

CALCUL D'UNE MAREE SINUSOIDALE SIMPLE SE PROPAGEANT DANS DEUX DIMENSIONS

par

H. HOLSTERS

Ingénieur des constructions civiles

1. — Introduction

La présente méthode de calcul a été établie afin de pouvoir répondre à la question suivante : quelle influence les travaux du plan Delta, consistant en la fermeture de certains bras de mer, auront-ils sur le régime de la marée moyenne dans l'embouchure de l'Escaut Occidental ?

Dans un problème de ce genre on peut admettre que la marée ne change pratiquement pas le long d'une courbe suffisamment éloignée de la source des perturbations. On peut donc répondre à la question si on parvient à calculer la marée à l'intérieur de la zone ainsi délimitée en fonction de la marée le long de la courbe limite.

Un calcul de marée peut être conçu de deux façons différentes.

Dans la première conception on part des conditions initiales et on calcule pas à pas des situations subséquentes. A cette fin on utilise des relations aux différences finies provenant de certaines relations différentielles, exprimant les dérivées partielles par rapport au temps en fonction des dérivées partielles par rapport aux dimensions spatiales. Une telle méthode devra être utilisée quand la marée dépend de forces extérieures non périodiques.

Dans la seconde conception, la seule qui sera examinée dans cette étude, on considère la marée comme

un phénomène purement périodique, à une seule composante sinusoïdale, qui dans le cas de la Mer du Nord sera la marée semi-diurne lunaire M_2 .

Quand il s'agit, comme dans le problème du plan Delta, de déterminer l'influence d'une modification de la forme du bassin maritime sur le régime de la marée, un seul calcul ne suffit pas. En effet les relations hydrodynamiques simplifiées sur lesquelles on devra se baser ne sont pas suffisamment exactes pour permettre de tirer des conclusions valables de la comparaison entre une situation future calculée et une situation existante observée.

Les calculs doivent donc se faire en deux phases. Dans la première on essaie d'obtenir un modèle mathématique se rapprochant suffisamment de la situation existante. Dans la seconde on refait les calculs en tenant compte des modifications dont on veut estimer l'influence. La comparaison des deux régimes calculés permettra alors de tirer des conclusions valables concernant le comportement de la marée réelle.

Notons qu'il existe des méthodes permettant d'effectuer les calculs de première phase, par exemple celle de PROUDMAN et DOODSON (*The Principal Constituents of the Tides of the North Sea — Philosophical Transactions of the Royal Society of London — 1924*) et celle de HANSEN (*Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmond tide M_2 in der Nordsee — Deutsche Hydrographische Zeitschrift — 1952*). Mais ces méthodes impliquent la connaissance des courants maritimes à l'intérieur de la région considérée. Or dans les

calculs de seconde phase ces vitesses ne sont plus les mêmes : au lieu d'être des données elles deviennent plutôt des inconnues à déterminer.

C'est pour cette raison que nous essaierons dans les pages qui suivent d'établir une méthode n'utilisant comme donnée que la marée le long du périmètre maritime. Nous nous limiterons à l'aspect théorique du problème. Les calculs numériques, qui rentrent dans le cadre des travaux de la Commission du Plan Delta du Département des Travaux publics, feront l'objet de publications ultérieures.

2. — Relations différentielles

2.1 Equations de mouvement.

2.1.1 En un point quelconque de la mer la marée se manifeste sous forme d'une variation périodique du niveau d'eau, accompagnée d'une variation périodique de la vitesse en grandeur et en direction, cette vitesse étant en outre variable le long de la verticale du point considéré. Ces variations comprennent une série de composantes sinusoïdales.

Dans les calculs nous considérons une marée simplifiée dont les éléments sont :

ζ_r : variation sinusoïdale simple du niveau d'eau par rapport au niveau moyen, censé être le même pour tous les points de la région étudiée;

u_r et v_r : composantes sinusoïdales simples de la vitesse moyenne, prises suivant les axes d'un système de coordonnées cartésiennes x , y .

La fonction ζ_r représente la marée *verticale*; u_r et v_r sont les composantes de la marée *horizontale*.

Soit σ la vitesse angulaire; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\zeta_r &= \zeta_1 \cos \sigma t + \zeta_2 \sin \sigma t \\ u_r &= u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t \\ v_r &= v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t\end{aligned}\quad 2.1.1.a$$

où ζ_1 , ζ_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 sont des fonctions des coordonnées spatiales x et y .

On peut vérifier que ζ_r , u_r et v_r sont les parties réelles des fonctions complexes :

$$\begin{aligned}\zeta &= (\zeta_1 + i \zeta_2) e^{-i\sigma t} \\ u &= (u_1 + i u_2) e^{-i\sigma t} \\ v &= (v_1 + i v_2) e^{-i\sigma t}\end{aligned}\quad 2.1.1.b$$

ou de leurs conjuguées :

$$\begin{aligned}\bar{\zeta} &= (\zeta_1 - i \zeta_2) e^{i\sigma t} \\ \bar{u} &= (u_1 - i u_2) e^{i\sigma t} \\ \bar{v} &= (v_1 - i v_2) e^{i\sigma t}\end{aligned}\quad 2.1.1.c$$

2.1.2 Pour écrire les équations de mouvement à partir des équations hydrodynamiques nous faisons les simplifications usuelles. Nous négligeons la force de Bernoulli ainsi que la force centrifuge. Nous introduisons un frottement linéaire de composantes $-\rho u_r$ et $-\rho v_r$. Nous négligeons les forces astronomiques. Enfin de la force de Coriolis nous ne retenons que les composantes horizontales αv_r et $-\alpha u_r$ où

$$\alpha = 2 \omega \sin \varphi \quad 2.1.2.a$$

φ étant la latitude et ω la vitesse angulaire de la rotation terrestre; nous supposons α constant (quoiqu'il ne serait pas difficile d'établir des formules tenant compte de la variabilité de α).

En tenant compte de ces simplifications nous trouvons les formules classiques :

$$\begin{aligned}g \frac{\partial \zeta_r}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho u_r - \alpha v_r &= 0 \\ g \frac{\partial \zeta_r}{\partial y} + \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r + \alpha u_r &= 0 \\ \frac{\partial \zeta_r}{\partial t} + \frac{\partial h u_r}{\partial x} + \frac{\partial h v_r}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad 2.1.2.b$$

où g est l'accélération de la pesanteur et h la profondeur sous le niveau moyen.

