

1556
Rijkswaterstaat
Directie Waterhuishouding
en Waterbeweging
Studiedienst Vliissingen

WWH-76.0002B

18

Memo V1 76-2

rijkswaterstaat
dienst getijdewateren
bibliotheek
grenadiersweg 31 -
4338 PG middelburg

BEREKENING VAN ZAND- EN SLIBCONCENTRATIES
IN GETIJSTROMEN

door

ir. W.T. Bakker

en

J. Schaart

Vliissingen, februari 1976

BEREKENING VAN ZAND- EN SLIBCONCENTRATIES
IN GETIJSTROMEN.

rijkswaterstaat
dienst getijdewateren
bibliotheek
grenadiersweg 31 -
4338 PG middelburg

1 INLEIDING.

Het directe doel van de uit te voeren berekeningen is het verkrijgen van een indruk van de sedimentatie van slibrijk water, dat gedurende de eb het Noordelijk bekken van de Westerschelde via de overlaat binnenstroomt, wanneer de bochtafsnijding bij Bath zal zijn gerealiseerd.

De berekeningsmethode is echter vrij universeel en heeft daarnaast nog vele andere toepassingsmogelijkheden:

- 1° berekenen van instationaire snelheidsverticalen in estuaria (in getijstroom met een zout-zoet gradient);
- 2° berekenen van instationaire zand- en slibconcentratieverticalen onder andere dan de gegeven omstandigheden.

Speciaal voor het laatste probleem moeten de randvoorwaarden aan de bodem echter iets anders worden gekozen dan in de gegeven berekening; dit is echter relatief eenvoudig.

Het volgende hoofdstuk 2 geeft nu de probleemstelling; in hoofdstuk 3 wordt de schematisering besproken; hoofdstuk 4 geeft de basisvergelijkingen, de randvoorwaarden en de oplossingsmethode en hoofdstuk 5 resultaten. Conclusies worden in hoofdstuk 6 getrokken, waarin tevens een samenvatting van het rapport wordt gegeven.

Enige numerieke details worden behandeld in appendix A, waarnaar in hoofdstuk 4 wordt verwezen.

Erkentelijkheid.

De auteurs zijn dank verschuldigd aan prof. ir. E.W. Bijker voor zijn toestemming tot het gebruik van de faciliteiten van de IBM-370-computer van de Technische Hogeschool te Delft.

Een deel van de programmering werd ontleend aan het programma "TA2", dat betrekking heeft op het snelheidsveld in kort periodieke golven. Bij de ontwikkeling van dit laatste programma is de Heer J. van Kabum behulpzaam geweest.

2 PROBLEEMSTELLING.

In bijlage 1 is de situatie na uitvoering van de bochtafsnijding aangegeven. Tevens is een aantal vloed- en ebwegen aangegeven, berekend met behulp van stroom- en snelheids gegevens van het hydraulische model in Borgerhout (toestand T 40 , zie [1]).

Uit bijlage 1 blijkt het volgende. De komberging van het Noordelijk Bekken wordt grotendeels gevuld vanuit de zeezijde.

Water, dat met de eb de overlaat aan de bovenstroomse zijde passeert, dringt niet verder het bekken binnen dan ca. 5 km.

Bijlage 2¹⁾ toont de verhouding tussen het momentane slibgehalte en het over het getij gemiddelde slibgehalte bij Bath als functie van de tijd. Daaruit blijkt, dat het slibgehalte per getij gedurende ca 6 uur hoger dan het gemiddelde is; water met dit slibgehalte dringt slechts ca 2 km het bekken binnen. De maximale snelheid, die water met dit slibgehalte bereikt, bedraagt niet meer dan ca. 0,30 m/s.

Gevraagd wordt nu een indruk van de orde van grootte van de hoeveelheid slib, die in dit bekken zal bezinken.

¹⁾ Deze figuur werd eerder gepubliceerd in [2].

De enige beschikbare schematisering van de instationaire waterbeweging binnen het bekken is een benadering, waarbij de waterbeweging als uniform in horizontale richting wordt aangenomen en de watersnelheid u , evenals de slibconcentratie c slechts een functie is van de verticale coördinaat z en de tijd t .

Als eerste benadering zal van de volgende schematisering worden uitgegaan.

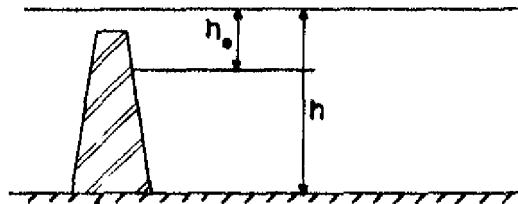


fig.1 definitie-schets

Beschouw een coördinatenstelsel, dat met de over de verticaal gemiddelde watersnelheid mee beweegt.

Op het tijdstip $t = 0$ wordt slibrijk water met een gemiddelde snelheid $\bar{u}_0$ over de overlaat gevoerd, dat zich onmiddellijk daarna uniform¹⁾ verdeelt over de bovenste h_0 m; de totale waterhoogte zij h m.

Er wordt aangenomen, dat het water in horizontale zin een zoutgradient vertoont, zodanig dat het over een afstand "WAY" een verschil in soortelijk gewicht vertoont van "DELRO" kg/m^3 . In verticale zin worden geen dichtheidsverschillen aangenomen. Verder wordt de dichtheidsgradient $\frac{d\rho}{dx} = \text{DELRO}/\text{WAY}$ als een constante, dus invariabel in de tijd, aangenomen.

Het verhang van de waterpiegel wordt aangenomen als:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d\bar{h}}{dx} + \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_h) \quad (1)$$

waarin $\frac{d\bar{h}}{dx}$ het over het getij gemiddelde verhang (middenstandsverhang) voorstelt en $\hat{I}$ de topwaarde van een periodiek verhang.

- Ten gevolge -

1) De uniformiteit is geen dwingende eis; wel, dat de verdeling bekend is.

Ten gevolge van dit verhang en van de zoutgradient ontstaat een over de verticaal gemiddeld snelheidsverloop, dat bij benadering kan worden voorgesteld door:

$$\bar{u} = \bar{u} + \hat{u} \sin (\omega t + \varphi_u) \quad (2)$$

waarbij geldt:

$$\bar{u}_0 = \bar{u} + \hat{u} \sin \varphi_u \quad (3)$$

waarin $\bar{u}$ de over de verticaal en over het getij gemiddelde reststroom voorstelt en $\hat{u}$ de amplitude van de over de verticaal gemiddelde getijstroom.

Waterstandsvariatiën gedurende het getij worden niet in de beschouwing opgenomen; er wordt aangenomen, dat het water in een horizontaal vlak oscilleert.

De valsnelheid in stil water van het slib wordt gesteld op w m/s.

Als randvoorwaarde aan de bodem wordt gesteld, dat het slib aan de bodem wel kan bezinken, doch niet opwervelen. De cohesie van het slib aan de bodem wordt dus zeer groot aangenomen.

De ribbelhoogte ("Nikuradse ruwheid") zij r .

In het programma wordt nu berekend:

- 1° de snelheidsverticaal $u(z, t)$ en de gemiddelde snelheid $\bar{u}(t)$;
- 2° de slibconcentratie $c(z, t)$.

Daar de gebruikte vergelijkingen lineair in c zijn, wordt de beginconcentratie in de bovenlaag van het water met hoogte h_0 gelijk gesteld aan 1 ten tijde $t = 0$ en in de onderlaag gelijk aan 0.

Te kiezen vrijheidsgraden in het programma zijn:

- 1° het middenstandsverhang; grootte en fase van het topverhang;
- 2° de zoutgradiënt;
- 3° de waterdiepte;

- 4° de bodemruwheid;
- 5° de val snelheid van het sediment;
- 6° de hoogte van de laag h_0 ;
- 7° de nauwkeurigheid van de berekening, d.w.z. de afstand tussen de roosterpunten, waarin de berekening wordt uitgevoerd.

4 BASISVERGELIJKINGEN, RANDVOORWAARDEN EN OPLOSSINGSMETHODE.

4.1 Inleiding tot hoofdstuk 4.

In dit hoofdstuk wordt eerst de differentiaalvergelijking voor de interne schuifspanningssnelheid p afgeleid (par. 4.2).

Vervolgens komen in par. 4.3 de randvoorwaarden aan de bodem en het oppervlak aan de orde. Aan het oppervlak is p identiek gelijk aan nul; de randvoorwaarde aan de onderrand wordt in eerste benadering opgevat als de som van een constante waarde $\bar{p}$ en een harmonische variabele $\beta \sin(\omega t + \varphi_p)^{1)}$.

Naderhand kunnen zo nodig iteratief bovenharmonischen aan p worden toegevoegd, tot een harmonische kromme $\bar{u}(t)$ wordt gevonden. In par. 4.3 wordt afgeleid, hoe $\bar{p}$ en β kunnen worden berekend uit gegeven waarden van het middenstandsverhang, de amplitude van het getijverhang en de horizontale zoutgradient. Daarna worden enige opmerkingen betreffende de oplossing van de vergelijking gemaakt.

Par. 4.4 behandelt de vergelijking voor de slibconcentratie en de oplossing daarvan.

4.2 De basisvergelijking voor de interne schuifspanningssnelheid.

Onder de aangenomen conditie van een uniforme verdeling van de snelheden in horizontale zin geldt als bewegingsvergelijking voor een waterelementje:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad (4)$$

waarin: ρ = soortelijke massa (kg/m^3).

u = horizontale watersnelheid.

t = tijd.

p_r = hydrostatische waterdruk.

τ = schuifspanning (werkend in positieve zin van de bovenlaag op de onderlaag).

x = horizontale coördinaat. Deze wordt positief in zeewaartse richting aangenomen.

z = verticale coördinaat, positief in opwaartse richting. De waarde ervan is nul ter hoogte van het hypothetische bodemniveau.

De hydraulische waterdruk bedraagt:

$$p_r = \rho g (h - z) \quad (5)$$

waarin: g = versnelling van de zwaartekracht.

h = waterdiepte ten opzichte van de (horizontaal aangenomen) bodem.

De eerste term in het rechterlid van de vergelijking (4) kan dus geschreven worden als:

$$-\frac{\partial p_r}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - g(h-z) \frac{d\rho}{dx} \quad (6)$$

Neem een snelheid U aan, alleen een functie van t , zodanig dat geldt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7)$$

Voor de turbulente schuifspanning wordt, overeenkomstig PRANDTL, de volgende relatie aangenomen:

$$\tau = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (8)$$

Hierin is l de mengweg volgens PRANDTL, waarvoor de volgende relatie wordt aangenomen:

$$l = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \quad (9)$$

Uitgaande van deze relatie (9) vindt men, dat een uniforme stationaire stroom een logarithmische snelheidsverloop heeft; immers, voor een stationaire stroom geldt:

$$\tau = -\rho g (h - z) \frac{dh}{dx} \quad (\text{stationaire stroom}) \quad (10)$$

Uit (8), (9) en (10) volgt, uitgaande van de randvoorwaarde $u = 0$ voor $z = z_0$:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (\text{stationaire stroom}) \quad (11)$$

$$\text{met } v_* = \sqrt{g h I} \quad (\text{stationaire stroom}) \quad (12)$$

waarin I het verhang $= \frac{dh}{dx}$ van de stationaire stroom is.

Voor verdere beschouwingen betreffende de aanname van de mengweg wordt verwezen naar [3], terwijl ook in par. 4.2 nog even op deze aanname zal worden teruggekomen.

Substitueren van (6), (7), (8) en (9) in (4) en delen door ρ levert:

$$\frac{\partial(u-U)}{\partial t} = -g(h-z) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right)}{\partial z} \quad (13)$$

Voer als nieuwe variabele de interne schuifspannings-snelheid p in:

$$p = (\text{sign } \tau) \cdot \sqrt{|\tau|/\rho} \quad (14)$$

ofwel, uit (8):

$$p = l \frac{\partial u}{\partial z} \quad (15)$$

Daar U onafhankelijk is van z mag (15) ook geschreven worden als:

$$p = l \frac{\partial(u-U)}{\partial z} \quad (16)$$

Differentieren van (13) naar z en substitutie van (15) en (16) levert:

$$\boxed{\frac{1}{l} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial^2(p|p|)}{\partial z^2}} \quad (17)$$

4.3 De randvoorwaarden aan bodem en oppervlak.

De vergelijking (17) wordt opgelost, uitgaande van een schuifspanningssnelheid aan de bodem p_b gelijk aan:

$$p_b = \bar{p}_b + \hat{p}_b \sin(\omega t + \varphi_p) \quad \text{voor } z = 0 \quad (18)$$

waarin ω de hoeksnelheid van het getij is en φ_p een fasehoek.

De randvoorwaarde aan het oppervlak is:

$$p = 0 \quad \text{voor } z = h \quad (19)$$

De grootte van $\bar{p}_b$ en $\hat{p}_b$ worden bij benadering uit de opgelegde randvoorwaarden bepaald. Hierdoor vindt men een verloop van u en $\bar{u}$, dat bij benadering aan de gewenste voorwaarden voldoet, maar waarin bij voorbeeld nog ongewenste bovenharmonischen kunnen voorkomen. Door het toevoegen van bovenharmonischen aan p zijn deze (iteratief) te onderdrukken. Ten behoeve van het berekenen van snelheidsverticalen bij korte golven is voor dit iteratieve proces zelfs een computer programma ontwikkeld¹⁾; bij getijstromen bestaat hieromtrent nog geen ervaring.

De eerste bepaling van $\bar{p}_b$ en $\hat{p}_b$ kan als volgt geschieden.

Vergelijking (4) geïntegreerd over de golfperiode levert voor $z = 0$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad 2) \quad (20)$$

De randvoorwaarde aan de bodem wordt nu zodanig gekozen, dat een harmonisch getij zoveel mogelijk benaderd wordt, waarbij eventueel nog een resulterende stroom $\bar{u}$ mag optreden:

$$u = \bar{u} \sin(\omega t + \varphi_u) + \bar{u}(z) \quad (21)$$

- waarin -

1) een voorbeeld van een dergelijke iteratie wordt gegeven in [4].

2) Hierin geeft overstreping middeling aan

waarin $\bar{u}$ de locale snelheidsamplitude is en $\bar{u}(z)$ de over het getij, doch niet over de verticaal gemiddelde snelheid. Verder is φ_u een fasehoek.

