

WATERBURY LABORATORY  
BIBLIOTHEEK

4266

151710

HOLSTERS, H.

Remarques sur la stabilité dans les  
calculs de marée.

---

1421



*R 2012*

Reprint from the Proceedings of the Symposium on  
Mathematical-Hydrodynamical Methods of Physical  
Oceanography, September, 1961  
Institut für Meereskunde der Universität Hamburg

# REMARQUES SUR LA STABILITE DANS LES CALCULS DE MAREE

par

H. H o l s t e r s

Résumé:

La condition de stabilité

$$N \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1$$

(N = nombre de dimensions, c = vitesse critique) des solutions pas-à-pas des équations hydrodynamiques n'est valable que si les termes de frottement (et éventuellement de Coriolis) des équations aux différences finies sont symétriques par rapport aux vitesses connues (u,v) et inconnues (u', v').

Dans le cas d'utilisation d'expressions où les vitesses connues sont prépondérantes le rapport  $\Delta t/\Delta x$  doit être plus petit que celui donné par le critère classique.

Si par exemple les termes de frottement sont uniquement fonction des vitesses connues (expressions explicites) le critère devient (approximativement pour ce qui concerne le cas à deux dimensions);

$$N \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1 - \frac{2r}{h} \sqrt{u^2 + v^2} \Delta t$$

où r est le coefficient de frottement ( $r = g/c^2$ ) et h la profondeur.

Ce critère est très sévère dans le cas des petites profondeurs, et le calcul devient d'ailleurs impossible (avec des expressions explicites) si le second membre de (b) devient négatif.

Normalement (en supposant des expressions symétriques) l'intervalle de temps  $\Delta t$  ne peut pas dépasser l'intervalle critique  $\Delta t_{cr}$  résultant de (a).

On peut néanmoins obtenir des solutions stables avec des rapports  $\tau (\Delta t / \Delta t_{cr})^2$  dépassant l'unité. Il suffit pour cela de remplacer les niveaux d'eau calculés par des valeurs "relaxées"  $\bar{\zeta}$ . L'algorithme de relaxation fait intervenir les  $\zeta$  de certains noeuds environnants et est de la forme  $\bar{\zeta} = f(\theta, \zeta)$  où  $\theta$  est le "coefficient de relaxation".

Quelques relations sont données reliant le coefficient de relaxation  $\theta$ , le nombre de relaxations p à effectuer par pas, et le rapport  $\tau$ .

1. Le problème du calcul des marées, qui consiste à déterminer les fonctions  $\zeta$ ,  $u$  et  $v$  (niveau d'eau et composantes de la vitesse) dans un domaine donné des variables  $x$ ,  $y$  et  $t$ , nécessite l'intégration des équations du mouvement varié des eaux qui sous forme un peu simplifiée s'écrivent;

$$1.a \quad g\zeta_x + u_t + \frac{ru}{h} \sqrt{u^2 + v^2} + \alpha v = 0$$

$$1.b \quad g\zeta_y + v_t + \frac{rv}{h} \sqrt{u^2 + v^2} - \alpha u = 0$$

$$1.c \quad \zeta_t + (hu)_x + (hv)_y = 0$$

Dans ces équations  $r$  désigne le coefficient de frottement (relié au coefficient de Chezy par la relation  $r = g/c^2$ ),  $h$  est la profondeur et le coefficient  $\alpha$  se rapporte à l'influence de la force de Coriolis.

Pour le mouvement à une dimension les équations se réduisent à:

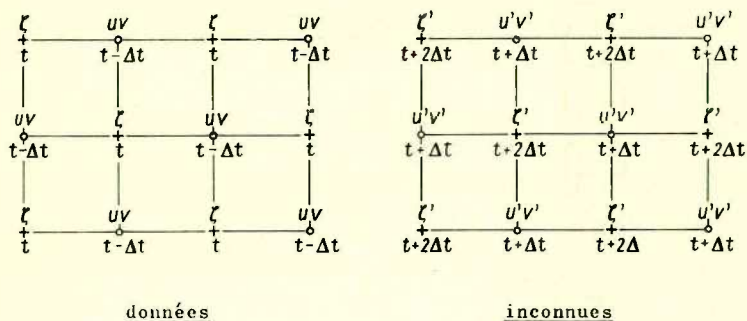
$$1.d \quad g\zeta_x + u_t + \frac{r|u|}{h} u = 0$$

$$1.e \quad b\zeta_t + (bhu)_x = 0$$

où  $b$  est la largeur en surface et  $h$  la profondeur moyenne.