Si nous remplaçons ζ_r , u_r et v_r par les fonctions complexes nous trouvons :

$$\begin{aligned}g \zeta_x + (\rho - i \sigma) u - \alpha v &= 0 \\ g \zeta_y + (\rho - i \sigma) v + \alpha u &= 0 \\ -\sigma i \zeta + (h u)_x + (h v)_y &= 0\end{aligned}\quad 2.1.2.c$$

et

$$\begin{aligned}g \bar{\zeta}_x + (\rho + i \sigma) \bar{u} - \alpha \bar{v} &= 0 \\ g \bar{\zeta}_y + (\rho + i \sigma) \bar{v} + \alpha \bar{u} &= 0 \\ \sigma i \bar{\zeta} + (h \bar{u})_x + (h \bar{v})_y &= 0\end{aligned}\quad 2.1.2.d$$

où les indices x et y remplacent les notations $\frac{\partial}{\partial x}$
et $\frac{\partial}{\partial y}$.

Les systèmes 2.1.2.b, 2.1.2.c et 2.1.2.d sont équivalents en ce sens que si ζ , u et v ou $\bar{\zeta}$, \bar{u} et \bar{v} satisfont à 2.1.2.c ou à 2.1.2.d, leurs parties réelles ζ_r , u_r et v_r satisfont à 2.1.2.b.

2.1.3 Les systèmes d'équations du paragraphe précédent présentent l'inconvénient que chacune des trois fonctions figure dans chacune des trois équations. Par un processus indiqué au § 5.1 on peut leur donner la forme suivante, plus adaptable aux calculs numériques :

$$\begin{aligned} \nabla \zeta + \left(\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) \frac{\sigma i \zeta}{gh} + \\ + \left(1 + \frac{\rho}{\rho - i\sigma} \frac{(\rho - i\sigma)^2 - \alpha^2}{(\rho - i\sigma)^2 + \alpha^2} \right) \left(\frac{h_x}{h} \zeta_x + \frac{h_y}{h} \zeta_y \right) + \dots \\ + \left(\frac{\alpha}{\rho - i\sigma} + \frac{2\alpha\rho}{(\rho - i\sigma)^2 + \alpha^2} \right) \left(\frac{h_x}{h} \zeta_y - \frac{h_y}{h} \zeta_x \right) = 0 \end{aligned} \quad 2.1.3.a$$

$$u = - \frac{g}{(\rho - i\sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho - i\sigma) \zeta_x + \alpha \zeta_y] \quad 2.1.3.b$$

$$v = - \frac{g}{(\rho - i\sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho - i\sigma) \zeta_y - \alpha \zeta_x] \quad 2.1.3.c$$

ou bien, en fonction des conjuguées :

$$\begin{aligned} \nabla \bar{\zeta} - \left(\rho + i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho + i\sigma} \right) \frac{\sigma i \bar{\zeta}}{gh} + \\ + \left(1 + \frac{\rho}{\rho + i\sigma} \frac{(\rho + i\sigma)^2 - \alpha^2}{(\rho + i\sigma)^2 + \alpha^2} \right) \left(\frac{h_x}{h} \bar{\zeta}_x + \frac{h_y}{h} \bar{\zeta}_y \right) + \dots \\ + \left(\frac{\alpha}{\rho + i\sigma} + \frac{2\alpha\rho}{(\rho + i\sigma)^2 + \alpha^2} \right) \left(\frac{h_x}{h} \bar{\zeta}_y - \frac{h_y}{h} \bar{\zeta}_x \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad 2.1.3.d$$

$$\bar{u} = - \frac{g}{(\rho + i\sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho + i\sigma) \bar{\zeta}_x + \alpha \bar{\zeta}_y] \quad 2.1.3.e$$

$$\bar{v} = - \frac{g}{(\rho + i\sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho + i\sigma) \bar{\zeta}_y - \alpha \bar{\zeta}_x] \quad 2.1.3.f$$

Si on néglige dans l'équation 2.1.3.a les termes dont le dénominateur contient $(\rho - i\sigma)^2 + \alpha^2$, on retrouve la formule de base de la méthode de Hansen :

$$\begin{aligned} \nabla \zeta + \left(\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) \frac{\sigma i \zeta}{gh} \\ + \left(\frac{h_x}{h} - \frac{\alpha}{\rho - i\sigma} \frac{h_y}{h} \right) \zeta_x + \left(\frac{h_y}{h} + \frac{\alpha}{\rho - i\sigma} \frac{h_x}{h} \right) \zeta_y = 0 \end{aligned}$$

2.2 Calcul du coefficient de frottement.

2.2.1 D'après la formule de Chezy le frottement est proportionnel au carré de la vitesse. Soit $w_r = \sqrt{u_r^2 + v_r^2}$ la vitesse réelle en un point quelconque. Les composantes de la force de frottement sont alors

$$- \frac{w_r}{C^2 h} \cdot u_r \cdot g \quad \text{et} \quad - \frac{w_r}{C^2 h} \cdot v_r \cdot g.$$

Pour rendre ces composantes linéaires en u_r et v_r il faut remplacer la vitesse variable w_r par une vitesse constante w convenablement choisie, et on aura comme composantes $-\rho u_r$ et $-\rho v_r$ en posant :

$$\rho = \frac{w g}{C^2 h} \quad 2.2.1.a$$

On peut choisir w de différentes façons. Le choix le plus rationnel nous paraît celui qui correspond à la linéarisation selon Lorenz. On prend pour w une valeur telle que le travail total (pendant une marée complète) du frottement linéaire est égal au travail total du frottement quadratique.

A cette hypothèse correspond la relation suivante, où $T = 12^h 25^{min}$ est la période de la marée :

$$w = \frac{\int_0^T w_r^3 dt}{\int_0^T w_r^2 dt} \quad 2.2.1.b$$

En appliquant les formules a, b et c du paragraphe 2.1.1 on trouve pour w_r l'expression suivante :

$$w_r = \left(\frac{\overline{u\overline{u}} + \overline{v\overline{v}}}{2} \right)^{0,5} \cdot [(1 + k \cos (2 \sigma t - 2 \varphi))]^{0,5} \quad 2.2.1.c$$

$$\text{avec } k = \left[1 + \left(\frac{\overline{u\overline{v}} - \overline{v\overline{u}}}{\overline{u\overline{u}} + \overline{v\overline{v}}} \right)^2 \right]^{0,5} \quad 2.2.1.d$$

$$\text{et } \operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{2 (u_1 u_2 + v_1 v_2)}{u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2} \quad 2.2.1.e$$

Si nous introduisons cette valeur de w_r dans la relation 2.2.1.b, nous trouvons après quelques calculs :

$$w = \left(\frac{\overline{u\overline{u}} + \overline{v\overline{v}}}{2} \right)^{0,5} \cdot \Psi(k) \quad 2.2.1.f$$

avec

$$\Psi(k) = 1 + \frac{3}{16} k^2 + \frac{9}{1024} k^4 + \frac{35}{16384} k^6 + \dots \quad 2.2.1.g$$

