

L'INTERACTION DU PROPULSEUR ET DE LA CARENE ET SON EFFET SUR LES VIBRATIONS DE TORSION DE LA LIGNE D'ARBRES.

Par M. G. AERTSSEN,
Professeur à l'Université de Gand.

Sommaire.

Les formes usuelles de la carène à l'arrière troublent d'une façon intense le champ des vitesses au droit du propulseur, surtout dans le cas des navires à hélice unique. Il en résulte :

- 1) une modification du rendement propulsif;
- 2) des vibrations dans la partie arrière de la coque;
- 3) des vibrations de torsion dans la ligne d'arbres.

Seul, le dernier aspect du problème est retenu dans la présente étude.

Les vibrations de torsion sont provoquées, non seulement par le couple pulsatoire moteur de la machine à vapeur ou du moteur Diesel, mais également par le couple pulsatoire résistant au propulseur. Les équations de mouvement de l'arbre sont posées et résolues et il est alors possible d'estimer dans des cas concrets, l'un relatif à une machine à vapeur, l'autre relatif à un moteur Diesel, l'importance des tensions de vibration dues aux couples harmoniques. On peut ainsi se rendre compte notamment de l'influence d'une orientation judicieuse de l'hélice par rapport à l'arbre coudé de la machine.

Il y a donc intérêt, à plus d'un titre, non seulement à étudier sur modèle l'irrégularité du sillage au droit de l'hélice, mais également à faire ces investigations sur réel.

I. INTERACTION DU PROPULSEUR ET DE LA CARENE.

Autour d'un corps plongé dans un liquide non visqueux animé d'une vitesse de translation constante se forme un écoulement potentiel et, le cas échéant, un écoulement ondu-

latoire. Dès que le frottement intervient il apparaît au contact de la carène une couche, dite couche limite, dans laquelle, par glissement des plans successifs, le liquide visqueux est arraché de la paroi, dans laquelle donc le liquide passe de l'état de repos contre la paroi à la vitesse de l'écoulement potentiel à la sortie de la couche limite. L'épaisseur de la couche limite augmente de l'étrave vers l'étambot, donc le gradient de vitesse suivant une normale à la direction de l'écoulement, qui détermine l'importance du frottement local, diminue de l'avant vers l'arrière. On peut admettre que l'écoulement potentiel s'opère autour du corps formé par la carène et la couche limite.

Cette modification de l'écoulement uniforme v donne naissance au sillage.

Si la carène est mue par un propulseur, la présence de celui-ci ne modifie en rien l'écoulement autour du corps immergé aussi longtemps que l'avance du propulseur due au pas se fait sans recul, autrement dit, aussi longtemps que le propulseur n'exerce pas de poussée sur le corps. Dès l'instant cependant que le propulseur, par suite d'une impulsion communiquée au liquide environnant, exerce une poussée sur le corps, le régime des pressions et vitesses sur de grandes étendues de liquide situées à l'avant du propulseur se trouve troublé. De cette modification naît la succion qui produit une augmentation de la résistance à l'avancement de la carène.

Les deux champs de vitesses précités réagissent l'un sur l'autre.

Reprenons le sillage. L'écoulement potentiel montre à l'arrière, par suite de l'élargissement des filets liquides, une réduction des vitesses, ce qui, relativement à l'écoulement uniforme v , correspond à un écoulement dirigé vers l'avant. Revenant donc à l'image du navire qui se déplace avec une vitesse v dans un liquide au repos, nous constatons une perturbation de vitesse dirigée vers l'avant $w_p v$.

De même le liquide réel, par suite de sa viscosité, sera animé d'une vitesse vers l'avant qui, au droit du propulseur, est $w_f v$. Cette vitesse décroît rapidement quand on s'éloigne de la carène et s'annule quand on quitte la couche limite.

Enfin, les vagues créées par le navire en marche provoquent des vitesses orbitaires qui, suivant la théorie de la houle trochoïdale, sont dans le sens de la marche du navire

au droit d'une crête, en sens contraire au droit d'un creux : selon qu'une crête ou un creux se trouvent à l'aplomb de l'hélice, la perturbation de vitesse $w_{or} v$ est donc positive ou négative. Cette perturbation est faible vis-à-vis des deux autres, elle ne diminue pas vite quand on s'écarte de la crête.

$w_p v$, $w_f v$ et $w_{or} v$ sont les trois composantes de la vitesse de sillage $w v$. Le sillage total est la somme du sillage potentiel, du sillage de frottement et du sillage orbitaire : $w = w_p + w_f + w_{or}$.

Le propulseur ne peut emprunter de l'énergie au sillage potentiel, celui-ci naissant dans le liquide idéal, non visqueux. De l'énergie peut être reprise par le propulseur à l'énergie cinétique contenue dans le liquide animé d'un mouvement vers l'avant par suite du frottement, donc au sillage de frottement. La possibilité existe également que le propulseur reprenne de l'énergie au sillage orbitaire mais celui-ci, comme nous l'avons fait remarquer, est très réduit.

Du fait de la succion la poussée T que l'hélice exerce sur le palier de butée devra être plus grande que la résistance W de la carène sans propulseur :

$$T (1 - t) = W$$

où t est le coefficient de succion.

Si nous désignons, pour une vitesse déterminée v du navire par :

v_e la vitesse relative de translation de l'hélice par rapport à l'eau,

C le couple sur l'arbre d'hélice,

P_a la puissance sur l'arbre d'hélice,

P_u la puissance utile ou puissance de remorquage,

γ_h le rendement de l'hélice en eau libre ou rendement propre,

N le nombre de tours par unité de temps,

on peut écrire : $v_e = v (1 - w)$.

$$\gamma_h = \frac{T v_e}{P_a} = \frac{T v_e}{2\pi N C}$$

Mais à l'arrière du navire le rendement γ_h est modifié du fait que l'hélice ne tourne pas dans un courant uniforme de vitesse relative v_e . Comme nous verrons plus loin, le sillage w est loin d'être uniforme sur le cercle d'hélice. Eu égard à cette variation, il convient de multiplier le second membre de l'égalité précédente par un coefficient γ_{rr} ou rendement

d'adaptation (relative rotative efficiency); donc :

$$\frac{T v_e}{2 \pi N C} \gamma_{rr}$$

Le rendement global de la propulsion ou rendement propulsif η_p devient :

$$\eta_p = \frac{P_u}{P_a} = \frac{W}{2 \pi N C} = \frac{(1-t) T v_e}{(1-w) 2 \pi N C} = \frac{1-t}{1-w} \gamma_h \gamma_{rr}$$

Le rendement propulsif η_p est ainsi le produit de trois facteurs :

1° le rendement de l'hélice en eau libre γ_h

2° le rendement coque (hull-efficiency) $\frac{1-t}{1-w}$

3° le rendement d'adaptation γ_{rr} très voisin de 1.

On remarque qu'il est important d'être renseigné sur les valeurs de w , t et γ_{rr} .

Une comparaison des résultats obtenus au bassin d'essais sur le modèle de l'hélice en eau libre et sur le modèle du navire en remorquage et en autopropulsion permet de calculer ces coefficients. (24) (1).

Pour les deux cas, essai en remorquage et en autopropulsion, la vitesse est proportionnelle à la racine carrée des dimensions linéaires. Toutefois en autopropulsion, comme seule la résistance résiduaire répond à la loi de similitude de Reech-Froude, on doit corriger pour l'effet d'échelle dans la résistance de frottement en soumettant le modèle à une poussée de compensation R_a :

$$R_a = W_f - \frac{W'_f}{\alpha^3};$$

W_f et W'_f sont resp. les résistances de frottement calculées du modèle et du navire, α le rapport des dimensions linéaires du navire à celles du modèle.

On s'aperçoit que dans la méthode envisagée les mesures de couple, poussée et nombre de tours sur le modèle en autopropulsion ont lieu au « self propulsion point of ship » et non, comme cela se pratique suivant une autre méthode, au « self propulsion point of model ».

L'essai du modèle en remorquage donne une résistance W_0

(1) Les chiffres entre parenthèses se rapportent à la bibliographie.

L'essai du modèle en autopropulsion donne une poussée T pour un certain v et un certain N , Il en résulte une constante de poussée $C_T = \frac{T}{\rho D^4 N^2}$ où ρ désigne la masse spécifique de l'eau, D le diamètre de l'hélice.

Du diagramme de l'hélice en eau libre on déduit alors un recul réel s_n . Mais le recul apparent est donné par l'essai sur modèle $s_s = \frac{NH - v}{NH}$, H est le pas. De s_n et s_s on déduit le sillage w qu'on appelle encore sillage effectif parce qu'il est enregistré par l'hélice.

Pour calculer ce sillage effectif, on aurait pu également partir de la constante de couple.