La solution de ces systèmes peut s'effectuer par intégration numérique après remplacement des différentielles par des différences finies, le calcul de  $\zeta$ ,  $u$  et  $v$  n'étant fait que dans les noeuds d'un réseau ou canevas. Dans la présente note nous nous limiterons aux canevas orthogonaux à mailles carrées, en prenant  $\Delta x = \Delta y$ , et nous supposerons que les niveaux seront calculés uniquement aux noeuds et instants "pairs" et les vitesses uniquement aux noeuds et instants "impairs".

Comme indiqué au schéma ci-dessous les données sont les  $u$  et  $v$  à l'instant  $t - \Delta t$  et les  $\zeta$  à l'instant  $t$ , tandis que les inconnues sont les  $u'$  et  $v'$  à l'instant  $t + \Delta t$  et les  $\zeta'$  à l'instant  $t + 2\Delta t$ :



Le calcul des inconnues  $\zeta'$ ,  $u'$  et  $v'$  à partir des données  $\zeta$ ,  $u$  et  $v$  se fait au moyen de relations déduites des équations différentielles. Ainsi, par exemple, pour le mouvement à une dimension (pour lequel le réseau se réduit à une seule ligne) on a :

$$1.f \quad u' = u + g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\zeta_w - \zeta_e) - f$$

$$1.g \quad \zeta' = \zeta + \frac{\Delta t}{b \Delta x} (b_w h_w u_w' - b_e h_e u_e')$$

où le terme  $f$ , qui sera explicité plus loin, se rapporte à l'influence du frottement, et les indices  $w$  et  $e$  désignent les noeuds situés immédiatement à l'ouest ou à l'est du noeud considéré.

2. L'application de formules telles que 1.f et 1.g ne donne pas toujours des résultats satisfaisants. Parfois les erreurs de calcul s'amplifient d'une façon explosive et la solution devient instable.

Généralement l'instabilité ne se présentera pas si on respecte le critère de stabilité classique qui peut être mis sous la forme

$$2.a \quad N \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1,$$

où  $c$  représente la vitesse critique  $\sqrt{gh}$  et  $N$  le nombre

de dimensions.

Toutefois ce critère n'est théoriquement valable que si  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont infiniment petits.

Dans le cas où ces intervalles ne peuvent pas être considérés comme des quantités infiniment petites on peut admettre comme critère de stabilité ;

$$2.b \quad N \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1 + O(\Delta x^2) + \mu \frac{r}{h} \sqrt{u^2 + v^2} \Delta t + \nu (\alpha \Delta t)^2,$$

où  $N = 2$  pour le mouvement à deux dimensions et  $N=1$ ,  $\nu=0$ ,  $\nu=0$  pour le mouvement à une dimension.

3. Dans l'inégalité 2.b le terme  $O(\Delta x^2)$  dépend du rapport entre l'intervalle  $\Delta x$  et les dimensions générales du réseau. Dans certains cas simples on peut le calculer; ainsi pour le mouvement à une dimension avec conditions aux limites de Dirichlet ( $\zeta$  étant donné aux extrémités de l'intervalle  $0 < x < L$  de la variable  $x$ ) on trouve:

$$O(\Delta x^2) = \left( \frac{\pi \Delta x}{2L} \right)^2.$$

Ceci explique pourquoi lorsque  $\Delta x$  est relativement grand par rapport à  $L$  on peut parfois obtenir une solution stable malgré un dépassement du critère théorique.

