

Modelleren van geulen en platen in de Westerschelde¹

projectnummer: RKZ-536
projectleider: Drs. H. Verbeek

Eindrapport

H.M. Schuttelaars

¹Dit project is uitgevoerd in opdracht van het Rijksinstituut voor Kust en Zee te Middelburg

OPDRACHTGEVER:	Rijksinstituut voor Kust en Zee van het Directoraat Generaal Rijkswaterstaat Middelburg
TITEL:	Modellering van geulen en platen in de Westerschelde
SAMENVATTING:	
<p>In dit rapport wordt verslag gedaan van onderzoek dat is uitgevoerd aan de dynamica van morfologische fenomenen in de Westerschelde. Daarbij zijn de volgende aspecten onderzocht:</p> <ul style="list-style-type: none"> • de globale evenwichtsmorfologie (breedtegemiddelde bodemtopografie) (Annex A); • de initiële vorming van geulen en platen, alsmede hun lange-termijn gedrag (Annex B); • het bestaan van verschillende estuariene secties (Annex C). <p>Er is gebruik gemaakt van geïdealiseerde modellen. Hierin worden aannames gemaakt ten aanzien van de bekkengeometrie en verdisconteerde fysische processen. Dergelijke modellen zijn ontworpen om meer fundamentele kennis te krijgen over de mechanismen, die bepalend zijn voor de dynamica van morfologische structuren.</p> <p>Het onderzoek heeft bestaan uit een drietal fasen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fase 1: Verkenning Westerschelde en experimenten met een 1D model. • Fase 2: Vergelijking uitkomsten van het 1D model met beschikbare veldgegevens en numerieke modellen, alsmede lineaire stabiliteitsanalyse van het 2D model. • Fase 3: Vergelijking uitkomsten 2D model met beschikbare veldgegevens en numerieke modellen, alsmede niet-lineaire experimenten met het 2D model. <p>In dit rapport zijn vooral de bevindingen uit de derde fase vermeld, maar tevens wordt de relatie gelegd met resultaten uit de eerdere fasen.</p>	

SAMENVATTING (VERVOLG):

De belangrijkste conclusies van het project zijn als volgt:

- De globale evenwichtsmorfologie van de Westerschelde kan worden gemonsterd met behulp van een 1D ondiepwater model. De essentiële elementen daarin zijn een extern geforceerd M4 getij, interne generatie van overtides door niet-lineaire wisselwerkingen en bodemwrijving. In het mariene gedeelte speelt rivieruitstroming nauwelijks een rol. De overeenkomsten tussen modelresultaten en veldmetingen zijn goed indien rekening wordt gehouden met het afnemend stroomvoerend oppervlak in de landwaartse richting.
- De vorming van estuariene banken en geulen in estuariene secties kan worden beschreven als een lokale morfodynamische instabiliteit van het gekoppelde water-bodemsysteem. Daarbij spelen ruimtelijke variaties van het getij en evenwichtsbodem geen rol. Cruciaal in het instabiliteitsmechanisme is de rol van bodemwrijving. Er is sprake van een zekere analogie met de dynamica van banken in rivieren, maar er is ook sprake van wezenlijke verschillen: de oscillerende getijbeweging zorgt voor kleinere ruimtelijke voorkeursschalen dan in het geval van een quasi-stationaire stroming.
- De vorming van estuariene secties uit zich in het model als een globale morfodynamische instabiliteit, waarbij de ruimtelijke variaties van de getijgolf en de evenwichtsbodem een cruciale rol spelen, evenals bodemwrijving. De modeluitkomsten zijn in kwalitatieve overeenstemming met de velddata, maar er is sprake van een sterke afhankelijkheid van bekkengeometrie en getijkarakteristieken.
- Voor het bestuderen van de lange-termijn ontwikkeling van estuariene secties in de Westerschelde is het noodzakelijk om lokale en globale morfodynamische instabiliteiten te kunnen scheiden. Binnen de context van het huidige project is dit alleen gelukt voor korte bekvens (lengtes veel kleiner dan de getijgolf lengte). De modelresultaten laten zien dat er in dat geval fenomenen als geulsplitsing en cyclisch gedrag van banken worden gevonden.

Inhoudsopgave

Nederlandse samenvatting

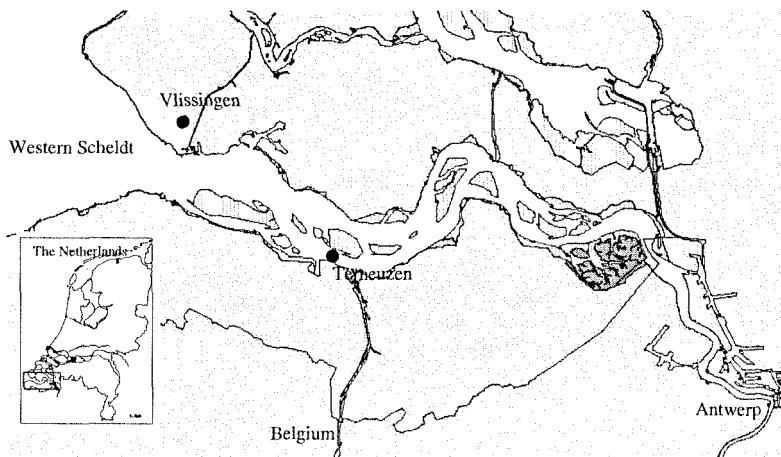
1	Inleiding	6
2	De Westerschelde	7
3	Waarnemingen	7
4	Specifieke vraagstelling	8
5	Het model	9
6	Grootschalige evenwichtsmorfodynamica	10
7	Vorming van estuariene banken	15
8	Vorming van estuariene secties	17
9	Twee-dimensionale evenwichtsbodem	18
10	Vergelijking procesmodellen en geïdealiseerde modellen	20
11	Conclusies	20
12	Aanbevelingen	21

A	Morphodynamic equilibria in tidal embayments with decreasing cross-section.	23
1	Introduction	23
2	Model description	24
3	Results	25
4	Discussion	28
B	Formation of bars in tidal embayments.	29
1	Introduction	29
2	Model description	31
3	Linear stability analysis	32
4	Results	35
4.1	Advection instabilities	35
4.2	Bed slope effects	38
4.3	Nonlinear friction and the influence of inertia	39
5	Discussion and conclusions	40
C	Formation of estuariene sections.	44
1	Introduction	44
2	Model description	47
3	Linear stability analysis	48

4	Results	52
4.1	Short embayment	53
4.2	Long embayment	56
5	Discussion and conclusions	58

Nederlandse samenvatting

1 Inleiding



Figuur 1: Het mariene gedeelte van de Westerschelde van Vlissingen tot Antwerpen.

In deze samenvatting wordt een overzicht gegeven van onderzoek dat, in opdracht van RIKZ Middelburg, is uitgevoerd aan de dynamica van morfologische structuren in getijdebekkens. Het doel van dit onderzoek is het verkrijgen van meer inzicht in de fysische mechanismen die van belang zijn voor de morfologische ontwikkeling van een getijdebekken zonder te proberen deze ontwikkeling te reproduceren. Als prototype getijdebekken is de Westerschelde genomen, een estuarium op de grens tussen Nederland en België (zie figuur 1). De opbouw van deze samenvatting is als volgt. Allereerst zullen de karakteristieken van de

Westerschelde worden besproken (secties 2 en 3). Vervolgens worden in sectie 4 de specifieke vragen geformuleerd, die de basis vormen van het uitgevoerde onderzoek. De resultaten worden samengevat in de overige secties.

2 De Westerschelde

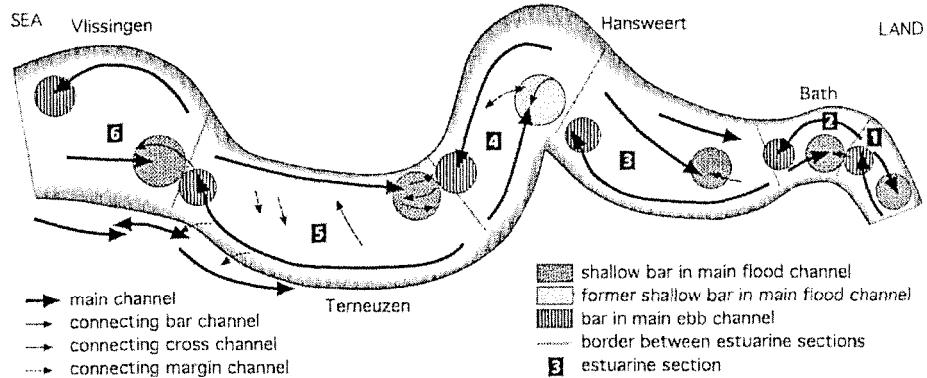
De lengte van het estuarium van Vlissingen tot Gent is ongeveer 160 km. De breedte neemt af van 6 km aan de monding tot minder dan 100 m bij Gent, terwijl de diepte afneemt van ongeveer 15 m tot 3 m aan de landzijde van het estuarium. De waterbeweging wordt gedomineerd door getijdestromen, de rivieruitstroom van de Schelde is klein ten opzichte van de getijfluxen (ongeveer 1% op de Nederlands-Belgische grens). De amplitude van de waterstanden bedraagt ongeveer 2 m bij Vlissingen en neemt het bekken in toe tot ongeveer 2.5 m bij Antwerpen, waarna het weer afneemt richting Gent. De karakteristieke snelheden in de geulen zijn van de orde van grootte van ongeveer 1 m/s. Er wordt een duidelijk faseverschuiving in landwaartse richting van de getijgolf waargenomen. Aan de monding van het estuarium hebben vooral het dubbeldaagse maansgetij (M_2) en zijn eerste hogere harmonische (M_4) een significante amplitude. Door de traagheid van de waterbeweging en niet-lineaire interacties tussen de verschillende getijcomponenten worden intern ook hogere harmonischen en residuale stromingen opgewekt.

Het sediment op de bodem van de Westerschelde bestaat voornamelijk uit niet-cohesief fijn zand met een korrelgrootte van ongeveer 0.2 mm. De door de waterbeweging geïnduceerde bodemschuifspanningen zijn groot genoeg om het materiaal op te wervelen en in suspensie te transporten. Dit resulteert in netto convergenties en divergenties van gesuspenderd materiaal, waardoor de morfologie van het systeem verandert. Dit heeft op zijn beurt gevolgen voor de dynamica van de waterbeweging.

3 Waarnemingen

Er kunnen drie verschillende gebieden in de Westerschelde worden onderscheiden. Het eerste deel is een eb-getijdedelta ten westen van Vlissingen. Vervolgens wordt tussen Vlissingen en Doel een gebied waargenomen waarin meerdere geulen voorkomen, gescheiden door langgerekte platen. In het laatste gedeelte (vanaf Doel) zien we een één geulstelsel. In dit rapport ligt de nadruk op het middelste gedeelte en een gedeelte van het één geulstelsel, d.w.z. het gedeelte tussen Vlissingen en Antwerpen (zie figuur 1).

De globale morfologie wordt gekarakteriseerd door een breedte-gemiddelde diepte die uniform afneemt van Vlissingen ($\pm 15\text{m}$) naar Antwerpen ($\pm 5\text{ m}$). Dit gebied kan weer verder worden onderverdeeld in zes verschillende estuariene secties (zie figuur 2). Elke estuariene sectie heeft een grote, meanderende ebgeul en een rechte vloedgeul. Deze geulen worden meestal van elkaar gescheiden door platen en zijn met elkaar verbonden door kortsluitgeulen, die cyclisch gedrag



Figuur 2: Indeling van de Westerschelde in de verschillende estuarische secties (uit Jeuken (2000)).

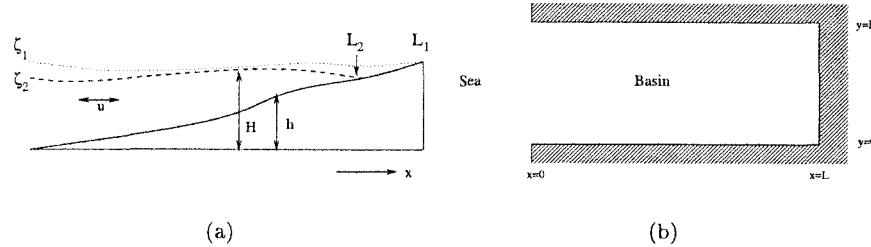
vertonen in ruimte en tijd. In deze verschillende estuarische secties worden weer bodemvormen waargenomen die schalen met de breedte van het bekken zoals kortschlussen en platen (Van den Berg et al., 1997; Jeuken, 2000).

4 Specifieke vraagstelling

De Westerschelde is zowel vanuit economisch als ecologisch oogpunt van groot belang. Aangezien de haven van Antwerpen slechts toegankelijk is via dit estuarium, moet de aanvoerroute op diepte gehouden worden. Voor dit aspect is het voordelig als de vaargeul vast zou worden gelegd en een voldoende diepte heeft. Zo zijn er afspraken gemaakt tussen de Nederlandse en Belgische autoriteiten om de vaargeulen op een diepte van 14 m (en in de nabije toekomst 16 m) te houden. Aan de andere kant zijn de intergetijdegebieden van de Westerschelde belangrijke fouragegebieden voor vogels en andere dieren. Voor deze laatste functie is juist het dynamisch karakter van dit gebied van belang (Verbeek et al., 1999).

Om nu in dit gebied goed gefundeerde beslissingen te kunnen nemen met betrekking tot beleid en beheer, heeft RIKZ Middelburg de volgende onderzoeksvragen geformuleerd:

- **Q1:** Bestaan er grootschalige morfodynamische evenwichten? Is er bij een gegeven externe forcing, sprake van een uniek grootschalig evenwicht?
- **Q2:** Welke fysische processen zijn van belang in de (initiële) vorming van bodemvormen die schalen met de breedte van het estuarium?
- **Q3:** Kan er een fysische verklaring worden gegeven voor het bestaan van verschillende estuarische secties in de Westerschelde?



Figuur 3: Bovenaanzicht (a) en zijaanzicht (b) van het geïdealiseerde bekken.

- **Q4:** Is het mogelijk evenwichtsoplossingen met een structuur in de laterale richting te vinden? Vertonen deze oplossingen overeenkomsten met de waargenomen geul-plaat systemen? Is het mogelijk dat bij eenzelfde externe forcing meerdere evenwichtsoplossingen bestaan met compleet verschillende fysische karakteristieken? Is het mogelijk een verklaring te geven voor het cyclisch gedrag van geulen zoals waargenomen in de Westerschelde?
- **Q5:** Kunnen de resultaten zoals gevonden met het geïdealiseerde model worden teruggevonden in meer complexe procesmodellen (bijvoorbeeld Delft3DMOR)?