Voor p_r geldt in een analoge notatie:

$$p_r = \bar{p}_r + \hat{p}_r \sin(\omega t + \varphi_p) \quad (22)$$

Bij middeling over de getijperiode is volgens (21) $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ gelijk aan nul, dus geldt:

$$\frac{d\bar{t}}{dz} = \frac{d\bar{p}_r}{dx} \quad (23)$$

Hierin is p_r gegeven in (5):

$$\frac{d\bar{t}}{dz} = g(h-z) \frac{d\rho}{dx} + \rho g \frac{d\bar{h}}{dx} \quad (24)$$

$$\bar{t} = g(hz - \frac{1}{2}z^2) \frac{d\rho}{dx} + \rho g z \frac{d\bar{h}}{dx} + \text{constante} \quad (25)$$

waarin de integratie constante bepaald wordt door de voorwaarde dat $\bar{t}$ aan het oppervlak ($z = h$) gelijk aan nul is:

$$\bar{t} = -\frac{1}{2}g(h-z)^2 \frac{d\rho}{dx} - \rho g(h-z) \frac{d\bar{h}}{dx} \quad (26^a)$$

Hierin zijn $\frac{d\rho}{dx}$ en $\frac{d\bar{h}}{dx}$ van elkaar onafhankelijke constanten; de verhouding tussen beide bepaalt de richting van de over het getij en over de verticaal gemiddelde stroom.

Vgl. (26^a) laat zich groeperen tot:

$$\frac{\bar{t}}{\rho} = -g(h-z) \left\{ \frac{1}{2} \frac{(h-z)}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{d\bar{h}}{dx} \right\} \quad (26^b)$$

Direct valt hieruit in te zien, dat als het middenstandsverhang $-\frac{d\bar{h}}{dx}$ groter is dan $\frac{1}{2}(h/\rho) \frac{d\rho}{dx}$, $\bar{t}$ over de gehele verticaal $0 < z < h$ negatief is. M.a.w. onder deze voorwaarden kan een resulterende stroom in ebrichting worden verwacht; immers, uit (14) en (15) volgt, dat de over het getij gemiddelde $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ voor de gehele verticaal negatief is.

Voorbeeld: Stel het s.g. $\frac{15}{15}$ van het water te Hansweert = 1016 kg/m^3
 en van het water te Bath = 1012 kg/m^3
 Stel de gemiddelde waterdiepte van de geul = 15 m

Als het over het getij gemiddelde verval tussen
 Bath en Hansweert groter is dan:

$$(\Delta \rho \cdot h) / 2 \rho = (4.15) / (2.1014) \text{ m} = 3 \text{ cm zal een resulterende stroming in zeewaartse richting ontstaan.}$$

Als geldt: $0 < -\frac{dh}{dx} = \frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx}$ zal de resulterende schuifspanning aan het oppervlak in ebrichting en aan de bodem in vloedrichting zijn; het is dan niet zonder meer in te zien in welke richting de resulterende stroom is.

Volgens (14) geldt:

$$\frac{\tau_{\text{bodern}}}{\rho} = p_b | p_b | \quad (27)$$

Substitueren van $\tau_{\text{bodern}}/\rho$ (m.a.w. $z = 0$) volgens (26) in het linkerlid en van p_b volgens (18) in het rechterlid van (27) en middelen over de getijperiode levert:

$$-gh \left(\frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dh}{dx} \right) = (\bar{p}_b + \hat{p}_b \sin \omega t) | \bar{p}_b + \hat{p}_b \sin \omega t | \quad (28)$$

$$-gh \left(\frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dh}{dx} \right) = \bar{p}_b^2 \cdot B \left(\frac{\hat{p}_b}{\bar{p}_b} \right) \quad (29)$$

waarin:

$$B(a) = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} (1 + a \sin \omega t) | 1 + a \sin \omega t | dt \quad (30)$$

Door BYKER[5] werd de integraal $B(a)$ numeriek bepaald. Voor $0,4 < a < 9$ zijn de waarden van $B(a) - 1$ weergegeven in fig. III.3.3 van zijn proefschrift[5] ($\varphi = 90^\circ$).

In bijlage 3 is de betreffende kromme gereproduceerd.

Voor $a < 1$ is $B(a)$ gelijk aan $1 + \frac{1}{2} a^2$.

Voor grote waarden van a nadert $B(a)$ tot:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} B(a) = \frac{4}{\pi} a \quad (31)$$

- Volgens -

Volgens (18) en (27) geldt, als $\bar{p} < \hat{p}$ is, dat

$$(\tau_{b \max} - \tau_{b \min}) / 2\rho = \bar{p}_b^2 + \hat{p}_b^2 \quad (32)$$

waarin $\tau_{b \max}$ en $\tau_{b \min}$ de maximale en minimale schuifspanning op de bodem zijn.

Met verwaarlozen van de invloed van instationaire effecten vindt men, dat de "amplitude" van de schuifspanning aan de bodem gelijk is aan $\rho g h \hat{I}$, waarin $\hat{I}$ de "amplitude" van het verhang voorstelt, ofwel:

$$\frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2\rho} \approx gh\hat{I} \quad (33)$$

zodat uit (32) wordt gevonden:

$$\bar{p}_b^2 + \hat{p}_b^2 \approx gh\hat{I} \quad (34)$$

In het triviale geval, dat geldt: $\frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{d\bar{h}}{dx} = 0$ is uiteraard $\bar{p}_b = 0$ en volgt $\hat{p}_b$ uit (34).

Dit geval verder buiten beschouwing latend, volgt uit (29) en (34):

$$\hat{I} / \left| \frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \right| = \frac{1 + (\hat{p}_b / \bar{p}_b)^2}{B(\hat{p}_b / \bar{p}_b)} \quad (35^a)$$

Volgens (31) nadert voor grote waarden van $\hat{p}_b / \bar{p}_b$ het rechterlid van (34) tot:

$$\frac{1 + (\hat{p}_b / \bar{p}_b)^2}{B(\hat{p}_b / \bar{p}_b)} \approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{\hat{p}_b}{\bar{p}_b} + \frac{\bar{p}_b}{\hat{p}_b} \right) \quad (\hat{p}_b \gg \bar{p}_b) \quad (35^b)$$

In bijlage 4 is, uitgaande van de door BYKER [5] berekende waarden van B (a), voor waarden $0,4 \leq (\hat{p}_b / \bar{p}_b) \leq 8,5$ het rechterlid van (35^a) uitgezet tegen $\hat{p}_b / \bar{p}_b$; daar de grootte van het linkerlid van (35^a) bekend is, volgt hieruit de waarde van $\hat{p}_b / \bar{p}_b$. Uit bijlage 4 (voor $\hat{p}_b / \bar{p}_b \leq 8,5$) of uit combinatie van (35^a) en (35^b) (voor $\hat{p}_b / \bar{p}_b \geq 8,5$) kan de waarde van $\hat{p}_b / \bar{p}_b$ worden afgeleid. Uit (34) volgen dan $\bar{p}_b$ en $\hat{p}_b$.

De oplossing van de vergelijking (17) met de randvoorwaarden (18) en (19) verloopt nu in principe analoog aan de oplossing, gegeven in [4] voor het probleem van zandopwerveling in golven (kort-periodieke oscillerende stromen), waar-

naar korthedshalve wordt verwezen.

Uit de aldus gevonden p volgt u (behoudens een integratie constante) met behulp van (16):

$$u = \int \frac{p}{l} dz \quad (36)$$

Door integratie van p/l (waarin l = mengweg), beginnend aan het oppervlak, wordt gevonden:

$u = u_{\text{opp}}$, waarin u_{opp} de oppervlakte snelheid voorstelt.

Door de integratie door te zetten tot een hoogte gelijk aan $r/33$ boven de bodem, wordt de waarde van $u = u_{\text{opp}}$ op het niveau $z = r/33$ gevonden. Daar wordt aangenomen, dat hier $u = 0$ is, volgt hieruit u_{opp} (en dus u) als functie van z , zodat eveneens $\bar{u}$ als functie van de tijd is te berekenen.

4.4 Concentratieverticalen.

Slibconcentraties worden berekend met behulp van de vergelijking:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w c \right) \quad (37)$$

waarin:

w = de valsnelheid van het materiaal, positief in negatieve z -richting

c = de concentratie van het materiaal.

Vergelijking (37) is de continuïteitsvergelijking voor het sediment. Het gedeelte aan de rechterzijde tussen haakjes stelt het sedimenttransport in neerwaartse richting voor. De eerste term tussen haakjes geeft de turbulente uitwisseling aan, de tweede de vallende beweging van het materiaal.

De turbulente uitwisselingscoëfficiënt ϵ is gelijk gekozen aan:

$$\epsilon = l \cdot |p| \quad (38)$$

waarbij de mengweg l is gegeven in vgl. (9).

Deze coëfficiënt ϵ is dus een functie van z en t .

Voor een stationaire stroom zou gelden:

$$\epsilon = l \cdot |V_*| \quad (39)$$

- waarbij -

waarbij v , de schuifspanningssnelheid aan de bodem van deze stationaire stroom voorstelt. In bijlage 5 is het verloop van ϵ , zoals dit volgens de aannamen in een stationaire stroom zou optreden, vergeleken met de resultaten, afgeleid door COLEMAN [6] uit concentratieverticalen in een stroomgoot.

De benadering blijkt bevredigend.

De volgende randvoorwaarden worden gekozen:

1° Geen transport van sediment door het oppervlak

$$\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w c \equiv 0 \quad \text{voor } z = h \quad (40)$$

In appendix A wordt op de numerieke uitwerking van deze voorwaarde nader ingegaan.

2° Geen turbulente opwerveling aan de bodem

$$\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{voor } z = 0$$

Deze voorwaarde resulteert in:

$$\frac{\partial c}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{voor } z = 0 \quad (41)$$

Voor de numerieke aanpak wordt weer verwezen naar appendix A.

5 RESULTATEN.

In het kader van zijn afstudeerontwerp bij de Vakgroep Kustwaterbouwkunde van de Technische Hogeschool te Delft werd door Schaart, uitgaande van de bestaande programma's SA1 en TA2 voor het opwervelprocedé van zand in golven (beschreven in [4]), de programmatuur ontwikkeld, waarmee het mogelijk is de in hoofdstuk 4 beschreven vergelijkingen onder de gestelde randvoorwaarden op te lossen.

Tot op heden werden nog slechts drie gevallen uitgerekend, welke de volgende karakteristieken gemeen hadden:

$$\begin{aligned} h &= 15,4 \text{ m} \\ r &= 0,03 \text{ m}^1) \\ \hat{v} &= 0,30 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Bij een stationaire stroom met snelheid $0,30 \text{ m/s}$ zou gelden:

$$C_h = 18 \log (12 h/r) = 68,2 \sqrt{m/s}$$

$$V_* = v \sqrt{g} / C_h = 1,378 \text{ cm/s}$$

en voor I zou worden gevonden:

$$I = v^2 / C_h^2 = 1,256 \cdot 10^{-6}$$

In de gegeven voorbeelden wordt $\hat{p}$ gelijk aan de bovenstaande $V_* = 1,378 \text{ cm/s}$ gekozen terwijl voor $\hat{I}$ analoog de waarde $1,256 \cdot 10^{-6}$ wordt aangehouden:

$$\hat{p}_p = 1,378 \text{ cm/s}$$

$$\hat{I} = 1,256 \cdot 10^{-6}$$

- Voor -

1) Dit betekent, dat overeenkomstig Nikuradse de snelheid op een hoogte $z = z_0$, met $z_0 = r/33$, op nul wordt gesteld.

Voor de grootte van h_* , gedefinieerd in (A9) van appendix A wordt dan gevonden, bij $T = 44700\text{S}$:

$$\chi \hat{p}_b T = 2463 \text{ m}$$

$$h_* = h/\chi \hat{p}_b T = 6,25 \cdot 10^{-3} = 1/16$$

De gridhoogte wordt gelijk gekozen aan $h/16 = 0,96 \text{ m}^1$.
Verder wordt gekozen voor de term $\frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx}$ (zie blz. 11):

$$\frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15,4}{1014} \cdot \frac{4}{15000} = 2,021 \cdot 10^{-6}$$

De grootheden, aangegeven in de onderstaande tabel 1 zijn voor de diverse gevallen verschillend gekozen

Tabel 1. Karakteristieken van de berekende gevallen.

Geval	$\frac{dh}{dx}$	Korrel- diameter	Valsnelheid in mm/s
1	$-1,892 \cdot 10^{-6}$	20μ	0,30
2	$-1,892 \cdot 10^{-6}$	50μ	1,70
3	$-1,529 \cdot 10^{-6}$	20μ	0,30

Geval 1 zou als basisberekening beschouwd kunnen worden, terwijl geval 2 en 3 varianten hierop zijn.

In geval 2 is het stroompatroon hetzelfde als in geval 1, maar wordt het gedrag van een grover sediment, met korreldiameter 50μ in plaats van 20μ beschouwd; in geval 3 is het verhang, dat de zoutgradiënt moet compenseren geringer gekozen, zodat een resulterende stroming in vloedrichting ontstaat.

- Tabel 2 -

1)

In tegenstelling tot hetgeen in [4] werd beschreven kan in het onderhavige programma de gridhoogten afwijken van $r/33$.

Tabel 2 geeft de kwantiteit van een aantal uit de basisgegevens af te leiden grootheden, welke in hoofdstuk 4 ter sprake zijn gekomen.

Tabel 2. Grootte van $\bar{p}_b / \hat{p}_b$					
Geval	$\frac{d\bar{h}}{dx}$	$\frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{h}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dx}$	$\frac{1 + (\hat{p}_b / \bar{p}_b)^2}{B(\hat{p}_b / \bar{p}_b)}$	$\hat{p}_b / \bar{p}_b$	$\bar{p}_b / \hat{p}_b$
1, 2	$-1,892 \cdot 10^{-6}$	$0,129 \cdot 10^{-6}$	9,71	12,28	0,08141
3	$-1,529 \cdot 10^{-6}$	$0,492 \cdot 10^{-6}$	2,55	3,02	0,3314

In tabel 2 volgen de 2^e en 3^e kolom uit de hiervoor verschaafte gegevens, de 4^e kolom uit formule (35^a) en de 5^e kolom uit bijlage 4 en formule (35^b).

In het computerprogramma is als multitijdstip het tijdstip aangehouden, dat de harmonische component van p_b gelijk aan nul is, met andere woorden op het multitijdstip is p_b gelijk aan $\bar{p}_b$, terwijl p_b toeneemt. Gestart wordt vanuit de beginvoorwaarde dat p overal nul is.

Vervolgens wordt 1½ getij periode alleen de interne schuifspanningsnelheid berekend, uitgaande van vgl. (17). Na één periode is het numerieke model "ingespeeld", dat wil zeggen dat op iedere hoogte de grootte van p zich aan de periodiciteit van de randvoorwaarde heeft aangepast.