La poussée exercée par l'hélice T est équilibrée par la résistance du modèle W_0 diminuée de la poussée de compensation R_a . Toutefois, eu égard à la succion t , l'effet de T se trouve réduit à $T(1-t)$. **Donc :**

$$T(1-t) = W_0 - R_a$$

$$\text{d'où : } t = \frac{T - (W_0 - R_a)}{T}$$

$$\text{On en déduit le coefficient coque } \frac{1-t}{1-w}$$

D'autre part l'essai du modèle en autopropulsion donne un rendement propulsif $\gamma_p = P_u/P_a$ qui, divisé par $\gamma_h \frac{1-t}{1-w}$ donne le rendement d'adaptation γ_{rr} .

Pour passer du modèle au navire, tous ces coefficients sont sujets à une correction d'échelle et de plus il y a l'influence de la rugosité.

L'étude de la répartition du sillage sur le cercle d'hélice réclame un appareillage spécial qui est très bien décrit dans le travail de Van Lammeren sur les coefficients de la propulsion w , t et γ_{rr} du Bolivar (25). Si l'on se contente de la connaissance de la variation radiale — cela suffit pour la détermination de l'hélice à pas variable ajusté à cette variation — on peut utiliser soit les blade-wheels dont l'emploi fut introduit par Kempf-Hoffmann, soit l'anneau à dynamomètre mis au point au bassin de Wageningen (24).

Les blade-wheels sont étalonnés en eau libre afin de déter-

miner la relation entre le nombre de tours et la vitesse d'entrée de l'eau. Ils permettent alors, étant montés derrière le modèle, d'obtenir par l'enregistrement du nombre de tours la vitesse d'entrée moyenne de l'eau. Ces blade-wheels accusent, en eau libre, pour le nombre de tours une loi de variation linéaire en fonction de la vitesse d'entrée, du moins en-deçà d'une certaine vitesse limite.

La méthode développée par le bassin de Wageningen consiste dans l'emploi d'un certain nombre d'anneaux concentriques disposés transversalement. L'anneau est attaché au moyen d'un support profilé, qui pénètre par une ouverture dans la coque, à un chariot qui se meut dans le sens longitudinal du modèle et est relié à un dynamomètre. Un essai en eau libre permet d'étalonner les anneaux.

Van Lammeren montre dans son étude sur le Bolivar que l'emploi des anneaux conduit à une meilleure intégration dans le cas d'une répartition assez irrégulière du sillage sur le pourtour. Pour la détermination du sillage moyen nominal, on intègre suivant le rayon. Une intégration qui fait intervenir le volume du liquide donne des résultats qui se rapprochent le plus du sillage effectif dont il a été question plus haut et qui est enregistré par l'hélice elle-même :

$$W_m = \frac{\int_{r_i}^R w 2 \pi r dr}{\int_{r_i}^R 2 \pi r dr} = \frac{\int_{r_i}^R w r dr}{1/2 (R^2 - r_i^2)}$$

où w indique le sillage moyen au rayon r , r_i et R les rayons au moyeu et à la périphérie de l'hélice.

Dans ce qui précède on ne s'intéresse qu'à la composante axiale du sillage. Van Lammeren approuve par ailleurs l'emploi des blade-wheels dans le cas des navires à deux hélices où la variation du sillage sur le pourtour n'est pas importante.

Si l'on désire connaître la variation du sillage sur le pourtour — et c'est ce terrain que nous désirons explorer — il est indispensable d'avoir recours à des mesures effectuées en un nombre considérable de points du cercle d'hélice. Van Lammeren fait observer dans son étude (25) que les mesures furent faites en 32 points répartis sur un demi-cercle mais qu'il eût été souhaitable d'en faire plus. Les tubes de Pitot

furent du type à bout sphérique (système Gebers) permettant de déterminer avec suffisamment d'exactitude les composantes axiales des vitesses.

Le partage du sillage w en ses trois composantes w_p , w_f et w_{or} fut introduit par Horn et Helmbold. Helmbold, qui négligea le sillage orbitaire, eut l'idée originale de séparer les deux composantes restantes du sillage en mesurant le sillage au moyen de blade-wheels, le modèle étant successivement en marche avant et en marche arrière. Comme le sillage, mesuré au droit de l'hélice, correspond en marche arrière au seul sillage potentiel, la différence des deux mesures procure le sillage de frottement. Des objections ont été émises contre cette méthode : la suppression de w_f doit nécessairement affecter la valeur de w_p , car comme il a été signalé au début de cette étude, l'écoulement potentiel a lieu autour du corps formé par la carène et la couche limite. Helmbold proposa encore de mesurer derrière le modèle la pression statique et la pression totale au moyen de tubes de Pitot complets : on peut déduire de ces mesures et de la connaissance de la pression dans la zone non troublée de l'écoulement le sillage potentiel d'abord, le sillage total ensuite et enfin par différence le sillage de frottement. Ces résultats ne peuvent être fort précis, étant donné que l'on néglige le sillage orbitaire qui est peu accessible aux mesures.

Les considérations qui précèdent ne valent que pour le sillage nominal, soit le sillage non troublé par la présence du propulseur.

Avant d'entamer l'étude du champ résultant de l'interaction des champs de vitesses navire et hélice, examinons avec Dickmann (4) le champ créé par l'hélice en eau libre.

En accord avec la théorie moderne de l'hélice où la poussée produite résulte de la formation de tourbillons autour de la surface de l'aile on fait les trois hypothèses suivantes :

- 1) le propulseur a un nombre infini d'ailes;
- 2) on néglige la rotation de la lame cylindrique d'eau due à l'action du propulseur;
- 3) l'hélice est faiblement chargée.

Le propulseur exerce sur l'eau des efforts dT uniquement dirigés suivant la direction de marche du navire. L'intégrale de ces efforts est la poussée T . L'élément de surface du pro-

pulseur dans le cercle πR^2 étant désigné par dF , l'accroissement de pression de l'avant vers l'arrière du propulseur Δp sera :

$$\Delta p = \frac{dT}{dF}$$

et l'accroissement moyen pour toute la surface de l'hélice :

$$\Delta p_o = \frac{T}{F}$$

D'après l'hypothèse 3^e, les coefficients de charge de l'hélice, le coefficient de charge local c_s et le coefficient de charge moyen c_{s_o} :

$$c_s = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{dT}{\frac{1}{2} \rho v^2 dF}$$

$$c_{s_o} = \frac{\Delta p_o}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho v^2 F}$$

sont supposés avoir une valeur faible.

Si on désigne par $\frac{C}{2}$ la vitesse avec laquelle l'eau traverse le propulseur, la vitesse loin en arrière de l'hélice étant c , la « einfache strahltheorie » qui néglige la contraction enseigne que :

$$c = v \left(-1 + \sqrt{1 + c_s} \right)$$

Passons maintenant à l'interaction du navire et du propulseur : le champ du propulseur est influencé par le navire, de même que le champ du navire est influencé par la présence du propulseur.

Le sillage nominal en l'absence d'hélice, se modifie par la présence de l'hélice en un sillage effectif, variable sur le cercle d'hélice, et dont le sillage enregistré par l'hélice, dont nous avons parlé plus haut, est une moyenne.

Examinons le changement qu'apporte la présence du navire au fonctionnement de l'hélice.

En chaque point du cercle d'hélice agit non plus un courant de vitesse v , mais un courant de vitesse $v(I - w)$, qu'il faut composer avec la vitesse circonférentielle pour obtenir la vitesse d'entrée de l'eau dans l'aile d'hélice et l'angle d'attaque. Le sillage local ayant été déterminé en plusieurs endroits par essais sur modèle non pourvu de propulseur, on peut calculer en ces points la poussée dT . Van Lammeren a fait ces calculs pour le navire à une hélice Simon Bolivar,

La fig. 1 donne la répartition du sillage nominal sur le cercle d'hélice. Les calculs de Van Lammeren pour une aile et une hélice complète à quatre ailes ont été transportés par Dickmann sur une hélice à nombre infini d'ailes, présentant la même répartition de sillage, aussi bien radiale que périphé-

