2,\ldots,x_N)^t$ where $x_1,x_2,\ldots,x_N$ are real numbers, define the cosine transformation A and the sine transformation B by

$$A_{k+1} = \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1} \cos(2\pi jk/N) \qquad B_{k+1} = \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1} \sin(2\pi jk/N) \text{ for } k=0,1,\ldots,N/2$$

FFCSIN computes the vectors A and B.

See reference: Singleton, Richard C., "On computing the fast Fourier transform", Comm. ACM, 10(10) 1967, 647-654.

Programming Notes

1. Coefficient B(1)=0 and A(1) is 2N times the average of the input data sequence.
2. In dimensioning the work area, IWK, where N is not a power of 2, the number of prime factors (F) in N/2 must be determined, where the factor "1" is disregarded. Thus, if N=36, the prime factors in 18(N/2) are 2,3, and 3; F=3 and IWK has dimension 3(F+N)+26=143. For N=14, F=1 and IWK has dimension 71.

Example

```
DIMENSION X(4),A(3),B(3),IWK(2)
```

Input:
X=(1, -1, 1, -1)
N=4
CALL FFCSIN(X,N,A,B,IWK)

Output:
A=(0.0, 0.0, 8.0)
B=(0.0, 0.0, 0.0)

```
      SUBROUTINE FFRDR2 (A,M,IWK)                                        FFRD0010
C                                                                        FFRD0020
C-FFRDR2----------S----------LIBRARY 3-----------------------------------FFRD0030
C                                                                        FFRD0040
C   FUNCTION              - THIS SUBROUTINE PERMUTES A COMPLEX DATA VECTORFFRD0050
C                           IN REVERSE BINARY ORDER TO NORMAL ORDER. THEFFRD0060
C                           ROUTINE CAN ALSO BE USED TO PERMUTE A COM-   FFRD0070
C                           PLEX DATA VECTOR IN NORMAL ORDER TO REVERSE  FFRD0080
C                           BINARY ORDER SINCE THE PERMUTATION IS SYM-   FFRD0090
C                           METRIC.                                      FFRD0100
C   USAGE                 - CALL FFRDR2(A,M,IWK)                         FFRD0110
C   PARAMETERS    A       - COMPLEX VECTOR OF LENGTH N=2**M WHICH CONTAINSFFRD0120
C                           ON INPUT THE DATA TO BE PERMUTED. ON OUTPUT, FFRD0130
C                           A CONTAINS THE PERMUTED DATA VECTOR.         FFRD0140
C                 M       - N=2**M IS THE NUMBER OF DATA POINTS.       FFRD0150
C                 IWK     - WORK AREA VECTOR OF LENGTH M+1             FFRD0160
C   PRECISION             - SINGLE                                       FFRD0170
C   LANGUAGE              - FORTRAN                                      FFRD0180
C-----------------------------------------------------------------------FFRD0190
```

CALL FFRDR2(A,M,IWK)

Purpose

FFRDR2 permutes a data vector in reverse binary order to normal order, or, it permutes a data vector in normal order to reverse binary order.

Algorithm

The reverse binary order function r(k) is defined as follows:

Let the binary representation of k be $k=d_0+d_1+2+d_2 2^2+\ldots+d_{M-1}2^{M-1}$.

Then $r(k)=d_{M-1}+d_{M-2}2+d_{M-3}2^2+\ldots+d_0 2^{M-1}$. FFRDR2 reorders $\{A_{r(k)+1}\}$, $k=0,\ldots,2^M-1$.

into the order $\{A_{k+1}\}$, $k=0,\ldots,2^M-1$.

Since $r(r(k))=k$, FFRDR2 can also be used to reorder $\{A_{k+1}\}$ $k=0,\ldots,2^M-1$ into the order $\{A_{r(k)+1}\}$, $=0,\ldots,2^M-1$.

```
      SUBROUTINE FFTP  (A,N,IWK,WK,LL)                                  FFTP0010
C                                                                       FFTP0020
C-FFTP----------S--------LIBRARY S--------------------------------------FFTP0030
C                                                                       FFTP0040
C   FUNCTION            - TO COMPUTE THE FAST FOURIER TRANSFORM OF A    FFTP0050
C                         DATA VECTOR.                                  FFTP0060
C   USAGE               - CALL FFTP(A,N,IWK,WK,LL)                      FFTP0070
C   PARAMETERS   A      - COMPLEX VECTOR WHICH CONTAINS ON INPUT THE    FFTP0080
C                         SEQUENCE OF DATA (IN NORMAL ORDER) TO BE      FFTP0090
C                         TRANSFORMED. ON OUTPUT A CONTAINS THE         FFTP0100
C                         FOURIER COEFFICIENTS. A IS N LONG.            FFTP0110
C                N      - N IS THE NUMBER OF DATA POINTS TO BE TRANS-   FFTP0120
C                         FORMED. N MAY BE ANY POSITIVE INTEGER.        FFTP0130
C                IWK    - WORK VECTOR OF LENGTH 3*F + 6*N + 26 WHERE    FFTP0140
C                         F IS THE NUMBER OF PRIME FACTORS IN N.        FFTP0150
C                WK     - SAME WORK VECTOR AS IWK.                      FFTP0160
C                         (SEE PROGRAMMING NOTES)                       FFTP0170
C                LL     - SAME WORK VECTOR AS IWK.                      FFTP0180
C                         (SEE PROGRAMMING NOTES)                       FFTP0190
C   PRECISION           - SINGLE                                        FFTP0200
C   LANGUAGE            - FORTRAN                                       FFTP0210
C-------------------------------------------------------------------    FFTP0220
```