De resultaten, vastgelegd in bijlage 6 t/m 11 hebben betrekking op de tweede berekende getij-periode, waarbij als multitijdstip het moment wordt gekozen, dat het model wordt geacht te zijn ingespeeld (dus na één doorgerekende periode).

Na 1½ getij-periode heeft p_b zijn maximale waarde in eb-richting bereikt, dit tijdstip wordt als multitijdstip voor het "lozen" van de slibconcentratie genomen.

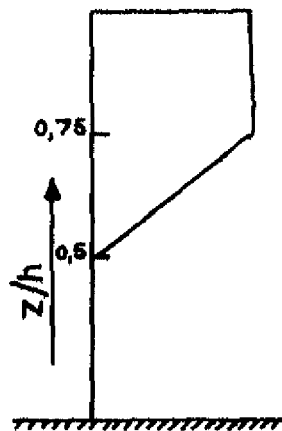


fig. 2: aanvangs-
concentratie.

Het aangenomen verloop van de aanvangsconcentratie staat aangegeven in fig. 2: deze wordt gelijk aan 1 gesteld in het bovenste laag ter hoogte van $\frac{1}{2}$ van de waterdiepte en van hieraf neemt deze lineair af tot nul ter hoogte van de halve waterdiepte.

De in het computerprogramma gevonden, over de verticaal gemiddelde snelheden als functie van de tijd staan aangegeven in bijlage 6. De bijbehorende snelheidsverticalen staan in bijlage 7 weergegeven. Bijlage 8 toont deze snelheidsverticalen op-nieuw, doch nu op semi-logaritmisch papier uitgezet (dat wil zeggen v lineair ten opzichte van z logaritmisch).

Bijlage 8-I geeft de snelheidsverticalen van geval 1 (= geval 2), bijlage 8-III voor geval 3.

In geval de stroom stationair zou zijn geweest, en wanneer dichtheidsgradiënten geen rol zouden spelen, zou bijlage 8 rechte lijnen moeten vertonen, die allen de z -as in het punt $z = z_0$ zouden snijden (zie (11)), waarbij z_0 gelijk is aan $r/33$.

In werkelijkheid zijn de snelheidsverticalen op semi-logaritmisch papier inderdaad tamelijk rechtlijnig, maar zij snijden de z -as niet allen in hetzelfde punt; de "schijnbare ribbelhoogte" varieert sterk gedurende het getij.

Overeenkomstig de bewerking van in de Westerschelde gemeten snelheidsverticalen [7] is deze schijnbare ribbelhoogte gelijk gekozen aan 33 maal de schijnbare z_0 , waarbij deze laatste volgt uit de z -coördinaat van het snijpunt van de doorgetrokken snelheidsverticaal met de z -as (zie bijlage 8).

In bijlage 9 is de schijnbare ribbelhoogte uitgezet tegen de tijd. Ter verduidelijking is tevens de bijbehorende over de

- verticaal -

verticaal gemiddelde stroomsnelheid aangegeven (overeenkomstig bijlage 6).

Uit bijlage 7 t/m 9 blijkt, dat de eb- en vloed verticalen essentieel van elkaar in karakter verschillen en de stroomverticaal bij de kentering van vloed naar eb eveneens sterk afwijkt in karakter van de stroomverticaal van eb naar vloed.

De schijnbare ribbelhoogten bij eb zijn veel groter dan die bij vloed; een verschijnsel, dat ook in de natuur werd waargenomen [7]. De schijnbare ribbelhoogte lijkt minima te vertonen bij de kentering van vloed naar eb en ten tijde van maximale vloedsnelheid.

In de bijlagen 10 is aangegeven hoe de slibconcentraties in de tijd verlopen. Op de horizontale as is de tijd uitgezet, op de verticale de relatieve hoogte (= hoogte boven de bodem/waterdiepte).

Getekend zijn lijnen van constant slibgehalte.

De bijlagen 10-I, 10-II en 10-III hebben respectievelijk betrekking op geval 1, 2 en 3; de tijdschaal op de horizontale as in bijlage 10-I^a is een kwart van de tijdschaal van 10-I^b. Bijlage 10-I^a toont dus als het ware een detail van bijlage 10-I^b.

De bijlagen tonen een duidelijk beeld hoe het slib zich eerst vanuit de bovenste lagen verdeelt over de totale verticaal, terwijl het "val"-mechanisme ook duidelijk naar voren komt. In de bijlagen is tevens met een lijn de valsnelheid in stil water aangegeven. In sommige bijlagen is tevens opwerveling naar hogere lagen en toename van de concentratie aldaar te zien, wanneer de watersnelheden, en dus de turbulentie, weer toeneemt.

Bijlage 11 toont verder het percentage oorspronkelijk in het water aanwezige slib, dat bezonken is, als functie van de tijd.

6 GLOBALE SCHEMATISERING.

Globaal kan het valmechanisme op de volgende wijze worden geschematiseerd. In de eerste periode verdeelt het sediment zich over de gehele doorsnede. Gezien de vrij extreem gekozen aanvangsverdeling (geen sediment in de onderste laag ter hoogte van de halve diepte) kan deze tijd maximaal op 1 uur gesteld worden.

Stel, dat op dat moment het sediment zich gelijkmatig over de verticaal heeft verdeeld, zonder dat verlies aan de bodem is opgetreden, dan wordt daarna aan de bodem het over de verticaal gemiddelde sedimentgehalte $\bar{c}$ aangetroffen, waarbij de totale hoeveelheid ingebracht materiaal per strekkende meter rivierbreedte gelijk is aan $\bar{c} h$. Per tijdseenheid wordt aan de vloeistof onttrokken een hoeveelheid $w \bar{c}$.

De continuïteitsvergelijking voor de gehele vloeistof levert dus:

$$h \frac{d\bar{c}}{dt} + w\bar{c} = 0 \quad (42)$$

Hierbij geldt de randvoorwaarde:

$$\bar{c} = \bar{c}_0 \text{ voor } t = t_1 \quad (43)$$

Hierbij is t_1 het tijdstip, waarop de concentratie als gelijkmatig over de doorsnede kan worden aangenomen.

De oplossing van vgl (42) levert dus:

$$\bar{c} = \bar{c}_0 e^{-(t-t_1)/T_0} \quad (44)$$

Hierin is T_0 een "nepereringstijd", d.w.z. de tijd benodigd om de over de verticaal gemiddelde concentratie en factor e te doen dalen:

$$T_0 = h/w \quad (45)$$

De fractie neergeslagen materiaal f is dus:

$$f = 1 - e^{-(t-t_1)/T_0} \quad (46)$$

- Bij -

Bij valnelheden van $0,3 \text{ mm/s}$ en $1,7 \text{ mm/s}$ (geval 1 en 2) is deze nepereringstijd bij een waterdiepte van $15,4 \text{ m}$ weergegeven in onderstaande tabel 3.

Tabel 3. De nepereringstijd in geval 1 en 2					
Geval	D_{50}	w	T_0	begintijd t_1	
				t.o.v. $t = 0^u$	t.o.v. $t = 3^u 06^m$
1	20μ	$0,3 \text{ mm/s}$	$14^u 15^m 33^s$	4^u	54^m
2	50μ	$1,7 \text{ mm/s}$	$2^u 30^m 59^s$	$3^u 45^m$	39^m

Tevens is in de 66n na laatste kolom van tabel 3 een begintijd t_1 aangegeven (genomen ten opzichte van de aanvang van de tweede in het computerprogramma berekende periode) tot welk bij de vereenvoudigde berekening wordt aangenomen, dat geen sediment beziakt. In de laatste kolom van deze tabel is deze begintijd gekozen ten opzichte van het tijdstip van invoeren van de concentratie (d.i. $\frac{1}{4}$ getijperiode na het eerst-genomende tijdstip = $3^u 06^m$).

Het resultaat van de vereenvoudigde berekening is tevens in bijlage 11 weergegeven. De overeenstemming met de computerberekening is zeer goed voor het fijne sediment (20μ) en redelijk goed voor het grovere sediment (50μ). De benadering geeft iets te lage waarden voor de hoeveelheid gesedimenteerd materiaal. De in de laatste twee regels genoemde conclusies waren te verwachten: immers, de hypothese, dat het sedimentgehalte aan de bodem gelijk is aan het gemiddelde gehalte gaat beter op naarmate het sediment fijner is en daar de bodemconcentratie groter is dan de gemiddelde zullen bij de vereenvoudigde schematisering de gesedimenteerde hoeveelheden onderschat worden.

Appendix A.

Enige opmerkingen over de numerieke berekening van de concentratie.

De numerieke berekening van de concentratie geschiedt door uit te gaan van de continuïteitsvergelijking (A1):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \frac{\partial S}{\partial z} \quad (A1)$$

$$\text{waarin: } S = -\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} - w c \quad (A2)$$

De vergelijkingen worden eerst dimensieloos gemaakt door invoeren van:

$$t_* = t/T \quad (A3)$$

$$z_* = z/\kappa \beta_b T \quad (A4)$$

$$w_* = w/\kappa \beta_b \quad (A5)$$

$$S_* = S/\kappa \beta_b \quad (A6)$$

$$\epsilon_* = \epsilon/\kappa^2 \beta_b^2 T \quad (A7)$$

Verder wordt ingevoerd:

$$p_* = p/\beta_b \quad (A8)$$

$$\text{en: } h_* = h/\kappa \beta_b T \quad (A9)$$

Er geldt volgens (9) en (38):

$$\epsilon = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{h}} \cdot |p| \quad (A10)$$

De relatie (A10) is volgens (A4), (A7), (A8) en (A9) in dimensieloze vorm te schrijven als:

$$\epsilon_* = z_* \sqrt{1 - \frac{z_*}{h_*}} \cdot |p_*| \quad (A11)$$

De vergelijkingen (A1) en (A2) gaan in dimensieloze vorm over in:

$$\frac{\partial c}{\partial t_*} = - \frac{\partial S_*}{\partial z_*} \quad (A12)$$

waarin:

$$S_* = -\epsilon_* \frac{\partial c}{\partial z_*} - w_* c \quad (A13)$$

De vergelijkingen (A12) en (A13) kunnen als volgt in differentievorm worden geschreven:

$$\frac{c' [z_0] - c [z_0]}{\Delta t_0} = - \frac{S_0 [z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0] - S_0 [z_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0]}{\Delta z_0} \quad (A14)$$

waarin:

$$S_0 [z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0] = - \epsilon_0 [z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0] \cdot \frac{c [z_0 + \Delta z_0] - c [z_0]}{\Delta z_0} \\ - w_0 \frac{c [z_0 + \Delta z_0] + c [z_0]}{2} \quad (A15)$$

en waarin $S_0 [z_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0]$ een analoge betekenis heeft.

Hierbij zijn concentraties op het tijdstip $t_0 + \Delta t_0$ met, en concentraties op het tijdstip t_0 zonder een accent aangegeven.

Substitutie van (A15) in (A14) geeft:

$$c' [z_0] - c [z_0] = \frac{\Delta t_0}{(\Delta z_0)^2} \left\{ \left\{ \epsilon_0 [z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0] + \frac{1}{2} w_0 \cdot \Delta z_0 \right\} \cdot c [z_0 + \Delta z_0] \right. \\ - \left\{ \epsilon_0 [z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0] + \epsilon_0 [z_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0] \right\} \cdot c [z_0] \\ \left. + \left\{ \epsilon_0 [z_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0] - \frac{1}{2} w_0 \cdot \Delta z_0 \right\} \cdot c [z_0 - \Delta z_0] \right\} \quad (A16)$$

De berekening wordt uitgevoerd volgens de "pulsating grid"-methode, beschreven in [4].

Waar [4] echter handelde over kort-periodieke golven, waarbij de concentraties in de hogere lagen klein werden verondersteld, kan in het onderhavige geval de slibconcentratie in de hogere regionen niet worden verwaarloosd. Er zal dus meer aandacht moeten worden geschonken aan de berekening van het grofste rooster, speciaal wat betreft de randvoorwaarde aan het oppervlak.

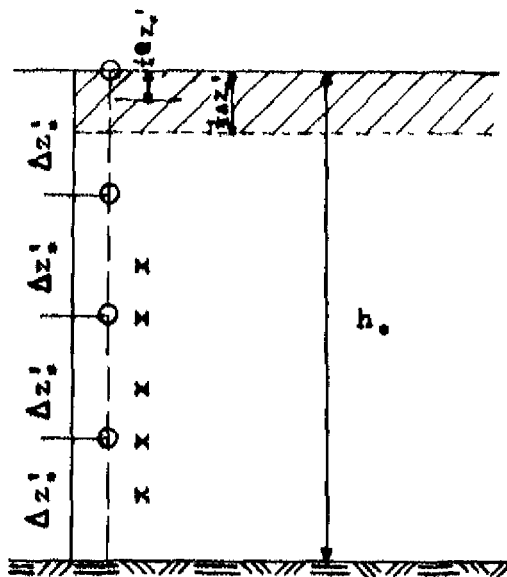


fig. 2 Het grofste en het één na grofste rooster.

In figuur 2 zijn de vier punten van dit grofste rooster weergegeven, liggend op een onderlinge afstand $z_0' = \frac{1}{4} h_0$. Verder zijn met kruisjes in figuur 2 de 5 punten van het volgende rooster weergegeven, dat een factor 2 fijner is dan het grofste.

Beschouw de gemiddelde concentratie in de bovenste waterlaag ter hoogte van $\frac{1}{4} \Delta z_0' = 1/8 h_0$. In figuur 2 is deze laag gearceerd aangegeven.

Beschouw deze gemiddelde concentratie als de concentratie in het midden van deze laag, dus

op een hoogte $z_0 = h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0'$.

Dan bestaat de volgende relatie tussen de concentraties c' en c , resp. op de tijden $t_0 + \Delta t_0$ en t_0 :

$$c' \left[h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0' \right] - c \left[h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0' \right] = \frac{\Delta t_0}{\frac{1}{4} \Delta z_0'} S_0 \left[h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0' \right] \quad (A17)$$

Volgens (A13) moet voor het berekenen van $S_0 \left[h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0' \right]$ in (A17) de concentratie en de concentratie-gradient ter hoogte van $z_0 = h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0'$ bekend zijn.

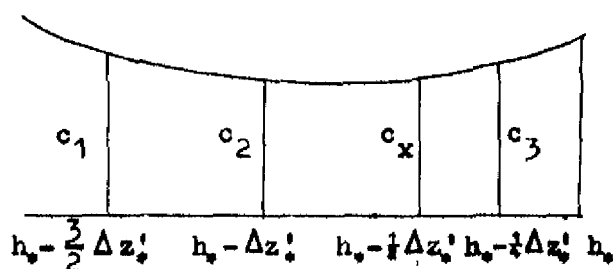


fig. 3 Definitie c_1 , c_2 en c_3 .