Verder is het van groot belang de gevoeligheid van de resultaten voor de verschillende parameters in het systeem te onderzoeken.

5 Het model

Teneinde deze door RIKZ geformuleerde vragen te beantwoorden is een geïdealiseerd model van dit bekken ontwikkeld. Een groot verschil met modellen zoals Delft3D (zie Thoelen and Wang (1998)) is dat sterke vereenvoudigingen worden gemaakt ten aanzien van geometrie en meegenomen processen. Dit heeft als voordeel dat een dergelijk model transparant is en kan worden geanalyseerd met behulp van wiskundige methoden. Ook gevoelighedsstudies kunnen snel uitgevoerd worden. Geïdealiseerde modellen worden dus gebruikt om meer fundamenteel inzicht te krijgen in de belangrijke fysische mechanismen. Nadeel is dat het niet altijd duidelijk is hoe de modelresultaten gerelateerd kunnen worden aan de werkelijkheid.

Het domein van het model is een rechthoekig bekken (tenzij anders vermeld) met niet-erodeerbare zijwanden en aan de landwaartse zijde is de waterdiepte nul (zie figuur 3). Aangezien het doel van deze studie het bestuderen van grootschalige morfologische structuren is, bestaan de bewegingsvergelijkingen uit de twee-dimensionale ondiepwatervergelijkingen, waarin de bodemschuifspanning is gelineariseerd volgens het Lorentz-principe (zie bijvoorbeeld Zimmer-

man (1982)). In systemen als de Westerschelde wordt het overgrote deel van het sediment als zwevend stof getransporteerd (zie Van den Berg et al. (1997)). Dit transport wordt beschreven met een vergelijking voor de diepte-geïntegreerde concentratie, inclusief opwerveling- en depositietermen. De evolutie van de bodem wordt gevonden uit een bodemevolutievergelijking. Als randvoorwaarden wordt op de zeewaartse rand het vertikale getij voorgescreven (zowel een M_2 - als M_4 -component, gebaseerd op waarnemingen in de Westerschelde) en de bodem vastgehouden. Aan de landwaartse kant wordt de netto sedimentflux (bestaande uit een advectief en diffusief deel) nul gesteld. Tot slot worden geen diffusieve grenslagen in het tijd oscillerende deel van de concentratie toegestaan.

Om dit model te analyseren, is allereerst is het bestaan van grootschalige morfodynamische evenwichten (d.w.z. evenwichten zonder structuur in de latereale richting) geïnventariseerd. Vervolgens wordt de stabiliteit van deze één dimensionale evenwichten onderzocht door bodemverstoringen aan te brengen met een structuur in de dwarsrichting. Dit resulteert in de initiële groei van bodenvormen, die gerelateerd kunnen worden aan waargenomen structuren zoals drempels en estuariene secties. Het lange termijn gedrag van deze bodenvormen kan vervolgens bestudeerd worden met een niet-lineair model. Met behulp van dit model kunnen uitspraken worden gedaan over het bestaan van meer-voudige evenwachten en waargenomen cyclisch gedrag.

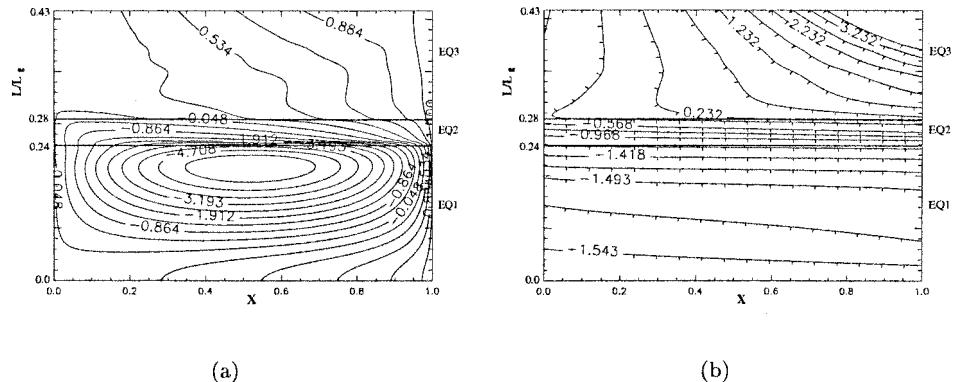
6 Grootschalige evenwichtsmorfodynamica

In deze sectie wordt ingegaan op het bestaan en de eigenschappen van mogelijke grootschalige evenwichten in geïdealiseerde bekkens (onderzoeksraag **Q1** zoals geformuleerd in sectie 4). Voor een uitgebreide discussie van de gevonden resultaten, zie Schuttelaars and De Swart (2000) en Appendix A.

Het bestaan van grootschalige morfodynamische evenwichten was al aange- toond in Schuttelaars and De Swart (1996) voor korte bekkens en voor bekkens met onbepaalde lengte in De Jong (1998). Een eerste belangrijke verschil met het model, ontwikkeld door De Jong (1998), is dat in het hier ontwikkelde model geen rivieruitstroom wordt meegenomen. In plaats daarvan kunnen advectieve fluxen worden gecompenseerd door diffusieve fluxen, waardoor wel grenslagen in de *gemiddelde* concentratie ontstaan. Een tweede verschil is dat hier intern gegenereerde getij-asymmetrie expliciet wordt meegenomen; in het model van de Jong is er alleen sprake van extern opgelegde getij-asymmetrie. Tot slot wordt in het hier besproken model de dwarsdoorsnede van het bekken constant verondersteld, terwijl dit in het andere model ruimtelijk varieert. Teneinde de modellen op dit punt te kunnen vergelijken kan, bij een gegeven modelbodem, een actuele dwarsdoorsnede worden berekend door de waterdiepte te vermenigvuldigen met de actuele breedte.

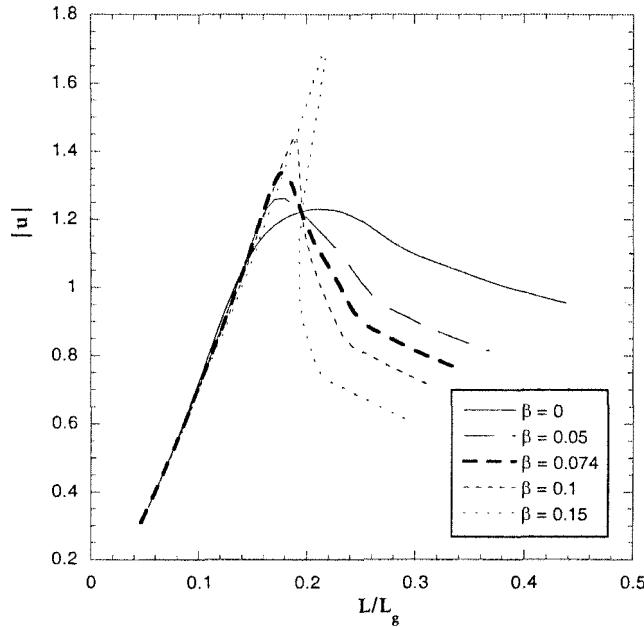
In eerste instantie zijn rechthoekige bekkens met een voorgescreven diepte aan de monding van het estuarium en een diepte nul aan het eind van het bekken bestudeerd. Als het systeem slechts met extern voorgescreven M_2 getij wordt geforceerd, kunnen voor korte bekkens (d.w.z. met een lengte veel kleiner

dan de vrije getij golflengte) de morfodynamische evenwichten analytisch worden bepaald. Door nu langzaam de lengte van het bekken te vergroten, kan deze oplossing worden gecontinueerd naar evenwichtsoplossingen voor niet-korte bekkens. Het blijkt dat er één uniek morfodynamisch evenwicht is voor estuaria met een lengte korter dan de wrijvingslengte van het M_2 -getij. Voor een systeem met de karakteristieken van de Westerschelde is deze wrijvingslengte 220 km. Voor bekkens met een lengte groter dan de wrijvingslengte zijn de snelheden te klein en zal het bekken zichzelf verkorten (zie Schuttelaars and De Swart (2000)). Verder zien we dat er resonantie van de waterbeweging kan optreden. Door de aanwezigheid van wrijving treedt deze resonantie op voor een lengte van het bekken die kleiner is dan een kwart golflengte van de wrijvingsloze getij-golflengte (zie figuur 5).



Figuur 4: Contour plots van het evenwichts bodem profiel h (geschaald met de referentie diepte H) en van de fase van het M_2 horizontale getij. De variabelen langs de assen zijn de dimensioeloze coordinaat x en de ratio L/L_g . In deze plaatjes is $H = 15$ m en $A = 1$ m. Merk op dat voor $0.24 \leq L/L_g \leq 0.28$ meervoudige evenwichten gevonden worden.

Als het systeem wordt geforceerd met zowel een M_2 als een M_4 getij, kunnen er verschillende typen morfodynamische evenwichten gevonden worden. Is de bekkenlengte kleiner dan de M_4 resonantie lengte, dan wordt de evenwichtsmorfodynamica gekarakteriseerd door een sterk concave bodem. Lokaal kunnen de waterdiepten groot zijn. De waterbeweging gedraagt zich als een staande getijgolf. Voor langere bekkens vinden we een ander type evenwicht, dat wordt gekarakteriseerd door een zwak concaaf profiel en een lopende getijgolf. Als nu de M_4 forcing sterk genoeg is vergeleken met de M_2 forcing, dan is het mogelijk meervoudige evenwichten te vinden (zie figuur 4). Dit betekent dat bij dezelfde externe forcing zowel een morfodynamisch evenwicht bestaat gekenmerkt door een grote diepte en een staande getijgolf, als een relatief ondiep evenwicht met een lopende getijgolf (zie figuur 5 met $\beta \geq 0.1$). Deze resultaten

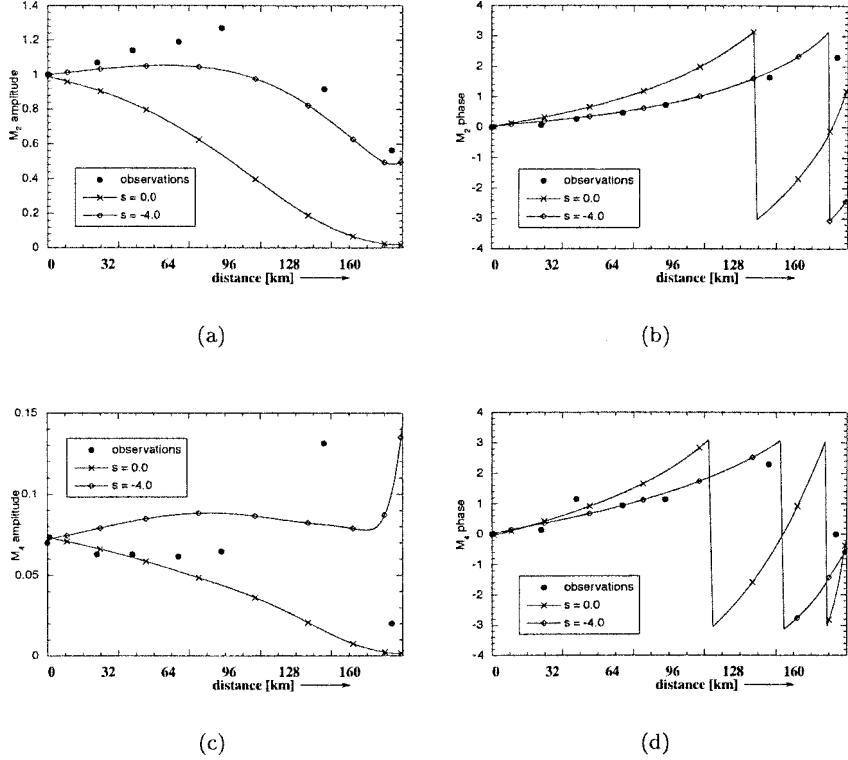


Figuur 5: Afhankelijkheid van de amplitude van het M_2 horizontale getij ($|u|$) aan de monding van het estuarium als een functie van de dimensieloze lengte L/L_g (L_g : golflengte wrijvingsloze getijgolf) voor verschillende waarden van β . Hier is β de verhouding van de amplitude van het M_4 en M_2 vertikale getij op de zeewaartse rand. Overige parameterwaarden zijn representatief voor de Westerschelde. In dit geval is $L_g \sim 450$ km.

laten duidelijk zien dat voor de grootschalige morfodynamische evenwichten de externe forcing en de sterkte van de wrijving (die immers de wrijvingslengteschalen van M_2 en M_4 en de resonantielengte bepaalt) uiterst belangrijke grootheden zijn.

Als de parameterwaarden voor de Westerschelde zoals gevonden in de literatuur worden gebruikt, vinden we dat de Westerschelde nog in het regime zit waarin slechts één morfodynamisch evenwicht te vinden is (zie figuur 5 met $\beta = 0.074$).

De modelresultaten zijn ook vergeleken met veldwaarnemingen. In de figuren 6(a) and 6(c) zijn de amplitudes van de M_2 and M_4 harmonische componenten van de verticale snelheden geplot als functie van de afstand tot de monding van de Westerschelde. De fasen van de M_2 en M_4 componenten zijn weergegeven in figuren 6(b) en 6(d). De waarnemingen zijn weergegeven met dichte cirkels. De lijnen geven de resultaten zoals verkregen uit het model. De lijn met $s = 0$ is verkregen uit het model met rechthoekige geometrie. De andere curve ($s = -4$) laat de resultaten zien van een model waarin de breedte van het estuarium exponentieel afneemt (lengteschaal $L/|s|$). Zoals volgt uit figuur 7(a) geeft de curve

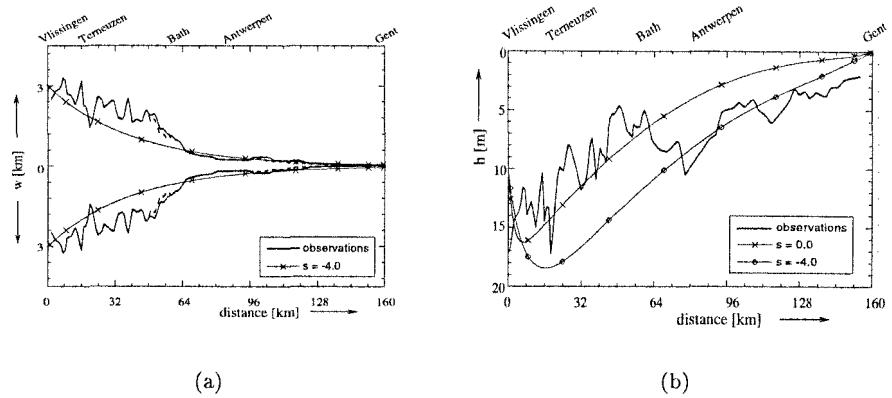


Figuur 6: Vergelijking van waarnemingen en model resultaten van de water beweging in de Westerschelde. De breedte–gemiddelde amplitudes en fase van de M_2 en M_4 vertikale getijcomponenten zijn geplot als een functie van de afstand tot de monding van het estuarium. De getrokken lijn met $s = 0$ geeft de resultaten weer van een bekken met rechthoekige geometrie, de curve $s = -4$ een bekken met een exponentieel convergerende breedte. In dit geval is $L_g \sim 450$ km.

met $s = -4$ een beste fit met de breedte–variatie van de Westerschelde. Echter, de convergentie in het mariene gedeelte van de Westerschelde is te groot.