Remarquons encore que les formules b, c, e et f du paragraphe 2.1.3 permettent d'exprimer les vitesses en fonction des ζ , et nous trouverons finalement, en tenant compte de la relation 2.2.1.a :

$$\rho = g^2 \cdot \mu^{0,5} \cdot (1 + \mu v)^{0,5} \cdot (2 C^2 h)^{-1} \cdot (\alpha \sigma)^{-0,5} \cdot (1 - \mu^2)^{-0,5} \cdot (\zeta_x \overline{\zeta_x} + \zeta_y \overline{\zeta_y})^{0,5} \cdot \Psi(k) \quad 2.2.1.h$$

$$\text{où } \mu = 2 \alpha \sigma / (\rho^2 + \sigma^2 + \alpha^2) \quad 2.2.1.i$$

$$v = -i (\zeta_x \overline{\zeta_y} - \zeta_y \overline{\zeta_x}) / (\zeta_x \overline{\zeta_x} + \zeta_y \overline{\zeta_y}) \quad 2.2.1.j$$

$$\text{et } k^2 = (1 - \mu^2) (1 - v^2) / (1 + \mu v)^2 \quad 2.2.1.k$$

Au paragraphe 5.2 nous donnerons quelques indications supplémentaires concernant l'établissement des formules précédentes.

2.2.2 Dans le cas général la résolution de 2.2.1.h, qui est une équation en ρ de la forme $\rho = f(\rho)$ se fait par la méthode d'itération.

Dans certains cas particuliers cette relation se simplifie, par exemple quand une des vitesses u ou v est nulle. Pour $v = 0$ on trouve :

$$\rho^2 = [-0,50 + (0,25 + 64 g^4 \zeta_x \overline{\zeta_x} / (9 \pi^2 \sigma^4 C^4 h^2))^{0,5}] \cdot \sigma^2 \quad 2.2.2.a$$

La formule pour $u = 0$ s'obtient en remplaçant $\zeta_x \overline{\zeta_x}$ par $\zeta_y \overline{\zeta_y}$ dans 2.2.2.a.

2.3 Eléments de l'ellipse des vitesses.

2.3.1 Soit dans un point 0, OP le vecteur représentant la vitesse locale. Si on transfère l'origine des coordonnées au point 0 les coordonnées de P deviennent :

$$x = u_r \quad y = v_r$$

Les composantes u_r et v_r étant données par 2.1.1.a, on obtient :

$$x = u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t,$$

$$y = v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t.$$

Eliminons $\cos \sigma t$ et $\sin \sigma t$; il vient :

$$(v_1^2 + v_2^2) x^2 - 2 (u_1 v_1 + u_2 v_2) xy + (u_1^2 + u_2^2) y^2 = (u_2 v_1 - u_1 v_2)^2$$

soit, avec les fonctions complexes :

$$\overline{v\overline{v}} \cdot x^2 + \overline{u\overline{u}} \cdot y^2 - (\overline{u\overline{v}} + \overline{v\overline{u}}) x y + \left(\frac{\overline{u\overline{v}} - \overline{v\overline{u}}}{2} \right)^2 = 0$$

ce qui est l'équation d'une ellipse.

Le point P, extrémité mobile du vecteur vitesse, décrit donc une ellipse.

2.3.2 L'angle φ' entre le grand axe de cette ellipse et l'axe des x se trouve par la relation :

$$\varphi' = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\overline{u\overline{v}} + \overline{v\overline{u}}}{\overline{u\overline{u}} - \overline{v\overline{v}}} \quad 2.3.2.a$$

Si nous exprimons les vitesses en fonction de ζ cette relation devient :

$$\varphi' = -\frac{1}{2} \arctg \frac{2 \alpha \rho}{\rho^2 + \sigma^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\zeta_x \bar{\zeta}_y + \bar{\zeta}_x \zeta_y}{\zeta_x \bar{\zeta}_x - \zeta_y \bar{\zeta}_y} \quad 2.3.2.b$$

Le second membre de cette relation est donc la somme de deux angles. Le premier, toujours compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dépend du frottement ρ ; il est nul pour $\rho = 0$ et pour $\rho = \infty$; il passe par un minimum pour $\rho^2 = \sigma^2 - \alpha^2$ et vaut alors $-\frac{1}{2} \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma^2 - \alpha^2}}$.

Le second de ces angles dépend uniquement de ζ ; il donne la direction du grand axe de l'ellipse des pentes, ellipse qui est formée par un vecteur ayant comme composantes $\partial \zeta_r / \partial x$ et $\partial \zeta_r / \partial y$.

2.3.3 Représentons par w_{\max} et w_{\min} les vitesses extrêmes, c'est-à-dire les demi-axes de l'ellipse des vitesses. On déduit immédiatement de la relation 2.2.1.c les formules suivantes :

$$w_{\max} = \left(\frac{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}}{2} \right)^{0,5} \cdot (1+k)^{0,5},$$

$$w_{\min} = \left(\frac{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}}{2} \right)^{0,5} \cdot (1-k)^{0,5}.$$

En tenant compte de 2.2.1.f ces relations deviennent :

$$w_{\max} = w \frac{(1+k)^{0,5}}{\Psi(k)} \quad 2.3.3.a$$

$$w_{\min} = w \frac{(1-k)^{0,5}}{\Psi(k)} \quad 2.3.3.b$$

et par division on obtient pour le rapport des vitesses extrêmes :

$$\frac{w_{\max}}{w_{\min}} = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^{0,5} \quad 2.3.3.c$$

2.3.4. L'heure de vitesse maximum se déduit aisément de la formule 2.2.1.c; on a en effet $\sigma t_{\max} = \varphi$ d'où en vertu de 2.2.1.e :

$$t_{\max} = \frac{1}{2\sigma} \arctg \frac{2(u_1 u_2 + v_1 v_2)}{u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2} \quad 2.3.4.a$$

En introduisant la fonction ζ on trouve :

$$t_{\max} = -\frac{1}{2\sigma} \arctg \frac{2\rho\sigma}{\sigma^2 - \rho^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2\sigma} \arctg \frac{2(\zeta_{1x}\zeta_{2x} + \zeta_{1y}\zeta_{2y})}{\zeta_{1x}^2 + \zeta_{1y}^2 - \zeta_{2x}^2 - \zeta_{2y}^2} \quad 2.3.4.b$$

Le second membre de cette relation comprend deux angles; le premier varie entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$ quand ρ varie entre 0 et ∞ ; le second donne l'heure de pente maximum.