De concentratie c_x in het punt $h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0'$ wordt gevonden uit de tweede afgeleide $\frac{\partial^2 c}{\partial z_0^2}$. Onder verwaarlozing van derde

In figuur 3 zijn de concentraties op de hoogten

$z_0 = h_0 - \frac{3}{2} \Delta z_0'$, $z_0 = h_0 - \Delta z_0'$ en $z_0 = h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0'$ respectievelijk met c_1 , c_2 en c_3 aangegeven.

Gezocht wordt de concentratie c_x en de concentratiegradient in het punt $z_0 = h_0 - \frac{1}{4} \Delta z_0'$.

- en -

en hogere afgeleiden geldt hiervoor:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z_*^2} = \frac{c_1 - 2c_2 + c_3}{(\Delta z_*)^2/4} \quad (A18)$$

Wordt in de berekening van $\frac{\partial^2 c}{\partial z_*^2}$ alleen c_1 , c_2 en c_3 betrokken, dan wordt gevonden:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z_*^2} = \frac{\frac{c_3 - c_2}{3\Delta z_*/4} - \frac{c_2 - c_1}{\Delta z_*/2}}{5\Delta z_*/8} \quad (A19)$$

Gelijkstellen van (A18) en (A19) levert:

$$c[h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] = (-3c_1 + 10c_2 + 8c_3)/15 \quad (A20)$$

De concentratie-gradient ter hoogte van $z_* = h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*$ kan worden gevonden met behulp van een Taylor-reeks (fig. 3):

$$\frac{\partial c}{\partial z_*} [h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] = \frac{\partial c}{\partial z_*} [h_* - \frac{5}{4}\Delta z_*] + \frac{1}{4}\Delta z_* \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z_*^2} \quad (A21)$$

Substitutie van (A19) levert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial z_*} [h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] &= \frac{c_2 - c_1}{\frac{1}{2}\Delta z_*} + \frac{12c_1 - 20c_2 + 8c_3}{5\Delta z_*} \\ \frac{\partial c}{\partial z_*} [h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] &= \frac{2c_1 - 10c_2 + 8c_3}{5\Delta z_*} \end{aligned} \quad (A22)$$

De nieuwe concentratie in het punt $z_* = h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*$ wordt nu gevonden uit (A17), (A13), (A20) en (A22):

$$\begin{aligned} c[h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] - c[h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*] &= \\ \frac{4\Delta t_*}{15(\Delta z_*)^2} \left[-\varepsilon_* (h_* - \frac{1}{4}\Delta z_*) \cdot (3c_1 - 15c_2 + 12c_3) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} w_* \cdot \Delta z_* \cdot (-3c_1 + 10c_2 + 8c_3) \right] \end{aligned} \quad (A23)$$

Zoals in [4] wordt beschreven, worden de concentraties in de diverse roosterpunten opgeslagen in een 2-dimensionale matrix, groot $5 \times m$ elementen, waarbij m het (naar wens te kiezen) aantal roosters is.

De concentraties in het grootste, resp. één na grootste rooster staan hierbij op de m^{de} , resp. $m-1^{\text{de}}$ regel; de punten van het rooster worden van onder naar boven gaand oplopend

- genummerd -

genummerd. De concentraties in de punten van het grofste rooster (fig. 2) worden dus van onder naar boven gaand als $c[1,m]$ t/m $c[4,m]$ in de matrix opgeslagen, de concentraties in de punten van het één na grofste rooster als $c[1,m-1]$ t/m $c[5,m-1]$.

Werd in het in [4] beschreven programma betreffende kort-periodieke golven uitgegaan van een concentratie aan het oppervlak gelijk aan nul (m.a.w. $c[4,m] \approx 0$), in het onderhavige (getij-) programma wordt in de matrix als $c[4,m]$ opgeslagen de waarde van c in het punt $z_0 = h_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0'$. De in figuur 3 weergegeven punten c_1 , c_2 en c_3 staan dus in de matrix resp. als $c[5,m-1]$, $c[3,m]$ en $c[4,m]$.

De concentratie in het punt $c[3,m]$ wordt gevonden uit (A14), waarbij $S_0[z_0 + \frac{1}{2} \Delta z_0']$ het transport ter hoogte $h_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0'$ voorstelt.

Dit is volgens (A13), (A20) en (A22):

$$S_0\left[h_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0'\right] = -E_0\left[h_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0'\right] \cdot \frac{2c[5,m-1] - 10c[3,m] + 8c[4,m]}{5 \Delta z_0'} - \frac{1}{15} w_0 (-3c[5,m-1] + 10c[3,m] + 8c[4,m]) \quad (A24)$$

Verder is in (A14) $S_0[z_0 - \frac{1}{2} \Delta z_0']$, het transport ter hoogte van $h_0 - 1\frac{1}{2} \Delta z_0'$, volgens (A15) gelijk aan:

$$S_0\left[h_0 - \frac{3}{2} \Delta z_0'\right] = -E_0\left[h_0 - \frac{3}{2} \Delta z_0'\right] \cdot \frac{c[3,m] - c[2,m]}{\Delta z_0'} - w_0 \frac{c[3,m] + c[2,m]}{2} \quad (A25)$$

Met behulp van (A14) wordt dus gevonden, dat een nieuwe waarde van $c'[3,m]$ ten tijde $t_0 + \Delta t_0$ kan worden gevonden uit een oude, $c[3,m]$ ten tijde t_0 door hieraan de volgende hoeveelheid toe te voegen:

$$c'[3,m] - c[3,m] = \frac{\Delta t_0}{15(\Delta z_0')^2} \cdot \left\{ c[4,m] \cdot (24 \text{ epsnew} + 16 wz) + c[3,m] \cdot (-30 \text{ epsnew} + 5 wz - 15 \text{ epsold}) + c[5,m-1] \cdot (6 \text{ epsnew} - 6 wz) + c[2,m] \cdot (15 \text{ epsold} - 15 wz) \right\} \quad (A26)$$

- waarin -

waarin:

$$\begin{aligned} w_z &= \frac{1}{2} w_* \cdot \Delta z_* \\ \text{epanew} &= \epsilon_* \left[h_* - \frac{1}{2} \Delta z_* \right] \\ \text{epsold} &= \epsilon_* \left[h_* - \frac{3}{2} \Delta z_* \right] \end{aligned}$$

Evenzo valt de toename per tijdstip van $c[4,m]$ te herleiden uit (A23):

$$\begin{aligned} c'[4,m] - c[4,m] &= \frac{4 \Delta t_*}{15 (\Delta z_*)^2} \left\{ -c[4,m] \cdot (12 \text{ epanew} + 8 w_z) \right. \\ &\quad \left. + c[3,m] \cdot (15 \text{ epanew} - 10 w_z) \right. \\ &\quad \left. - c[5,m-1] \cdot (3 \text{ epanew} - 3 w_z) \right\} \quad (\text{A27}) \end{aligned}$$

Hiermee is de randvoorwaarde aan het vrije oppervlak genoegzaam bekeken; nu zal de randvoorwaarde aan de bodem nog nader worden gezien.

Door de onderste laag verdwijnt volgens de aanname slechts transport ten gevolge van de valsnelheid van het materiaal; opwerping wordt hier nul gesteld:

$$S_* [0] = -w_* \cdot c[0] \quad (\text{A28})$$

In figuur 4 is de onderste sectie van het onderste (eerste) rooster weergegeven.

Uit (A15) wordt voor het transport ter hoogte van $z_* = \frac{1}{2} \Delta z_*$ gevonden:

$$\begin{aligned} S_* \left[\frac{1}{2} \Delta z_* \right] &= -\epsilon_* \left[\frac{1}{2} \Delta z_* \right] \cdot \frac{c \left[\frac{\Delta z_*}{2} \right] - c[0]}{\Delta z_*} \\ &\quad - w_* \cdot \frac{c \left[\frac{\Delta z_*}{2} \right] + c[0]}{2} \quad (\text{A29}) \end{aligned}$$

Uit (A12) volgt de toename van de gemiddelde concentratie in de onderste waterlaag met hoogte $\frac{1}{2} \Delta z_*$. Hoewel dit gemiddelde in feite het beste de concentratie ter hoogte $z_* = \frac{1}{2} \Delta z_*$ representeert (fig. 4), wordt deze in verband met de kleine grid afstand bij de bodem gelijk gesteld aan de concentratie ter hoogte $z_* = 0$. Dan laat de continuïteitsvergelijking (A12) zich voor de onderste laag als volgt in differentievorm schrijven:

$$\frac{c'[0] - c[0]}{\Delta t_*} = - \frac{S_* \left[\frac{1}{2} \Delta z_* \right] - S_* [0]}{\Delta z_*/2} \quad (\text{A30})$$

-Substitutie -

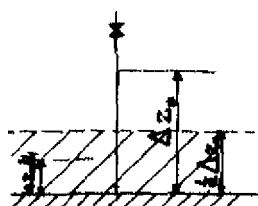


fig. 4
De bodemlaag

Substitutie van (A28) en (A29) in deze vergelijking geeft:

$$c'[0] - c[0] = \frac{2 \Delta t_*}{(\Delta z_*)^2} \cdot \left\{ \epsilon_* \left[\frac{1}{2} \Delta z_* \right] + \frac{1}{2} w_* \cdot \Delta z_* \right\} \cdot (c[\Delta z_*] - c[0]) \quad (A31)$$

Tenslotte zal nog worden nagegaan welke hoeveelheid materiaal op het tijdstip t aan de vloeistof is onttrokken.

De materiaalbalans van de met sediment beladen vloeistof kan worden gevonden door integratie van (A12) naar z_* en naar t_* :

$$\int_0^{t_*} S_*[0] dt_* = \left[\int_0^{h_*} c dz_* \right]_{t_*=t_*} - \left[\int_0^{h_*} c dz_* \right]_{t=0} \quad (A32)$$

Hierin stelt $S_*[0]$ in het linkerlid de hoeveelheid aan de vloeistof onttrokken sediment voor, d.w.z. de hoeveelheid bezinkend sediment per tijdseenheid. Deze volgt uit (A28), welke vorm gesubstitueerd in (A32), na enige hergroepering leidt tot:

$$w_* \int_0^{t_*} c[0] dt_* + \left[\int_0^{h_*} c dz_* \right]_{t_*=t_*} = \left[\int_0^{h_*} c dz_* \right]_{t=0} \quad (A33)$$

De eerste term van het linkerlid van (A33) geeft in dimensieloze vorm¹⁾ de totale sedimentatie aan, de som van de beide eerste termen moet, afgezien van numerieke onnauwkeurigheid, een constante opleveren. In het computerprogramma wordt op 32 tijdstippen per getijperiode deze materiaalbalans (A33) berekend.

¹⁾ Met behulp van (A6) kan de werkelijke hoeveelheid sedimentatie hieruit berekend worden.

Lijst van geraadpleegde literatuur.

- [1] Waterbouwkundig Laboratorium Borgerhout,
Gegevens stroommetingen (foto's) model 300/2, situatie T40.
- [2] ir. W.T. Bakker,
Memo Vl. 75.10 "Het alibtransport en de aanslibbing in
het Oostelijk deel van de Westerschelde voor en na de vol-
tooiing der bochtafsnijding bij Bath (voorlopige schatting).
- [3] dr. J.J. Dronkers,
Snelheidsverticalen (voordracht).
- [4] ir. W.T. Bakker,
Sand concentration in an oscillatory flow
14th Conf. on Coastal Engineering, Copenhagen 1974.
Ook in enigszins uitgebreidere versie verschenen als
Memo Vl. 74-5^b, Rijkswaterstaat, Directie Waterhuishouding
en Waterbeweging, Studiedienst Vlissingen.
- [5] prof. dr. ir. E.W. Bijker,
Some considerations about scales for coastal models with
movable bed.
Delft Hydraulics Laboratory Publication no. 50, 1967.
- [6] Coleman, N.L.,
Flume studies of the sediment transfer coefficient
Water Resources Research, Vol. 6 no. 3, June 1970.

HANSWEERT

GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	EB - EN VLOED WEGEN			
				BEGIN: GEM.TJ (EB)			
20.1.76						A2	76.66
J.d.B.							

● BEGINPUNT



BATH

BAALHOEK

HANSWEERT

GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	EB-EN VLOED WEGEN		
20.1.76				BEGIN: 5 ¹⁵ uur NA LW. BATH (GEM. CONCENTRATIE)		A2
J.d.B.						76.67

● BEGINPUNT



BATH

BAALHOEK

HANSWEERT

GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	EB-EN VLOED WEGEN	
20.1.76				BEGIN: LW. KENTERING	
J.d.B.				A2	76.68

● BEGINPUNT



BATH

BAALHOEK

HANSWEERT

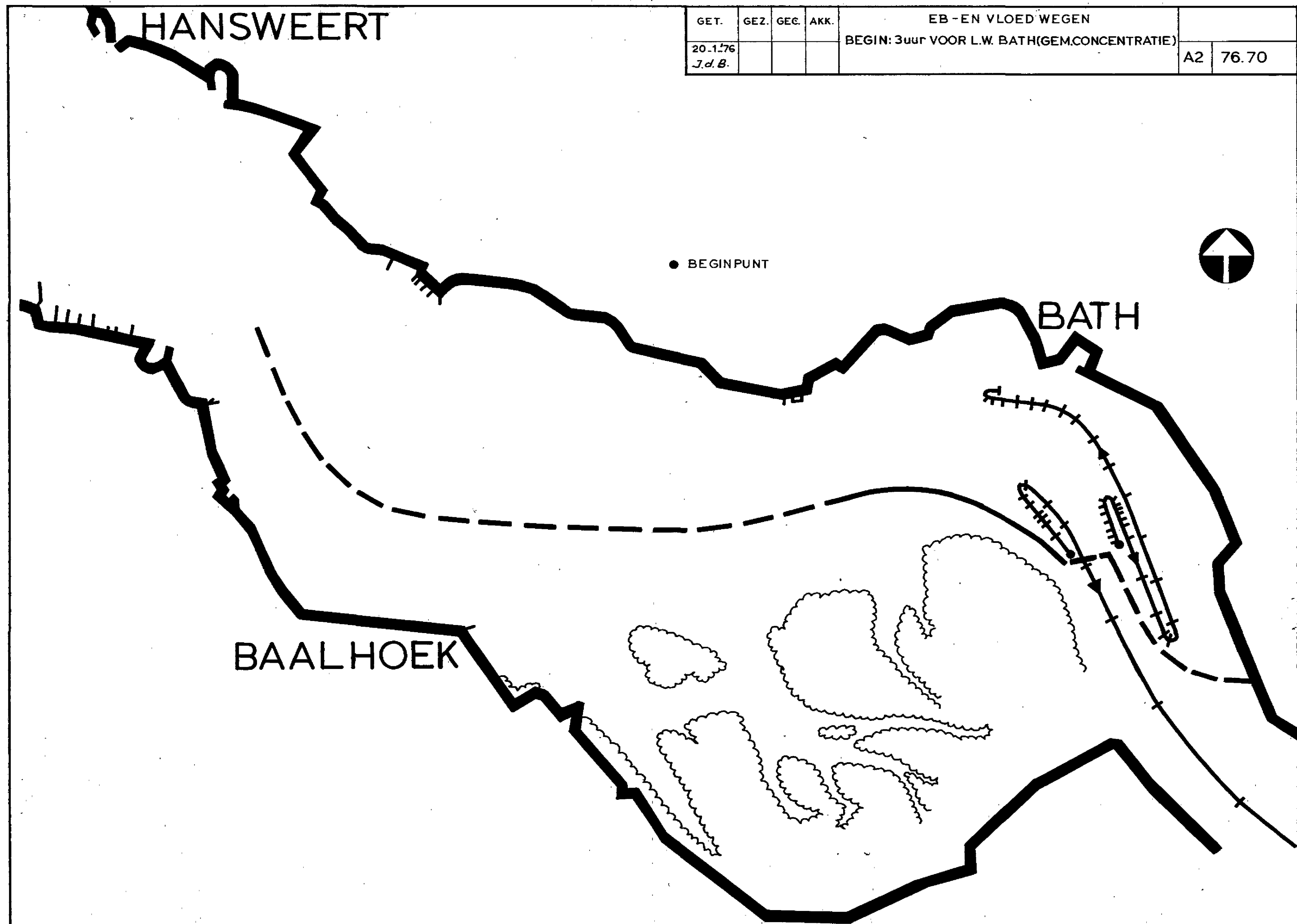
GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	EB - EN VLOED WEGEN	
20-1-76				BEGIN: 1 uur VOOR LW.BATH (MAX.CONCENTRATIE)	
J.d.B.				A2	76.69