Le coefficient  $\nu$  de l'équation 2.b dépend de la façon de calculer les composantes de la force de Coriolis dans les équations aux différences finies. On peut mettre ces composantes sous la forme générale

$$-\alpha(\theta v + (1-\theta)v') \quad \text{et} \quad +\alpha(\theta u + (1-\theta)u'),$$

où  $\theta$  est un paramètre pouvant varier de 1 à 0.

$$\text{On aura alors} \quad \nu = 1 - 2\theta$$

ce qui montre que des formes purement explicites ( $\theta = 1$ ), c'est-à-dire dépendant uniquement des valeurs connues réduisent la stabilité ( $\nu = -1$ ), tandis que des formes purement implicites, dépendant uniquement des valeurs inconnues l'augmentent.

4. Des conclusions analogues s'appliquent au coefficient  $\mu$  lié au terme de frottement.

On aura  $\mu = -2$  pour des expressions purement explicites du frottement,  $\mu = 2$  pour des expressions purement implicites. Pour les cas intermédiaires  $\mu$  varie entre  $-2$  et  $+2$  suivant le poids relatif donné aux vitesses connues et inconnues (1).

Examinons à titre d'exemple le mouvement à une dimension.

Le terme  $f$  de l'équation 1.f peut être mis sous la forme:

$$f = \frac{2r\Delta t}{h} (\theta |u| + (1-\theta) |u'|) (\eta u + (1-\eta) u')$$

et l'expression correspondante du coefficient  $\mu$  sera:

$$4.a \quad \mu = 2(1-\theta-\eta) .$$

En donnant à  $\theta$  et  $\eta$  respectivement les valeurs 1,1 ; 1,0 ;  $\frac{1}{2}$  ,  $\frac{1}{2}$  on obtient les équations suivantes:

$$4.b \quad u' = u + \frac{g\Delta t}{\Delta x} (\zeta_w - \zeta_e) - \frac{2r\Delta t}{h} |u| u$$

$$4.c \quad u' = (u + \frac{g\Delta t}{\Delta x} (\zeta_w - \zeta_e)) : (1 + \frac{2r\Delta t}{h} |u|)$$

$$4.d \quad u' = u + \frac{g\Delta t}{\Delta x} (\zeta_w - \zeta_e) - \frac{2r\Delta t}{h} \left| \frac{u+u'}{2} \right| \cdot \left( \frac{u+u'}{2} \right) .$$

Si nous négligeons le terme  $0(\Delta x^2)$  de 2.b, la première de ces trois équations aura comme critère de stabilité

$$4.e \quad \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1 - \frac{2r\Delta t}{h} |u| ,$$

tandis que pour les deux autres le critère classique reste valable.

Le critère 4.e est très sévère dans des rivières peu profondes. Le calcul devient d'ailleurs impossible dès que le rapport  $|u|/h$  atteint la valeur critique

$$4.f \quad \frac{|u|}{h} = \frac{1}{2r\Delta t} ,$$

- (1) Pour le mouvement à une dimension la justification est donné à l'annexe I. Pour le mouvement à deux dimensions la justification est plus difficile; les valeurs extrêmes de  $\mu$  peuvent toutefois être considérées comme des estimations raisonnables.

pour lequel le deuxième membre de l'inégalité 4.e s'anulle.

On peut ajouter que même une formule du type 4.d peut donner lieu à des difficultés si on veut la résoudre par itération; en effet la convergence n'est assurée que si le rapport  $u/h$  reste plus petit que la valeur critique donnée par la relation 4.f .

5. Pour le mouvement à deux dimensions on obtient des formules directes analogues à 4.c en prenant comme composantes de la force de frottement

$$-\frac{ru'}{h}\sqrt{u^2+v^2} \quad \text{et} \quad -\frac{rv'}{h}\sqrt{u^2+v^2} .$$

On doit toutefois remarquer que ces expressions ne sont pas très exactes aux environs des étales de courant, surtout si  $u$  et  $u'$  ou  $v$  et  $v'$  ont des signes différents.