CALL FFTP(A,N,IWK,WK,LL)

Purpose

FFTP computes the fast Fourier transform (FFT) of a complex vector of length N where N is any positive integer. Both input and output vectors are in normal order.

Algoritha

The output vector A(out) is defined mathematically as

$$A(out)_{k+1} = \sum_{j=0}^{N-1} A(in)_{j+1} e^{2\pi ijk/N} \quad \text{where } k=0,\ldots,N-1 \text{ and } i=SQRT(-1)$$

FFTP factors N into its prime factors and applies Cooley-Tukey techniques for each prime factor.

See reference: Singleton, Richard C., "On computing the fast Fourier transform", Comm. ACM, 10(10) 1967, 647-654

Programming Notes

1. Both input and output coefficients are given and computed in normal (natural) order.
2. In the calling sequence, the user may repeat the work area IWK three times. In the subroutine itself the calling sequence is coded as (A,N,IWK,WK,LL) since integer values and logical values are stored in the work area as well as real values.
3. In dimensioning the work area, IWK, the number of prime factors (F) in N must be determined, where the factor "1" is disregarded. Thus, if N=36, the prime factors are 2,2,3, and 3; F=4 and IWK has dimension 3F+6N+26=254. For N=7, F=1 and IWK has dimension 71.

Accuracy

IMSL has tested FFTP for N=1,2,3,4,5,8,30,77, and 128. For most of these values of N, multiple test cases were run. In each test case the coefficients of A(in) were on the unit circle. In all cases, the single precision version of FFTP produced absolute errors in the range 10^{-15} to 10^{-13} with some errors exactly equal to zero.

```
      SUBROUTINE FFTR   (A,GAMN,N,IWK)                                  FFTR0010
C                                                                       FFTR0020
C-FFTR----------S---------LIBRARY 3-------------------------------------FFTR0030
C                                                                       FFTR0040
C    FUNCTION              - TO COMPUTE THE FAST FOURIER TRANSFORM OF A  FFTR0050
C                            REAL DATA SEQUENCE.                        FFTR0060
C    USAGE                 - CALL FFTR(A,GAMN,N,IWK)                    FFTR0070
C    PARAMETERS   A        - REAL VECTOR OF LENGTH N WHICH, ON INPUT,   FFTR0080
C                            CONTAINS THE DATA TO BE TRANSFORMED. ON    FFTR0090
C                            OUTPUT, THE FIRST N/2 COMPLEX FOURIER COEF-FFTR0100
C                            FICIENTS ARE STORED IN THE N LOCATIONS OF  FFTR0110
C                            A. THE (N/2+1)TH FOURIER COEFFICIENT IS    FFTR0120
C                            CONTAINED IN GAMN (DESCRIBED BELOW). THE   FFTR0130
C                            REMAINING COEFFICIENTS MAY BE DETERMINED BY FFTR0140
C                              A(N+2-I)=COMPLEX CONJUGATE OF A(I)       FFTR0150
C                            FOR I = 2,3,4,...,N/2.                     FFTR0160
C                 GAMN     - COMPLEX VARIABLE WHICH, ON OUTPUT, CONTAINS FFTR0170
C                            THE (N/2+1)TH FOURIER COEFFICIENT.         FFTR0180
C                 N        - LENGTH OF DATA VECTOR A. N MUST BE A       FFTR0190
C                            POSITIVE EVEN INTEGER.                     FFTR0200
C                 IWK      - WORK STORAGE. IF N IS ANY INTEGRAL POWER OF 2,FFTR0210
C                            SAY N=2**M, THEN IWK MUST HAVE LENGTH M. IF FFTR0220
C                            N IS NOT A POWER OF 2, THEN IWK MUST HAVE  FFTR0230
C                            LENGTH 3(F+N)+26, WHERE F IS THE NUMBER OF FFTR0240
C                            PRIME FACTORS IN N/2.                      FFTR0250
C    PRECISION             - SINGLE                                     FFTR0260
C    REQD. IMSL ROUTINES   - FFRDR2,FFTP,FFT2                           FFTR0270
C    LANGUAGE              - FORTRAN                                    FFTR0280
C-------------------------------------------------------------------------FFTR0290
```

CALL FFTR(A,GAMN,N,IWK)

Purpose

FFTR computes the fast Fourier transform (FFT) of a real vector of length N where N is any positive even integer. Both input and output are in normal order.