2.3.5 Examinons encore le sens de rotation du vecteur vitesse. L'angle α entre ce vecteur et le demi-axe positif des x est donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = v_r / u_r$$

où v_r et u_r sont variables avec le temps.

Le sens de rotation dépendra du signe de la dérivée de $\operatorname{tg} \alpha$.

Si cette dérivée est négative le sens de rotation sera positif suivant la convention mathématique usuelle (sens inverse à celui des aiguilles d'une montre).

En développant les formules on trouve que le signe de la rotation est le même que celui de l'expression :

$$-\mu - \nu = -\frac{2\alpha\sigma}{\rho^2 + \sigma^2 + \alpha^2} + i \frac{\zeta_x \bar{\zeta}_y - \zeta_y \bar{\zeta}_x}{\zeta_x \bar{\zeta}_x + \zeta_y \bar{\zeta}_y} \quad 2.3.5.a$$

Le second membre de cette relation contient deux termes. Le premier, dépendant de ρ , tend toujours à rendre négatif le sens de rotation du vecteur vitesse. Le second donne le sens de rotation du vecteur pente.

2.4 Remarques.

2.4.1 Dans les formules 2.3.2.a, 2.3.2.b, 2.3.4.a et 2.3.4.b les angles déterminés par la fonction arctg se situent dans les différents quadrants I ($0^\circ - 90^\circ$), II ($90^\circ - 180^\circ$), III ($180^\circ - 270^\circ$) et IV ($270^\circ - 360^\circ$) suivant la règle :

numérateur de l'argument	:	+	+	-	-
dénominateur de l'argument	:	+	-	-	+
quadrant	:	I	II	III	IV

2.4.2 La direction de la vitesse minimum est perpendiculaire à celle de la vitesse maximum; la vitesse minimum se présente un quart de période avant ou après la vitesse maximum.

La vitesse maximum de *flot* est cette vitesse maximum qui se présente un quart de période ou moins avant la marée haute, ou bien moins d'un quart d'heure après.

2.5 Conclusion.

Les relations établies dans les paragraphes précédents donnent la solution mathématique du problème.

En effet l'intégration de 2.1.3.a où ζ est la seule fonction inconnue — ρ étant une fonction implicite de ζ — permet de trouver la marée verticale. Une fois ζ déterminée les relations telles que 2.1.3.b et 2.1.3.c nous donnent les vitesses u et v . Finalement les relations établies au paragraphe précédent permettent le calcul des éléments intéressants des ellipses des vitesses.

Toutefois il ne s'agit là que d'une solution théorique; l'intégration de 2.1.3.a est pratiquement impossible dans le cas général. Pour effectuer les calculs numériques nous serons obligés de remplacer les relations différentielles établies plus haut par des relations aux différences finies.

3. — Relations aux différences finies

3.1 Afin de pouvoir remplacer les différentielles par des différences finies nous couvrons la zone maritime qui nous intéresse par un réseau orthogonal. La figure 1 représente un tel réseau.

Il est obtenu en traçant des parallèles aux axes d'entredistance L . La ligne I-II-...-XIII est le périmètre maritime; la ligne 1-10-...-XIII représente la côte.

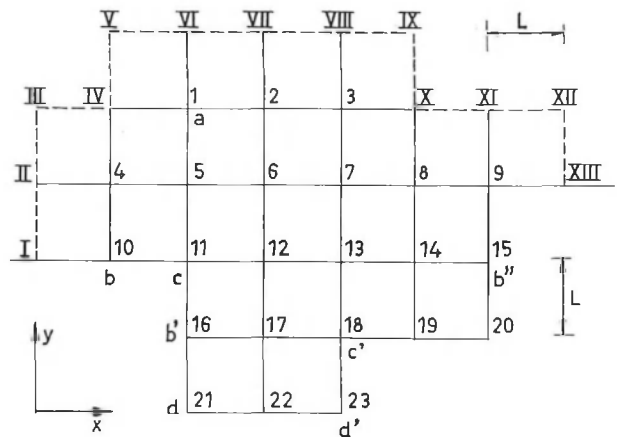


Fig. 1.

En dehors des nœuds ou points normaux tels que a il existe des nœuds ou points spéciaux appartenant à une des catégories b , c ou d . Les nœuds tels que b' , b'' , c' , etc. peuvent se ramener aux cas-type par une rotation convenable des axes des coordonnées.

Notons que parfois il est opportun de représenter la côte par un polygone moins simple que la ligne à gradins représentée à la figure 1. Des formules à utiliser dans ce cas peuvent être établies sans trop de difficultés, mais dans la présente étude nous nous en tiendrons aux cas a , b , c et d de la figure 1.

Remarquons également qu'il n'y a pas d'inconvénient à réduire la longueur de maille localement dans certaines parties du réseau qui nous intéressent particulièrement. La méthode la plus simple est de réduire progressivement en divisant L par 2, par 4, et ainsi de suite.

3.2 Examinons d'abord le nœud normal a .

Pour localiser les quatre points voisins de a , nous leur attribuons les indices w (ouest), n (nord), e (est) et s (sud). Nous pouvons alors représenter les dérivées d'une fonction quelconque z au point a par les formules suivantes, qui seront d'autant plus exactes que la maille L sera plus petite (notons qu'il s'agit d'indices et non d'exposants) :

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^e - z^w}{2L}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^n - z^s}{2L}$$

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z^w + z^n + z^e + z^s - 4z}{L^2}$$

Appliquons maintenant les formules 2.1.3.a, b et c et 2.2.1.h au point a, en remplaçant les différentielles par les différences finies, et en adoptant les notations suivantes :

$$W = \zeta^w - \zeta^e ; \quad N = \zeta^n - \zeta^s ; \quad \theta = \frac{\rho}{\sigma} ;$$

$$\tau = \frac{\alpha}{\sigma}$$

$$\underline{W} = \frac{h^w - h^e}{16 h} ; \quad \underline{N} = \frac{h^n - h^s}{16 h}$$

Il vient alors après quelques transformations :