6. Généralement l'intervalle  $\Delta x$  est imposé par la nature du problème. En prenant les précautions nécessaires, qui consistent surtout à ne pas utiliser des formes explicites du terme de frottement dans les parties peu profondes, l'intervalle de temps sera pratiquement déterminé par le critère classique. L'intervalle de temps critique  $\Delta t_{cr}$  est alors imposé soit par la plus grande profondeur dans un réseau à mailles égales, soit par la maille la plus fine dans un réseau mixte.

$$\text{Soit } \tau = \left( \frac{\Delta t}{\Delta t_{cr}} \right)^2$$

le carré du rapport entre l'intervalle de temps choisi pour l'exécution des calculs et l'intervalle critique.

Normalement ce rapport ne peut pas dépasser l'unité.

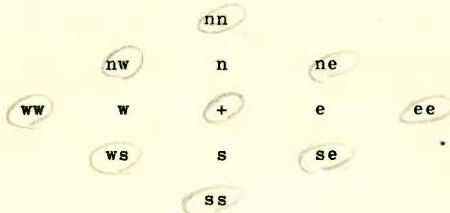
Il est toutefois possible d'obtenir dans certains cas des résultats satisfaisants avec  $\tau > 1$  si à chaque pas on effectue des petites corrections ne modifiant pas l'allure générale des fonctions  $\zeta$ ,  $u$  et  $v$ .

Une méthode relativement simple consiste à remplacer les  $\zeta$  par des valeurs lissées ou "relaxées"  $\zeta$  .



L'opération de relaxation peut s'effectuer de différentes façons.

En se référant au schéma



on peut par exemple prendre (avec  $0 \leq \theta < 1$ ) :

$$6.a \quad \bar{\zeta} = \frac{\theta}{4} (\zeta_{ww} + \zeta_{nn} + \zeta_{ee} + \zeta_{ss}) + (1-\theta)\zeta$$

$$6.b \quad \text{ou} \quad \bar{\zeta} = \frac{\theta}{4} (\zeta_{wn} + \zeta_{ne} + \zeta_{es} + \zeta_{sw}) + (1-\theta)\zeta$$

$$6.c \quad \text{ou encore} \quad \bar{\zeta} = \frac{\theta}{16} (\zeta_{ww} + \dots) + \frac{\theta}{8} (\zeta_{wn} + \dots) + (1 - \frac{3}{4}\theta)\zeta$$

Au lieu d'effectuer la relaxation par "déplacements simultanés" on peut aussi opérer par "déplacements successifs"; la formule 6.a par exemple devient alors

$$6.d \quad \bar{\zeta} = \frac{\theta}{4} (\bar{\zeta}_{ww} + \bar{\zeta}_{nn} + \zeta_{ee} + \zeta_{ss}) + (1-\theta)\zeta$$

Finalement, on peut introduire les valeurs relaxées  $\bar{\zeta}$  de différentes façons dans les équations aux différences finies.

La façon la plus simple consiste à utiliser des équations du type:

$$6.e \quad u' = f_1(u, u', v, v', \bar{\zeta}) \quad v' = f_2(v, v', u, u', \bar{\zeta}) \quad \zeta' = f_3(u', v', \bar{\zeta})$$

ce qui revient à remplacer simplement  $\zeta$  par  $\bar{\zeta}$  après chaque pas.

On peut également conserver les valeurs non relaxées dans l'équation de continuité, et n'utiliser les valeurs relaxées que dans les équations dynamiques, ce qui conduit à un système d'équations du type:

$$6.f \quad u' = f_1(u, u', v, v', \bar{\zeta}) \quad v' = f_2(v, v', u, u', \bar{\zeta}) \quad \zeta' = f_3(u', v', \zeta)$$

7. En principe il est possible en effectuant une des opérations de relaxation indiquées plus haut un nombre suffisant de fois après chaque pas, d'obtenir une solution stable, quel que soit le rapport  $\tau = (\Delta t / \Delta t_{cr})^2$ .

Une des méthodes les plus puissantes (c'est-à-dire nécessitant un minimum de relaxations pour un rapport  $\tau$  donné) consiste à utiliser des formules du type 6.f en effectuant les relaxations suivant l'algorithme de la formule 6.a.