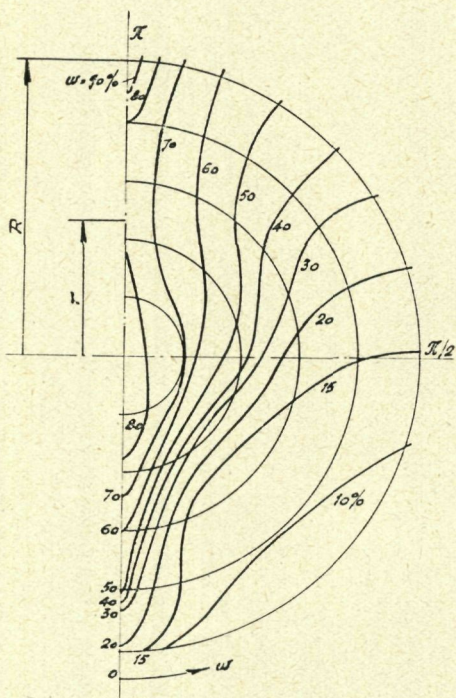
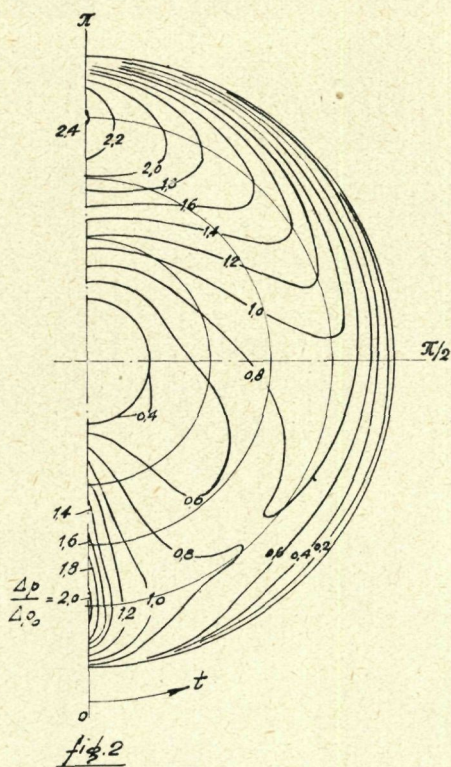


fig. 1

rique, et ayant même rayon et même poussée totale (4). Les résultats sont rassemblés fig. 2, qui indique la répartition réelle de la poussée sur le cercle d'hélice. On remarque que dans le voisinage du plan diamétral la poussée locale atteint 2, 4 fois la valeur moyenne de cette poussée. Dickmann observe que la valeur réelle de cette poussée locale est même plus grande si l'on substitue dans les calculs au sillage nominal le sillage effectif qui est difficilement mesurable, mais



dont on sait qu'au voisinage immédiat de la coque il est supérieur au sillage nominal.

Les écarts sont encore plus grands entre le coefficient de charge local et le coefficient de charge moyen.

$$c_s = \frac{\Delta p}{\sqrt{2} \rho v^2 (1-w^2)} \quad \text{et} \quad c_{s_0} = \frac{S}{\sqrt{2} \rho v^2 (1-w_m)^2 F}$$

Alors que dans l'exemple cité la pointe de poussée locale atteint 2,4, le coefficient de charge local atteint 20 fois le coefficient de charge moyen qui vaut approximativement 1.

Cherchons maintenant la relation qui relie le sillage à la succion.

Il paraît logique de scinder la succion, tout comme le sillage, en succion potentielle t_p , de frottement t_f et orbitaire t_{or} .

Prenons d'abord le cas simple d'un sillage effectif uniforme,

Fresenius, par un raisonnement qui a été critiqué, démontra que dans un liquide n'ayant pas de viscosité :

$$w_p = t_p$$

On admet assez facilement cette égalité quand on considère que la translation à vitesse constante d'un corps complètement immergé dans un liquide non visqueux ne réclame aucune énergie : l'énergie enlevée par la suction doit donc être égale à l'énergie communiquée par le sillage. Toutefois comme le rendement du propulseur n'est pas 1, mais d'après

la « strahltheorie » seulement $\frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_{s_0}}}$, il faut remplacer dans la relation énergétique qui conduit à $w_p = t_p$, wp par $w_p \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_{s_0}}}$, de sorte que la relation $w_p = t_p$ devient, en tenant compte ainsi du coefficient de charge du propulseur :

$$t_p = w_p \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_{s_0}}}$$

La grande influence qu'exerce la disparité du sillage derrière le propulseur — disparité qui est due en premier ordre au sillage de frottement — sur la charge de l'hélice résulte clairement de la fig. 2, de sorte qu'il faut écrire pour c_{s_0} :

$$c_{s_0} = \frac{T}{1/2 \rho v^2 (1 - w_f)^2 F} \text{ et non pas } c_{s_0} = \frac{T}{1/2 \rho v^2 (1 - w)^2 F}$$

La dernière formule cependant convient généralement et donne une bonne approximation. De même la vitesse de l'eau $\frac{c}{2}$ traversant le propulseur est :

$$\frac{c}{2} = v (1 - w_f) (-1 + \sqrt{1 + c_{s_0}}).$$

Les formules précédentes auxquelles nous sommes arrivés par un raisonnement assez simple sont démontrées d'une façon plus rigoureuse par Dickmann (3) qui fait usage pour l'étude du courant de sillage effectif (potentiel, de frottement et orbitaire) d'une méthode assez compliquée de puits et de sources.

Dickmann mentionne encore que la suction de frottement

et la succion orbitaire peuvent être négligées à l'endroit qu'occupe usuellement l'hélice. Van Lammeren cite (25) que, la rugosité du modèle n'exerçant, à égalité de CT , que fort peu d'influence sur le coefficient de succion, il est logique d'admettre que t_f est négligeable. Weitbrecht cependant note (27) que des essais sur modèles lui ont donné des valeurs de t_f variant de 20 à 35 % de la succion totale et, à juste titre d'ailleurs, recommande de faire des essais sur réel.

On a admis dans ce qui précède une répartition uniforme du sillage sur le cercle d'hélice. Toutefois on constate que, si on applique la formule qui donne t_p en fonction de w_p et de la charge dans le cas d'un sillage uniformé, on trouve des valeurs inférieures à celles que donnent des essais sur modèles.

L'explication réside dans la disparité du sillage sur le cercle d'hélice. Si nous continuons à faire l'approximation $t = t_p$ il suffira de calculer tT par intégration sur le cercle de l'hélice de l'équation des quantités de mouvement pour obtenir la valeur de t :

$$t T = \rho \int_0^F w_p v c dF$$

ou approximativement : $c = v (1 - w) (-1 + \sqrt{1 + c_s})$

avec

$$c_s = \frac{\lambda_p}{\frac{1}{2} \rho v^2 (1 - w)^2}$$

Des essais de Weitbrecht, il ressort encore que, pour un même sillage moyen, les navires usuels ont un coefficient de succion plus grand que les corps de rotation équivalents : la disparité plus grande du sillage pour les navires se révèle être ainsi à l'origine de cette différence.

Van Lammeren, à la suite de ses essais (24), constate que c'est la variation périphérique du sillage qui est à l'origine des grandes valeurs de t , vu qu'en écartant l'hélice de la carène la succion diminue considérablement. Des formes arrière qui étalent le sillage dans le sens périphérique donnent lieu à une succion réduite, donc à un meilleur rendement propulsif. On ne peut cependant pas dire a priori, comme le constate Van Lammeren, qu'il en résultera une amélioration de l'ensemble, parce que la résistance à l'avancement peut avoir subi une augmentation par suite de la modification des formes.

On comprend ainsi la tendance à remplacer dans certains cas à l'arrière du navire les couples en V par des couples en U. Récemment encore une amélioration des formes arrière, ayant le même objectif, fut proposée en Hollande par Roosa et Vrijlandt (21). Leur proposition, visant à obtenir l'effet dit « Roovrij » consistant essentiellement dans l'aplatissement de la courbe du sillage, donna lieu toutefois à de nombreuses controverses.

II. L'EFFET DE L'INTERACTION PROPULSEUR-CARENE SUR LES VIBRATIONS DE TORSION DE LA LIGNE D'ARBRES.

Les architectes navals qui cherchaient à régulariser le sillage à l'arrière du navire, sur le pourtour du cercle d'hélice, soit en modifiant les formes, soit simplement en reculant le propulseur, visaient moins à combattre les vibrations qu'entraîne l'irrégularité du sillage qu'à obtenir un meilleur régime hydrodynamique. En atteignant cependant ce dernier objectif ils supprimaient en même temps une source de vibrations.

Dans plusieurs cas le but principal fut la suppression des vibrations. Kempf, qui modifia l'arrière du Normandie, en même temps qu'il apporta de nouvelles hélices, mentionne (4) que la réduction des vibrations de la coque à l'arrière au quart de leur valeur primitive, fut due pour une grande part à l'amélioration des formes. Kempf signale aussi que des mesures de sillage furent faites dans de nombreux cas afin d'obtenir, par une modification des formes, une plus grande uniformité dans le sillage conduisant simultanément à un meilleur rendement propulsif et à la suppression de vibrations gênantes.

Lewis entreprit également l'étude des vibrations produites à l'arrière de la coque par l'irrégularité du sillage. Il arrive à la conclusion que des vibrations importantes peuvent résulter, d'une part des impulsions transmises par les ailes aux paliers de l'arbre d'hélice, d'autre part des impulsions de succion sur l'arrière de la coque (18).

Seul le premier effet entre en ligne de compte dans le cas des vibrations de torsion de la ligne d'arbres. C'est de ce phénomène que nous allons nous occuper plus en détail.