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\zeta^w + \zeta^n + \zeta^e + \zeta^s}{4} \\ &= \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) \frac{i \sigma^2 L^2}{4 g h} \zeta \\ &+ \left(1 + \frac{\theta}{\theta - i} \frac{(\theta - i)^2 - \tau^2}{(\theta - i)^2 + \tau^2} \right) (\underline{W}\underline{W} + \underline{N}\underline{N}) + \dots \\ &\left(\frac{\tau}{\theta - i} + \frac{2 \tau \theta}{(\theta - i)^2 + \tau^2} \right) (\underline{W}\underline{N} - \underline{N}\underline{W}) \end{aligned} \quad 3.2.a$$

$$u = - \frac{g}{2 \sigma L} \frac{1}{(\theta - i)^2 + \tau^2} [- (\theta - i) \underline{W} + \tau \underline{N}] \quad 3.2.b$$

$$v = - \frac{g}{2 \sigma L} \frac{1}{(\theta - i)^2 + \tau^2} [(\theta - i) \underline{N} + \tau \underline{W}] \quad 3.2.c$$

$$\begin{aligned} \theta &= g^2 \cdot \mu^{0,5} \cdot (1 + \mu \nu)^{0,5} \cdot (4 L \sigma^2 C^2 h)^{-1} \cdot \tau^{-0,5} \cdot \\ &\cdot (1 - \mu^2)^{-0,5} \cdot (\underline{W}\underline{W} + \underline{N}\underline{N})^{0,5} \cdot \Psi(k) \end{aligned} \quad 3.2.d$$

avec

$$\mu = \frac{2 \tau}{1 + \theta^2 + \tau^2} \quad \text{et} \quad \nu = - i \frac{\underline{W}\underline{N} - \underline{N}\underline{W}}{\underline{W}\underline{W} + \underline{N}\underline{N}} \quad 3.2.e$$

3.3 Considérons ensuite le cas du point b de la figure 1. La formule 2.1.3.a n'est plus applicable directe-

ment parce qu'il manque le point sud nécessaire pour calculer $\partial^2 \zeta / \partial y^2$.

Par contre nous disposons d'une condition supplémentaire résultant du fait que le point b se trouve sur la côte. En effet la vitesse v est nulle en ce point, ou bien elle est connue en fonction du ζ local par une relation de la forme :

$$v = f(\zeta) \quad 3.3.a$$

si le point b coïncide avec l'embouchure d'une rivière à marée ou d'un bras de mer.

De toute façon l'équation :

$$v = - \frac{g}{(\rho - i \sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho - i \sigma) \zeta_y - \alpha \zeta_x]$$

soit, avec les notations du paragraphe 3.2,

$$v = - \frac{g}{2 \sigma L} \frac{1}{(\theta - i)^2 + \tau^2} [(\theta - i) \underline{N} + \tau \underline{W}]$$

peut être résolue par rapport à N ;

$$N = - \frac{\tau}{\theta - i} \underline{W} - \frac{2 \sigma L}{g} \left[\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right] V \quad 3.3.b$$

où nous avons écrit V au lieu de v pour faire ressortir qu'il s'agit d'une fonction connue.

Comme on a $N = \zeta^n - \zeta^s$, on trouve immédiatement pour le ζ^s manquant :

$$\zeta^s = \zeta^n + \frac{\tau}{\theta - i} \underline{W} + \frac{2 L \sigma}{g} \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) V \quad 3.3.c$$

3.4.1 Par la formule 3.3.c le cas b est ramené au cas normal. Il y a toutefois une difficulté. En effet le point s est un point fictif situé à l'intérieur des terres. Pour pouvoir appliquer la formule 2.1.3.a il faut encore se donner la profondeur h^s permettant de calculer la dérivée h_y . On peut prolonger la pente $(h - h^n)/L$ existant devant la côte, ce qui donnera $h^s = 2 h - h^n$. Mais quand la pente est forte, et la profondeur h petite, la profondeur h^s peut devenir négative, ce qui est assez gênant.

Une autre possibilité est de prendre, pour des raisons de symétrie, $h^s = h^n$, ce qui donne $h_y = 0$.

On peut même aller plus loin dans cette voie et admettre également $h_x = 0$. Il est vrai que l'on commet ainsi une certaine erreur; mais celle-ci est limitée à une bande de largeur $L/2$ le long de la côte et on peut rendre son influence aussi petite que l'on veut en réduisant la longueur de maille L .

L'hypothèse $h_x = h_y = 0$ conduit aux formules suivantes :

$$\zeta = \frac{\zeta^w + 2\zeta^n + \zeta^e}{4} = i \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) \frac{\sigma^2 L^2}{4 g h} \zeta + \frac{1}{4} \frac{\tau}{\theta - i} W + \frac{L \sigma}{2 g} \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) V \quad 3.4.1.a$$

$$u = \frac{g}{2 L \sigma (\theta - i)} W + \frac{\tau}{\theta - i} V \quad 3.4.1.b$$

Remarquons encore que quand $V = 0$, θ peut se calculer par la formule :

$$\theta^2 = -0,50 + (0,25 + 16 g^4 \overline{W\overline{W}} / (9 \pi^2 \sigma^4 C^4 h^2 L^2))^{0,5} \quad 3.4.1.c$$

déduite de 2.2.2.a.

3.4.2 Pour appliquer la formule 3.3.c dans le cas où le nœud considéré coïncide avec l'embouchure d'une rivière à marée il faut connaître V .

On sait que si l'on fait abstraction du débit d'amont le régime d'une rivière à marée est complètement déterminé par la marée verticale à l'embouchure. Si Q est le débit et ζ la marée verticale à l'embouchure il existe donc une relation :

$$Q = f(\zeta),$$

d'où l'on déduit :

$$V = \frac{1}{L h} f(\zeta) \quad 3.4.2.a$$

L étant la longueur de maille et h la profondeur de la mer à l'embouchure de la rivière.

Remarquons en passant qu'il est opportun de choisir localement une longueur de maille correspondant à peu près à la largeur réelle de la rivière.

Pour trouver la relation $Q = f(\zeta)$ on peut procéder soit par cubatures, soit en calculant la marée fluviale par une des méthodes classiques.

Souvent on pourra se contenter d'une seule cubature, ou d'un seul calcul de marée, se rapportant au régime de la marée moyenne. Soient Q_m et ζ_m les composantes M2 de la marée moyenne horizontale et verticale; on prendra :

$$V = \frac{1}{L h} \zeta \frac{Q_m}{\zeta_m} \quad 3.4.2.b$$

si le module de ζ ne s'écarte pas trop de celui de ζ_m .

En appliquant la formule 3.4.2.b, la relation 3.3.c devient :

$$\zeta^s = \zeta^n + \frac{\tau}{\theta - i} W + \frac{2 \sigma \zeta}{g h} \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) \frac{Q_m}{\zeta_m} \quad 3.4.2.c$$

3.5 Pour ramener le cas c de la figure 1 au cas normal nous calculerons de nouvelles valeurs ζ'^w et ζ'^s en considérant le cas c comme étant la moyenne des trois cas c_1 , c_2 et c_3 représentés à la figure 2.

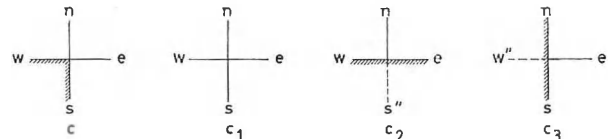


Fig. 2.