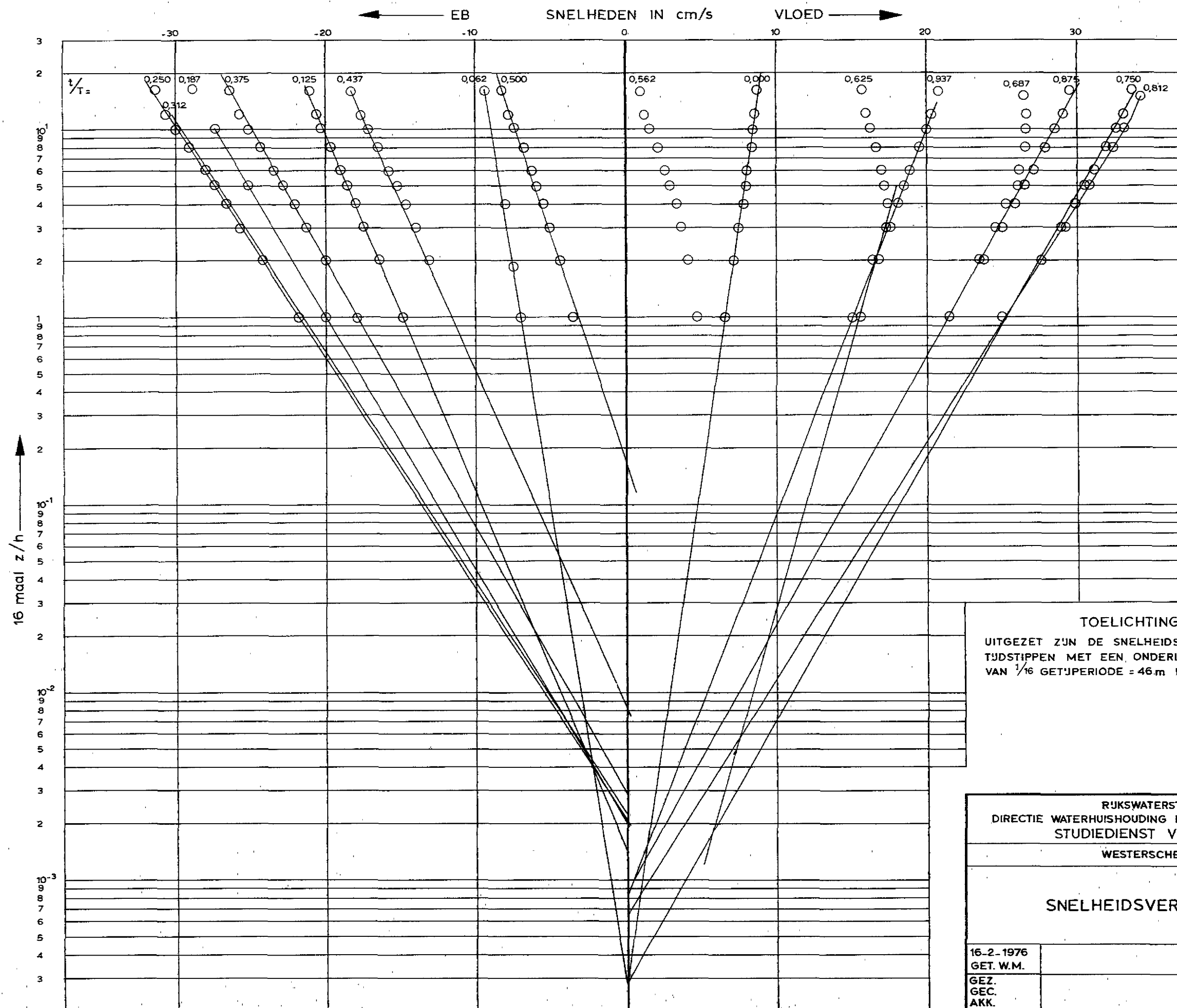
● BEGINPUNT



BATH

BAALHOEK





TOELICHTING

UITGEZET ZIJN DE SNELHEIDSVERTIKALEN OP
TIJDSTIPPEN MET EEN ONDERLINGE TIJDSTAP
VAN $1/16$ GETIJSERIE = 46 m IN 33 sec.

RIJKS WATERSTAAT
DIRECTIE WATERHUISSHOUDING EN WATERBEWEGING
STUDIEDIENST VLISSINGEN

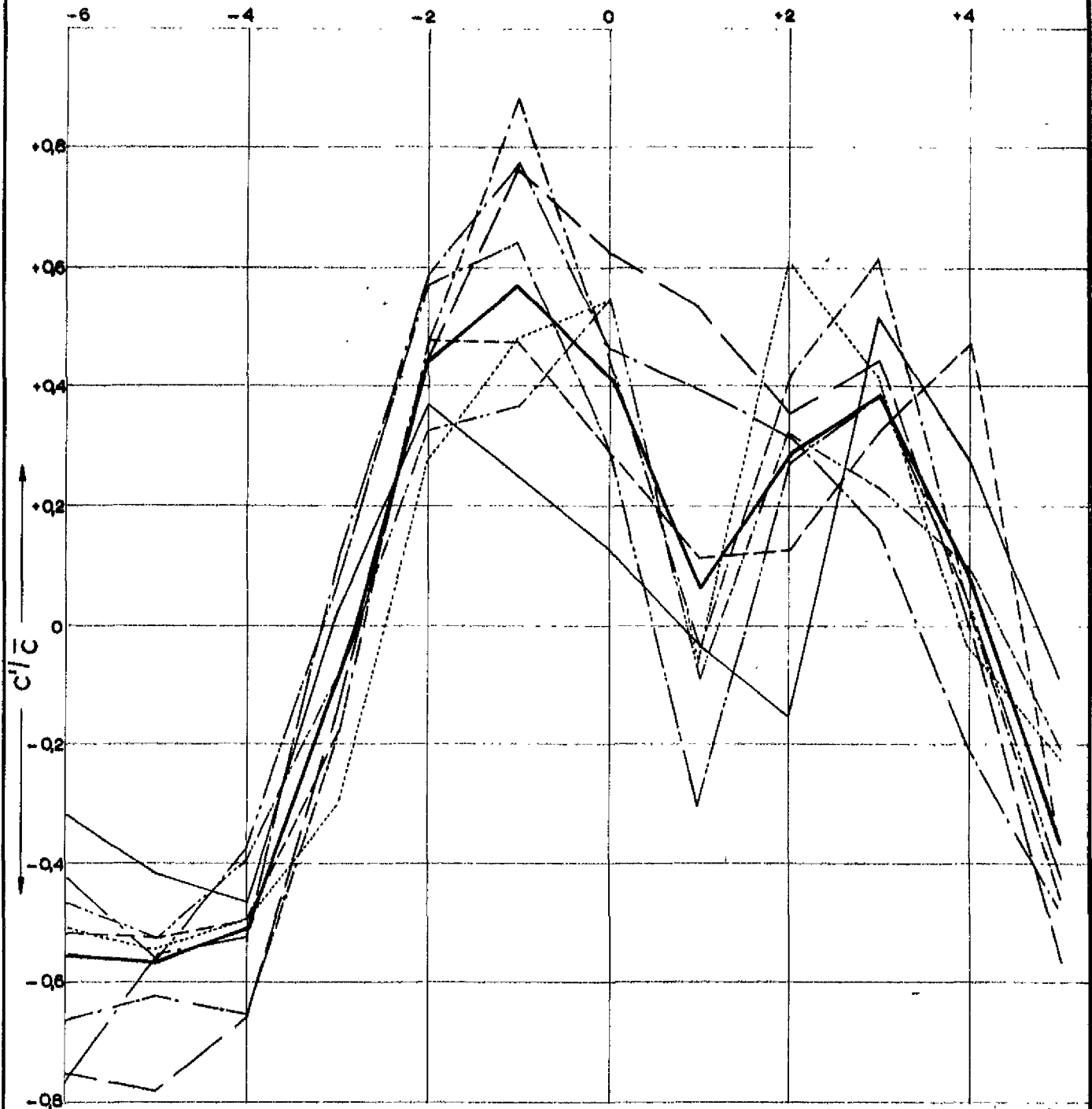
WESTERSCHDELDE

SNELHEIDSVERTIKALEN

16-2-1976
GET. W.M.
GEZ.
GEC.
AKK.

A2 76.78

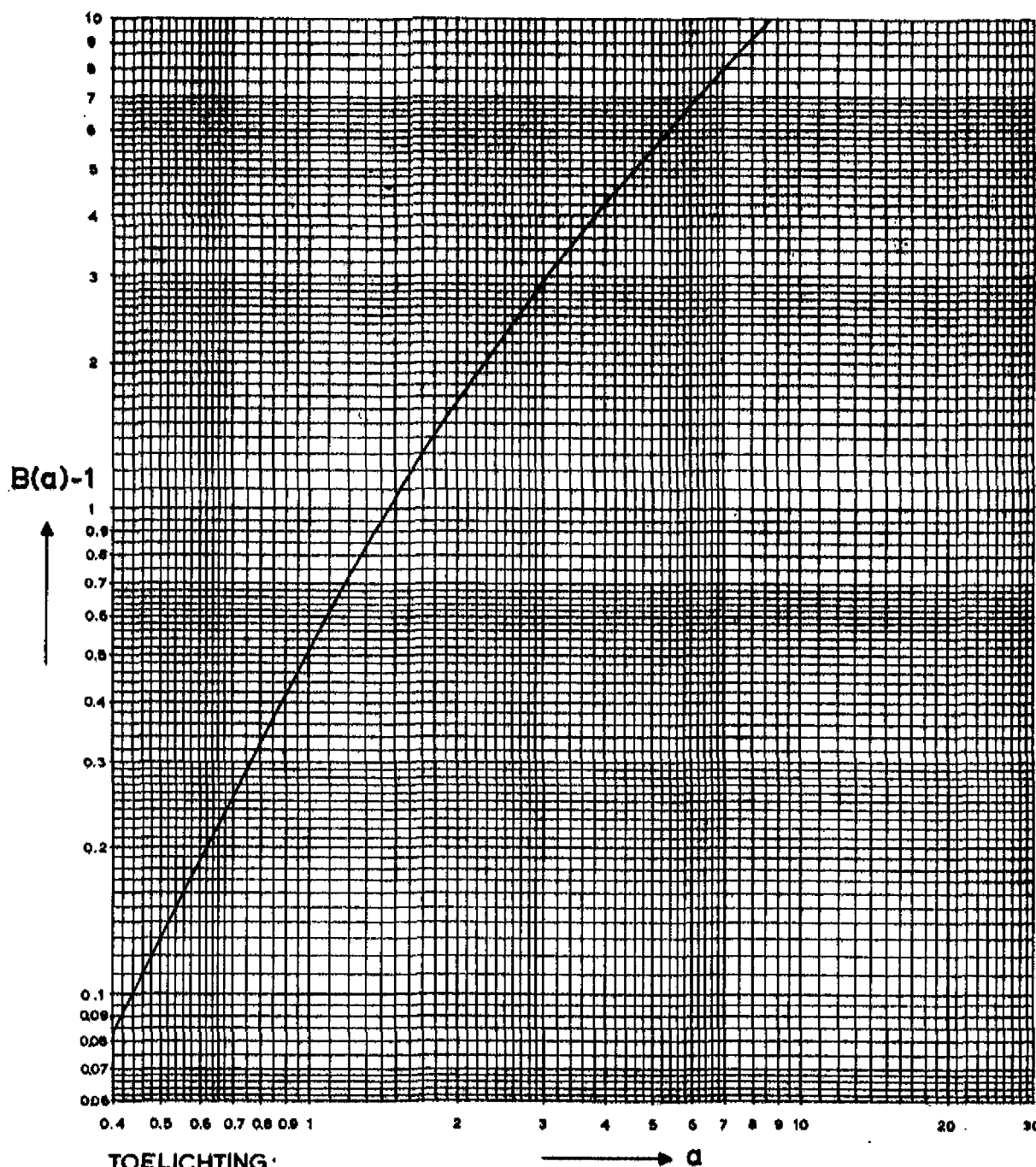
UREN NA L.W. BATH



TOELICHTING

—————	12-11-1971
—————	30-3-1972
—————	29-6-1972
—————	25-10-1972
—————	21-3-1973
—————	18-7-1973
—————	26-9-1973
—————	23-7-1974
—————	GEMIDDELD

GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	WESTERSCHELDE VAARWATER BOVEN BATH BOEI 76 GENORMEERDE SLIBGEHALTEN			
20-1-76 K.B.						A1	76.72