Il y a exactement un demi-siècle que Frahm étudia le problème dans le cas de l'attaque de l'hélice par machine à vapeur à piston (6). Sa méthode est restée classique : il considère l'arbre, de rigidité connue, reliant deux masses connues, m_1 et m_2 , la machine de propulsion et l'hélice. Le couple, variable mais périodique, est analysé en une série de Fourier comprenant la valeur moyenne, produisant la rotation pure de l'arbre, et des harmoniques divers qui excitent des vibrations de torsion : $P_1 \sin (pt + \alpha_1)$, $P_2 \sin (2 pt + \alpha_2)$, $P_3 \sin (3 pt + \alpha_3)$

Les masses sont réduites, par des méthodes sur lesquelles nous ne nous étendrons pas, au rayon de manivelle r_0 et la longueur réduite de l'arbre est l . Si G est le module de glissement du matériau, I le moment d'inertie polaire de l'arbre,

$$GI$$

le coefficient de rigidité de celui-ci sera $c = \frac{GI}{l}$.

I_1 et I_2 étant respectivement les moments d'inertie de la machine et du propulseur,

Θ_1 et Θ_2 respectivement les amplitudes en radians de ces masses,

k le coefficient d'amortissement de l'hélice,

les équations de mouvement de ces deux masses s'écrivent :

$$I_1 \Theta_1'' + c(\Theta_1 - \Theta_2) = P_1 \sin (pt + \alpha_1) + P_2 \sin (2pt + \alpha_2) + \dots$$

$$I_2 \Theta_2'' + k\Theta_2 + c(\Theta_2 - \Theta_1) = 0$$

Frahm admet un couple d'amortissement à l'hélice proportionnel à la vitesse angulaire et donne à k/r_0^2 la valeur

$$W_m$$

$r \frac{v_m}{r}$ où :

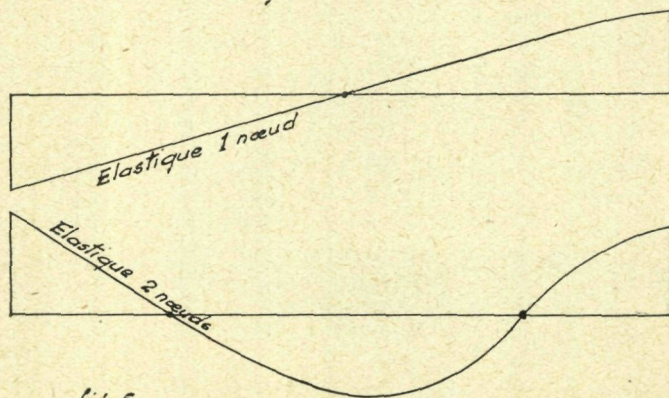
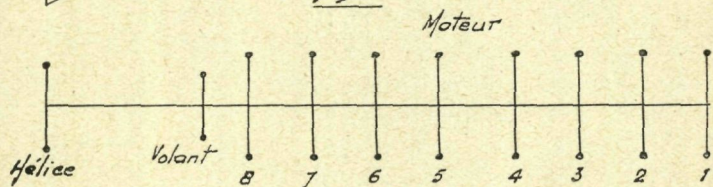
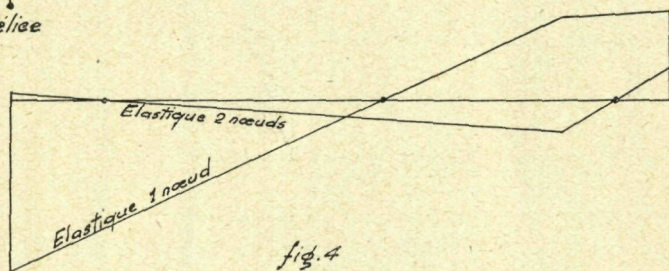
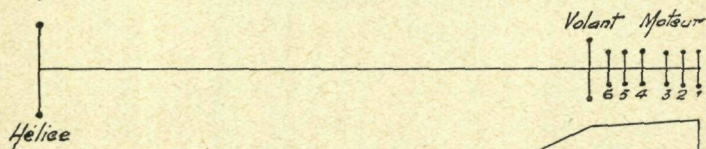
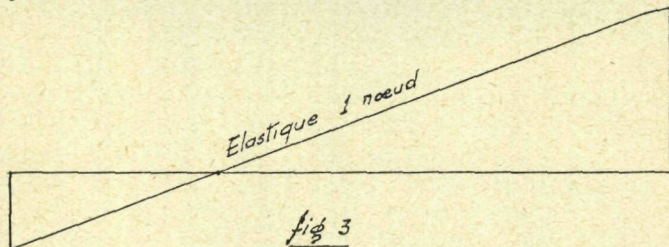
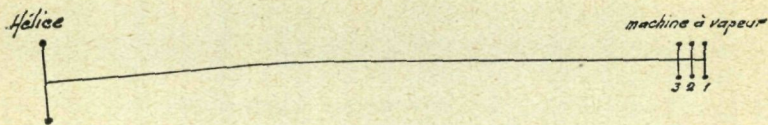
$$v_m$$

W_m est la résistance moyenne de l'hélice,

v_m la vitesse circonférentielle, toutes deux réduites au rayon,

r un coefficient compris entre 3,6 et 4.

Une première constatation qui dérive de la configuration des équations est que le mouvement des masses m_1 et m_2 est la superposition des mouvements vibratoires que communiquent à ces masses les couples sinusoïdaux $P_1 \sin (pt + \alpha_1)$, $P_2 \sin (2 pt + \alpha_2)$... pris isolément. Nous retrouverons cette règle dans le cas où également du côté du propulseur le



couple est pulsatoire. De plus, chaque couple d'excitation $P_1 \sin(\rho t + \alpha_1)$ communique aux masses m_1 et m_2 des vibrations de pulsation ρ décalées par rapport au couple d'excitation et décalées entre elles.

Ne tenons pas compte de l'amortissement : la vibration est à un nœud dont les distances à la machine et au propulseur sont en raison inverse des moments d'inertie I_1 et I_2

et la pulsation naturelle de l'arbre est $\rho_c = \sqrt{c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}$

L'élastique pour cette vibration où les amplitudes varient linéairement suivant la ligne d'arbres est celle de la fig. 3.

Pour un nombre de tours de la machine tel que la pulsation d'un des couples harmoniques est égale à ρ_c l'amplitude de la vibration n'est limitée que par l'importance de l'amortissement.

Frahm n'introduit dans les équations de mouvement des deux masses que l'amortissement dû à l'hélice. Celui-ci est important, mais il faut tenir compte de l'hystérésis de l'arbre et de l'énergie absorbée par les organes de la machine. Frahm, pour tenir compte de ces derniers effets, recommande de majorer k d'environ 25 %. Il paraît d'ailleurs indiqué d'introduire dans la première des équations Frahm un terme $k_1 \Theta_1$ dû à l'amortissement dans la machine, le terme $k_2 \Theta_2$ de la seconde équation ayant rapport à l'hélice, le terme hystérésis étant départagé entre k_1 et k_2 . Cela est surtout utile quand la machine est non plus une machine à vapeur mais un moteur Diesel puissant où k_1 peut devenir plus important que k_2 .

La variation dans le tour du couple résistant de l'hélice peut également rendre nécessaire l'introduction dans la seconde équation d'un couple périodique de fréquence nN , où n désigne le nombre d'ailes du propulseur. Ce couple périodique devrait figurer normalement dans le premier membre, vu que c'est un couple résistant.

Pour plus de symétrie dans le système des deux équations différentielles nous mettons dans le second membre les harmoniques de fréquences nN , $2nN$, etc. qui composent ce couple périodique en augmentant les phases de π .

Le système d'équations différentielles devient ainsi :

$$I_1 \Theta_1'' + k_1 \Theta_1' + c(\Theta_1 - \Theta_2) - P_1 \sin(pt + \alpha_1) + P_2 \sin(2pt + \alpha_2) + \dots$$

$$I_2 \Theta_2'' + k_2 \Theta_2' + c(\Theta_2 - \Theta_1) = Q_1 \sin(qt + \beta_1) + Q_2 \sin(2qt + \beta_2) + \dots$$

Il était assez compréhensible qu'au temps de la machine à vapeur on attachât peu d'importance aux impulsions périodiques de l'hélice vu la faible amplitude en général de la vibration au propulseur : I_1 étant généralement inférieur à I_2 , le nœud est assez rapproché du propulseur. Le travail de ces impulsions ne peut donc être bien considérable. De plus la variation du couple de la machine à vapeur est plus importante que celle du couple à l'hélice : dans le cas de la machine usuelle à triple détente le rapport du couple maximum au couple moyen varie de 1,1 à 1,5 et est assez souvent 1,25.

Du moment que la machine de propulsion devint le moteur Diesel, les conditions furent renversées. La fig. 4 montre l'élastique des vibrations de torsion à 1 et 2 nœuds, dans le cas du moteur situé au milieu, la fig. 5 l'élastique pour un moteur situé à l'arrière (5). Si nous prenons le cas usuel du moteur situé au milieu du navire, seules les vibrations à un nœud peuvent rendre utile la prise en considération des impulsions de l'hélice, vu que pour les vibrations à 2 nœuds, l'un de ces nœuds étant normalement à proximité du propulseur, les impulsions de l'hélice ne fournissent pas de travail. Les vibrations à un nœud toutefois ont une amplitude considérable à l'hélice vu la grande distance qui sépare dans ce cas le propulseur du nœud. Le travail des impulsions à l'hélice risque donc de devenir important en comparaison du travail des impulsions au moteur.