Les relations entre le coefficient de relaxation  $\theta$ , le nombre de relaxations  $p$  et le rapport  $\tau$  sont alors les suivantes:

a) pour  $p = 1$  (une relaxation par pas) la solution sera stable si  $\theta$  n'est pas plus petit que  $\tau/3$  ou que  $(\tau - 1)/2\tau$  pour autant que  $\tau$  ne dépasse pas 4 ou 2

b) si  $p$  est un nombre pair on peut prendre

$$7.a \quad \theta \geq \frac{\tau}{2} \frac{\rho^p}{(\rho+1)^{p+1}},$$

pour autant que  $\tau$  ne dépasse pas la plus petite racine positive de

$$7.b \quad \frac{\tau}{1+\tau^{-1/p}} = \frac{(\rho+1)^{p+1}}{\rho^p}$$

c) on peut également prendre

$$7.c \quad \theta \geq \frac{1}{2} (1-\tau^{-1/p}),$$

pour autant que  $\tau$  ne dépasse pas la valeur

$$7.d \quad \tau = \left(\frac{\rho+1}{\rho}\right)^p.$$

Le nombre de relaxations  $p$  à effectuer à chaque pas dépend de la valeur la plus défavorable de  $\tau$ , et peut être déterminé au moyen de 7.b. Comme coefficient de relaxation on peut prendre une valeur constante déterminée par la valeur la plus défavorable de  $\tau$ , ou bien on peut faire varier  $\theta$  en fonction de la valeur locale de  $\tau$  en utilisant les formules

7.a ou 7.c . Cette dernière formule permet de prendre  $\theta = 0$  là où  $\tau < 1$  , et il n'est donc pas nécessaire d'effectuer des relaxations dans la partie du réseau où  $\Delta t$  est plus petit que l'intervalle critique local.

8. Une méthode un peu moins puissante consiste à utiliser des formules du type 6.e en conjonction avec l'algorithme de relaxation 6.a ; cette méthode présente l'avantage de ne pas devoir stocker simultanément les valeurs  $\zeta$  et  $\bar{\zeta}$  . Les valeurs-limites de  $\theta$  et  $\tau$  sont données par les formules suivantes :

$$\text{a) } \rho = 1; \quad \theta = (3 - 2\sqrt{2})\tau \quad , \quad \tau = (3 + 2\sqrt{2})/2 \\ \theta = (\tau - 1)/(2\tau - 1) \quad , \quad \tau = 1 + \sqrt{2}/2$$

$$\text{b) } \rho \text{ pair; } \quad \theta = (1 \pm (2\tau - 1)^{-1/\rho})/2$$

$\tau$  étant donné par l'équation

$$(\tau - \theta)^{\rho} \cdot \rho^{\rho} = \theta \cdot \tau^{\rho} \cdot (\rho + 1)^{\rho + 1}$$

## 9. Conclusion

Le critère classique de stabilité ne donne pas toujours satisfaction. Surtout l'influence des termes de frottement est très défavorable si on utilise des expressions explicites, c'est-à-dire dépendant uniquement des vitesses connues calculées au pas précédent. Lorsque l'on doit exécuter des calculs de marée dans un domaine comprenant des régions à petites profondeurs il est préférable d'utiliser des formules où les termes de frottement sont symétriques par rapport aux vitesses connues et inconnues.

L'intervalle de temps critique, déterminé par le critère classique, peut être dépassé si à chaque pas on remplace les valeurs calculées  $\zeta$  par des valeurs "relaxées" faisant intervenir dans une certaine mesure les  $\zeta$  des points environnants.

ANNEXE I

STABILITE DU MOUVEMENT A UNE DIMENSION

I.1 Mouvement sans frottement

En supposant h et b constants les équations de mouvement se réduisent à:

$$(a) \quad g\zeta_x + u_t = 0$$

$$(b) \quad \zeta_t + hu_x = 0$$

La solution de ce système dépend, dans un domaine  $0 < x < L$ , des valeurs initiales  $\zeta(x,0)$  et  $u(x,0)$ , et des valeurs aux limites  $\zeta(0,t)$  ou  $u(0,t)$  et  $\zeta(L,t)$  ou  $u(L,t)$ . Les différents cas pouvant être traités de façon analogue nous prenons comme données  $\zeta(0,t)$  et  $\zeta(L,t)$ .