D'après 3.3.c nous aurons, avec $V = 0$;

$$\text{cas } c_2 \quad \zeta^{s''} = \zeta^n + \frac{\tau}{\theta - i} (\zeta^w - \zeta^e)$$

$$\text{cas } c_3 \quad \zeta^{w''} = \zeta^e + \frac{\tau}{\theta - i} (\zeta^n - \zeta^s)$$

la seconde de ces formules étant obtenue en donnant à l'axe des x l'orientation ns et à l'axe des y l'orientation we .

Prenons maintenant la moyenne des cas c_1 , c_2 et c_3 pour ce qui concerne les points sud et ouest :

$$\zeta'^s = \frac{2}{3} \zeta^s + \frac{1}{3} \zeta^n + \frac{1}{3} \frac{\tau}{\theta - i} (\zeta^w - \zeta^e) \quad 3.5.a$$

$$\zeta'^w = \frac{2}{3} \zeta^w + \frac{1}{3} \zeta^e + \frac{1}{3} \frac{\tau}{\theta - i} (\zeta^n - \zeta^s) \quad 3.5.b$$

Par les formules 3.5.a et 3.5.b le cas c est ramené au cas général. En faisant comme au paragraphe 3.4.1 l'hypothèse simplificatrice $h_x = h_y = 0$ la formule 3.2.a devient :

$$\begin{aligned} \zeta - \frac{\zeta^w + 2\zeta^n + 2\zeta^e + \zeta^s}{6} = \\ i \left(\theta - i + \frac{\tau^2}{\theta - i} \right) \frac{\sigma^2 L^2}{4 g h} \zeta \\ + \frac{1}{12} \frac{\tau}{\theta - i} (W + N) \end{aligned} \quad 3.5.c$$

3.6 Il ne reste plus que le cas d de la figure 1. La vitesse étant en même temps normale aux deux axes doit nécessairement être nulle. Les formules 2.1.2.c donnent alors immédiatement :

$$\zeta_x = \zeta_y = 0 \quad \text{d'où} \quad \zeta^w = \zeta^e \quad \text{et} \quad \zeta^n = \zeta^s,$$

et 3.2.a devient (avec $\theta = 0$) :

$$\zeta - \frac{\zeta^n + \zeta^w}{2} = (1 - \tau^2) \frac{\sigma^2 L^2}{4 g h} \zeta \quad 3.6.a$$

3.7 L'introduction des différences finies dans les relations différentielles établies au paragraphe 2.3 nous donne les formules suivantes pour les éléments des ellipses des vitesses :

— direction de la vitesse maximum :

$$\begin{aligned} \phi' = - \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{2 \tau \theta}{1 + \theta^2 - \tau^2} \\ + \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{\overline{WN} + \overline{WN}}{\overline{NN} - \overline{WW}} \end{aligned} \quad 3.7.a$$

— heure de la vitesse maximum :

$$\begin{aligned} t_{\max} = - \frac{1}{2 \sigma} \operatorname{arc tg} \frac{2 \theta}{1 - \theta^2 - \tau^2} \\ + \frac{1}{2 \sigma} \operatorname{arc tg} \frac{2 (W_1 W_2 + N_1 N_2)}{W_1^2 + N_1^2 - W_2^2 - N_2^2} \end{aligned} \quad 3.7.b$$

— sens de rotation du vecteur vitesse :

$$\text{signe de} \quad - \frac{2 \tau}{1 + \theta^2 + \tau^2} + i \frac{\overline{WN} - W\overline{N}}{W\overline{W} + N\overline{N}} \quad 3.7.c$$

4. — Application des formules aux différences finies au calcul de la marée

4.1 Mise en équation

Soit un réseau tel que celui de la figure 1 comprenant r points intérieurs.

Pour chacun de ces points on peut écrire une équation en ζ par l'application d'une des formules 3.2.a, 3.4.1.a, 3.5.c ou 3.6.a suivant le cas.

Considérons à titre d'exemple le point 2; nous aurons :

$$\begin{aligned} \zeta^2 - \frac{\zeta^1 + \zeta^{VII} + \zeta^3 + \zeta^6}{4} \\ = f^2(\theta^2, \zeta^2, \zeta^1, \zeta^{VII}, \zeta^3, \zeta^6), \end{aligned}$$

la fonction f^2 (où le chiffre 2 est un indice, et non un exposant) groupant les termes du second membre de 3.2.a.

Notons que ζ^{VII} est une quantité connue (condition à la limite), et que θ est une fonction des ζ par la relation 3.2.d, de sorte que l'on peut poser :

$$f^2(\theta^2, \zeta^2, \zeta^1, \zeta^{VII}, \zeta^3, \zeta^6) = e^2(\zeta^2, \zeta^1, \zeta^3, \zeta^6),$$

Notre équation devient alors :

$$\begin{aligned} \zeta^2 - \frac{1}{4} \zeta^1 - \frac{1}{4} \zeta^3 - \frac{1}{4} \zeta^6 \\ = e^2(\zeta^2, \zeta^1, \zeta^3, \zeta^6) + \frac{1}{4} \zeta^{VII} \end{aligned} \quad 4.1.a$$

Pour chacun des autres points on peut écrire une relation analogue, et toutes ces relations peuvent être réunies dans un système de la forme :

$$\sum_{j=1}^r a^{ij} \zeta^j = e^i(\zeta^j) + b^i \quad 4.1.b$$

Si on considère les ζ^j comme étant les composantes d'un vecteur Z , les e^i comme étant les composantes d'un vecteur E , et si B est un vecteur groupant les b^i , on peut mettre ce système sous la forme :

$$AZ = E + B \quad 4.1.c$$

où A est la matrice des coefficients a^{ij} .

Notons que ce système n'est pas linéaire, les composantes e^i du vecteur E étant des fonctions non-linéaires des ζ .

4.2 Solution du système d'équations.

En se basant sur des considérations d'ordre général, on peut montrer que le système 4.1.c peut être résolu en utilisant une formule de récurrence du type :

$$Z_{n+1} - Z_n = T_n F_n \quad 4.2.a$$

où T est une transformation linéaire convenablement choisie, F un vecteur satisfaisant à la relation $F = -AZ + E + B$, et où l'indice n signifie « la valeur à la n -ième approximation ».

Ainsi, si nous posons $T = I$, où I est une matrice carrée de rang r avec $a_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ (matrice d'identité), la formule 4.2.a devient :

$$Z_{n+1} = (I - A) \cdot Z_n + E_n + B \quad 4.2.b$$

formule de la méthode dite « d'itération ».