Vergelijking van de evenwichtsbodem en de verticale snelheden met waarne-
mingen, ter beschikking gesteld door RIKZ/Middelburg, toont aan dat dit model
de grootschalige morfodynamische karakteristieken goed reproduceert. Een op-
vallend verschil tussen waarnemingen en modelresultaten wordt gevonden in de
laatste 20% van het estuarium. Dit gedeelte kan echter niet goed beschreven
worden door het model omdat de rivierinvloed is verwaarloosd. Een andere
opvallende discrepantie tussen modelresultaat en waarnemingen is de onder-
schatting van de resonantie bij Antwerpen.

In Figuur 7(b) is de evenwichtsbodem voor de Westerschelde, zoals gevonden



Figuur 7: Vergelijking van de waarnemingen en model resultaten voor de breedte (a) en breedte-gemiddelde diepte (b) van de Westerschelde.

met behulp van het model, vergeleken met de waarnemingen. De grootschalige trends worden goed gereproduceerd door het model.

De meest opvallende discrepanties tussen modelresultaten en waarnemingen zijn de onderschatting van de resonantie bij Antwerpen (zie figuur 6(a)) en de amplitude van zowel het M_2 en M_4 getij voorbij Antwerpen, zelfs voor een exponentieel convergerend estuarium. Aangezien het model slechts geldig is in het mariene gedeelte van de Westerschelde (tot Antwerpen), is besloten een model te ontwikkelen dat slechts het grootschalige evenwicht in dit gedeelte beschrijft. Uit waarnemingen blijkt dat de convergentie van het mariene gedeelte uitstekend wordt beschreven met een lineaire afname van de breedte (zie figuur A.3(a) in annex A). Als nu de diepte bij Antwerpen eindig wordt gehouden (ongeveer 5 m) en het bijbehorende morfodynamische evenwicht wordt berekend, dan blijken zowel de amplituden en fasen van het verticale M_2 en M_4 getij uitstekend te worden gereproduceerd door het model (zie figuur A.2). Bovendien worden ook de grootschalige trends van de evenwichtsbodem redelijk door het model gereproduceerd (zie figuur A.3(b) in annex A).

Uit deze resultaten volgt dat, naast de externe forcing en de sterkte van de bodemwrijving, de breedte-convergentie een belangrijke factor is die goed moet worden voorgeschreven om de getijkarakteristieken in de Westerschelde te kunnen reproduceren. Verder blijkt uit experimenten dat de rivierinstroom geen belangrijke invloed heeft op het grootschalige evenwicht in het mariene gedeelte van de Westerschelde (dus het gedeelte van Vlissingen tot Antwerpen).

7 Vorming van estuariene banken

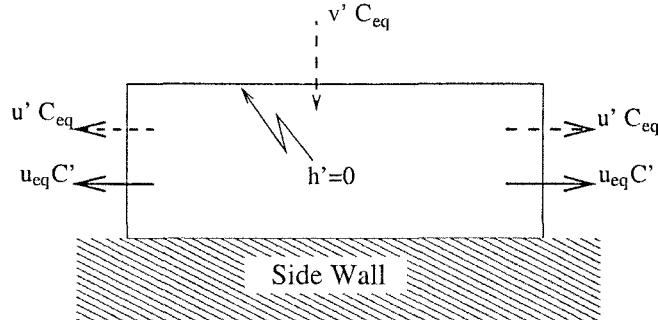
Uit waarnemingen (Dalrymple and Rhodes, 1995; Jeukens, 2000) blijkt dat in veel estuaria bodemvormen voorkomen, die schalen met de breedte van het estuarium. Aangezien de lengteschaal van deze banken veel kleiner is dan de lengte van het estuarium kunnen deze bestudeerd worden met behulp van een lokaal model. Seminara and Tubino (1998) laten zien dat in een lokaal model estuariene banken ten gevolge van een positieve terugkoppeling tussen waterbeweging, transport en bodemontwikkeling kunnen gaan groeien. Daartoe hebben ze een drie-dimensionaal model ontwikkeld, gebaseerd op de ondiepwater vergelijkingen. In hun model nemen ze *a priori* aan dat de estuariene banken met de breedte schalen. Dit betekent dat hun model alleen gebruikt kan worden voor smalle (d.w.z. breedte kleiner dan elke andere in het systeem aanwezige lengteschaal), wrijvingsgedomineerde getijdebekkens. Aangezien de breedte van de Westerschelde van dezelfde orde is als de getij-excursie lengte, is deze aanname niet correct voor de Westerschelde. Dit betekent dat fysische processen die verwaarloosd kunnen worden in de limiet van een nauw kanaal in dit systeem een essentiële rol spelen (zie annex B, sectie 5). Verder is de 3D formulering zo ingewikkeld, dat het fysisch mechanisme dat resulteert in de positieve terugkoppeling, niet meer duidelijk kan worden geïdentificeerd en bestudeerd.

Teneinde de vorming van de estuariene banken te begrijpen in estuaria met willekeurige breedte (Q2 in sectie 4), is er een dieptegemiddeld model ontwikkeld (zie Schramkowski et al. (submitted to JCR)). Deze bijdrage is als annex B toegevoegd aan het verslag.

De geometrie zoals gebruikt in het lokale model wordt gegeven door een oneindig lang kanaal met constante breedte (zie figuur B.1). Het model wordt geforceerd door een extern voorgescreven getij. Aangezien een lokaal model de globale getijbeweging niet explicet op kan lossen, is een globaal model nodig om de amplitude en fase van de verschillende getijcomponenten te bepalen. In de tot nu toe bestudeerde configuratie wordt slechts een externe M_2 getijcomponent voorgescreven (de uitbreiding naar een M_2 en M_4 getij-forcering is op dit moment in volle gang). Sediment wordt vooral in suspensie getransporteerd. Slechts advectieve processen kunnen in dit model resulteren in netto (d.w.z. getijgemiddelde) sedimenttransporten. Het blijkt dat een vlakke bodem in morfodynamisch evenwicht is met de water- en sedimentbewegingen. Echter, deze evenwichtsoplossing is in het algemeen niet stabiel: als kleine bodemverstoringen met longitudinale en laterale structuur worden aangebracht kunnen deze verstoringen gaan groeien ten gevolge van een positieve terugkoppeling tussen waterbeweging, sedimenttransport en bodem.

Om het fysisch mechanisme te begrijpen dat resulteert in de mogelijke groei van deze verstoringen, wordt er een gebied gedefinieerd dat aan één kant wordt begrensd door de zijwand en aan de overige kanten door een lijn waarop de bodemdiepte onveranderd blijft (zie figuur 8, voor een meer gedetailleerde beschrijving van de symbolen, zie bijlage B). Het gebied wordt zo gekozen dat overal de bodemuitwijking ten opzichte van het grootschalige evenwicht tekenvast is. Hier wordt zonder verlies van algemeenheid aangenomen dat dit teken

positief is. Als er getijgemiddeld meer sediment het gebied wordt ingevoerd



Figuur 8: De advectieve sediment fluxen die een gebied, zoals beschreven in de tekst, binnen gaan/verlaten. Hierbij is u_{eq} de basisgetijstroming en C_{eq} de bijbehorende sedimentconcentratie. De accenten duiden op topografisch geïnduceerde verstoringen. De bodemverstoring is aangegeven met h' .

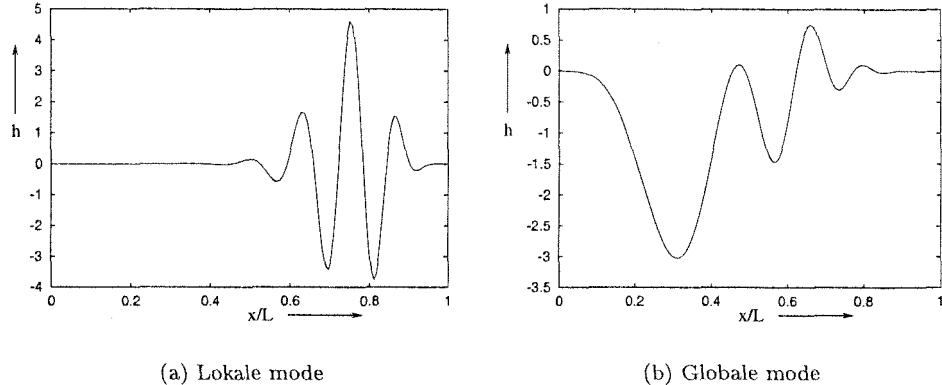
zal de amplitude van de bodemverstoring groeien en spreken we van een instabiliteit. Als er netto meer sediment wordt uitgevoerd zal de amplitude afnemen en de verstoring worden uitgedempt. Het kan eenvoudig worden aange- toond dat fluxen, aangegeven met de gestippelde pijlen (dit is advectie van achtergrondconcentratie door topografisch geïnduceerde storingen in het snel- heidsveld), niet resulteren in een netto convergentie of divergentie van sediment. Daaruit volgt dat slechts één sedimentflux kan resulteren in een netto sediment- transport. Voor bodemvormen met een longitudinale lengteschaal van de orde van de getij-excursielengte kan deze flux worden gerelateerd aan de residuele stroming die ontstaat door getij-topografie interactie. Dit resulteert in een con- vergentie van sediment, namelijk de advectie van de stoorconcentratie door het achtergrond getij. Voor kleinschaliger longitudinale bodemvormen echter is deze flux gerelateerd aan continuïteitseffecten, die zorgen voor een uitdempen van de verstoring.

Voorts is het essentieel om het effect van bodemhellingen op het suspensief transport mee te nemen. Zonder deze termen worden bodemvormen met snelle oscillaties in de laterale richting als eerste instabiel. Als echter de bodemhelling- effecten in het model worden verdisconteerd, treedt er mode selectie op: dit betekent dat een lage orde laterale mode eerder instabiel wordt dan de snel oscillerende laterale verstoringen (zie figuur B.5 in annex C).

Het blijkt dat de resultaten verkregen met dit twee-dimensionale, dieptegemid- delde model uitstekend overeenkomen met bevindingen uit meer geavanceerde drie-dimensionale lokale modellen (Seminara and Tubino, 1998). Dit suggereert dat het fysisch mechanisme dat resulteert in de vorming van deze bodempatro- nen relatief ongevoelig is voor de details van deze formuleringen. Anderzijds sug- gereert de literatuur (zie Verbeek et al. (1998)) dat bij de vorming van drempels 3D processen een wezenlijke rol spelen. Dit aspect zal nader onderzocht worden met recent ontwikkelde modellen (Schramkowski and De Swart, submitted).

8 Vorming van estuariene secties

Naast observaties van kleinschalige structuren zoals beschreven in de vorige sectie worden ook grootschaliger bodemvormen waargenomen. Deze bodemvormen schalen met de bekkenlengte. Een voorbeeld hiervan zijn de bodemvormen die de estuariene secties vormen (zie figuur 2). In dit project is, in het kader van Q3 uit sectie 4, de hypothese onderzocht dat deze structuren ontstaan als vrije, morfologische instabiliteiten gesuperponeerd op een grootschalig evenwicht. Om deze uitspraak te valideren is er eenzelfde soort analyse uitgevoerd als beschreven in sectie 7. Het onderliggende evenwicht is nu echter geen vlakke bodem maar een bodem met longitudinale variaties. Deze onderliggende evenwichten zijn beschreven in sectie 6. Als hierop kleine verstoringen worden gesuperponeerd, kan de amplitude van deze verstoringen ten gevolge van een positieve (negatieve) terugkoppeling gaan groeien (afnemen). Het model beschrijft echter, naast de ontwikkeling van de grootschalige structuren ook het gedrag van kleinschalige structuren die, zoals beschreven in sectie 7, instabiel kunnen worden. Het blijkt zelfs zo te zijn dat voor realistische sterkte van de bodemwrijvingsparameter deze kleinschalige structuren veel instabiel zijn dan de grootschalige. Echter, ook grootschalige structuren kunnen in amplitude gaan groeien. Dit resulteert in morfologische structuren, die schalen met de lengte van het estuarium. Het isoleren van deze globale patronen is geen eenvoudige zaak omdat op de globale structuren kleinschalige bodempatronen gesuperponeerd zijn. In figuur 9(a) is een voorbeeld van de longitudinale structuur van een lokale mode die wordt aangeslagen in een bekken met een lengte van 60 km en een breedte B van 5 km. De laterale structuur wordt beschreven door $\cos(\pi y/B)$ met $y \in [0, B]$. Het fysisch mechanisme verantwoordelijk voor de vorming van deze bodempatronen is reeds beschreven in de sectie 7. Wezenlijk verschil is echter dat voor de vorming van globale modi de ruimtelijke variaties in zowel getijdekkarakteristieken als grootschalige morfologie cruciaal zijn. Figuur 9(b) laat een voorbeeld zien van een globale mode met daarop gesuperponeerd lokale bodempatronen. Deze bodemvormen worden gegenereerd door convergenties en divergenties van diffusieve fluxen. Dit mechanisme is in detail beschreven in Schuttelaars and De Swart (1999). Als nu voor realistische wrijvingswaarden de meest instabiele modes worden beschouwd, dan blijkt dat de eerste N modes lokale modes zijn, waarbij N van de orde 100–1000 is. De meest instabiele globale mode wordt gekenmerkt door modenummer m in de longitudinale richting en door modenummer n in de laterale richting. Hierbij is m een maat voor het aantal estuariene secties en n karakteriseert het aantal geulen. Het blijkt dat m en n zeer sterk afhangen van de wrijvingsparameter, alsmede van de geometrie en getijkarakteristieken. Op deze twee dimensionale structuur zijn structuren gesuperponeerd die schalen met de breedte van het kanaal. De groeisnelheden van de grootschalige structuren zijn in de orde van 10–100 jaar, terwijl de groeisnelheden voor de kleinschaliger bodemvormen veel groter zijn (in de orde van maanden tot enkele jaren). Voor realistische waarden van de wrijvingsparameter blijkt het erg moeilijk te zijn om op objectieve wijze lokale en globale modi van elkaar te scheiden. Dit is echter absoluut noodzakelijk voor het ontwikkelen



Figuur 9: Voorbeeld van een lokale en globale bodemverstoring voor een bekken met lengte 60 km en een breedte van 5 km. De gebruikte bodemwrijvingssterkte is hier een factor 10 kleiner dan in werkelijkheid.

van een morfodynamisch model, waarmee het lange termijn gedrag van estuarieën secties kan worden bestudeerd. Voor het lange-termijn gedrag van geulen en platen biedt de uitbreiding van het lokale model zoals besproken in sectie 7 naar een niet-lineair model voldoende houvast.