Pour introduire les différences finies nous divisons L en  $2(m+1)$  intervalles  $\Delta x$ .

Nous calculons les niveaux d'eau

$$\zeta_{2i}^{2(n+1)} = \zeta(2i\Delta x, 2(n+1)\Delta t)$$

aux noeuds et instants pairs, et les vitesses

$$u_{2i+1}^{2n+1} = u((2i+1)\Delta x, (2n+1)\Delta t)$$

aux noeuds et instants impairs.

En nous référant au schéma

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \binom{2n-2}{2i} & & \\
 & & & & \\
 & & \binom{2n-1}{2i-1} & R & \binom{2n-1}{2i+1} \\
 & & & & \\
 \binom{2n}{2i-2} & P & \binom{2n}{2i} & Q & \binom{2n}{2i+2} \\
 & & \binom{2n+1}{2i-1} & S & \binom{2n+1}{2i+1} \\
 & & & & \\
 & & \binom{2n+2}{2i} & & 
 \end{array}$$

l'application de l'équation dynamique et de l'équation de continuité, respectivement aux points P, Q et R,S nous donne

le système d'équation suivant:

$$P: (g/2\Delta x)(\zeta_{2i}^{2n} - \zeta_{2i-2}^{2n}) + (1/2\Delta t)(u_{2i-1}^{2n+1} - u_{2i-1}^{2n-1}) = 0$$

$$Q: (g/2\Delta x)(\zeta_{2i+2}^{2n} - \zeta_{2i}^{2n}) + (1/2\Delta t)(u_{2i+1}^{2n+1} - u_{2i+1}^{2n-1}) = 0$$

$$R: (1/2\Delta t)(\zeta_{2i}^{2n} - \zeta_{2i}^{2n-2}) + (h/2\Delta x)(u_{2i+1}^{2n-1} - u_{2i-1}^{2n-1}) = 0$$

$$S: (1/2\Delta t)(\zeta_{2i}^{2n+2} - \zeta_{2i}^{2n}) + (h/2\Delta x)(u_{2i+1}^{2n+1} - u_{2i-1}^{2n+1}) = 0$$

Par élimination des  $u$  ce système se réduit à une seule équation en  $\zeta$  :

$$(c) \quad \zeta_{2i}^{2n+2} - 2\zeta_{2i}^{2n} + \zeta_{2i}^{2n-2} - \sigma(\zeta_{2i+2}^{2n} - 2\zeta_{2i}^{2n} + \zeta_{2i-2}^{2n})$$

en posant

$$\sigma = (c \frac{\Delta t}{\Delta x})^2 = gh \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$$

Soient maintenant  $z$  et  $s$  respectivement les hauteurs d'eau et les vitesses parasites résultant d'une erreur de calcul  $\varepsilon$  commise lors du calcul de  $\zeta$ , par exemple au pas  $t = 2\Delta t$  ( $n=1$ ) et à l'abscisse  $x = 2p\Delta x$  ( $i=p$ ).

En procédant comme plus haut on peut établir une équation analogue à (c), où figurera la fonction  $\zeta + z$ , et par soustraction on obtient finalement une équation en  $z$  :

$$(d) \quad Z_{2i}^{2n+2} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i}^{2n-2} = \sigma(Z_{2i+2}^{2n} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i-2}^{2n})$$

La solution de (d) est déterminée par les valeurs initiales

$$Z_{2i}^0 = 0, \quad i=1, \dots, m; \quad Z_{2i}^2 = 0, \quad i \neq p; \quad Z_{2i}^2 = \varepsilon, \quad i=p$$

et par les valeurs aux limites

$$Z_0^{2n} - Z_{2(m+1)}^{2n} = 0$$

Nous avons donc à faire à un problème à valeurs initial pur, qui peut être mis sous la forme vectorielle suivante :

$$(e) \quad Z^{2n+2} - 2Z^{2n} + Z^{2n-2} = -2\sigma A Z^{2n}$$

où, avec  $i = 1, \dots, m$  :

$$Z = (\zeta_{2i})$$

$$AZ = {}^n \zeta_{2i} - \frac{1}{2} \zeta_{2i+2} + \zeta_{2i} - \frac{1}{2} \zeta_{2i-2} \quad ,$$

les valeurs initiales étant

$$Z^0 = 0 \quad \text{et} \quad Z^2 = (0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0) \quad .$$