Une autre possibilité consiste à poser $T = -(-A + H)^{-1}$, les éléments de la matrice H étant les dérivées partielles $\partial e^i / \partial \zeta^j$.

La formule 4.2.a donne dans ce cas :

$$Z_{n+1} - Z_n = -(-A + H_n)^{-1} \cdot F_n \quad 4.2.c$$

formule de la méthode dite « par approximations successives ».

Quand le nombre d'inconnues r est important aucune de ces deux méthodes ne s'avère pratique, l'une étant trop lente et l'autre trop compliquée.

Une méthode intermédiaire, qui a donné des résultats relativement satisfaisante consiste à poser :

$$T = A^{-1}$$

d'où la formule :

$$Z_{n+1} = A^{-1} E_n + A^{-1} B \quad 4.2.d$$

Si nous remplaçons n par $n - 1$ dans cette relation nous trouvons :

$$Z_n = A^{-1} E_{n-1} + A^{-1} B,$$

et par soustraction :

$$Z_{n+1} - Z_n = A^{-1} \cdot (E_n - E_{n-1}) \quad 4.2.e$$

Pour effectuer les calculs on part d'une valeur estimée Z_0 et on calcule :

$$Z_1 = A^{-1} E_0 + A^{-1} B.$$

Ensuite on calcule successivement :

$$Z_2 - Z_1 = A^{-1} \cdot (E_1 - E_0)$$

$$\text{et } Z_2 = Z_1 + (Z_2 - Z_1)$$

$$Z_3 - Z_2 = A^{-1} \cdot (E_2 - E_1)$$

$$\text{et } Z_3 = Z_2 + (Z_3 - Z_2)$$

.....

jusqu'au moment où $Z_{n+1} - Z_n$ devient négligeable.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que le calcul assez ardu d'inversion de matrice ne se fait qu'une seule fois. En plus la matrice inverse A^{-1} dépend uniquement de la forme géométrique du réseau, et peut donc être réutilisée quand les autres données du problème — par exemple les conditions aux limites — changent.

4.3 Calculs numériques.

En principe la méthode de calcul est conçue de façon à pouvoir effectuer les opérations numériques au moyen de machines de bureau normales, soit en opérant avec les nombres complexes tels quels, soit en scindant les parties réelles et les parties imaginaires.

A partir d'un certain nombre d'inconnues la probabilité de faire des erreurs devient toutefois si grande qu'il est plus rentable d'utiliser des machines digitales plus perfectionnées.

Signalons encore que dans certains cas l'utilisation de méthodes analogiques peut être envisagée. Par exemple l'inversion de la matrice A peut facilement être réalisée en analogie rhéostatique.

4.4 Unicité de la solution.

On peut se demander si la fonction Z qui satisfait au système 4.1.c est bien la seule possible.

Supposons d'abord que le système soit linéaire, c'est-à-dire que le coefficient de frottement θ soit indépendant de Z. Dans ce cas il ne peut y avoir qu'une seule solution avec les conditions aux limites données. S'il y avait deux solutions Z et Z', la différence Z — Z' serait une solution du système correspondant à des conditions aux limites nulles. Cette solution représenterait une oscillation libre du système physique, en d'autres termes un mouvement périodique n'absorbant pas d'énergie. Or le frottement est toujours différent de zéro et il y a donc toujours absorption d'énergie. Les deux solutions Z et Z' doivent donc être identiques.

En réalité le coefficient de frottement n'est pas une constante, mais il dépend de la fonction ζ . Ceci provient du fait que le frottement est une fonction quadratique de la vitesse, ce qui pourrait faire supposer l'existence de deux solutions différentes.

Mais, en fait, une de ces solutions est écartée d'office par l'hypothèse, conforme d'ailleurs à la réalité, que le frottement s'oppose au mouvement.

La solution du problème est donc bien unique, même si l'on tient compte de la non-linéarité du frottement.

5. — Notes annexes

5.1 Transformation des équations de mouvement.

Les équations :

$$g \zeta_x + (\rho - i \sigma) u - \alpha v = 0 \quad 5.1.a$$

(ou 2.1.2.c)

$$g \zeta_y + (\rho - i \sigma) v + \alpha u = 0 \quad 5.1.b$$

du paragraphe 2.1.2 forment un système en u et v dont la résolution donne :

$$u = - \frac{g}{(\rho - i \sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho - i \sigma) \zeta_x + \alpha \zeta_y] \quad 5.1.c \quad (\text{ou } 2.1.3.b)$$

$$v = - \frac{g}{(\rho - i \sigma)^2 + \alpha^2} [(\rho - i \sigma) \zeta_y - \alpha \zeta_x] \quad 5.1.d \quad (\text{ou } 2.1.3.c)$$

Effectuons les opérations suivantes; dérivation de 5.1.a par rapport à x, de 5.1.b par rapport à y, et addition; ensuite dérivation de 5.1.a par rapport à y, de 5.1.b par rapport à x, et soustraction; il vient :

$$g \nabla \zeta + u \rho_x + v \rho_y + (\rho - i \sigma) (u_x + v_y) + \alpha (u_y - v_x) = 0 \quad 5.1.e$$

$$u \rho_y - v \rho_x + (\rho - i \sigma) (u_y - v_x) - \alpha (u_x + v_y) = 0 \quad 5.1.f$$

D'après 2.2.1.a on a :

$$\rho_x = \frac{w_x}{w} \rho - \frac{h_x}{h} \rho \quad \rho_y = \frac{w_y}{w} \rho - \frac{h_y}{h} \rho$$

Généralement les deux termes des seconds membres de ces relations sont négligeables. Mais dans certains cas, surtout près de la côte, les termes en h_x et h_y ne le sont plus. C'est pour cette raison que nous conserverons ρ_x et ρ_y dans nos formules, tout en leur donnant la forme simplifiée :

$$\rho_x = - \frac{h_x}{h} \rho \quad \rho_y = - \frac{h_y}{h} \rho$$

Notons que l'équation 5.1.f permet le calcul de la rotation $u_y - v_x$:

$$u_y - v_x = \frac{\alpha}{\rho - i \sigma} (u_x + v_y) - \frac{u \rho_y - v \rho_x}{\rho - i \sigma}$$

et on peut donc remplacer 5.1.e par :

$$g \nabla \zeta - \frac{\rho}{h} \left[\left(h_x - \frac{\alpha}{\rho - i \sigma} h_y \right) u \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(h_y + \frac{\alpha}{\rho - i\sigma} h_x \right) v \Big] \\
& + \left(\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) (u_x + v_y) = 0
\end{aligned}$$

5.1.g

De l'équation de continuité :

$$-\sigma i \zeta + (hu)_x + (hv)_y = 0$$

on tire

$$u_x + v_y = \frac{\sigma i \zeta}{h} - \frac{1}{h} (h_x u + h_y v),$$

et l'équation 5.1.g devient :

$$\begin{aligned}
& g \Delta \zeta + \sigma i \left(\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) \frac{\zeta}{h} \\
& - \frac{u}{h} \left[\left(2\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) h_x - \frac{\alpha \rho}{\rho - i\sigma} h_y \right] \\
& - \frac{v}{h} \left[\left(2\rho - i\sigma + \frac{\alpha^2}{\rho - i\sigma} \right) h_y \right. \\
& \left. + \frac{\alpha \rho}{\rho - i\sigma} h_x \right] = 0
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer u et v par leurs valeurs 5.1.c et 5.1.d pour retrouver la formule 2.1.3.a. L'équation conjuguée 2.1.3.d s'établit facilement en remplaçant les fonctions complexes par leurs conjuguées, et en changeant le signe de i là où ce symbole figure explicitement.