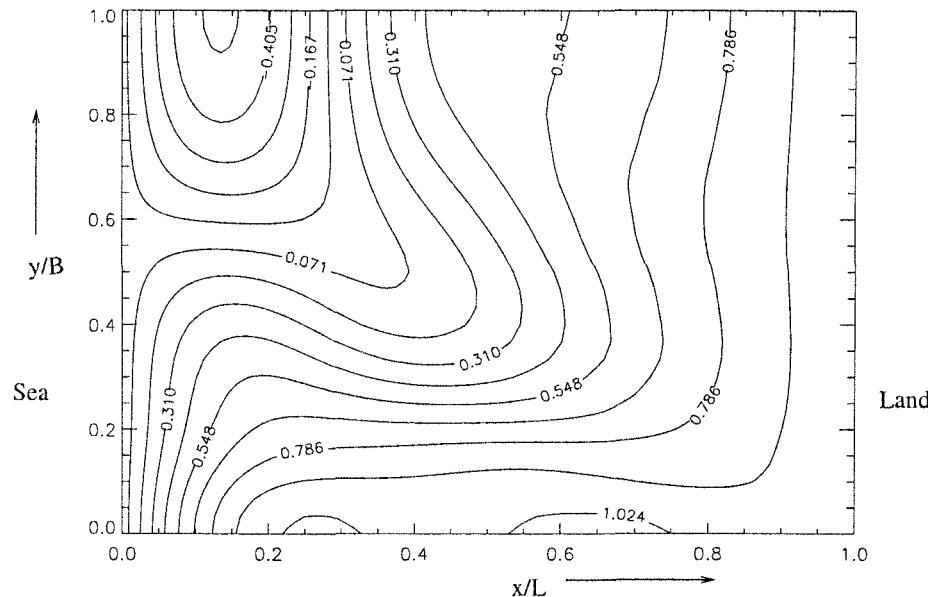
9 Twee-dimensionale evenwichtsbodem

Voor het bestuderen van de lange-termijn ontwikkeling van estuarieën secties (zie Q3 in sectie 4) in de Westerschelde is het noodzakelijk om lokale (bodemvormen die schalen met de breedte van het bekken) en globale (bodemvormen die schalen met de lengte van het bekken) morfodynamische instabiliteiten te kunnen scheiden, zoals hierboven al is aangegeven. Binnen de context van het huidige project is dit alleen mogelijk gebleken voor korte bekken (lengtes veel kleiner dan de getijgolf lengte).

In geval van een kort bekken wordt het grootschalige evenwicht beschreven door een constant hellende bodem met waterdiepte nul aan de landzijde. Het systeem wordt alleen geforceerd met een extern voorgeschreven M_2 getij. Als de bodemwrijving groot genoeg is, zullen lineaire instabiliteiten gaan groeien (zie Schuttelaars and De Swart (1999)). Deze morfologische instabiliteiten beschrijven slechts de initiële groei van de bodemvormen. Om het eindig-amplitude gedrag te bestuderen is een niet-lineair model, gebaseerd op de informatie van de lineaire stabiliteitsanalyse, ontwikkeld (voor meer details, zie Schuttelaars (1997); Terra (2000)).

Uit een systematische analyse van dit model blijkt dat twee parameters een essentiële rol spelen: de bodemwrijvingscoëfficient en de verhouding van lengte en breedte van het bekken. Als de bodemwrijving een kritische waarde (die

afhankelijk is van de verhouding lengte over breedte) overschrijdt, zal de constant hellende bodem instabiel worden en naar nieuwe morfodynamische evenwichten met laterale structuur evolueren. Deze nieuwe evenwichten hebben kenmerken die lijken op die zoals waargenomen bij geulsplitsing (zie figuur 10). Het blijkt dat er, onder dezelfde externe omstandigheden, in plaats van één uniek niet-lineair evenwicht meestal een *multipliciteit* van evenwichten gevonden kan worden. Het evenwicht waarin het systeem zich bevindt, hangt gevoelig af van de initiële bodemverstoring. Het is mogelijk dat (grote) veranderingen in het systeem een overgang van het ene naar een evenwicht met andere kenmerken bewerkstelligt.



Figuur 10: Contour plot van een evenwichtbodem met laterale structuur. Aan de linkerkant bevindt zich de zee, rechts is het land. Linksboven begint een diepe geul die zich voortzet naar rechtsonder. Linksonder wordt een structuur waargenomen die lijkt op een plaat. De diepte is geschaald met $H = 10$ m.

Aangezien alle eigenwaarden van de verstoringen in een kort bekken reëel zijn, moeten tijdsafhankelijke evenwichtsoplossingen (cyclisch gedrag) het resultaat zijn van niet-lineaire interacties. Uit het model volgt dat continuïteits- en wrijvings-effecten inderdaad aanleiding kunnen geven tot periodieke oplossingen. Deze oplossingen worden alleen gevonden in een specifieke intervallen van de lengte-breedte verhouding. Dit betekent dat cyclisch gedrag kan verdwijnen als de externe condities van een estuarium (zoals lengte of breedte) veranderd worden.

10 Vergelijking procesmodellen en geïdealiseerde modellen

Aangezien met geïdealiseerde modellen slechts een beperkt aantal fysische processen kan worden bestudeerd en de modelgeometrie moet worden vereenvoudigd, is het uiterst belangrijk de resultaten te vergelijken met de resultaten van een proces-georiënteerd model zoals Delft3D waarin deze vereenvoudigingen niet zijn doorgevoerd. Natuurlijk dienen de resultaten van beide modellen getoetst te worden aan de veldwaarnemingen.

In Thoolen and Wang (1998) is het procesmodel Delft3D gebruikt om de morfologische ontwikkeling van de drempel bij Hansweert te bestuderen. De modelresultaten zijn vergeleken met veldwaarnemingen. Uit deze studie is de conclusie getrokken dat de fysische mechanismen die resulteren in de drempelvorming (nog) niet goed zijn gemodelleerd in het procesmodel. Naast een uitbreiding van het procesmodel (Thoolen and Wang, 1999) heeft dit geleid tot het ontwikkelen van een geïdealiseerd model met als doel deze fysische mechanismen te verhelderen (Schramkowski and De Swart, submitted).

In Thoolen and Wang (1999) zijn de globale evenwichten zoals gevonden met het geïdealiseerde model (zie sectie 6) en het procesmodel met elkaar vergeleken. Uit deze studie is geconcludeerd (Verbeek et al., 2000) dat de modellen op een aantal punten goed overeen komen en dat de systemen in grote delen van het estuarium naar hetzelfde morfodynamische evenwicht lijken te evolueren. Daarnaast zijn er wezenlijke verschillen:

- Gelineariseerde versus niet-lineaire wrijving.
- Diepte-geïntegreerde versus diepte-gemiddelde concentratie van zwevend stof.
- Verschillen in de formulering van de randvoorwaarden, met name aan de zeerand, zowel voor de waterbeweging als het sedimenttransport.

Deze verschillen resulteren in verschillende soorten oplossingen. Meer onderzoek moet worden uitgevoerd om de twee modellen dichter bij elkaar te brengen.

11 Conclusies

Veranderingen in exogene condities (bijvoorbeeld stijging van de zeespiegel, baggeren, vastleggen van geulen, etc.) kunnen een grote invloed hebben op de getijkarakteristieken en de morfodynamiek van de Westerschelde. Binnen de context van de in dit project bestudeerde modellen kan worden geconcludeerd dat verdieping er toe kan leiden dat de resonantie van het getij sterker wordt en de waterbeweging meer het karakter van een staande golf krijgt. Ditzelfde effect kan optreden als het bekken wordt vernauwd. Bij verbreding zal het getij juist minder resonant worden en meer een lopend karakter krijgen.

Bij de vorming van estuariene secties en geul-plaat stelsels blijkt de wrijvingssterkte uiterst cruciaal te zijn. Als de wrijving niet sterk genoeg is, is

het grootschalige evenwicht een uniek morfodynamisch evenwicht. Overschrijdt de wrijvingssterkte een kritische grens, dan zullen zich op dit grootschalige evenwicht bodemvormen ontwikkelen met een laterale structuur. Afhankelijk van de lengteschaal van de bodemvormen kunnen deze worden gerelateerd aan geul-plaat stelsels (estuariene secties) of aan banken. Binnen de gegeven modelcontext blijkt dat verdieping een ingreep is die leidt tot een verminderde morfologische variabiliteit (zie bijvoorbeeld figuur 5: als het systeem wordt verdiept, zal L_g toenemen en het systeem dus meer richting resonantie gaan). Dit betekent dat de waterbeweging een meer staand karakter krijgt, en dus uniformer wordt. Verder volgt uit de figuren C.4 en C.7 uit annex C, het verschil in groeisnelheid als de wrijving wordt veranderd).

Om de estuariene secties goed te kunnen beschrijven is het van essentieel belang de ontwikkeling van banken en globale bodemvormen van elkaar te kunnen scheiden. Het blijkt dat door toename van de gemiddelde waterdiepte en afname van de wrijvingssterkte de globale bodemvormen in een lang estuarium kunnen worden benadrukt, maar binnen dit project is slechts voor een kort bekken deze scheiding geslaagd.

In een kort bekken kunnen evenwichten met laterale structuur worden berekend. Hieruit volgt dat er meervoudige evenwichten bestaan, die uiterst gevoelig zijn voor de grootte van de wrijvingsparameter en initiële verstoringen. Als de wrijvingsparameter verandert (door bijvoorbeeld verandering van de korrelgrootteverdeling ten gevolge van baggerwerkzaamheden), kan dit resulteren in een wezenlijk andere evenwichtsbodem. Verder blijkt dat de verhouding van de lengte en breedte een andere controle-parameter is: bepaalde typen morfodynamisch gedrag, zoals cyclisch bank—geul gedrag, worden alleen waargenomen in specifieke parametergebieden. Dit betekent dat door grootschalige ingrepen, zoals verandering van de lengte en/of breedte van het estuarium, het dynamisch karakter van het estuarium sterk kan veranderen.

12 Aanbevelingen

Het dient aanbeveling om de mogelijkheid te onderzoeken hoe onderscheid tussen de lokale en globale modi in lange bekkens te maken. Dit zal resulteren in een beter fysisch inzicht in de processen die essentieel zijn voor de vorming van de verschillende estuariene secties, en leiden tot een niet-lineair model voor een lang bekken. Voor het bestuderen van de lange-termijn dynamica van geulen en platen wordt aanbevolen om het lokale model (zie sectie 7) als uitgangspunt te nemen.

Verder dient het aanbeveling de proces-geörienteerde en geïdealiseerde modellen dichter bij elkaar te brengen om zodoende beide type modellen beter met elkaar te kunnen vergelijken en van daaruit verder te werken.

Voordrachten:

- 13–2–1998: Long Term Equilibrium Profiles In The Westerscheldt, NCK-dagen, Zandvoort.
- 26–9–1998: Long term modeling of channels and shoals in tidal embayments, PECS conference, Matsuyama, Japan.
- 28–1–1999: Modellering van geulen, platen en drempels in de Westerschelde, RIKZ, Middelburg.
- 25–2–1999: Multiple equilibria in tidal embayments, NCK-dagen, Zandvoort.
- 21–5–1999: Coastal Dyn. Colloquium, Delft.
- 10–9–1999: Multiple morphodynamic equilibria in a one-dimensional tidal embayment, RCEM conference, Genua, Italy.
- 26–5–2000: Finite amplitude channel–shoal patterns in tidal embayments: a model approach, NWO Symposium on nonlinear systems, Twente.
- 26–9–2000: Morphodynamic equilibria in tidal embayments with decreasing cross-section, VIMS, Gloucester Point, USA.
- 7–10–2000: Morphodynamic equilibria in tidal embayments with decreasing cross-section, PECS conference, Norfolk, USA.

Publicaties (refereed)

- Schuttelaars, H.M., & De Swart. 1999. RCEM proceedings, Volume I, Genova. Multiple morphodynamic equilibria in a one-dimensional tidal embayment. 619–628.
- Schuttelaars, H.M. 2000. PECS proceedings 1998. Multiple morphodynamic equilibria in a one-dimensional tidal embayment. 125–138.
- Van Leeuwen, S.M., Schuttelaars, H.M., & De Swart, H.E. 2000. Tidal properties in embayments with a sandy bottom. Physics and Chemistry of the Earth 25, 365–368.
- Schuttelaars, H.M., & De Swart, 2000. Multiple morphodynamic equilibria in tidal embayments. J. Geophys. Res. 105, 24105–24118.
- Schramkowski, G. P., Schuttelaars, H. M. & De Swart, H. E., submitted to Cont. Shelf Res.
- Schuttelaars, H. M., De Swart & H. E., Schramkowski, G. P. Morphodynamic equilibria in tidal embayments with decreasing cross-section: model results and field data. Submitted to J. Coast. Res.
- Schuttelaars, H.M., & De Swart. Initial formation of estuarine sections. Submitted to RCEM 2001.