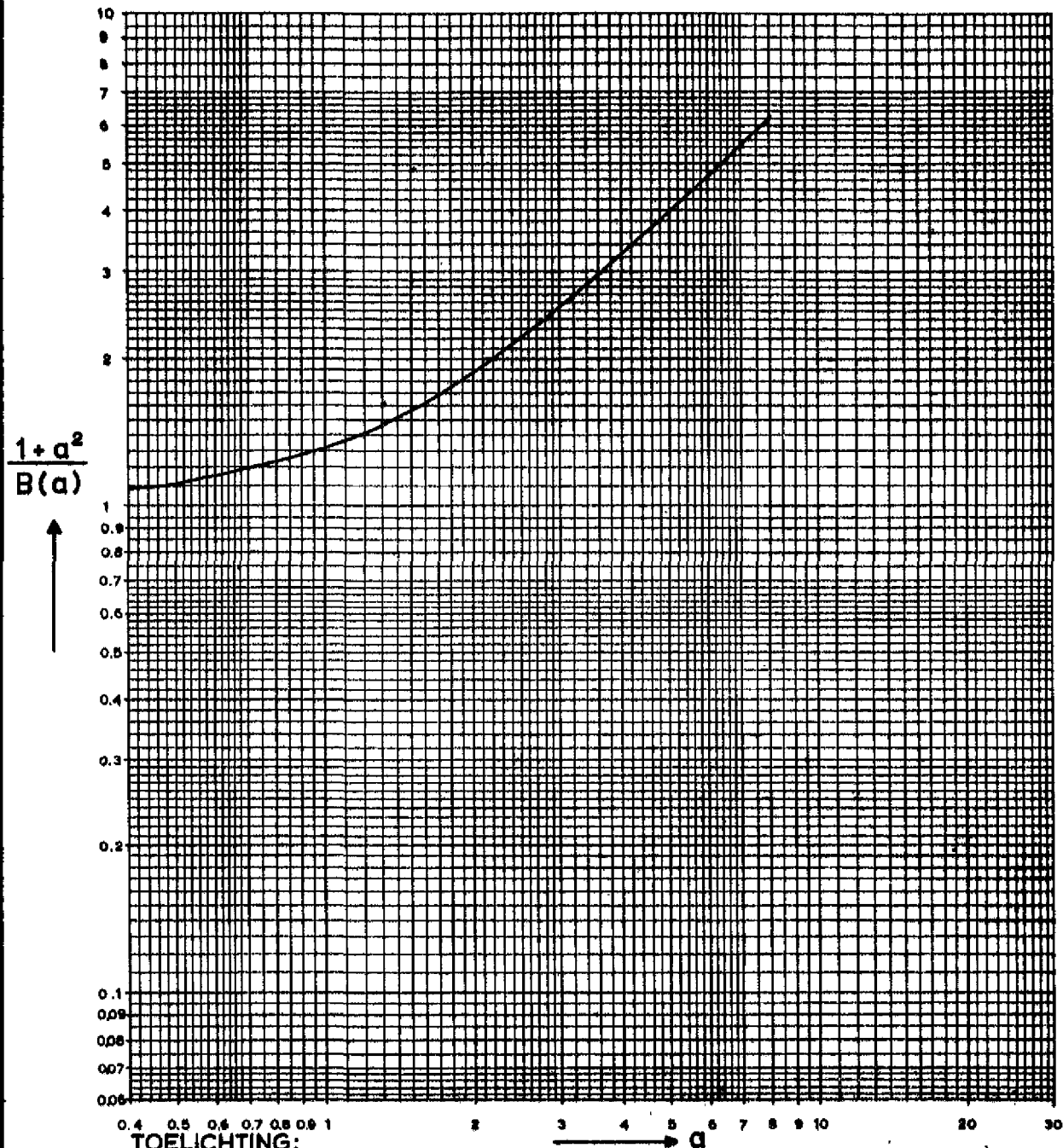


TOELICHTING:

$$B(a) = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} (1 + a \sin \omega t) \cdot |1 + a \sin \omega t| dt$$

FIGUUR OVERGENOMEN VAN BUKER ([3], fig. III. 3-3)

GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	WAARDEN VAN $B(a)-1$, VOLGENS BUKER [3]	
A.S.B.					
				A1	76.73



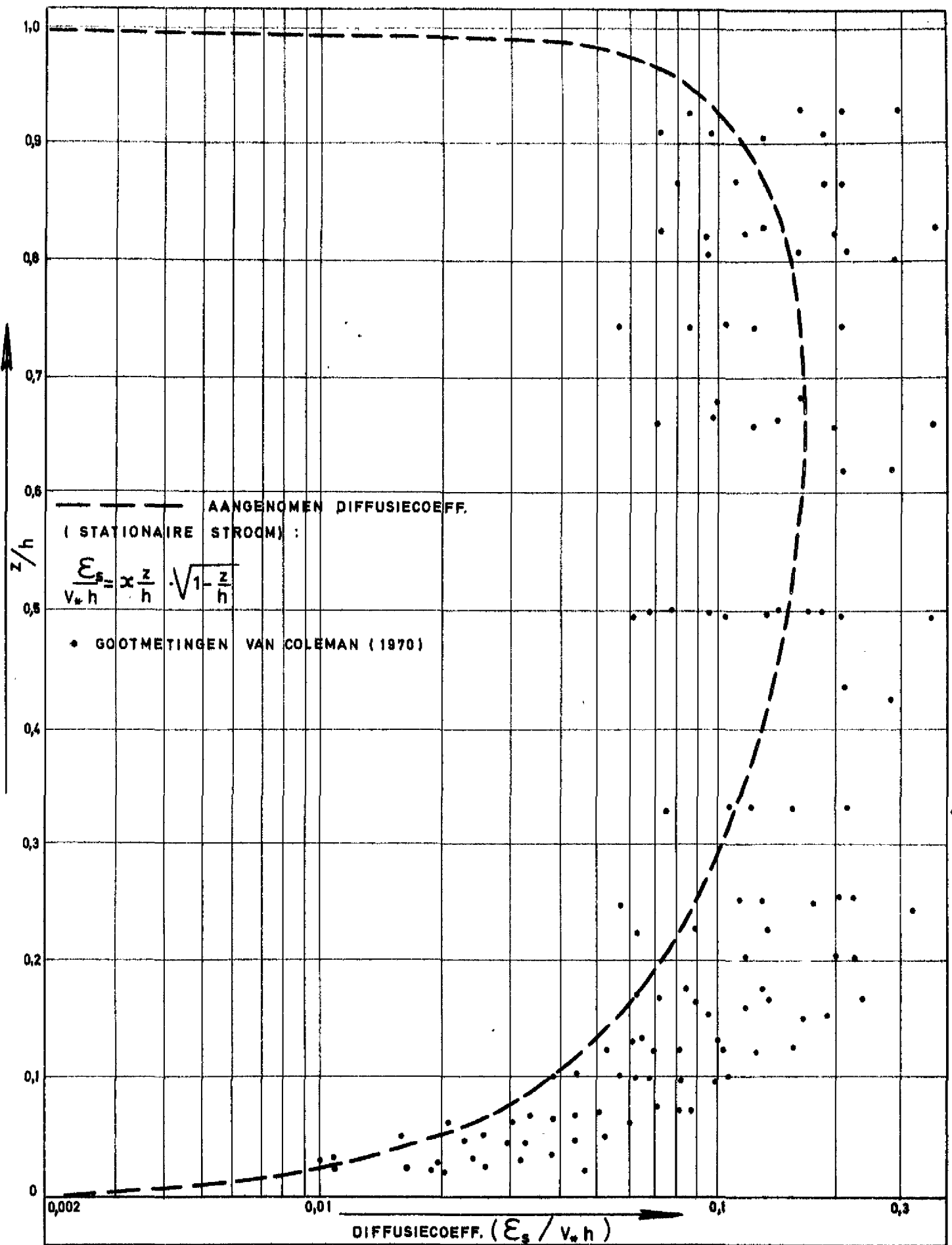
TOELICHTING:

Volgens (35^a) geldt:

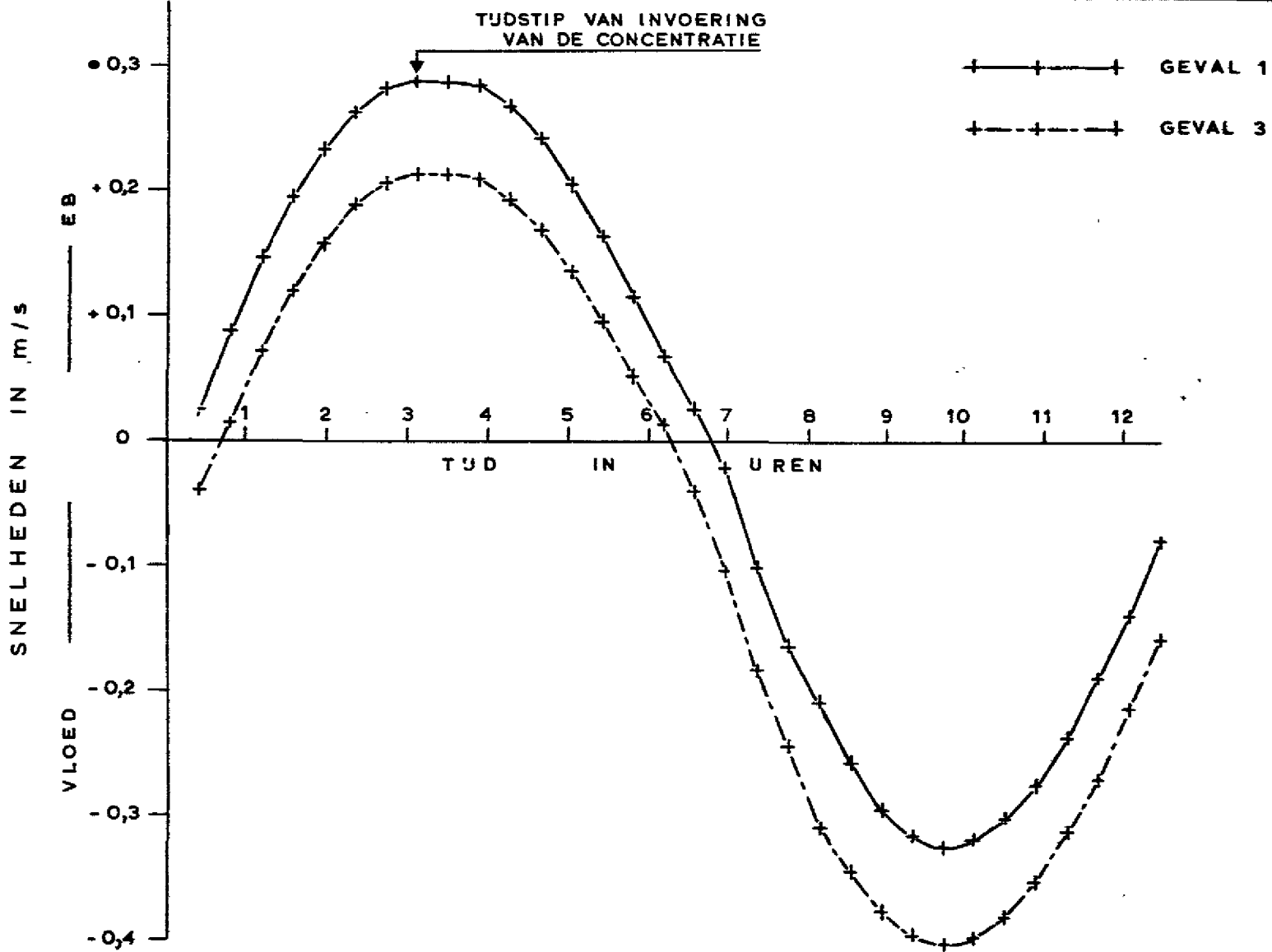
$$\frac{\hat{1}}{1} \left/ \frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \right| = \frac{1 + (\hat{p}_b / \bar{p}_b)^2}{B(\hat{p}_b / \bar{p}_b)}, \text{ met } B(a) \text{ gegeven in (3a) (zie ook bijl. 3)}$$

Bij gegeven waarde van het linkerlid kan uit bovenstaande figuur de waarde van $\hat{p}_b / \bar{p}_b$ worden afgeleid

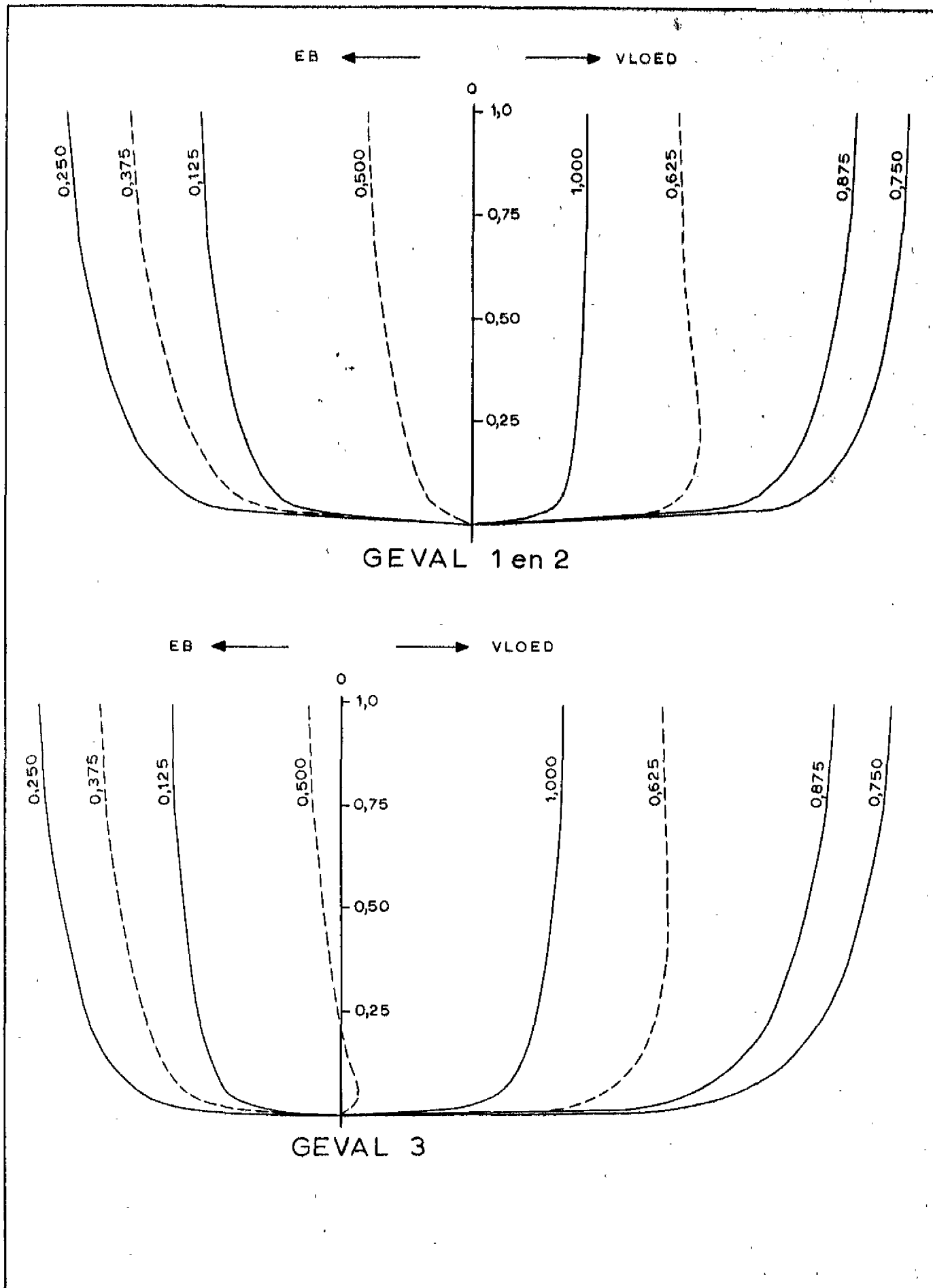
GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	GRAFIEK TER BEPALING VAN DE WAARDE VAN $\hat{p}_b / \bar{p}_b$			
A.S.B.						A1	76.74