Le tableau qui suit donne le rapport du couple maximum au couple moyen pour des moteurs diesel à simple effet d'après des données de R. Sulzer (22).

| Nombre de cyl. | 6 | 8 | 10 |
|----------------|-----|------|------|
| 4 temps | 2,6 | 2,24 | 1,75 |
| 2 temps | 1,4 | 1,10 | 1,07 |

On est assez mal renseigné au sujet de la variation du couple à l'hélice. La disparité entre les résultats pour divers navires est tellement grande qu'on serait tenté de relever sur chaque modèle de navire dont on veut faire l'étude un diagramme de répartition du sillage. Si nous passons en revue les renseignements qui ont été publiés, nous trouvons peu au sujet de la variation du couple, par contre assez bien de renseignements au sujet de la variation de la poussée. En première approximation nous pouvons admettre que la variation du couple est du même ordre de grandeur que celle de la poussée. Le tableau qui suit donne des résultats publiés : il indique, comme pour le couple au moteur, le rapport de la valeur maximum à la valeur moyenne soit pour le couple

$$\frac{C \text{ max.}}{C \text{ moy.}} \quad \text{soit pour la poussée} \quad \frac{T \text{ max.}}{T \text{ moy.}}$$

| Nom du navire | Nombre d'hélices | Nombre d'ailes | $\frac{C_{\text{max.}}}{C_{\text{moy.}}}$ | $\frac{T_{\text{max.}}}{T_{\text{moy.}}}$ | Nom de l'auteur et indice publication |
|----------------------|------------------|----------------|---|---|--|
| — | 2 | 4 | 1,05 | — | Muller (19) |
| President Hoover | 2 | 3 | 1,033 | — | Lewis (17) |
| Empress of Australia | 2 | 4 | — | 1,04 à 1,045 | Bogert, voir Lewis (17) |
| — | 1 | 3 | — | 1,17 | } Graff (9) d'après mesures Kempf (14) |
| — | 1 | 4 | — | 1,06 | |
| Simon Bolivar | 1 | 4 | — | 1,15 | Van Lammeren (25) |

Les chiffres des trois premières lignes sont les résultats de mesures faites à bord de navires, les chiffres des trois dernières lignes des résultats de calculs à partir de mesures de sillage sur modèles faites au moyen de tubes de Pitot. Nous avons choisi, parmi les courbes publiées par Van Lammeren (25) donnant la variation de la poussée dans le tour celle à $0,6R$, ce rayon moyen pouvant être considéré comme caractéristique de l'ensemble de l'hélice. Le coefficient de charge défini par $W_0 - R'a / W_0 - R_a$, où $R'a$ représente la traction exercée sur le modèle, est pris égal à l'unité (self propulsion point of ship).

Pour les navires à deux hélices, il ne fallait pas s'attendre à de grandes perturbations, par contre on s'aperçoit que pour les navires à une hélice la variation du couple résistant à l'hélice sera souvent du même ordre de grandeur que la varia-

tion du couple moteur des Diesel lourds. Cette variation à l'hélice étant analysée en série de Fourier avec comme pulsation fondamentale q , les deux équations de mouvement pourront s'écrire finalement :

$$I_1 \Theta_1'' + k_1 \Theta_1' + c(\Theta_1 - \Theta_2) = P_1 \sin(pt + \alpha_1) + P_2 \sin(2pt + \alpha_2) + \dots$$

$$I_2 \Theta_2'' + k_2 \Theta_2' + c(\Theta_2 - \Theta_1) = Q_1 \sin(qt + \beta_1) + Q_2 \sin(2qt + \beta_2) + \dots$$

Comme dans le cas des équations de Frahm, la physionomie de ces deux équations différentielles montre que le mouvement vibratoire est la superposition des mouvements vibratoires que donneraient à l'arbre les harmoniques $P_1 \sin(pt + \alpha_1)$, $P_2 \sin(2pt + \alpha_2)$, ..., $Q_1 \sin(qt + \beta_1)$, $Q_2 \sin(2qt + \beta_2)$, ...

Des harmoniques de l'hélice, l'harmonique fondamental nN sera généralement important; l'harmonique $2nN$ peut encore être appréciable. Kane et Goldrick (18), dans leur étude sur l'influence de l'hélice sur les vibrations longitudinales de la ligne d'arbre font remarquer que dans certains cas un harmonique de poussée $2nN$ a été observé, mais que cet harmonique ainsi que les harmoniques supérieurs sont peu importants en règle générale. Rabbeno (20) cependant fit des calculs de couples résistants en tenant compte de la disparité du sillage et constata que le navire à une hélice à trois ailes donne un harmonique $2nN$ appréciable.

Eu égard à la superposition des effets, l'étude des vibrations de torsion peut se faire en considérant séparément un harmonique du couple moteur mais combiné avec un harmonique du couple de l'hélice. Les équations de mouvement deviennent ainsi, p et q étant deux pulsations quelconques, et en choisissant convenablement l'origine des temps :

$$I_1 \Theta_1'' + k_1 \Theta_1' + c(\Theta_1 - \Theta_2) = P_1 \sin pt$$

$$I_2 \Theta_2'' + k_2 \Theta_2' + c(\Theta_2 - \Theta_1) = Q_1 \sin(qt + \Phi)$$

ou encore, en divisant par c et en posant :

$$J_1 = \frac{I_1}{c} \quad J_2 = \frac{I_2}{c} \quad K_1 = \frac{k_1}{c} \quad K_2 = \frac{k_2}{c}$$

$$\frac{P_1}{c} = D \quad \frac{Q_1}{c} = E$$

$$J_1 \Theta_1'' + K_1 \Theta_1' + \Theta_1 - \Theta_2 = D \sin pt$$

$$J_2 \Theta_2'' + K_2 \Theta_2' + \Theta_2 - \Theta_1 = E \sin(qt + \Phi)$$

La résolution de ces équations pour laquelle nous renvoyons à l'annexe conduit à :

$$\Theta_1 = \left[\begin{array}{l} FpJ_2 + HK_2 - \frac{F}{p} \\ J_2 Gq + K_2 I - \frac{G}{q} \\ -J_2 Hp + K_2 F + \frac{H}{p} \\ -J_2 Iq + K_2 G + \frac{I}{q} - E \end{array} \right] \begin{array}{l} \cos pt \\ \cos (qt + \Psi) \\ \sin pt \\ \sin (qt + \Psi) \end{array} \quad \left| \quad \Theta_2 = \begin{array}{l} -\frac{F}{p} \cos pt \\ -\frac{G}{q} \cos (qt + \Psi) \\ +\frac{H}{p} \sin pt \\ +\frac{I}{q} \sin (qt + \Psi) \end{array} \right.$$

F, G, H, I étant des fonctions linéaires simples de D et E , Ψ un nouveau déphasage.

Une simplification s'introduit dans les formules si on remplace $\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}$ par p_c^2 .

On voit que les effets des deux couples harmoniques se superposent.

En général le couple de vibration ne sera pas harmonique et ne pourra être représenté par un vecteur :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = c \cos pt (pFJ_2 + HK_2) + c \cos (qt + \Psi) (qGJ_2 + IK_2) + c \sin pt (-pHJ_2 + FK_2) + c \sin (qt + \Psi) (-qIJ_2 + K_2 G - E).$$

Si les fréquences des couples harmoniques ne se rapprochent pas trop de la fréquence naturelle on peut, comme on sait, calculer la vibration excitée en négligeant l'amortissement.

Pour un amortissement nul on a :

$$K_1 = K_2 = 0, \text{ donc } F = G = 0.$$

De plus $tgM = 0$, donc $M = 0$ et $\Psi = \Phi$.

$$b = p_c^2$$

$$\alpha = \frac{D}{J_1 J_2} \quad m = \gamma = \left(\frac{1}{J_1 J_2} - \frac{q^2}{J_2} \right) E$$

$$H = -\frac{D}{J_1 J_2 p (p_c^2 - p^2)}$$

$$I = \frac{\left(q^2 - \frac{1}{J_1} \right) E}{J_2 q (p_c^2 - q^2)}$$

Donc finalement :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = \frac{cD \sin pt}{J_1(p^2 - p'^2)} + \frac{cE(1 - J_1 pc^2)}{J_1(p^2 - q^2)} \sin(qt + \Phi)$$

L'évaluation de l'amortissement ne peut se faire qu'avec une large approximation. Frahm, Holzer, Bauer, Ker-Wilson, Dorey, Shannon, Bara et d'autres l'ont exprimé sous une forme commode pour les applications.