Publicaties (not refereed)

- Verbeek, H., Wang, Z.B. & Schuttelaars, H.M. PECS proceedings 2000. A comparison between process-based and idealized morphodynamic models for the Western Scheldt case. 200–204.

Annex A

Morphodynamic equilibria in tidal embayments with decreasing cross-section.

1 Introduction

The geometrical shape of many tidal embayments is characterized by a strongly decreasing cross-sectionally area from the entrance to the landward side. To get a better understanding of the nature of this equilibrium shape a one-dimensional model of a highly schematized tidal embayment is developed and its possible morphodynamic equilibria are analyzed. The aim of this contribution is twofold. First of all, it is shown show that due to width-convergence the type of morphodynamic equilibrium can change drastically. Secondly, to have a good of model results with field observations, width convergence appears to be essential.

Previous idealized models for tidal dynamics in estuaries are based on cross-sectionally averaged shallow water equations and have been studied by many authors (c.f. Speer and Aubrey (1985); Friedrichs and Aubrey (1994)). In these contributions they demonstrated the importance of inertial terms, bottom friction, hypsometric effects and channel convergence for the propagation of the principal tide and the generation of overtides and residual components.

Idealized models for the morphodynamics of tidal embayments were studied by Schuttelaars and De Swart (1996); Schuttelaars and De Swart (2000). The embayments studied were rectangular, i.e., width variations were neglected. Furthermore, it was assumed that river inflow was negligible compared to the tidal water fluxes. For sufficiently strong amplitudes of the ratio M_4/M_2 , multiple morphodynamic equilibria were found, each having completely different characteristics.

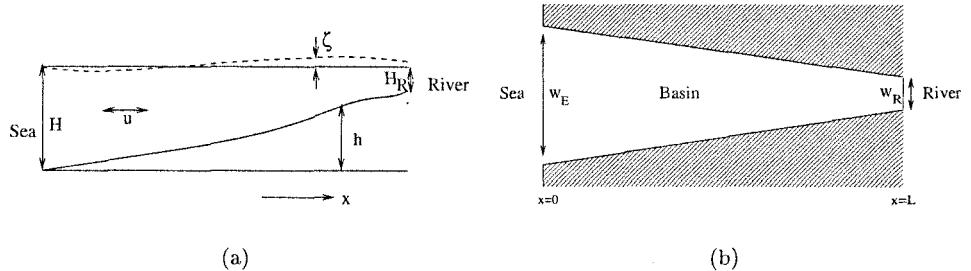
The frequent occurrence of strongly convergent estuaries and estuaries (see Friedrichs and Aubrey (1994)) indicates that cross-sectional variations have

an impact on morphodynamic equilibria of tidal embayments with arbitrary lengths. This problem will be studied with an extended version of the nonlinear 1D model of Schuttelaars and De Swart (2000).

2 Model description

The embayments under study are linearly converging embayments. This is motivated by an analysis of the mariene part of the Western Scheldt, an estuary in the southwestern part of Holland.

The water motion is forced at the seaward entrance by a prescribed sea surface variation ζ of tidal origin. The boundary on the landward side is either closed or a finite depth and velocity are prescribed. In both cases the water density is taken to be constant. The reference undisturbed water depth is denoted



Figuur A.1: Topview and side view of an idealized embayment. For explanation of the symbols see the text. In case of the Western Scheldt the ratio $W_R/W_E \sim 0.2$ with a typical length of the mariene part of $L \sim 90$ km.

by H , the bed elevation by h and u is the horizontal tide. The embayment width at the entrance is denoted by W_E , at the river side by W_R . If the landward boundary is not closed, a water depth H_R is prescribed (see figure A.1).

The set of equations describing the water motions, sediment transport and bed evolution are discussed in Schuttelaars and De Swart (2000). The water motion can be described by the cross-sectionally averaged shallow water equations for a homogeneous fluid. Due to the converging channel geometry, the system is described in terms of polar (rather than cartesian) coordinates. Hence cross-sectional averaging means averaging over the polar angle. Another difference is the use of local Lorentz linearization instead of a global one. This means that instead of a global velocity scale local velocities are used to linearize the quadratic bottom friction. The sediment in the embayment consists of noncohesive material with only one grain size and is mainly transported as suspended load. This transport is described by a depth-integrated concentration equation. Unlike in Schuttelaars and De Swart (2000), the settling of sediment is depth dependent. The bottom evolution equation is derived from continuity of mass

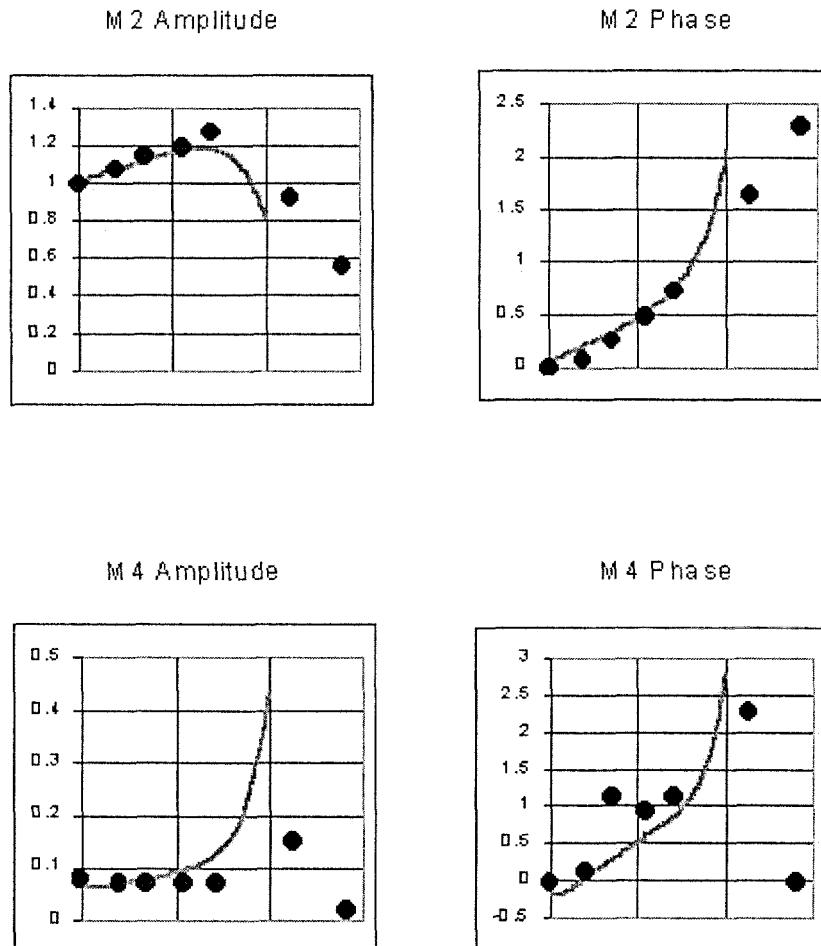
in the sediment layer.

3 Results

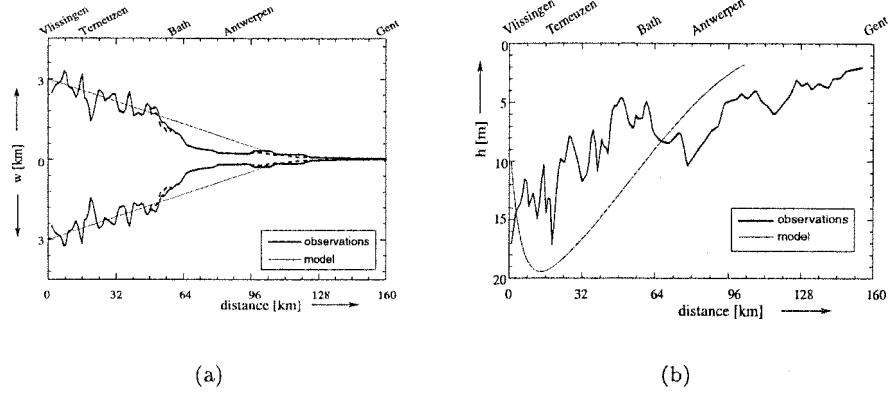
In the first experiment, values representative for the mariene part of the Western Scheldt are taken: the width ratio $W_R/W_E \sim 0.1$, the embayment length is approximately $L = 90$ km and $H_R = 5$ m which corresponds to the length of the mariene part of the Western Scheldt. The amplitude of the M_2 and M_4 tidal forcing at the entrance are 1.75 m ($\equiv A$) and 0.12 m, respectively. As can be seen in Figure 7(a) a linearly decreasing width yields a very good fit with the observed width-variations in the mariene part of the Western Scheldt. In Figure A.2 both the amplitudes and the phases of the M_2 and M_4 tidal constituents of the sea level variations are shown as functions of the distance to the seaward boundary of the Western Scheldt. The data are denoted by the circles and have been extracted from the observed time series of the sea surface variations by Fourier analysis. As can be seen, there is very good agreement between the model results and the observations, considering the many simplifying assumptions underlying the present model. When comparing the results with those obtained from a model with a rectangular or exponentially converging geometry (see Schuttelaars and De Swart (2000)), it turns out that the resonance near Antwerp is much better captured by the model with linearly decreasing width. This indicates that the exact geometry of the estuary is very crucial in reproducing the correct resonance characteristics.

Finally, in Figure 7(b) the predicted equilibrium bathymetry for the Western Scheldt is compared with field data. For the selected parameter values there is only one morphodynamic equilibrium in the model. The general trends are rather well predicted, although some discrepancies can be observed as well. Hence with this choice of parameters both the resonance of the vertical tide near Antwerp and the spatial phase dependency of the vertical tide can be reproduced by the idealized model.

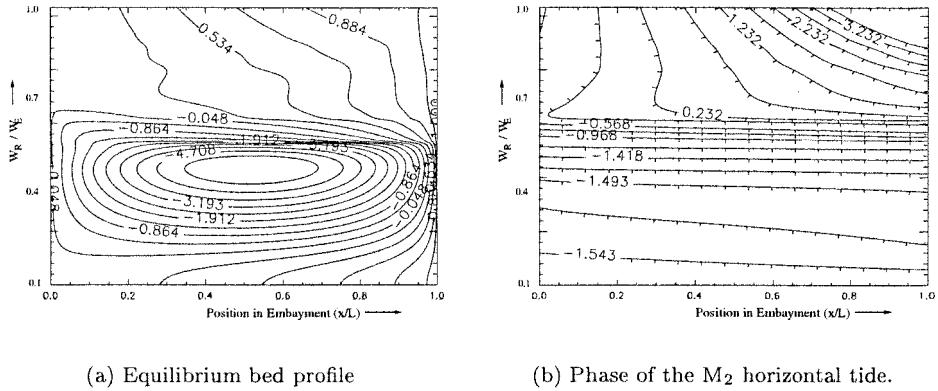
In the second experiment presented here, the ratio W_R/W_E is varied and $H_R = 0$. Since in the Western Scheldt $H_R \neq 0$ at the end of the mariene part, the length of the embayment L is chosen slightly larger (110 km) than the length of the mariene part of the Western Scheldt (approximately 90 km). The width at the entrance is 6 km and the width at the river-side is varied from 6 km to 0.6 km. Other values are representative for the mariene part of the Western Scheldt. In figure A.4 the equilibrium bed profile and corresponding phase of the M_2 horizontal tide is plotted as a function of W_R/W_E . It is observed that by increasing the channel convergence the type of morphodynamic equilibrium changes: for $W_R/W_E \sim 1$ the equilibrium is characterized by a weakly concave bottom profile and a travelling tidal wave. The amplitude of the externally prescribed M_4 -tide is negligible. If the convergence increases enough ($W_R/W_E \sim 0.5$), the water depths for the equilibrium bed are much larger than in the previous case: the maximum value is about five times the depth near the entrance. The amplitude of the externally prescribed external



Figuur A.2: Comparison of field observations and model results for the water motion in the Western Scheldt estuary. Shown are the width-averaged amplitudes and phases of the M_2 and M_4 tidal constituents in the water level versus the distance to the seaward boundary. For further details, see the text.



Figuur A.3: Comparison of observation and model results for the width (Figure A.3(a)) and width-averaged depth (Figure A.3(b)) of the Western Scheldt.



Figuur A.4: Contour plots of the equilibrium bed profile and phase of the M_2 horizontal tide in morphodynamic equilibrium as a function of the dimensionless coordinate x and the ratio W_R/W_E . Velocities are scaled with $A/H\sqrt{gH}$. Here $H = 10$ m, $A = 1.75$ m and $L = 110$ km. The small ticks in the contour lines point to smaller contour levels.

overtide is amplified and the tide behaves like a standing wave. A zero net sediment flux is maintained by a balance between advective contributions related to velocities and concentrations generated by external over tides and by nonlinear interactions, respectively.

4 Discussion

In this contribution the existence of morphodynamic equilibria in width-averaged convergent tidal embayments has been investigated. The water motion is described by a principal M_2 tide and an external M_4 tide prescribed at the open sea boundary. Sediment is transported as suspended load. A morphodynamic equilibrium is defined by the condition that the bottom profile is steady. In the present model this is equivalent to a zero tidally averaged sediment flux in the entire embayment.

To have a good comparison between model results and observations it is essential to take width convergence into account. The model results are compared with field data from the Western Scheldt and show good agreement if width convergence is taken into account.

In the second experiment discussed in this contribution the ratio W_R/W_E is decreased. It is shown that if the convergence is strong enough the characteristics of the morphodynamic equilibrium change. For an almost rectangular geometry the water motion has the characteristics of a travelling wave and the bed profiles are quite shallow. If W_R/W_E increases, the character of the morphodynamic equilibrium changes: the maximum water depth becomes much larger and the tide behaves like a standing wave.

Annex B

Formation of bars in tidal embayments.

1 Introduction

The geomorphology of semi-enclosed embayments with a sandy bed often consists of a complex network of channels and shoals. In the channels, strong tidal currents are observed (of order 1ms^{-1}). Field data indicate that different types of bed forms can exist. On the one hand, near the entrance of shallow embayments (e.g. those located along the east coast of the United States) so-called estuarine bars are often observed (Dalrymple and Rhodes, 1995)). These rhythmic bars have wave-lengths which scale with the width of the embayment and do not migrate. On the other hand deeper embayments, e.g. those located in the Dutch and German Wadden Sea, are characterised by a fractal pattern of channels (c.f. Ehlers, 1988; Cleveringa and Oost, 1999) which appear to scale with the length of the embayments. In many embayments both types of bottom patterns can be observed simultaneously. An example is the Western Scheldt, a tidal embayment located at the Dutch-Belgium border. Its marlaine part has a length of about 90 km and can be divided in six separate sections. Within these sections, bars are observed which scale with the embayment width, see Van den Berg et al. (1997); Jeukens (2000).