5.2 Calcul de θ .

En utilisant les formules 2.1.1.a on trouve, après quelques calculs algébriques :

$$\begin{aligned}
w_r^2 &= u_r^2 + v_r^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2}{2} \\
&+ \frac{1}{2} [(u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2)^2 \\
&+ 4(u_1 u_2 + v_1 v_2)^2]^{0,5} \cdot \cos(2\sigma t - 2\varphi)
\end{aligned}$$

en posant :

$$2\varphi = \arctg \frac{2(u_1 u_2 + v_1 v_2)}{u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2}$$

$$\text{Soit encore } k^2 = 1 - \frac{4(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}{(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)^2};$$

k^2 est un nombre positif plus petit que ou égal à l'unité.

Ceci résulte de l'identité, facilement vérifiable :

$$\begin{aligned}
& (u_1^2 + v_1^2 - u_2^2 - v_2^2)^2 + 4(u_1 u_2 + v_1 v_2)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)^2 - 4(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)^2 (1 - k^2)
\end{aligned}$$

5.2.a

En effet, si k^2 était plus grand que l'unité, le premier membre de cette relation deviendrait négatif, ce qui est impossible (somme de deux carrés!).

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned}
w_r &= \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2}{2} \right)^{0,5} \\
&[1 + k \cos(2\sigma t - 2\varphi)]^{0,5}
\end{aligned}$$

soit, avec les fonctions complexes :

$$w_r = \left(\frac{\bar{u}u + \bar{v}v}{2} \right)^{0,5} [1 + k \cos(2\sigma t - 2\varphi)]^{0,5}$$

5.2.b

Cette formule montre clairement comment w_r varie avec le temps. Pour trouver une valeur moyenne w correspondant à l'hypothèse de Lorenz, nous partons de la relation; « travail total de frottement linéaire = travail total du frottement quadratique ».

Le frottement linéaire étant proportionnel à $w_r \cdot w_r$, le travail total sera proportionnel à $\int w \cdot w_r \cdot w_r \cdot dt$. Le frottement quadratique étant proportionnel à $w_r \cdot w_r$, le travail total sera proportionnel à $\int w_r \cdot w_r \cdot w_r \cdot dt$, d'où la relation :

$$w \int w_r^2 dt = \int w_r^3 dt$$

5.2.c

Comme ces intégrales sont à prendre sur une période entière, l'origine des temps peut être prise arbitrairement, ce qui permet de supprimer l'angle 2φ dans la formule 5.2.b.

Le calcul de la première intégrale de 5.2.c n'offre pas de difficultés. Pour ce qui concerne la seconde on écrit :

$$w_r^s = \left(\frac{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}}{2} \right)^{1,5} (1 + \beta)^{1,5}$$

où β est la quantité $k \cos 2\sigma t$, plus petite que l'unité. Ensuite on développe $(1 + \beta)^{1,5}$ en série suivant la formule :

$$(1 + \beta)^{0,5} = 1 + \frac{3}{2} \beta + \frac{3}{8} \beta^2 - \frac{3}{48} \beta^3 + \dots$$

après quoi on effectue l'intégration.

Comme résultat final on trouve :

$$w = \left(\frac{\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v}}{2} \right)^{0,5} \psi(k) \quad 5.2.e$$

$$\text{où } \psi(k) = 1 + \frac{3}{16} k^2 + \frac{q}{1024} k^4 + \frac{35}{16384} k^6 + \dots$$

Le passage des fonctions u et v à la fonction ζ se fait au moyen des formules 2.1.3.b, 2.1.3.c, 2.1.3.e et 2.1.3.f.

SAMENVATTING :

BEREKENING VAN EEN TWEEDIMENSIONAAL ENKELVOUDIG SINUSOIDAAL GETIJ

De getijbeweging in een tweedimensionaal gebied, opgevat als een zuiver sinusöidaal verschijnsel (M2 getij), kan worden behandeld als een randwaardenprobleem. De gegevens van het vraagstuk zijn dan het vertikaal getij langs de zeewaartse perimeter van het beschouwde gebied en de voorwaarde dat de normale stroomsnelheid gelijk is aan nul langs de kust wanneer deze gesloten is. Eventueel worden deze gegevens aangevuld, ter hoogte van de monding ener tijrivier, door een betrekking tussen het plaatselijk vertikaal getij en de plaatselijk in- en uitstromende debieten.

Om tot de oplossing van dit vraagstuk te komen worden vooreerst de bewegingsvergelijkingen opgesteld onder de vorm van partiële differentiaalvergelijkingen. Daarna worden deze omgevormd tot differentie-betrekkingen geldig in de knooppunten van een orthogonaal mazennet dat het te beschouwen gebied bestrijkt.

Door deze betrekkingen achtereenvolgens in al de inwendige knooppunten toe te passen verkrijgt men een stelsel vergelijkingen waarin enkel als onbekenden voor-

komen de kenmerkende grootheden van het vertikaal getij.

Dit stelsel wordt opgelost door middel van een iteratie-methode.

Eens het vertikaal getij gekend in al de inwendige punten kan men overgaan tot de berekening der elementen der snelheidsrozen; grootte en richting der maximum- en minimumsnelheden, tijdstip van het optreden dezer extreme snelheden.

De uiteengezette methode kan bijvoorbeeld worden aangewend voor het berekenen van de invloed der afdamming van tijrivieren of zeearmen op het tijregime in de omgeving. Het gebied wordt groot genoeg gekozen om redelijkerwijze te mogen aannemen dat het vertikaal getij langsheen de zeewaartse perimeter nagenoeg onveranderd blijft. De vergelijking der berekende toestanden voor en na laat dan toe de grootteorde van de door de afdamming veroorzaakte perturbatie te schatten.