Nous avons déjà parlé de la machine à vapeur où l'amortissement est normalement peu important en comparaison de celui fourni par l'hélice. Il est appréciable pour un moteur Diesel : si on exprime par $h\nu_1$ l'effort d'amortissement tangentiel au rayon de manivelle r_0 , rapporté à l'unité de surface du cylindre, par ν_1 la vitesse instantanée de vibration au même rayon r_0 , on peut prendre dans la zone des amplitudes faibles et moyennes $h = 0,004$ kg sec/cm² pour un moteur à quatre temps simple effet $h = 0,007$ kg sec/cm² pour le moteur à deux temps double effet. Dorey (5) donne une méthode fort originale où il tient compte, dans le calcul des vibrations à un nœud, de l'amplitude des vibrations à la machine : connaissant h_2 à l'hélice, il déduit du rapport des amplitudes la valeur de h_1 .

Pour l'amortissement à l'hélice Dorey propose le coefficient :

$$h_2 = \frac{28,6 N C_1}{N_1^2}$$

où C_1 est le couple régulier à l'hélice pour un nombre de tours par minute N_1 , N étant le nombre de tours auquel on fait le calcul des vibrations.

L'introduction des coefficients précités dans les équations de mouvement permet la résolution de ces équations. Des résultats trouvés on ne pourra tirer que des conclusions prudentes vu qu'on peut difficilement admettre qu'aux grandes amplitudes, à l'hélice aussi bien qu'au moteur, les coefficients h_1 et h_2 restent constants. La méthode est cependant suffisamment précise pour la présente étude, qui envisage l'effet du couple variable à l'hélice sur les vibrations. On peut d'ailleurs vérifier la grandeur des amplitudes trouvées pour le cas de résonance en égalant pour un tour le travail du couple moteur au travail d'amortissement. Les équations

de mouvement et leur résolution montrant la superposition des effets des harmoniques au moteur et à l'hélice, on pourra calculer séparément les vibrations excitées par ces couples.

On obtient ainsi pour la vibration due à l'harmonique au moteur :

$$Dc p_c \pi |\Theta_1|_{max} = k_1 p_c^2 \pi \Theta_{1max}^2 + k_2 p_c^2 \pi \Theta_{2max}^2$$

d'où l'amplitude maximum de la vibration due au couple $Dc \sin pt$:

$$|\Theta_1|_{max} = \frac{D}{p_c \left[K_1 + \left(\frac{\Theta_{2max}}{\Theta_{1max}} \right)^2 K_2 \right]}$$

La vibration due à l'harmonique à l'hélice se calcule à partir de :

$$Ec p_c \pi |\Theta_2|_{max} = k_2 p_c^2 \pi \Theta_{2max}^2 + k_1 p_c^2 \pi \Theta_{1max}^2$$

d'où la vibration due au couple $Ec \sin (qt + \Phi)$.

$$|\Theta_2|_{max} = \frac{E}{p_c \left[K_2 + \left(\frac{\Theta_{1max}}{\Theta_{2max}} \right)^2 K_1 \right]}$$

On prend :

$$\frac{|\Theta_2|_{max}}{|\Theta_1|_{max}} = \frac{I_1}{I_2}$$

Cette approximation, qui place le nœud en un point fixe de la ligne d'arbres, est grossière : plus exactement, l'amortissement donne lieu à une zone d'amplitudes minima.

Prenons successivement deux cas concrets de vibrations à un nœud, la machine étant située au milieu du navire. Les unités sont le kilogramme, le centimètre et la seconde.

Les calculs sont faits pour la résonance $p = q = p_c$, qui par exemple aura lieu au nombre de tours où l'harmonique du troisième ordre aura la pulsation p_c , le nombre d'ailes de l'hélice étant de trois,

Le premier cas est relatif à une machine à vapeur à piston de 2.000 CV. ind. ou 1.700 CV. à l'hélice. Tours par minute : $N_1 = 80$. De plus :

$$I_1 = 45 \times 10^3 \quad I_2 = 135 \times 10^3$$

$$c = 18 \times 10^6 \quad p_c = 23,1$$

Résonance à $N = 73,5$ t./m.

Calcul de k_1 et k_2 :

Couple moteur à 80 t./m. : $C_1 = 152 \times 10^3$,

$$28,6 \times N \times C_1$$

$$\text{donc : } k_2 = \frac{28,6 \times N \times C_1}{N_1^2} = 499 \times 10^3.$$

Prenons pour l'amortissement à la machine $k_1 = 70 \times 10^3$.

Les coefficients des équations fondamentales seront :

$$J_1 = 25 \times 10^{-4}$$

$$J_2 = 75 \times 10^{-4}$$

$$K_1 = 39 \times 10^{-4}$$

$$K_2 = 277 \times 10^{-4}$$

Les équations donnent avec :

$$\text{tg } M = -0,27$$

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 8,35 cD \cos pt - 0,33 cD \sin pt \\ - 2,90 cE \cos(qt + \Psi) - 1,12 cE \sin(qt + \Psi)$$

ou encore, en introduisant les angles de phase γ_1 et γ_2 :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 8,36 cD \sin(pt + \gamma_1) + 3,11 cE \sin(qt + \gamma_2).$$

Le couple moteur moyen à 73,5 t./m. est $(\frac{73,5}{80})^2 C_1 = 1.290.000$.

Prenons comme couple harmonique moteur du troisième ordre 15 % de ce couple moyen et comme couple harmonique à l'hélice du troisième ordre également 15 % de ce couple :

$$cD = 194.000.$$

$$cE = 194.000.$$

Le couple de vibration devient :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 1.620.000 \sin(pt + \gamma_1) + 60.300 \sin(qt + \gamma_2).$$

Si les deux sinusoides, de même pulsation, sont en phase :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 2.223.000 \sin(pt + \gamma_1).$$

Si elles sont en opposition :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 1.017.000 \sin(pt + \gamma_1).$$

Le rapport des couples de vibration donc des tensions de vibration pour ces deux cas extrêmes est de 2,18 et le rapport de la tension de vibration, hélice bien orientée, à la tension moyenne dans l'arbre est 0,79.

Pour une vitesse ne se rapprochant pas trop de la résonance :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 194.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)} \\ - 194.000 \times 0,33 \frac{\sin(qt + \Phi)}{J_1 (p_c^2 - q^2)}$$

Si les deux sinusoides, de même pulsation, sont en phase :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 258.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)}$$

Si elles sont en opposition :

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = 130.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)}$$

Le rapport des tensions, en phase et en opposition, devient 1,99.

Appliquons aussi la méthode de l'égalité des travaux.

L'égalité du travail du couple moteur et du travail d'amortissement donne :

$$|\Theta_1|_{max} = 6,21 D.$$

Du rapport $\frac{|\Theta_2|_{max}}{|\Theta_1|_{max}} = 0,33$, on déduit $|\Theta_2|_{max} = 2,08 D$

et $|\Theta_1 - \Theta_2|_{max} = 8,29 D.$

L'égalité du travail du couple harmonique à l'hélice et du travail d'amortissement donne : $|\Theta_2|_{max} = 0,69 E,$

puis : $|\Theta_1|_{max} = 2,07 E$

et $|\Theta_1 - \Theta_2|_{max} = 2,76 E.$

Prenons maintenant le cas d'un moteur Diesel de 1.600 CV eff. 6 cylindres 4 temps simple effet. Tours par minute : $N_1 = 100$, alésage $d = 70$; $r_0 = 60$.

$$\begin{aligned} \text{De plus : } I_1 &= 115 \times 10^3 & I_2 &= 40 \times 10^3 \\ c &= 16 \times 10^6 & p_c &= 23,2. \end{aligned}$$

Résonance à 74 t./m.

Couple moteur à 100 t./m. $C_1 = 1.145 \times 10^3.$

$$h_2 = \frac{28,6 \times N \times C_1}{N_1^2} = 242 \times 10^3.$$

Prenons $h_1 = h_2 = 242 \times 10^3.$

Les coefficients des équations fondamentales seront :

$$J_1 = 72 \times 10^{-4} \quad J_2 = 25 \times 10^{-4}$$

$$K_1 = K_2 = 151 \times 10^{-4}.$$

Les équations donnent avec $tgM = -0,12.$

$$c(\Theta_1 - \Theta_2) = -1,20 cD \cos pt - 0,18 cD \sin pt - 3,50 cE \cos (qt + \Psi) - 0,51 cE \sin (qt + \Psi)$$

ou encore, en introduisant les angles de phase γ_1 et γ_2 :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 1,21 cD \sin (pt + \gamma_1) + 3,54 cE \sin (qt + \gamma_2).$$

Le couple moteur moyen à 74 t./m. est $0,74^2 C_1 = 630.000$.

On obtient approximativement le couple harmonique moteur du troisième ordre en prenant 6 fois le couple donné par un cylindre. En adoptant comme pression tangentielle du troisième ordre 1,4 kg. par cm^2 :

$$cD = 1,4 \times 6 \times \pi \times \frac{70^2}{4} \times 60 = 1.940.000.$$

On prend à l'hélice de nouveau 15 % du couple moyen :
 $cE = 95.000$.