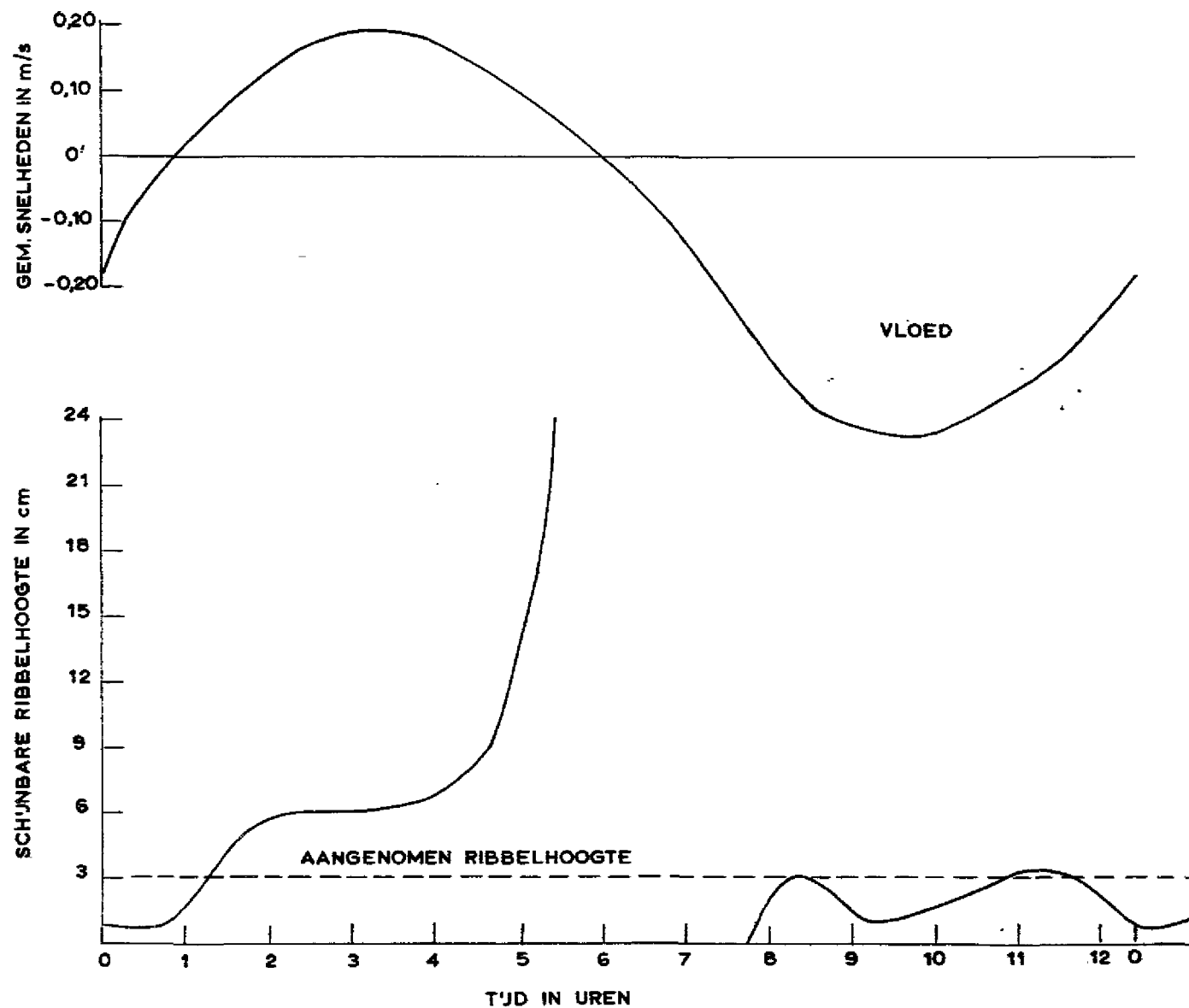
GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	DIFFUSIECOËFFICIËNT VOLGENS METINGEN VAN COLEMAN EN HET AANGENOMEN VERLOOP		
IN FEB.'76					A1	76.75



GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	OVER DE VERTIKAAL GEMIDDELDE	
FEB. '76				SNELHEDEN ALS FUNCTIE VAN DE TJD	
IN				A1	76.76



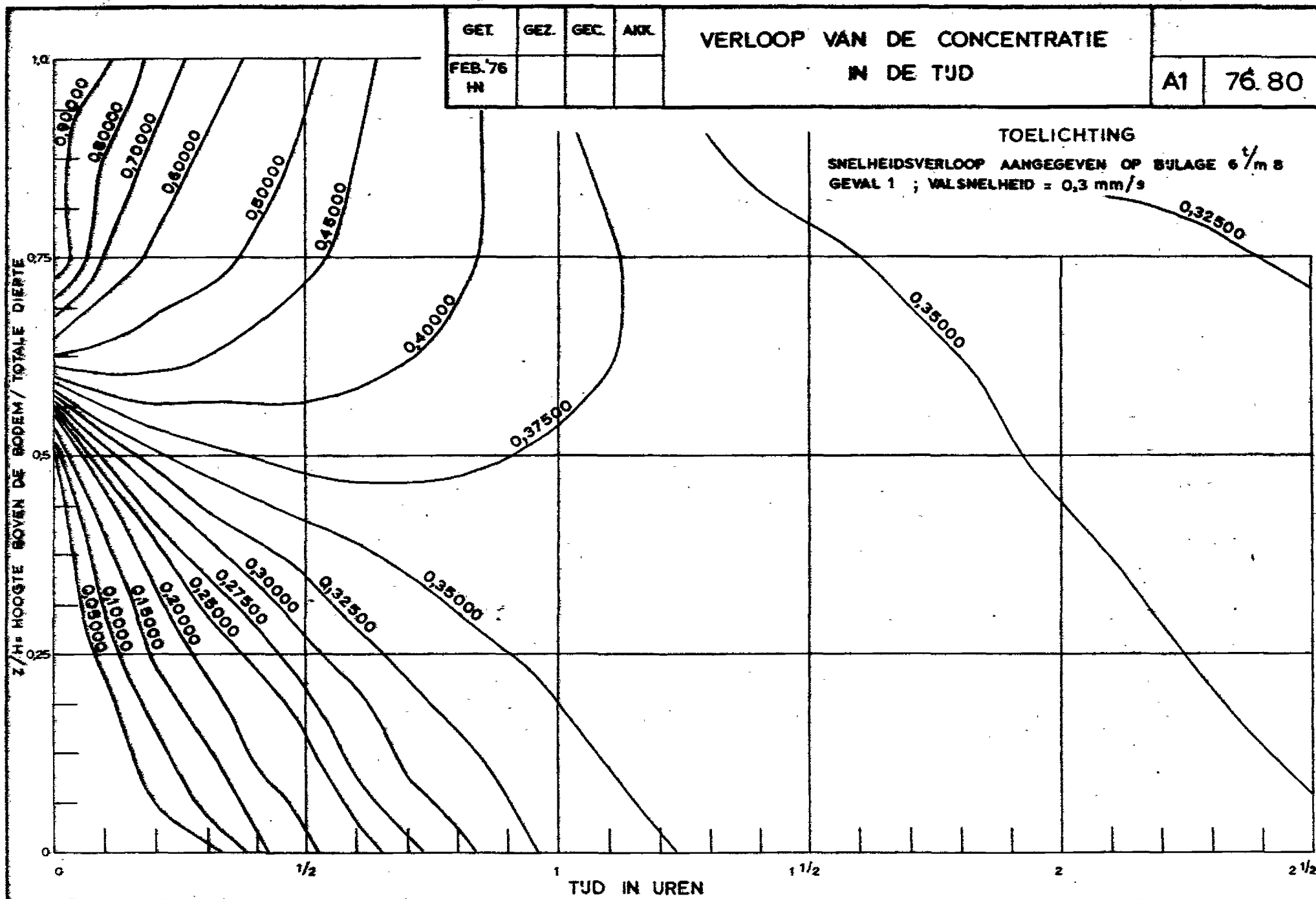
GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	SNELHEIDSVERTIKALEN		
FEB. '76					A1	76.77



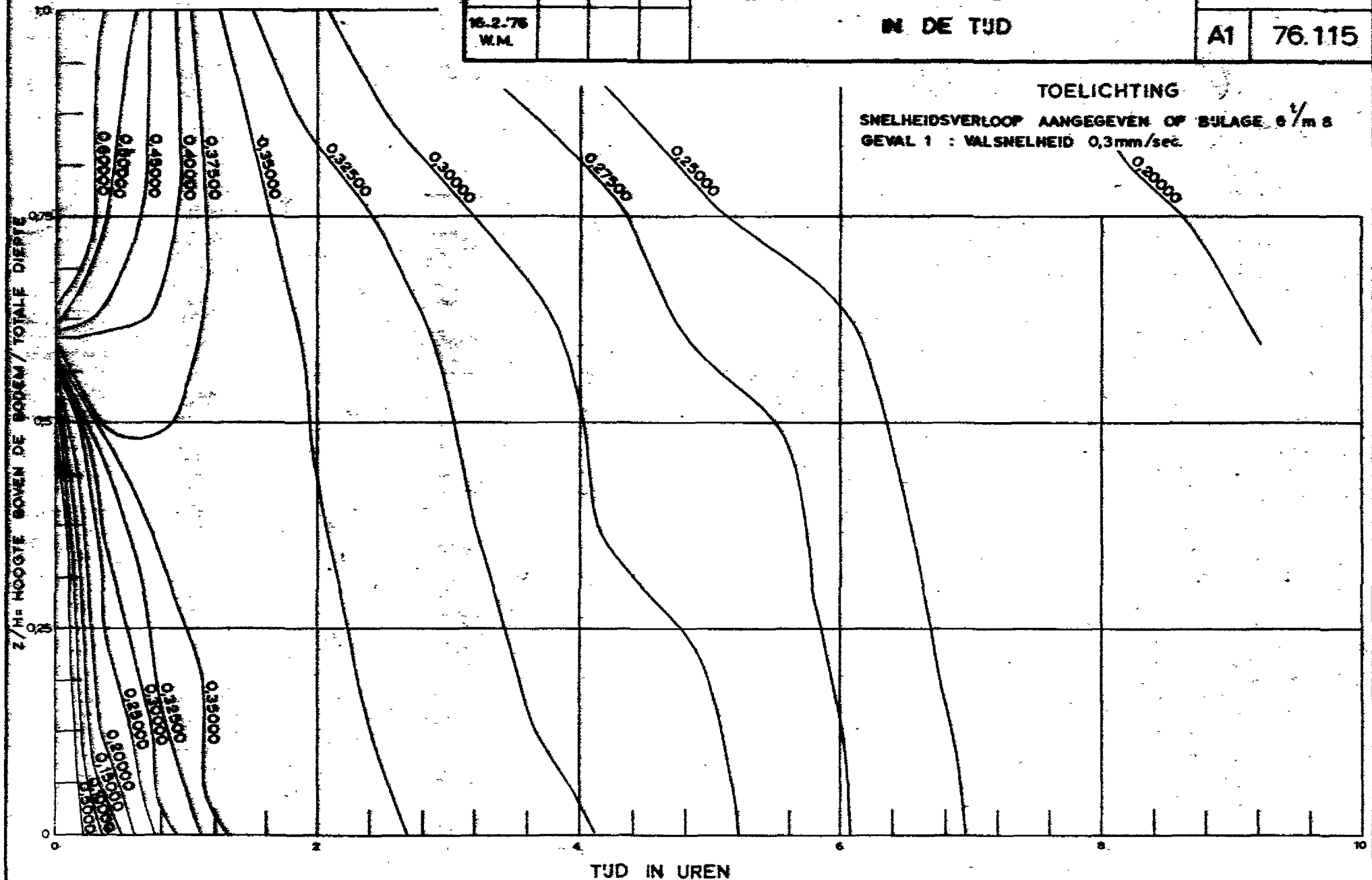
GET.	GEZ.	GEC.	AKK.
K.B.			