Knowledge about the behaviour of these bar-shoal systems is relevant, both for estuarine management and scientific purposes. For example, the morphology influences ship routing, but it also plays an important role in determining the flushing characteristics of the water motion and thereby the ecological diversity of the area (Verbeek et al., 1999). In semi-empirical models, see e.g. Van Dongeren and de Vriend (1994); Di Silvio (1989), the shoal surface area is often parametrically accounted for. From a process-oriented perspective the evolution of bars has been successfully simulated by Wang et al. (1995); Ranasinghe et al. (1999). These models are rather complex and have not been designed to gain fundamental understanding about the physical mechanisms controlling the

channel-shoal dynamics. For the latter objective idealised models, which focus on isolated processes, are useful tools.

It has been demonstrated by Seminara and Tubino (1998) and Schuttelaars and De Swart (1999) that bars in tidal embayments can form as inherent morphologic instabilities. Seminara and Tubino (1998) analyse a local model, which in general is designed to deal with phenomena that scale on a length scale which is small compared with both the tidal wave-length and embayment length. Thus, the dynamics is investigated in an infinitely long channel geometry. In this approach the water motion must be prescribed by specifying external pressure gradients which result from the dynamics on the global scale. In their study Seminara and Tubino (1998) use a three-dimensional model, based on the shallow water equations. They also a priori assume that the embayment width is the controlling length scale of the bed forms. Hence their model results apply to narrow, frictionally dominated tidal channels.

Schuttelaars and De Swart (1999) on the other hand study a global model of a tidal embayment. This choice implies that they put emphasis on bottom patterns that occur on the length scale of the entire embayment. In this approach a semi-enclosed embayment is considered where the water motion is forced by a boundary condition at the entrance of the embayment. Their model is based on the depth-averaged shallow water equations and assumes that the ratio of the tidal excursion length and the embayment length is small. Results are presented for the case of a short embayment (with a length being much smaller than the tidal wave-length), in which sediment transport is dominated by diffusive processes and advective terms in the flow equations can be neglected. However, the model can be generalized in a straightforward sense, as is demonstrated in Schuttelaars and De Swart (2000) (1D equilibrium dynamics in a long embayment) and Van Leeuwen and De Swart (in preparation) (2D nonlinear bed forms in a short embayment).

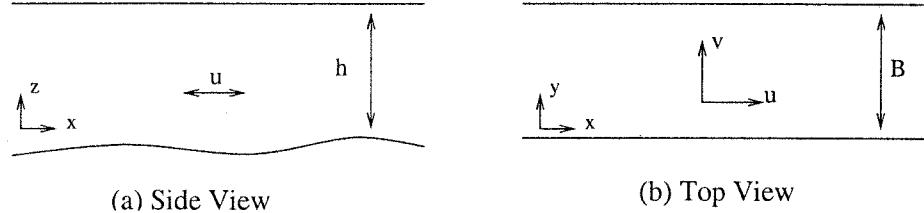
Thus global and local models may be viewed as describing morphodynamics for opposite limits with regard to the length scales of bottom patterns. The results from the two approaches should qualitatively agree in the appropriate limits. This is not straightforward, because the local model of Seminara and Tubino (1998) and the nonlinear global model of Schuttelaars and De Swart (2000) use different formulations and assumptions. This motivates the set up of an intermediate model, in which both the embayment width and the tidal excursion length, are retained as relevant length scales. Hence this model can deal with phenomena that scale on a length scale which is small compared with both the tidal wave-length and embayment length, but not necessarily small compared with the tidal excursion length. This intermediate model serves as a link between the two models which are already available. It will be shown that in the limit of a narrow channel, the bedforms found by Seminara and Tubino (1998) will be recovered. In Schuttelaars et al. (in preparation) the connection with the bedforms found in a global model will be made.

The paper is organized as follows. In section 2 the local model is described. In section 3 the method of analysis that is used to describe the formation of bedforms is described. In section 4 the results from the local analysis will be

presented. Finally, the results will be discussed in section 5.

2 Model description

The features studied are small compared with both the tidal wave-length and embayment length. Hence, the model geometry can be represented as an infinitely long channel having a constant width B . The banks are straight and non-erodible, with only the bottom being subject to erosion (see figure B.1). The total water depth is denoted by h , while $u(x)$ and $v(y)$ are the along-



Figuur B.1: The top view (a) and side view (b) of the embayment. For an explanation, see the text.

channel and cross-channel velocities (coordinates), respectively.

The model is forced by a prescribed external tide. This explicitly reflects the local nature of the model which *by definition* cannot solve the global tidal motion self-consistently. It will be assumed that the external tide contains only an M_2 component.

The water motion is described by the depth averaged shallow water equations (see Csanady (1982)). Within the local model, tidal velocities are of the order of 1 ms^{-1} . Since the main dynamic force balance is between the pressure gradients and the advective terms, the so-called rigid lid approximation can be adopted: the water level ζ and its derivatives may be neglected everywhere except for terms that describe tidal forcing, i.e. $g\zeta_x$ and $g\zeta_y$. These latter terms describe, for instance, the forcing due to the prescribed external tide. The resulting equations read:

$$(hu)_x + (hv)_y = 0, \quad (\text{B.1a})$$

$$u_t + uu_x + vu_y + F_1^b = -g\zeta_x, \quad (\text{B.1b})$$

$$v_t + uv_x + vv_y + F_2^b = -g\zeta_y, \quad (\text{B.1c})$$

where g is the gravitational acceleration and $\mathbf{F}^b = (F_1^b, F_2^b)$ the bottom friction. The friction vector is defined as

$$\mathbf{F}^b = \frac{\tau^b}{h} / \rho, \quad (\text{B.2})$$

with τ^b the stresses due to bottom friction, which is in general a nonlinear function of velocity. Using a procedure first proposed by Lorentz (1922), see

also Zimmerman (1992), the nonlinear bottom friction can be linearized in such a way that averaged over one tidal cycle the same amount of energy is dissipated in both formulations. In the remainder of this contribution the linearized shear stress ($\tau^b = \rho r u$ with r a friction parameter with dimensions ms^{-1}) will be used, unless stated otherwise.

The impermeability of side walls to water motion implies that the cross-channel velocity v should vanish at the banks, i.e.

$$v = 0 , \quad \text{at } y = 0, B . \quad (\text{B.3})$$

The bed of the estuaries considered consists of fine non-cohesive sediment which is mainly transported as suspended load. The dynamics of the suspended sediment is described by an advection-diffusion equation for the so-called *volumetric* depth-integrated concentration C , which is the depth integrated sediment concentration (with dimension kg m^{-2}) divided by the sediment density. The evolution equation for C reads (Van Rijn, 1993):

$$C_t + (uC - \mu C_x)_x + (vC - \mu C_y)_y = \alpha(u^2 + v^2) - \gamma C , \quad (\text{B.4})$$

where μ denotes the horizontal coefficient for sediment diffusion. Typically, $\mu = \mathcal{O}(10 - 100)\text{m}^2\text{s}^{-1}$ for tidal flows in estuaries. The first term on the right-hand side of equation (B.4) models the sediment pick-up function, and the second term the tendency of sediment to settle due to gravity effects. The adopted values of the coefficients α ($\mathcal{O}(10^{-6} - 10^{-8})\text{sm}^{-1}$) and γ ($\mathcal{O}(10^{-3})\text{s}^{-1}$) are representative for fine sand.

The non-erodibility of the banks implies that there be no net sediment flux through the side walls, i.e.

$$vC - \mu C_y = 0 , \quad \text{at } y = 0, B , \quad (\text{B.5})$$

The evolution of the bottom follows from the conservation of sediment. Since the bed in general evolves on a time scale which is long compared to a tidal period (typically weeks to months), the dynamics of bottom patterns is not sensitive to instantaneous rates of erosion and deposition, but rather to their tidal mean values. The resulting equation for the bottom evolution thus reads:

$$h_t = - \langle \alpha(u^2 + v^2) - \gamma C \rangle + \lambda \nabla^2 h . \quad (\text{B.6})$$

where $\langle \rangle$ denotes the time average over an M_2 tidal period. The first term on the right-hand side models the bed level changes due to erosion and deposition of sediment, while the second term gives the effect of bedslopes. The latter term is incorporated since suspended load is susceptible for the presence of local slopes (see Talmon et al. (1995); Parker (1978)). Here the diffusion coefficient $\lambda = \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-2})\text{m}^2\text{s}^{-1}$.

3 Linear stability analysis

For realistic values of the parameters the two-dimensional system of equations, as described in section 2, allows for a morphodynamic equilibrium solution

$\Psi_{\text{eq}} = (u, v, \zeta_{\text{ext}}, C, h)_{\text{eq}}$, which is spatially uniform, i.e., they are independent of both the x - and the y -coordinate. In case that the forcing of the water motion (due to the externally prescribed pressure gradient) consists of one single tidal constituent (an M_2 component with frequency $\sigma = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$) it reads

$$\Psi_{\text{eq}} = (U \cos(\sigma t), 0, \zeta_{\text{ext}}, C_{\text{eq}}, H).$$

This describes a tidal flow in a channel with an undisturbed water depth H and a flat bottom. The concentration can be straightforwardly computed from the concentration equation (C.2) and consists of a residual component as well as of a component which oscillates with twice the basic tidal frequency.

This equilibrium solution is in general not stable with respect to perturbations having a structure in the cross-channel direction. This means that such perturbations can grow due to a positive feedback between the water motion and the erodible bed. The dynamics of the perturbations is analysed by substitution of

$$\Psi(x, y, t, \tau) = \Psi_{\text{eq}}(x, t) + \Psi'(x, y, t, \tau)$$

in the full equations of motion. Here the variables are assumed to depend on two time variables: the fast coordinate t and the slow time coordinate $\tau = \delta t$, which measure the evolution of the system on the tidal timescale and morphologic timescale, respectively. The parameter $\delta \ll 1$ denotes the ratio of the tidal period and the morphologic timescale and is typically of order 10^{-2} .

Next it is assumed that the amplitude of the perturbations is small with respect to that of the equilibrium state. This allows for a linearization of the equations of motion. It turns out that the perturbations are composed of the following eigenmodes:

$$\Psi'(x, y, t, \tau) = \Re \left[e^{\omega \tau} \hat{\Psi}(x, y, t) \right]; \quad \hat{\Psi}(x, y, t) = e^{ikx} f_n(y) \sum_p g_p e^{ip\sigma t}. \quad (\text{B.7})$$

Here \Re denotes the real part of the solution. The evolution of the perturbations on the slow morphodynamic timescale thus turns out to be exponential, with $\Re(\omega)$ denoting the growth rate and $-\Im(\omega)$ being the migration rate. It turns out that if the system is only forced with an M_2 tide, the migration rate is always zero. Furthermore, k is an arbitrary longitudinal wavenumber and $f_n(y)$ equals $\cos(l_n y)$, except for the second component which reads $\sin(l_n y)$. Here $l_n = n\pi/B$ where $n = 0, 1, 2, \dots$ is the cross-channel mode number. Finally, g_p are Fourier coefficients to be determined from the eigenvalue problem. Thus the perturbations have a sinusoidal structure in both the along-channel and cross-channel direction. Furthermore, on the short timescale the flow and concentration consists of a superposition of tidal harmonics (M_2, M_4, \dots) and a residual component. Of course the bed perturbation h' only has a residual component on the tidal timescale.

The linearized equations read

$$ikHu' + l_nHv' = iku_{\text{eq}}h' , \quad (\text{B.8a})$$

$$\partial_t u' + iku_{\text{eq}}u' + F_1^{\text{b}'} = -ikg\zeta' , \quad (\text{B.8b})$$

$$\partial_t v' + iku_{\text{eq}}v' + F_2^{\text{b}'} = l_n g \zeta' , \quad (\text{B.8c})$$

$$a[\partial_t C' + iku_{\text{eq}}C' + (iku' + l_nv')C_{\text{eq}} + \mu(k^2 + l_n^2)C' = 2\alpha u_{\text{eq}}u' - \gamma C' , \quad (\text{B.8d})$$

$$\omega h' + \lambda(k^2 + l_n^2)h' = -\langle 2\alpha u_{\text{eq}}u' - \gamma C' \rangle , \quad (\text{B.8e})$$

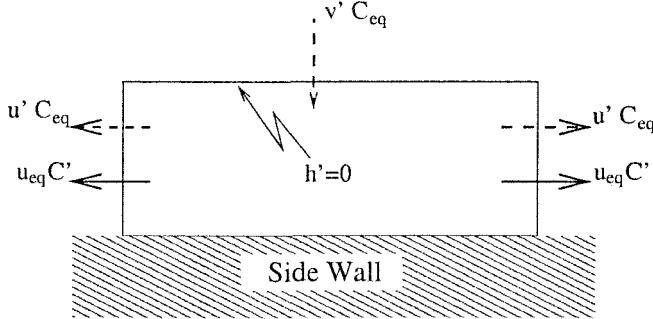
where $\mathbf{F}^{\text{b}'}$ is the perturbed bottom friction vector. In the linearized context this vector reads

$$\mathbf{F}^{\text{b}'} = \left(\frac{r}{H}u' + \frac{ru_{\text{eq}}}{H^2}h' , \frac{r}{H}v' \right) .$$

Combining expressions (B.8d), (B.8e), one can obtain the following relation for the growth rate ω :

$$\omega = [-ik\langle u_{\text{eq}}C' \rangle - \langle (iku' + l_nv')C_{\text{eq}} \rangle - \mu(k^2 + l_n^2)\langle C' \rangle - \lambda(k^2 + l_n^2)h'] / h' . \quad (\text{B.9})$$

The first two terms on the right-hand side give the contributions of suspended sediment transport due to advection, while the last two terms model the transport due to diffusive processes. In figure B.2 the advective fluxes are plotted



Figuur B.2: The net advective sediment fluxes entering/leaving a region which is on one side bounded by the sidewall and on the other sides by the line $h' = 0$.

entering/leaving the smallest possible region bounded by the sidewall and a line with $h' = 0$. Such a region can always be found since $\Im(\omega) = 0$. In this region the amplitude of the bed perturbation will grow/decrease uniformly if a net import/export of sediment is observed. The net deposition or sedimentation due to the fluxes $u' C_{\text{eq}}$ and $v' C_{\text{eq}}$ is zero. This can be most easily seen by using equation (B.8a)

$$(iku' + l_nv')C_{\text{eq}} = iku_{\text{eq}}C_{\text{eq}}h'$$

<i>Variable</i>	<i>Symbol</i>	<i>Repr. Value</i>
Water Depth	H	10 m
Embayment Width	B	$5 \cdot 10^3$ m
Tidal Period	σ	$1.4 \cdot 10^{-4}$ s $^{-1}$
Velocity Scale	U	1 m s $^{-1}$
Settling Period	γ	$4 \cdot 10^{-3}$ s $^{-1}$
Friction parameter	r	10^{-3} m s $^{-1}$
Erosion Constant	α	10^{-2} kg s m $^{-4}$
Sediment Density	ρ_s	2650 kg m $^{-3}$
Sediment Porosity	p	0.4
Bedslope Parameter	λ	10^{-4} m s $^{-1}$
Gravity Constant	g	9.8 m s $^{-2}$

Tabel B.1: Parameter values, representative for the mariene part of the Western Scheldt.