Soit maintenant  $V_k$  un vecteur propre de la transformation A :  
on a alors

$$AV_k = \lambda_k V_k \quad , \quad \lambda_k = 1 - \cos k \frac{\pi}{m+1} \quad (k = 1, \dots, m) \quad .$$

En remarquant que le vecteur Z peut être remplacé par une combinaison linéaire

$$Z = \sum a_k V_k \quad ,$$

il est clair que pour chaque terme de cette combinaison l'équation (e) donnera lieu à une équation scalaire de la forme:

$$a_k^{2n+2} - 2a_k^{2n} + a_k^{2n-2} = -2\sigma \lambda_k a_k^{2n} \quad .$$

On sait qu'une relation de récurrence de ce type peut être résolue en fonction des racines de l'équation quadratique correspondante:

$$(a_k)^2 - 2(1 - \sigma \lambda_k) a_k + 1 = 0 \quad .$$

On peut démontrer que la solution restera finie si le coefficient de  $a_k$  dans l'équation quadratique reste compris entre +1 et -1. Pour que cette condition soit remplie quelle que soit la valeur de  $\lambda_k$ , on vérifie facilement que  $\sigma$  doit satisfaire l'inégalité

$$\left| 1 - \sigma \left( 1 - \cos \frac{m}{m+1} \pi \right) \right| < 1 \quad ,$$

d'où, avec  $L = 2(m+1)\Delta x$ , et en négligeant des termes d'ordre supérieur

$$\sigma = \left( c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1 + \left( \frac{\pi \Delta x}{L} \right)^2 \quad .$$

## I.2 Mouvement avec frottement

Quand le frottement n'est pas négligeable l'équation dynamique (a) du paragraphe précédent est à remplacer par:

$$g\zeta_x + u_t + \frac{r}{h} |u| u = 0$$

Appliquée par exemple au point P cette équation donne en différences finies:

$$(g/2\Delta x)(\zeta_{2i}^{2n} - \zeta_{2i-2}^{2n}) + (1/2\Delta t)(u_{2i-1}^{2n+1} - u_{2i-1}^{2n-1}) + f_{2i-1}^{2n} = 0$$

Le terme de frottement  $f_{2i-1}^{2n}$  de cette équation peut être traité de différentes façons, suivant que l'on utilise des formes purement explicites, purement implicites ou des formes mixtes.

Dans une forme purement explicite le terme de frottement est uniquement fonction de la vitesse connue, dans ce cas-ci  $u_{2i-1}^{2n-1}$ ; inversement on obtient une forme purement implicite si on n'utilise que la vitesse encore inconnue  $u_{2i-1}^{2n+1}$ .

Une forme générale du terme de frottement sera donc, avec  $1 \geq \theta, \eta \geq 0$  :

$$f_{2i-1}^{2n} = \frac{r}{h} \left| \theta u_{2i-1}^{2n-1} + (1-\theta) u_{2i-1}^{2n+1} \right| \cdot \left( \eta u_{2i-1}^{2n-1} + (1-\eta) u_{2i-1}^{2n+1} \right)$$

Comme au paragraphe précédent on peut maintenant appliquer l'équation dynamique aux points P, Q et l'équation de continuité aux points R, S, une première fois pour les fonctions  $\zeta$  et  $u$ , et une seconde fois pour les fonctions  $\zeta + z$  et  $u + s$  perturbées par les fonctions parasites  $z$  et  $s$  dues à une erreur de calcul  $\varepsilon$ .