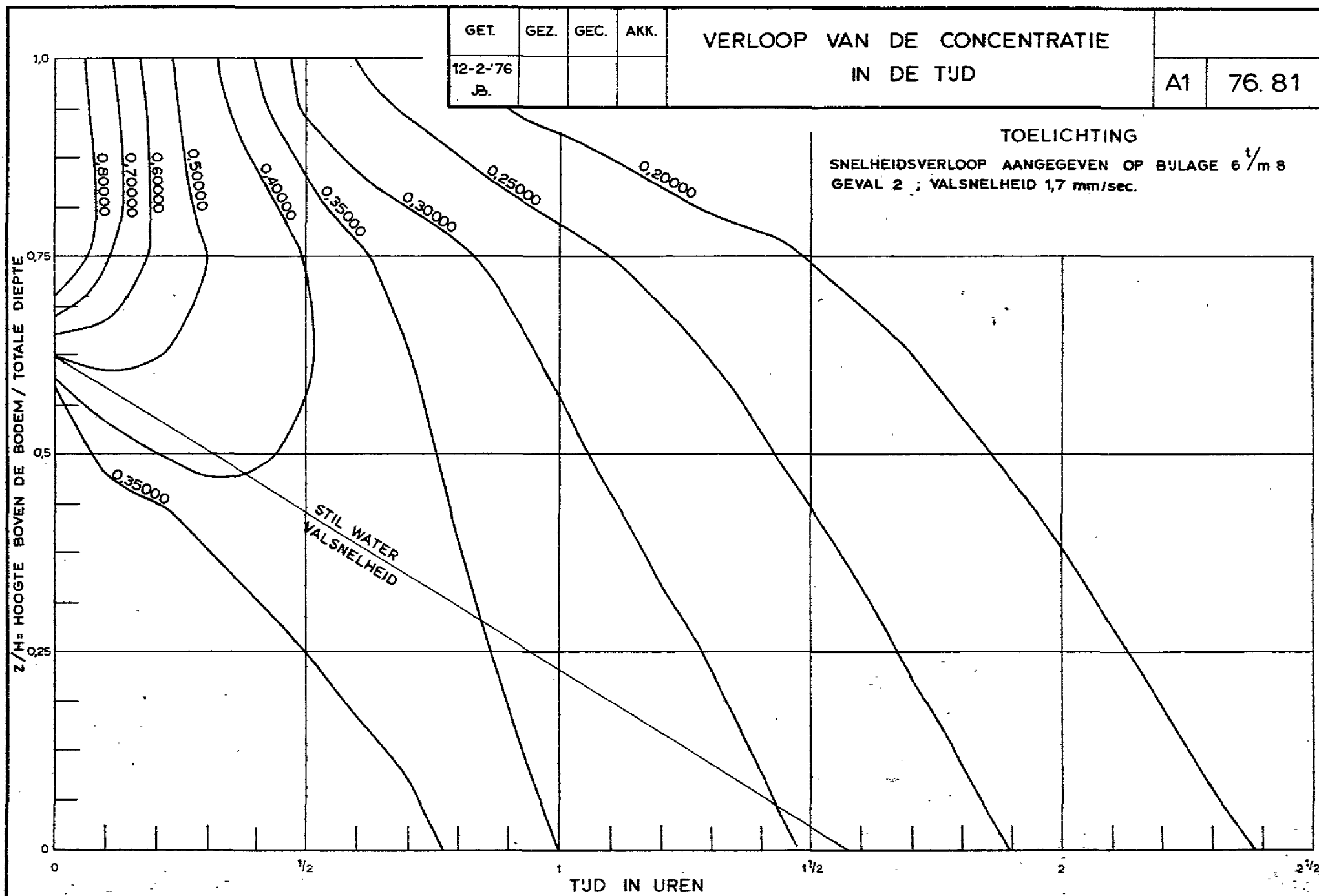
**SCHIJNBARE RIBBELHOOGTE
ALS FUNCTIE VAN DE TJD**

A1 76.79

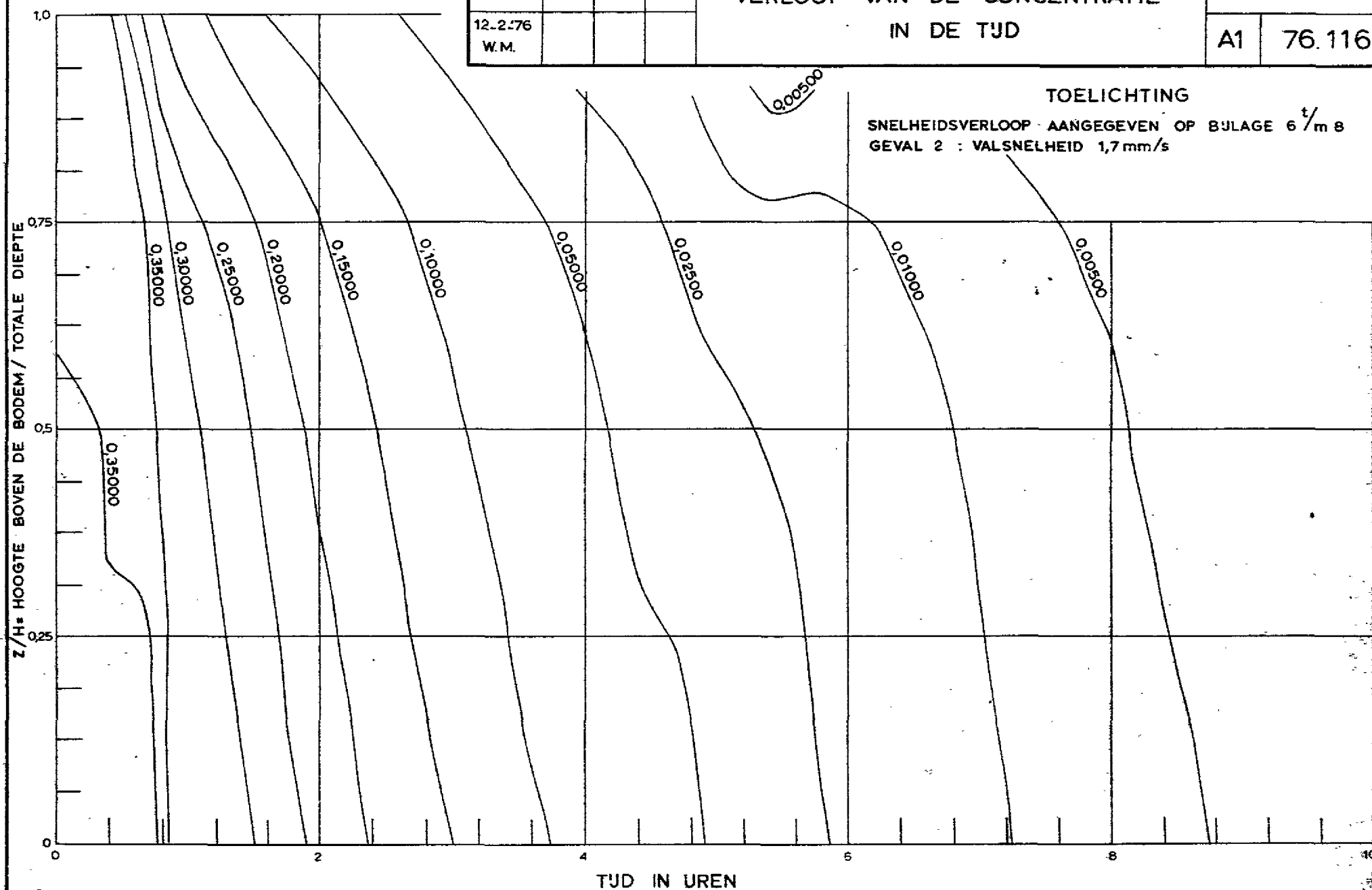


GET	GEZ	GEC	AKK	VERLOOP VAN DE CONCENTRATIE IN DE TIJD	
16.2.76 W.M.				A1	76.115

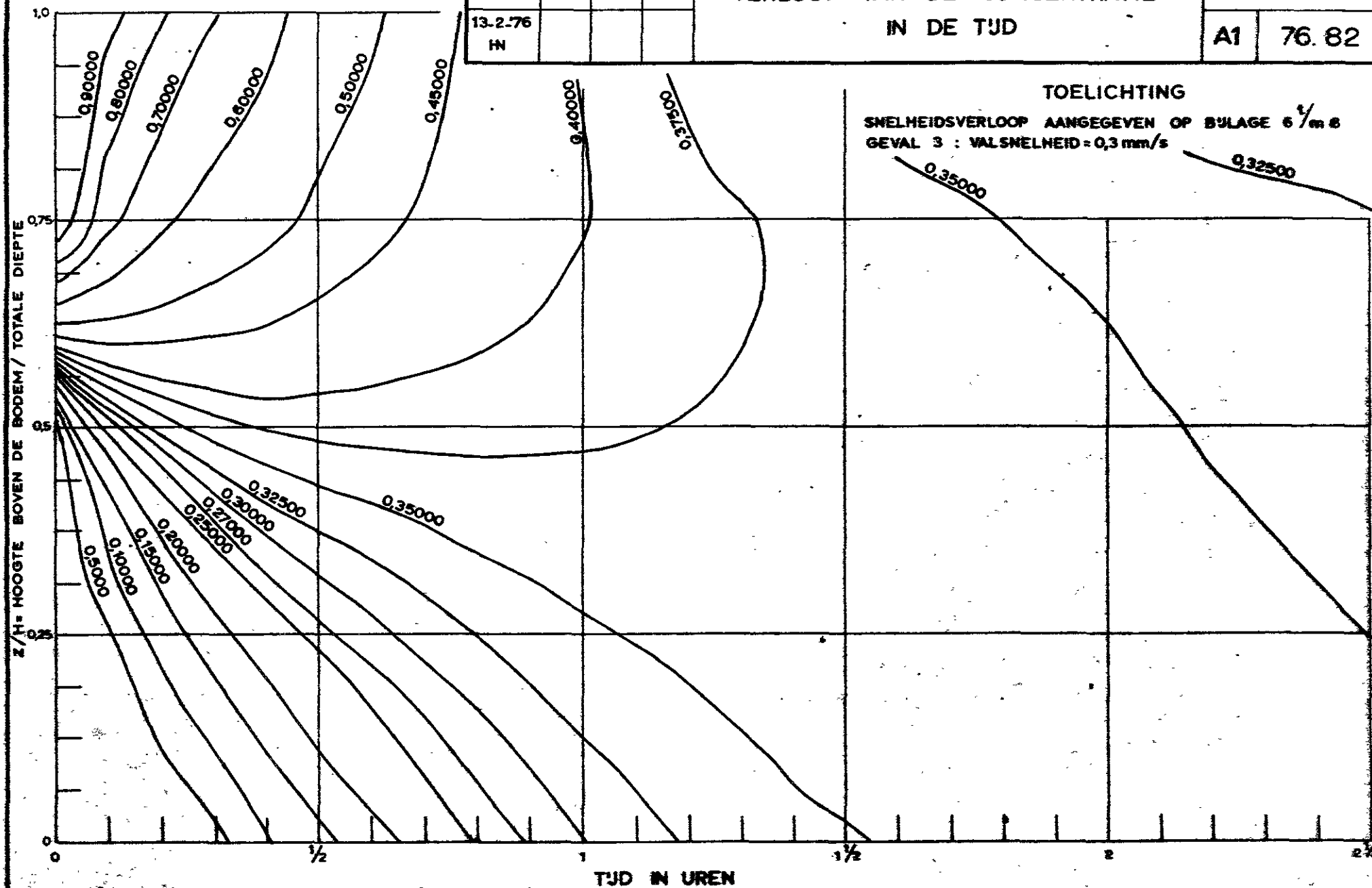


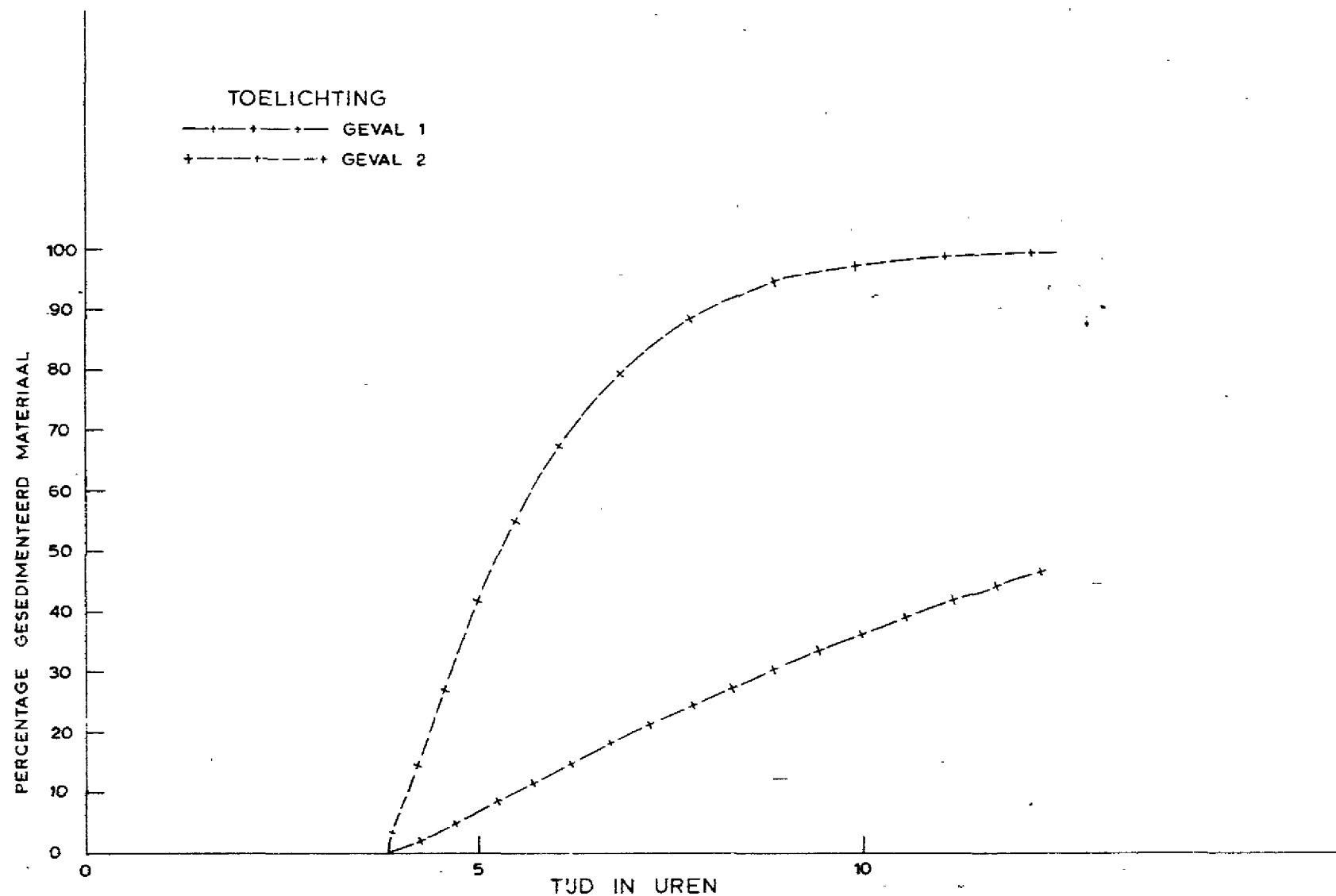


GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	VERLOOP VAN DE CONCENTRATIE IN DE TIJD			
12-2-76 W.M.						A1	76.116



GET.	GEZ.	GEC.	AKK.	VERLOOP VAN DE CONCENTRATIE IN DE TIJD		
13-2-76 HN						A1 76.82





GET	GEZ.	GEC.	AKK	PERCENTAGE GESEDIMENTEERD		
13-2-76				MATERIAAL ALS FUNCTIE VAN DE TJD		A1
W.M.						76.117