Recalling that u_{eq} only has an M_2 component and C_{eq} oscillates with twice the basic tidal frequency, it is clear that after averaging over a tidal period its contribution is zero. Hence the only advective flux resulting in a net bottom change is due to the flux $u_{\text{eq}}C'$.

4 Results

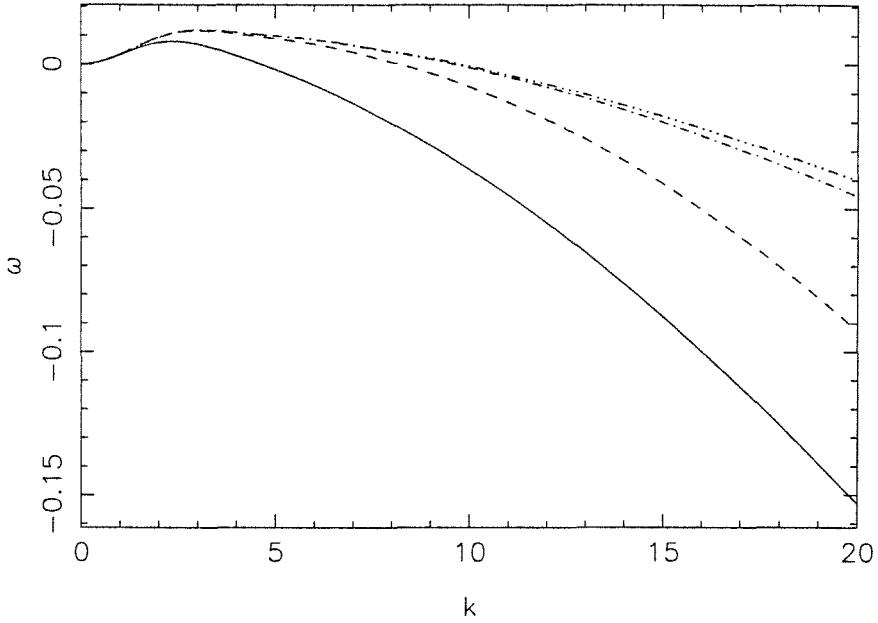
Results from the local 2D channel model will be described. In both models default values which are characteristic for the Western Scheldt will be used, see table B.1. The growth rates presented below will be expressed in units $\alpha U^2 / H$ where $U \equiv 1$ m s $^{-1}$. In the remainder of this paper, we will only consider advective modes, i.e. horizontal diffusion is neglected ($\mu = 0$).

4.1 Advective instabilities

First, we will discuss their behaviour in the absence of bed slope effects ($\lambda = 0$).

Figure B.3 shows the growth rate as a function of lateral wave number k for various values of the lateral number n . We see that all curves are marginally stable for $k = 0$, as can be inferred from equation (B.9). As k is increased, all modes at first become unstable while they eventually stabilize for sufficiently large longitudinal wave number.

Also, it is found that the maximum growth rate for a given lateral wave number increases monotonically with n . Moreover, there appears to be a limiting curve $\omega_\infty(k)$ to which $\omega(k)$ converges from below as $n \rightarrow \infty$. Thus the preferred mode of bottom growth corresponds to a finite longitudinal wave number k but it has infinite lateral wave number, i.e. the preferred mode is a *braiding* mode which



Figuur B.3: Growth rate ω of bottom patterns versus longitudinal mode number k for lateral mode number $n = 1$ (solid line), $n = 5$ (dashed), $n = 20$ (dash-dot-dash) and $n = 100000$ (dash-dot-dot-dot-dash).

has a wavelength of approximately $2\ell \approx 14$ km. This result is reminiscent from river morphodynamics where this mode is also found to be the most unstable one if bed slope effects are neglected (Callander 1969).

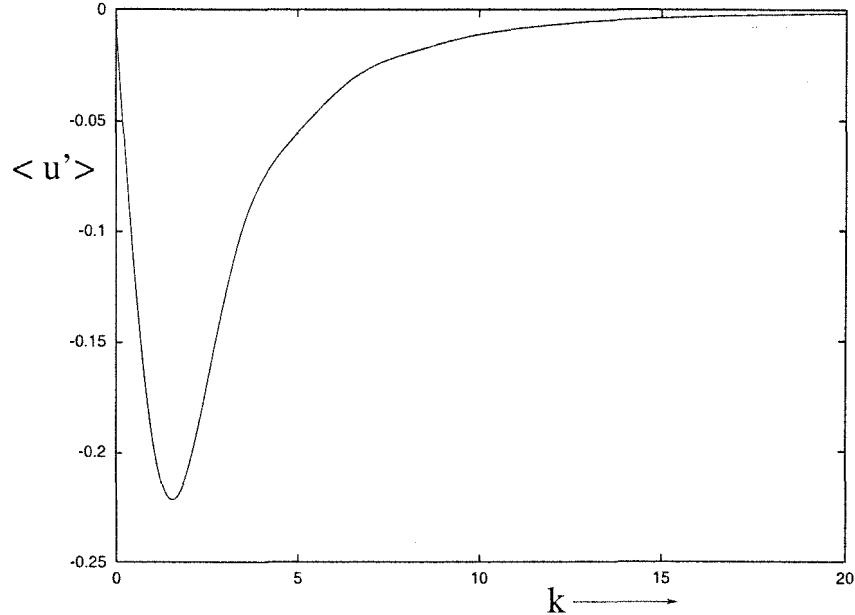
To understand the physical mechanism responsible for the instability observed for long-wave perturbations (k small) and the stabilizing physical effect when k is increased, a region enclosing only a crest is defined (see figure B.2 with $h' > 0$ everywhere within the domain bounded by the sidewall and the line $h' = 0$). In section 2 it was already argued that only the flux $\langle u_{\text{eq}} C' \rangle$ can result in a net bottom change. Therefore, expressions for C' will be derived at one of the domain boundaries, $x = \pi/(2k)$ (the results at the other boundary, $x = -\pi/(2k)$, can be obtained by negating C').

For long-wave perturbations (k small), the sediment dynamics can be approximated by a balance between erosion and deposition (right-hand side of equation B.8d), i.e. $C' \approx 2u_{\text{eq}}u'$. Hence the net flux $\langle \mathcal{F}' \rangle$ across the fundamental domain boundary $x = \pi/(2k)$ reads

$$\langle \mathcal{F}' \rangle \propto \langle u_{\text{eq}} C' \rangle \approx 2 \langle u_{\text{eq}}^2 u' \rangle \approx \langle u' \rangle , \quad (\text{B.10})$$

where we have used $\langle u_{\text{eq}}^2 \rangle = 1/2$ and neglected the M_4 component of the perturbed along-channel velocity u' . This expression shows that the growth of long-wave perturbations is primarily governed by the residual perturbed velocity $\langle u' \rangle$. Figure B.4 shows a typical example of the behaviour of this term as

the longitudinal wave number k varies. From this plot it is found that $\langle u' \rangle$ is always negative and, using equation (B.10), a net sediment influx into the region is found. This is a destabilizing effect as it leads to net deposition inside



Figuur B.4: Residual velocity at the side wall $x = \pi/(2k)$ for $n = 1$. The scaling along the vertical axis is in units $\hat{h}/HU \text{ ms}^{-1}$, where \hat{h} is the amplitude of the bottom perturbation and U the tidal velocity amplitude. The curve has to multiplied by a factor $\cos(l_n y)$ to account for lateral variation.

the region. From figure B.4 we also see, that the magnitude of $\langle u' \rangle$ reaches a maximum at $k\ell = O(1)$; this determines the position of the maximum of the growth curve in figure B.3.

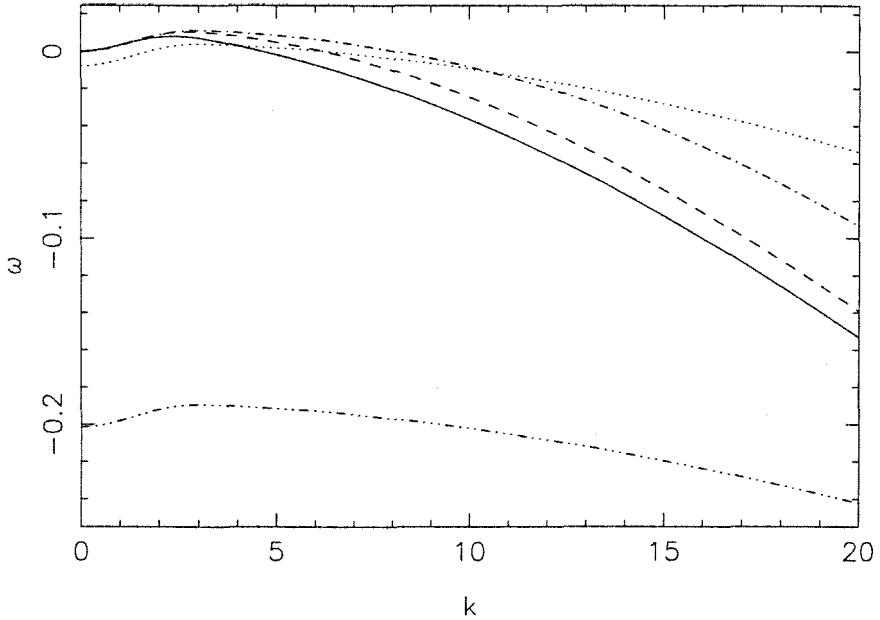
In case of short wave perturbations (k large), the advective contributions to the sediment balance cannot be neglected anymore. Expressing the perturbed concentration C' in terms of u' and h' and using that $k \gg 1$, an approximate expression for $\langle \mathcal{F}' \rangle$ across $x = \pi/(2k)$ can be found:

$$\langle \mathcal{F}' \rangle \approx \frac{1}{k} \langle 2\alpha u_{\text{eq}} u' + \gamma C_{\text{eq}} \frac{h'}{H} \rangle . \quad (\text{B.11})$$

The first term indicates that the possible growth of the bottom is partly determined by the M_2 component of the perturbed velocity u' , whereas the residual velocity $\langle u' \rangle$ does not result in a net sediment transport. Using mass conservation (B.8a), it is found that above short wave perturbations $u' \approx u_{\text{eq}} h'/H$, i.e. velocities are increased (decreased) above crests (troughs). As a result, this contribution is stabilizing since it yields a positive (i.e. outward directed) flux from a region enclosing a crest. The second contribution is always stabilizing

since it is positive (i.e. directed out of the domain) for a region enclosing a crest ($h' > 0$), thus acting as a means to erode the crest. Therefore, short wave perturbations are found to be stable.

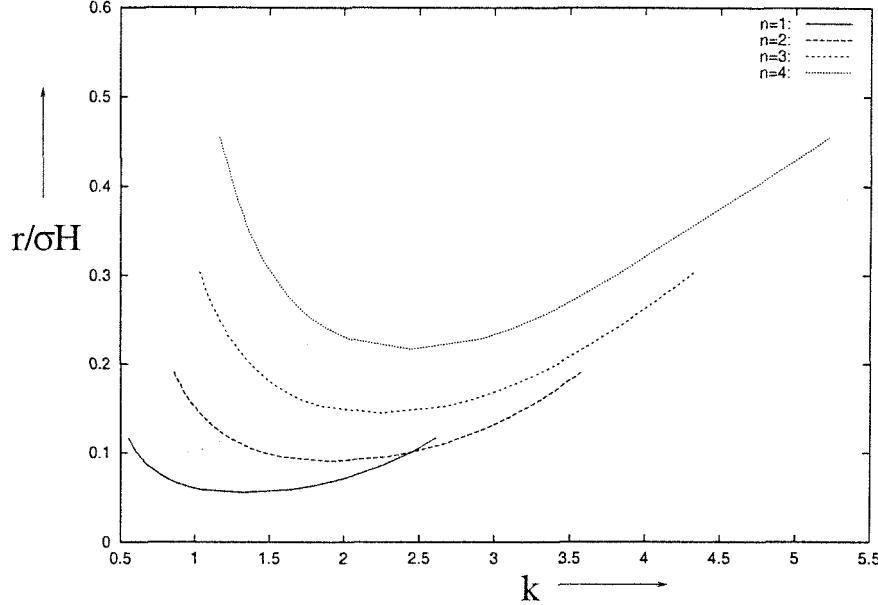
4.2 Bed slope effects



Figuur B.5: Growth rate ω of bottom patterns versus longitudinal mode number k for lateral mode number $n = 1$ (solid line), $n = 2$ (dashed), $n = 5$ (dash-dot-dash), $n = 20$ (dotted) and $n = 100$ (dash-dot-dot-dot-dash).

Figure B.5 shows the same results as figure B.3 but now with the effect of bed slope included; the adopted value for the slope parameter λ was 10^{-4} m s^{-1} . As is to be expected, bed slope effects stabilize high n -modes. Consequently, the most unstable mode now occurs for finite n .

Figure B.6 shows the neutral curves for the abovementioned bed slope parameter λ . For a fixed lateral wave number n and given longitudinal wave number k , the neutral curve shows the values of the friction parameter r for which the growth rate ω is zero. This means that the amplitudes of the perturbations do not change. For friction values above the neutral curve, bedforms and unstable and will grow. For r -values below the curve, the perturbations are stable, i.e. they are damped. The curves in figure B.6 show that the $n = 1$ mode is the first one to become unstable as r is increased from zero, followed subsequently by $n = 2, 3, \dots$ etc.. The critical wave numbers $k_{\text{cr},n}$ increase with n , see table B.2 for the first few modes.