Algorithm

The output vector A(out) is defined mathematically as

$$A(out)_{k+1} = \sum_{j=0}^{N-1} A(in)_{j+1} e^{2\pi ijk/N} \qquad \text{where } k=0,\ldots,N-1 \text{ and } i=SQRT(-1)$$

FFTR factors N into its prime factors and applies Cooley-Tukey techniques for each prime factor.

See reference: Singleton, Richard C., "On computing the fast Fourier transform", Comm. ACM, 10(10) 1967, 647-654.

Programming Notes

1. On input A is real. On output A is complex. Thus on output A(1) contains the real part of the first coefficient and A(2) contains the imaginary part. In order to avoid the differences in subscripting, the user might program, for instance

```
DIMENSION     IWK(335),A(100),C(50)
INTEGER       IWK
COMPLEX       C,GAMN
EQUIVALENCE   (A,C)
N=100
.
.
.
CALL FFTR(A,GAMN,N,IWK)
```

2. In dimensioning the work area, IWK, where N is not a power of 2, the number of prime factors (F) in N/2 must be determined, where the factor "1" is disregarded. Thus, if N=36, the prime factors in 18(N/2) are 2,3, and 3; F=3 and IWK has dimension 3(F+N)+26=143. For N=14, F=1 and IWK has dimension 71.

Accuracy

IMSL has tested FFTR for N=2,4,8,30,128, and 154. For most of these values of N, multiple tests were run. In each case the coefficients of A(in) were in the unit interval. In all cases, FFTR produced absolute errors in the range 10^{-16} to 10^{-14} with some errors exactly equal to zero.

```
      SUBROUTINE FFT2   (A,M,IWK)                                          FFT20010
C                                                                          FFT20020
C-FFT2----------3---------LIBRARY 3-------------------------------------------FFT20030
C                                                                          FFT20040
C   FUNCTION              - COMPUTE THE FAST FOURIER TRANSFORM. GIVEN A    FFT20050
C                           COMPLEX VECTOR OF LENGTH EQUAL TO A POWER      FFT20060
C                           OF TWO                                         FFT20070
C   USAGE                 - CALL FFT2(A,M,IWK)                             FFT20080
C   PARAMETERS    A       - COMPLEX VECTOR OF LENGTH N=2**M WHICH CONTAINS FFT20090
C                           ON INPUT THE DATA TO BE TRANSFORMED (ASSUMED FFT20100
C                           TO BE IN NORMAL ORDER). ON OUTPUT. A CON-      FFT20110
C                           TAINS THE FOURIER COEFFICIENTS STORED IN       FFT20120
C                           REVERSE BINARY ORDER.                          FFT20130
C                 M       - N = 2**M IS THE NUMBER OF DATA POINTS.         FFT20140
C                 IWK     - WORK AREA VECTOR OF LENGTH M+1.                FFT20150
C   PRECISION             - SINGLE                                         FFT20160
C   LANGUAGE              - FORTRAN                                        FFT20170
C-----------------------------------------------------------------------------FFT20180
```

CALL FFT2(A,M,IWK)

Purpose

FFT2 computes the fast Fourier transform (FFT) of a complex vector of length equal to a power of two. The coefficients of the input vector A are in normal order. The coefficients of the output transformed vector overwrite the input coefficients and are stored in reverse binary order.

Algorithm

The output vector A(out) is defined mathematically as $A(out)_{\ell+1} = \sum_{j=0}^{n-1} A(in)_{j+1} e^{2\pi ijk/n}$

where $k=0,1,\ldots,n-1$; $n=2^M$; $i=SQRT(-1)$; $\ell=r(k)$

The function r(k) denotes reverse binary order. Let the binary representation of k be

$k=d_0+d_1 2+d_2 2^2+\ldots+d_{M-1}2^{M-1}$, then $r(k)\equiv d_{M-1}+d_{M-2}2+d_{M-3}2^2+\ldots+d_0 2^{M-1}$.

Computationally, the above summation which defines A(out) requires n^2 complex multiplications and additions. FFT2 utilizes a modification of the Singleton version of the Cooley-Tukey FFT algorithm. This algorithm requires only $n \log_2 n$ basic sets of operations.

See reference: Singleton, Richard C., "On computing the fast Fourier transform", Comm. ACM, 10(10)1967, 647-654.