Le couple de vibration sera ainsi :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 2.350.000 \sin (pt + \gamma_1) + 336.000 \sin (qt + \gamma_2).$$

Si les deux sinusoïdes, de même pulsation, sont en phase :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 2.686.000 \sin (pt + \gamma_1).$$

Si elles sont en opposition :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 2.014.000 \sin (pt + \gamma_1).$$

Le rapport des tensions de vibration pour ces deux cas est 1,33 et le rapport de la tension de vibration, hélice bien orientée, à la tension moyenne dans l'arbre 3,2. Pour une vitesse ne se rapprochant pas trop de la résonance :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 1.940.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)} - 95.000 \times 2,87 \frac{\sin (qt + \Phi)}{J_1 (p_c^2 - q^2)}$$

Si les deux sinusoïdes, de même puissance, sont en phase :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 2.212.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)}$$

Si elles sont en opposition :

$$c(\theta_1 - \theta_2) = 1.668.000 \frac{\sin pt}{J_1 (p_c^2 - p^2)}$$

Le rapport des tensions, en phase et en opposition, est de 1,32.

Appliquons la méthode de l'égalité des travaux.

L'égalité du travail du couple moteur et du travail d'amortissement donne :

$$|\Theta_1|_{\max} = 0,31 D.$$

Du rapport $\frac{|\Theta_2|_{\max}}{|\Theta_1|_{\max}} = 2,88$, on déduit $|\Theta_2|_{\max} = 0,89 D$

et $|\Theta_1 - \Theta_2|_{\max} = 1,20 D.$

L'égalité du travail du couple harmonique à l'hélice et du travail d'amortissement donne : $|\Theta_2|_{\max} = 2,55 E$

puis : $|\Theta_1|_{\max} = 0,89 E$

et : $|\Theta_1 - \Theta_2|_{\max} = 3,44 E.$

La concordance entre les deux méthodes d'analyse est suffisante si l'on tient compte du déphasage considérable provoqué par l'amortissement.

La fonction $c(\Theta_1 - \Theta_2) = f(t)$ comprend les harmoniques de machine et d'hélice.

En règle générale, ceux de la machine sont affectés d'un coefficient d'amplification plus grand que ceux de l'hélice dans le cas de la machine à vapeur, l'inverse a lieu dans le cas du moteur Diesel. La position du nœud de vibration est prépondérante.

Nous n'avons pas traité le cas de la machine située à l'arrière du navire (fig. 5).

La vibration à un nœud, ainsi que la vibration à deux nœuds, ont alors une amplitude appréciable à l'hélice. Dans ce cas également les harmoniques de l'hélice fournissant du travail, ont de l'importance.

Lors de l'étude des vibrations, on établit un diagramme vectoriel permettant notamment de s'assurer si le calage des manivelles et la succession des injections sont judicieusement choisis. Cette étude pourra inclure utilement le choix de l'orientation de l'hélice qui règle la phase de ses harmoniques. La forme de $c(\Theta_1 - \Theta_2) = f(t)$ montre d'ailleurs que par un choix convenable de γ_1 et γ_2 donc de Φ , il sera toujours possible, à la vitesse dangereuse, de mettre deux harmoniques importants en opposition.

L'intensité des harmoniques de l'hélice, d'après tout ce que nous avons vu, est fonction des formes de l'arrière. Malheureusement il n'existe pas de documentation étendue à ce sujet et même les essais qu'il est d'usage de faire sur le modèle

d'un navire en projet au bassin de carènes ne fournissent pas de renseignements sur ce point.

Il est vrai que dans de nombreux cas, comme ceux des navires à nombre pair d'hélices, les harmoniques d'hélices sont peu appréciables. Dans le cas du navire à une hélice cependant, la grande irrégularité du sillage à l'arrière qui a été constatée par des essais sur modèles est de nature à provoquer des impulsions importantes sur l'arbre. Cette irrégularité se maintient-elle toutefois sur le navire en vraie grandeur? Kempf, par ses essais sur le Tannenberg (15), où des mesures de sillage furent entreprises en grandeur réelle, conclut à l'absence d'effet d'échelle. Ce navire étant à deux hélices, l'irrégularité ne fut pas bien grande. Peut-on étendre les conclusions de Kempf au navire à une hélice? Il est évident qu'il y a là un terrain d'investigation où la mise en parallèle entre des essais sur modèles et des essais sur réel sera féconde en renseignements.

Je remercie mon collègue M. Dingens, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand, de m'avoir assisté dans la résolution des équations différentielles reprises à l'annexe de la présente étude.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Archer: « *Screwshaft Casualties — The influence of torsional vibration and propeller immersion* ». Trans. Inst. Nav. Arch. 1949.
2. Brown: « *Vibration Problems from the Marine Engineering Point of View* ». Trans. N.E.C. L.V. 1938 - 9.
3. Calderwood & Thorne: « *Torsional Oscillation with special reference to marine reduction gearing* ». Trans. North East Coast Inst. XXXIX 1922.
4. Dickmann: « *Wechselwirkung zwischen Propeller und Schiff* ». Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1939.
5. Dorey: « *Strength of Marine Engine shafting* ». N.E.C. Institution, 1939.
6. Frahm: « *Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen* ». V.D.I. n° 24, 1902.
7. Fresenius: « *Das grunds. Wesen d. Wechselw. zw. Schiff u. Prop.* ». Schiffbau, 1921.

8. Guntzberger :
torsion des lignes d'arbres. ». Bulletin de l'Association technique maritime et aéronautique, 1935.
9. Graff : « *Über den Einfluss ungleichförmiger Anströmung auf die Schraubewirkung* ». Jahrb. Schiffb. Gesellsch. 1935.
10. Helmbold : « *Schraubensog und Nachstrom* ». Werft-Reederei-Hafen, 1938, Heft 22.
11. Horn : « *Measurement of wake* ». N.E.C. Inst. 1938.
12. Holzer : « *Die Berechnung der Drehschwingungen* » 1921.
13. Kane and Mac Goldrick : « *Longitudinal vibrations of Marine Propulsion Shafting systems* ». Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. 1949.
14. Kempf : « *Mitstrom und Mitstromschrauben* ». Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1931.
15. Kempf : « *Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs* ». Teil II, Oldenbourg 1940.
16. Ker-Wilson : « *Practical Solutions of Torsional Vibration Problems* ».
17. Lewis : « *Propeller Vibration* ». Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. 1935.
18. Lewis : « *Propeller Vibration* ». Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. 1936.
19. Muller : « *Measuring vibrations in ships propeller shafting* ». Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. 1935.
20. Rabbeno : « *Vibrations de torsion dues au propulseur* » (Italie), G. Riv. Maritt. 82 - 1950.
21. Roosa : « *Het lijnenplan van een schip in verband met het «Roovrij» effect* ». De Ingenieur, n^o 27 - 1946.
22. Sulzer : « *Causes and Prevention of Vibration in motorships* ». Trans. of the Institution of Naval Architects, 1930.
23. Vandeghen : « *Quelques notes sur les vibrations des lignes d'arbres et des coudés* ». Congrès International des Ingénieurs navals, 1939.
24. Van Lammeren, Troost, Koning : « *Weerstand en voortstuwijng van Schepen* », 1942.
25. Van Lammeren : « *Analyse der voortstuwingscomponenten in verband met het schaaleffect bij scheepsmodelproeven* », N.S.P. 1938.
26. Vignery : « *Vibrations de torsion d'un arbre portant des masses pesantes* ». Librairie Pol. Ch. Béranger, Paris - Liège, 1931.

27. Weitbrecht : « *Vom Sog, ein Versuch seiner Berechnung* », Jahrbuch der S.T.G. 1941.
28. Yamagata : « *Wake Measurements by a working Propeller* ». Conférence des Directeurs de Bassins d'Essais, Berlin 1937.

ANNEXE.