On obtient de cette façon un système de huit équations qui, moyennant quelques opérations élémentaires peut être réduit à une seule équation:

$$Z_{2i}^{2n+2} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i}^{2n-2} = \sigma \left( Z_{2i+2}^{2n} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i-2}^{2n} \right) + \frac{2h\Delta t^2}{\Delta x} \left( f_{2i+1}^{2n}(u+s) - f_{2i+1}^{2n}(u) - f_{2i-1}^{2n}(u+s) + f_{2i-1}^{2n}(u) \right)$$

Avant de procéder au développement des termes  $f$  nous supposons la vitesse  $u$  constante. Cette hypothèse se justifie par le fait que quand la solution a tendance à devenir instable la vitesse perturbatrice  $s$  varie beaucoup plus rapidement que la vitesse  $u$ , ce qui a pour effet de rendre les dérivées  $u_x$  et  $u_t$  négligeables par rapport à  $s_x$  et  $s_t$ .

Dans ces conditions on trouve pour les termes de frottement:

$$\frac{2h\Delta t^2}{\Delta x} \cdot \frac{r}{h} \left( |u + \theta s_{2i,1}^{2n-1} + (1-\theta)s_{2i,1}^{2n+1}| \cdot (u + \eta s_{2i,1}^{2n-1} + (1-\eta)s_{2i,1}^{2n+1}) \right. \\ \left. - |u + \theta s_{2i-1}^{2n-1} + (1-\theta)s_{2i-1}^{2n+1}| \cdot (u + \eta s_{2i-1}^{2n-1} + (1-\eta)s_{2i-1}^{2n+1}) \right)$$

Cette expression peut encore être simplifiée en remarquant que, tout au moins au début, la perturbation  $s$  est petite par rapport à la vitesse  $u$ ; dans ces conditions le carré de  $s$  peut être négligé, et nous obtenons pour le terme de frottement:

$$\frac{2h\Delta t^2}{\Delta x} \cdot \frac{r}{h} \cdot |u| \cdot \left( (\theta + \eta)(s_{2i,1}^{2n-1} - s_{2i,1}^{2n+1}) + (2 - \theta - \eta)(s_{2i,1}^{2n+1} - s_{2i-1}^{2n+1}) \right)$$

Éliminons maintenant  $s$  au moyen de l'équation de continuité, et substituons l'expression ainsi obtenue dans le second membre de l'équation écrite plus haut. Cela donne finalement:

$$(f) \quad Z_{2i}^{2n+2} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i}^{2n-2} = \sigma (Z_{2i+2}^{2n} - 2Z_{2i}^{2n} + Z_{2i-2}^{2n})$$

$$- \frac{2\Delta t \cdot r \cdot |u|}{h} \left( (\theta + \eta)(Z_{2i}^{2n} - Z_{2i}^{2n-2}) + (2 - \theta - \eta)(Z_{2i}^{2n+2} - Z_{2i}^{2n}) \right)$$

Comme dans le cas du mouvement sans frottement l'équation (f) peut être mise sous forme vectorielle en introduisant le vecteur  $Z = (z_{2i})$ ; ensuite le problème peut être décomposé en une série de problèmes élémentaires par l'introduction des vecteurs propres  $V$ . Finalement la solution de ces problèmes



élémentaires dépend de la valeur des racines d'une équation quadratique qui dans ce cas-ci sera de la forme:

$$(g) \quad (a)^2 - 2a + 1 = -2\sigma\lambda a - \frac{2r|u|\Delta t}{h} ((\theta + \eta)(a-1) + (2-\theta-\eta)((a)^2 - a))$$

On peut démontrer que la perturbation  $x_{21}^{2n+2}$ , solution de l'équation (f), restera finie aussi longtemps que les racines  $a$  de l'équation quadratique (g) restent comprises entre +1 et -1. Le cas le plus défavorable se présente pour la valeur maximum  $\lambda = 1 - \cos \frac{m\pi}{m+1}$ , et on trouve alors comme condition de stabilité:

$$(h) \quad \sigma = \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < 1 + \left(\frac{\pi \Delta x}{L}\right)^2 + 2(1-\theta-\eta) \frac{r|u|\Delta t}{h}$$