Programming Notes

FFT2 can be used to compute the inverse Fourier transform $A(out)_{\ell+1} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} A(in)_{j+1} e^{-2\pi ijk/n}$

by performing the following four steps:

a. Conjugate A(in); i.e., $A^*(in)=Re(A(in))-iIm(A(in))$
b. Call FFT2 using $A^*(in)$ as the input vector
c. Conjugate the output vector from FFT2
d. Divide each element of the conjugated output vector by n, the length of the vector (i.e., the number of data points)

Accuracy

Let A=(0.0, 1.0, $\underbrace{0.0, \ldots, 0.0}_{126 \text{ times}}$)

FFT2 will produce results with absolute error in the range 10^{-15} to 10^{-13} uniformly.

Example

A=(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
M=3

Output:

A=(1.0, -1.0, i, -i, 0.70711 + 0.70711i, -0.70711 - 0.70711i, -0.70711 + 0.70711i, 0.70711 - 0.70711i)

```
      SUBROUTINE FFT2RV (A,M,IWK)                                        FF2R0010
C                                                                        FF2R0020
C-FFT2RV----------S--------LIBRARY 3-------------------------------------FF2R0030
C                                                                        FF2R0040
C    FUNCTION              - COMPUTE THE FAST FOURIER TRANSFORM, GIVEN A  FF2R0050
C                            COMPLEX VECTOR OF LENGTH EQUAL TO A POWER   FF2R0060
C                            OF TWO (DATA IN REVERSE BINARY ORDER)       FF2R0070
C    USAGE                 - CALL FFT2RV(A,M,IWK)                        FF2R0080
C    PARAMETERS    A       - COMPLEX VECTOR OF LENGTH N=2**M WHICH CONTAINSFF2R0090
C                            ON INPUT THE DATA TO BE TRANSFORMED (ASSUMEDFF2R0100
C                            TO BE IN REVERSE BINARY ORDER). ON OUTPUT,  FF2R0110
C                            A CONTAINS THE FOURIER COEFFICIENTS STORED  FF2R0120
C                            IN NORMAL ORDER.                            FF2R0130
C                  M       - N = 2**M IS THE NUMBER OF DATA POINTS.      FF2R0140
C                  IWK     - WORK AREA VECTOR OF LENGTH M+1              FF2R0150
C    PRECISION             - SINGLE                                      FF2R0160
C    LANGUAGE              - FORTRAN                                     FF2R0170
C-----------------------------------------------------------------------FF2R0180
```

CALL FFT2RV(A,M,IWK)

Purpose

FFT2RV computes the Fast Fourier Transform (FFT) of a complex vector of length equal to a power of two. The coefficients of the input vector A are in reverse binary order. The coefficients of the output transformed vector overwrite the input coefficients and are stored in normal order.

Algorithm

The output vector A(out) is defined mathematically as

$$A(out)_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} A(in)_{r(j)+1} e^{2\pi ijk/n} \quad \text{where } k=0,1,\ldots,n-1;\ n=2^M \text{ and } i=SQRT(-1).$$

The function r(j) denotes reverse binary order. Let the binary representation of j be

$j=d_0+d_1 2^2+\ldots+d_{M-1}2^{M-1}$; then $r(j)=d_{M-1}+d_{M-2}2+d_{M-3}2^2+\ldots+d_0 2^{M-1}$

Computationally, the above summation which defines A(out) requires n^2 complex multiplications and additions. FFT2RV utilizes a modification of the Singleton version of the Cooley-Tukey FFT algorithm. This algorithm requires only $n \log_2 n$ basic sets of operations.

See reference: Singleton, Richard C., "On computing the fast Fourier transform", Comm. ACM, 10(10) 1967, 647-654.

Programming Notes

1. FFT2RV can be used to compute the inverse Fourier transform

$$A(out)_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} A(in)_{r(j)+1} e^{-2\pi ijk/n}$$

by performing the following four steps:

a. Conjugate A(in); i.e., A*(in)=RE(A(in))-iIm(A(in))
b. Call FFT2RV using A*(in) as the input vector
c. Conjugate the output vector from FFT2RV
d. Divide by n, the length of the vector (i.e., the number of data points)

Accuracy

Let A=($\underbrace{0,0,\ldots,0}_{64\text{ times}}$, 1, $\underbrace{0,0,\ldots,0}_{63\text{ times}}$)

FFT2RV will produce results with absolute error in the range 10^{-15} to 10^{-13} uniformly.

Example

Input:

A=(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)
M=3

Output:

A=(1.0, 0.70711 + 0.70711i, i, -0.70711 + 0.70711i, -1.0, -0.70711 - 0.70711i, -i, 0.70711 - 0.70711i)