Méthode de résolution des équations différentielles :

$$J_1 \theta_1'' + K_1 \theta_1' + \theta_1 - \theta_2 = D \sin pt \quad (1)$$

$$J_2 \theta_2'' + K_2 \theta_2' + \theta_2 - \theta_1 = E \sin (qt + \Phi) \quad (2)$$

De (2) on déduit successivement :

$$\theta_1 = J_2 \theta_2'' + K_2 \theta_2' + \theta_2 - E \sin (qt + \Phi) \quad (2')$$

$$\theta_1' = J_2 \theta_2''' + K_2 \theta_2'' + \theta_2' - Eq \cos (qt + \Phi)$$

$$\theta_1'' = J_2 \theta_2^{IV} + K_2 \theta_2''' + \theta_2'' + Eq^2 \sin (qt + \Phi)$$

Substituons dans (1) :

$$J_1 [J_2 \theta_2^{IV} + K_2 \theta_2''' + \theta_2'' + Eq^2 \sin (qt + \Phi)] \\ + K_1 [J_2 \theta_2''' + K_2 \theta_2'' + \theta_2' - Eq \cos (qt + \Phi)] \\ + [J_2 \theta_2'' + K_2 \theta_2' - E \sin (qt + \Phi)] = D \sin pt$$

On obtient :

$$\theta_2^{IV} + \theta_2''' \left[\frac{K_2}{J_2} + \frac{K_1}{J_1} \right] + \theta_2'' \left[\frac{1}{J_2} + \frac{K_1 K_2}{J_1 J_2} + \frac{1}{J_1} \right] \\ + \theta_2' \left[\frac{K_1 + K_2}{J_1 J_2} \right] + \frac{Eq^2}{J_2} \sin (qt + \Phi) - \frac{E}{J_1 J_2} \sin (qt + \Phi) \\ - \frac{K_1 Eq}{J_1 J_2} \cos (qt + \Phi) - \frac{D}{J_1 J_2} \sin pt = 0$$

Cette équation s'écrit :

$$\theta_2^{IV} + \theta_2''' a + \theta_2'' b + \theta_2' c = \alpha \sin pt + \beta \cos (qt + \Phi) \\ + \gamma \sin (qt + \Phi)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{K_2}{J_2} + \frac{K_1}{J_1} & b &= p_c^2 + \frac{K_1 K_2}{J_1 J_2} & c &= \frac{K_1 + K_2}{J_1 J_2} \\ \alpha &= \frac{D}{J_1 J_2} & \beta &= q \frac{K_1 E}{J_1 J_2} & \gamma &= \frac{E}{J_1 J_2} - q^2 \frac{E}{J_2} \end{aligned} \right\} (\varepsilon)$$

$$\text{Posons : } \Theta_2' = Y. \quad (4)$$

On aura :

$$Y''' + aY'' + bY' + cY = \alpha \sin pt + \beta \cos (qt + \Phi) + \gamma \sin (qt + \Phi) \quad (5)$$

Posons :

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= m \sin M \\ \gamma &= m \cos M \\ M + \Phi &= \Psi \end{aligned} \right. \quad (6)$$

avec :

$$\begin{aligned} m^2 &= \beta^2 + \gamma^2 \\ \text{tg} M &= \frac{\beta}{\gamma} \end{aligned}$$

(5) devient :

$$Y''' + aY'' + bY' + cY = \alpha \sin pt + m \sin (qt + \Psi) \quad (7)$$

La solution générale de l'équation sans second membre conduit à des termes correspondant au mouvement transitoire. Comme seules les vibrations de régime nous intéressent, nous ne retenons que la solution particulière de cette équation qui sera de la forme :

$$Y = F \sin pt + G \sin (qt + \Psi) + H \cos pt + I \cos (qt + \Psi)$$

qui donne successivement :

$$Y' = Fp \cos t pt + Gq \cos (qt + \Psi) - Hp \sin pt - Iq \sin (qt + \Psi)$$

$$Y'' = -Fp^2 \sin pt - Gq^2 \sin (qt + \Psi) - Hp^2 \cos pt - Iq^2 \cos (qt + \Psi)$$

$$Y''' = -Fp^3 \cos pt - Gq^3 \cos (qt + \Psi) + Hp^3 \sin pt + Iq^3 \sin (qt + \Psi)$$

Transportons en (7) :

$$\begin{aligned}
 & - Fp^3 \cos pt - Gq^3 \cos (qt + \Psi) + Hp^3 \sin pt + Iq^3 \sin (qt + \Psi) \\
 & - aFp^2 \sin pt - Gq^2a \sin (qt + \Psi) - Hp^2a \cos pt - Iq^2a \cos (qt + \Psi) \\
 & + bFp \cos pt + Gqb \cos (qt + \Psi) - Hpb \sin pt - Iqb \sin (qt + \Psi) \\
 & + cF \sin pt + cG \sin (qt + \Psi) + Hc \cos pt + Ic \cos (qt + \Psi) \\
 & = \alpha \sin pt + m \sin (qt + \Psi)
 \end{aligned}$$

Egalons à zéro les coefficients de $\cos pt$, $\sin pt$, $\cos (qt + \Psi)$ et $\sin (qt + \Psi)$:

$$\left. \begin{aligned}
 - Fp^3 - Hp^2a + bFp + Hc &= 0 \\
 Hp^3 - aFp^2 - Hpb + Fc &= \alpha \\
 - Gq^3 - Iq^2a + Gqb + Ic &= 0 \\
 Iq^3 - Gq^2a - Iqb + cG &= m
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Nous obtenons ainsi les systèmes d'équations :

$$\left. \begin{aligned}
 p(b-p^2)F + (c-ap^2)H &= 0 \\
 (c-ap^2)F - p(b-p^2)H &= \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

$$\left. \begin{aligned}
 q(b-q^2)G + (c-aq^2)I &= 0 \\
 (c-aq^2)G - q(b-q^2)I &= m
 \end{aligned} \right\} \quad (9'')$$

Ces équations fournissent les valeurs de F, H, G, I :

$$H = \frac{-\alpha p(b-p^2)}{(c-ap^2)^2 + p^2(b-p^2)^2} \quad (10)$$

$$F = \frac{\alpha(c-ap^2)}{(c-ap^2)^2 + p^2(b-p^2)^2} \quad (11)$$

$$G = \frac{m(c-aq^2)}{(c-aq^2)^2 + q^2(b-q^2)^2} \quad (12)$$

$$I = \frac{-mq(b-q^2)}{(c-aq^2)^2 + q^2(b-q^2)^2} \quad (13)$$

L'intégration de (4) donne :

$$\Theta_2 = \frac{F}{p} \cos pt - \frac{G}{q} \cos (qt + \Psi) + \frac{H}{p} \sin pt + \frac{I}{q} \sin (qt + \Psi)$$

Comme d'autre part (8) conduit à :

$$\Theta_2'' = Fp \cos pt + Gq \cos (qt + \Psi) - Hp \sin pt - Iq \sin (qt + \Psi)$$

Finalement l'équation (2') donne Θ_1 :

$$\Theta_1 = \left[FpJ_2 + HK_2 - \frac{F}{p} \right] \cos pt + \left[J_2Gq + K_2I - \frac{G}{q} \right] \cos (qt + \Psi) + \left[-J_2Hp + K_2F + \frac{H}{p} \right] \sin pt + \left[-J_2Iq + K_2G + \frac{I}{q} - E \right] \sin (qt + \Psi).$$

Intervention de M. LEROUX.

M. Leroux signale que l'intervention de M. Aertssen est d'autant plus intéressante qu'avec l'application des moteurs Diesel pour la propulsion des navires, des questions de vibrations de torsion posent de plus en plus fréquemment des problèmes délicats.

Ces problèmes sont particulièrement graves dans la question des navires de moyen tonnage pour lesquels il arrive souvent que les fréquences de vibration critique se trouvent placées aux environs de la puissance d'utilisation des appareils moteurs.

M. Leroux désire attirer spécialement l'attention sur un cas particulier sur lequel il semble que les méthodes théoriques de calculs des fréquences critiques se trouvent en défaut. Il s'agit des calculs de vibration de torsion dans le cas d'une ligne d'arbre coupée par un réducteur de vitesse à engrenages et éventuellement, par un joint élastique.

Des essais récents effectués sur des navires étrangers et français ont montré que les calculs effectués par des spécialistes de Maisons réputées n'ont pas pu prévoir les périodes de vibration qui se sont révélées aux essais.

Il semble donc que ces calculs sont encore effectués d'une manière trop simpliste ou tout au moins que l'appréciation des conditions limites qui permettent de trouver la solution des équations différentielles, ne soit pas exacte. Un élément important est le jeu entre les dents du réducteur. Il est presque intuitif de considérer que si le jeu est nul la ligne d'arbre peut être considérée comme n'étant pas coupée, et que si le jeu est considérable, les deux parties de la ligne d'arbre peuvent vibrer indépendamment. Mais les phénomènes sont certainement beaucoup plus compliqués et même peuvent se trouver variables dans le temps lorsque les jeux ont tendance à augmenter.

En ce qui concerne les joints élastiques, les différents appareils qui sont en service à ce jour, doivent en principe jouer le rôle d'amortisseur. Il semble certain que leur emploi est d'ailleurs sujet à caution puisque, s'ils ont une période propre de vibration, leur utilisation peut aussi bien produire des effets nuisibles que des effets favorables.

Il convient donc d'être très prudent et il serait souhaitable de pouvoir calculer exactement l'effet de ces appareils.

M. Leroux a l'impression qu'actuellement la détermination des conditions limites provenant soit de l'intervention d'un engrenage, soit de celle d'un joint élastique, est encore très imprécise.

Si on y ajoute les difficultés signalées par l'auteur de la communication concernant l'évaluation des variations du couple dû à l'hélice, on conçoit que des erreurs graves puissent se produire dans la détermination des solutions des équations différentielles permettant d'en déterminer les périodes critiques de vibration.

M. Leroux souhaite que les personnalités scientifiques ici présentes se penchent sur ce problème qui est à la fois un problème de mathématicien et un problème d'ingénieur et permettent de définir une méthode aussi simple que possible pour éviter les fâcheux incidents qui ont été signalés.