Figuur B.6: Neutral curves $\omega = 0$ as a function of longitudinal wavenumber k and friction coefficient for lateral wavenumber $n = 1, 2, 3$ and 4 .

4.3 Nonlinear friction and the influence of inertia

In this section, we will extend our model by including nonlinear bottom friction, which means that τ^b in equation (B.2) reads:

$$\tau^b = \rho \hat{r} \|u\| u, \quad (\text{B.12})$$

where $\hat{r} = 3\pi r/(8U)$ follows from the Lorentz linearization procedure that was mentioned below equation (B.2). The effect of non-linearity on the growth of bedforms can be inferred from figure B.7 which shows the neutral curves for both linear and nonlinear friction. We see that the effect of non-linearity is to decrease the threshold for instability as the critical friction parameter value is

n	k_{cr}	r_{cr}
1	1.32	0.056
2	1.92	0.091
3	2.24	0.145
4	2.45	0.217
5	2.60	0.312

Tabel B.2: Critical values of longitudinal wave number k and friction r for the first five unstable lateral mode numbers.

lowered. Also, the most unstable wavenumber shifts towards a higher value i.e. the critical mode occurs on a smaller longitudinal length scale.

Next, we also investigate the effect of inertia. Whilst we have included this effect so far, it may be small. For instance, for a narrow channel (width B small compared to tidal excursion length $\ell = \sigma/U$) inertia (magnitude $\approx \sigma U$) may be neglected relative to advective processes (magnitude $\approx U^2/B$), their ratio ϵ being given by

$$\epsilon = \frac{\sigma B}{U} = \frac{B}{\ell}, \quad (\text{B.13})$$

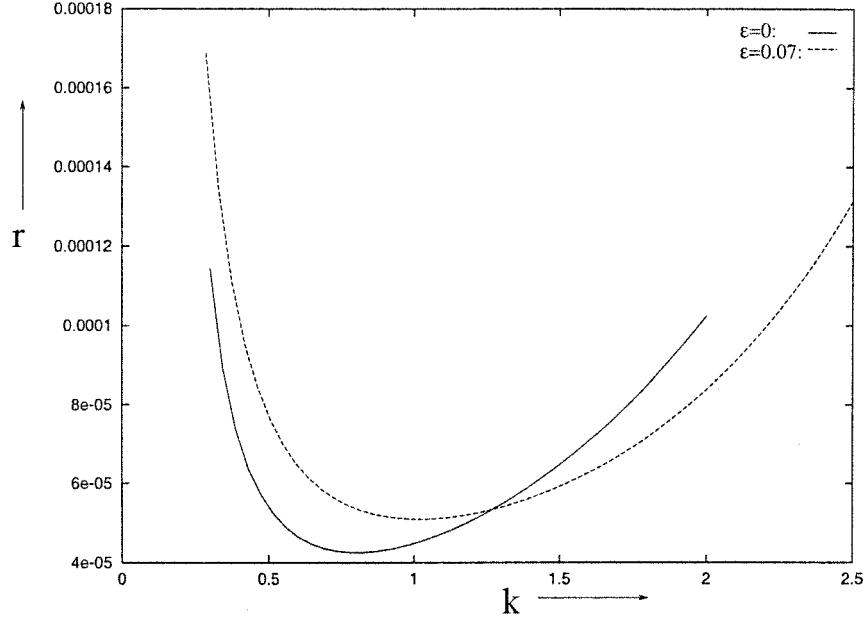
which is small if $B \ll \ell$. In the remainder of this section, we will take $B = 500\text{m}$. For linear friction, the neutral curve in the absence of inertia is plotted in figure B.8. This plot shows two curves: one for $\epsilon = 0$ and one for a small but finite ϵ ($\epsilon = 0.07$) arising from the adopted width. It is clearly visible that the curves are almost identical. Note that the critical friction parameter values are much higher than for the wide channel. This is because for a fixed n , the lateral bottom variations are steeper if the width is smaller; this enhances the stabilizing effects of bedslope.

The combined effect of nonlinear friction and inertia can be observed from figure B.9. Here, once again neutral curves for both $\epsilon = 0$ and $\epsilon = 0.07$ have been drawn. Contrary to the case of linear friction, though, there is a significant difference between the curves. We see that incorporation of small but finite inertia yields a shift of the critical wavenumber to higher values, i.e., the critical bedform shifts towards a smaller length scale.

Finally, we will compare the results of the previous case (nonlinear friction and $\epsilon = 0$) to results of Seminara and Tubino (1998), since this specific case is the 2D-counterpart of their 3D model. The qualitative shape of the neutral curve for non-linear friction (e.g. multivaluedness for smaller k -values) is similar to the findings of Seminara and Tubino (1998). Quantitatively, the value of the critical wavenumber in our case is approximately $kB = 0.2$. This compares well with the values obtained by Seminara and Tubino (1998), who found kB to lie in the range $0.1 - 0.5$. However, the relationship that the critical wavenumber $k_{\text{cr},n}$ of mode n obeys $k_{\text{cr},n} = nk_{\text{cr},1}$ has not been reproduced.

5 Discussion and conclusions

In this paper, the formation of bottom patterns that scale with the tidal excursion length has been studied within a 2D idealized model. Within the model, bathymetric features can arise as an inherent instability in the interaction between water motion, erosion, sediment transport and deposition. This instability is mediated by advective processes, in particular through residual flows that arise from tide-topography interactions. In particular, such flows always set up net sediment fluxes towards shoals and away from deep channels. For small scale bedforms (sizes well below one tidal excursion length), the M_2 part of the topographically induced flow determines the net sediment fluxes. These fluxes



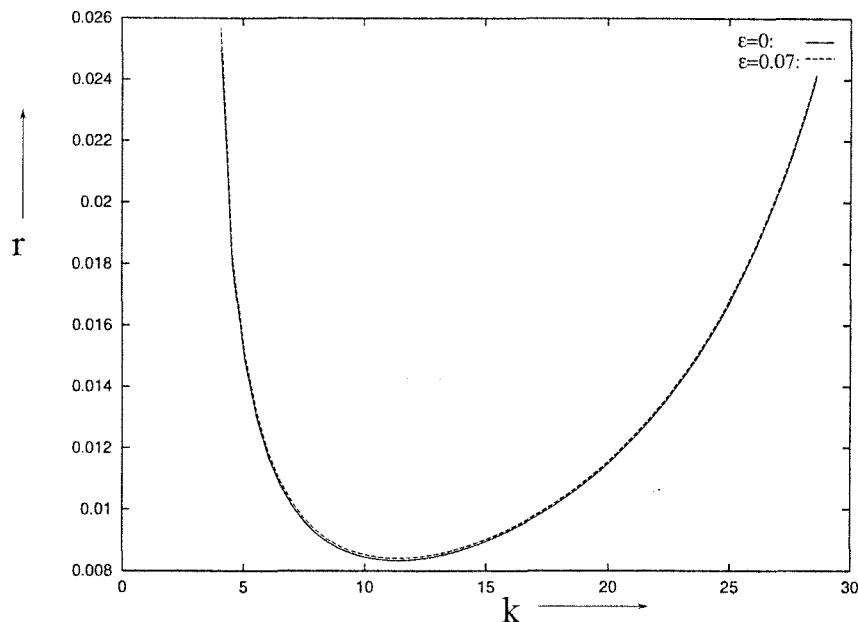
Figuur B.7: Neutral curves $\omega = 0$ as a function of longitudinal wavenumber k and friction coefficient for lateral wavenumber $n = 1$ mode for a wide channel. The values on the vertical axis are dimensional values for the friction parameter

always turn out to be stabilizing, i.e. they counteract formation of small-scale bottom patterns.

Bedslope effects act as another means to prevent the emergence of small scale features. Moreover, they cause *mode selection* which enables a low-order lateral mode to occur most easily: for a realistic bedslope parameter $\lambda = 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$, this is the $n = 1$ mode. This can be illuminated by the use of neutral curves, which predict threshold values for the friction parameter which must be exceeded in order to enable growth of the most unstable bedform. It turns out that the most unstable modes occur on a lengthscale that is comparable to the tidal excursion length, independent of the width of the embayment.

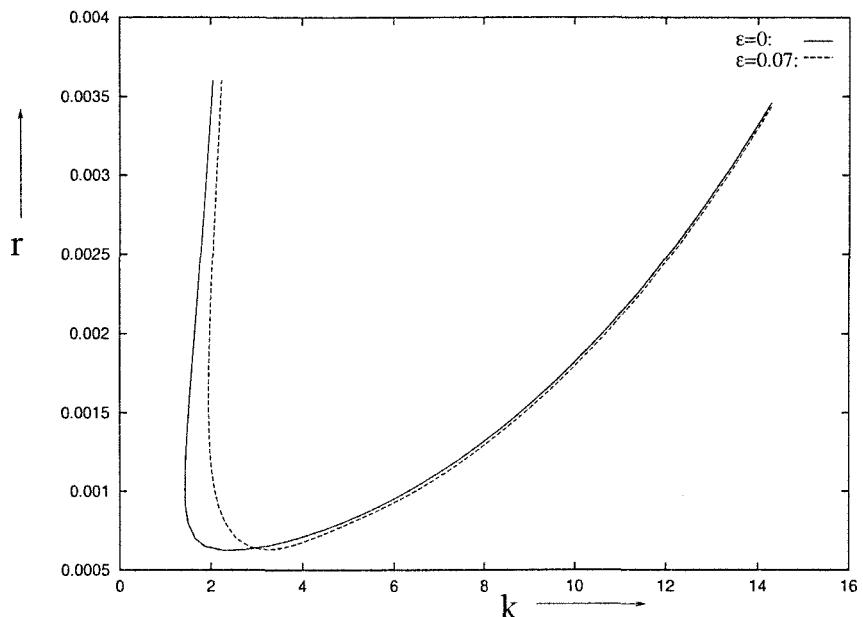
The neutral curves obtained in the 2D model show good qualitative agreement with the findings of Seminara and Tubino (1998), in particular if a nonlinear formulation for bed shear stress is adopted. On the other hand, there are distinct differences. For instance, it appears that inertia for narrow channels (albeit small) may have a significant effect on the length scale of the critical or preferred bottom mode (see figure B.9).

Nonetheless, the qualitative agreement between both models is remarkable if one takes into account the considerable differences in model formulations. These differences include: 2D versus 3D prescription, different formulation for erosion-deposition rates and a different treatment of internally generated over tides. All these discrepancies may in principle yield qualitatively different outcome. Ap-



Figuur B.8: Neutral curves $\omega = 0$ as a function of longitudinal wavenumber k and friction coefficient for lateral wavenumber $n = 1$ for a narrow channel ($B = 500m$) with linear friction. Conversion to units B^{-1} can be obtained by multiplication by a factor $\epsilon = 0.07$.

parently, the physical mechanism that governs the formation of bedforms is relatively insensitive to the details of such formulations.



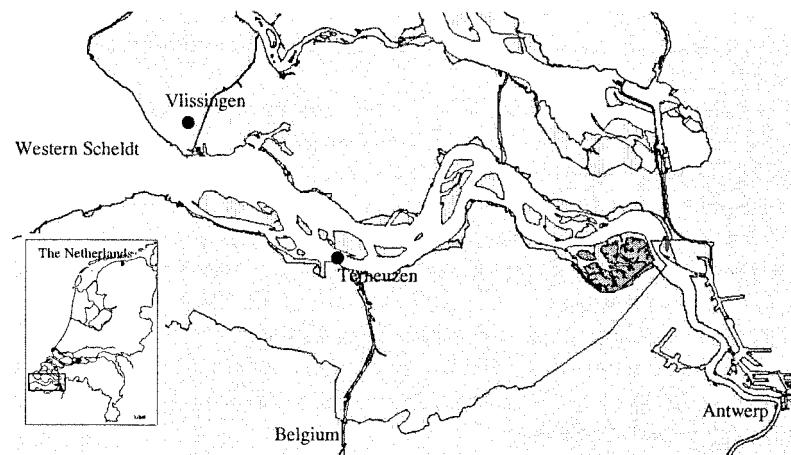
Figuur B.9: Neutral curves $\omega = 0$ as a function of longitudinal wavenumber k and friction coefficient for lateral wavenumber for $n = 1$ for a narrow channel ($B = 500m$) with non-linear friction. Conversion of wavenumber k to units B^{-1} can be obtained by multiplication by a factor $\epsilon = 0.07$.

Annex C

Formation of estuariene sections.

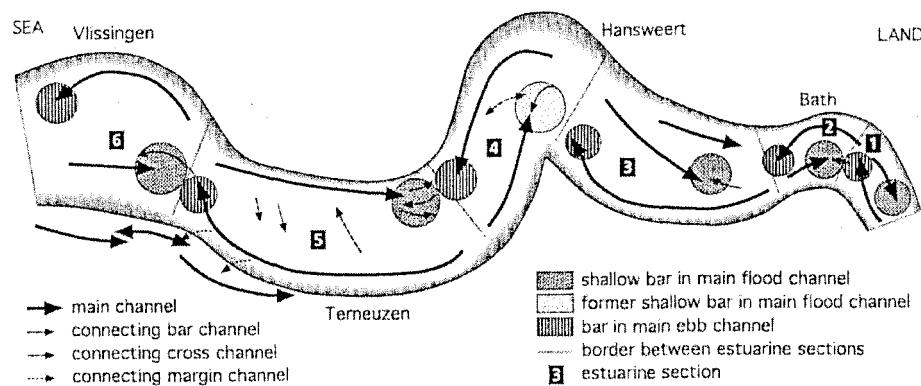
1 Introduction

Very energetic conditions are encountered at coastal environments. Modifications of the bathymetry and the characteristics of sediment distribution may occur on very short time-scales. Nevertheless spatial and time scales may range from a few seconds and centimeters to centuries and thousands of kilometers. Estuaries are one of the most important coastal features subject to strong processes that fully cover the space-temporal scale. Geomorphologic and sedimentologic changes are continuously occurring within and around estuaries that effect their specific characteristics Perillo (1995). Even though estuaries usually occupy the coastal areas least exposed to the marine action, the primary energy source is tidal currents. Wave action is significant at the mouth of many estuaries, but is generally of limited importance inside the estuary. Because of the strong tidal currents in the channels and the lower parts of the flanking tidal flats, sediment can be transported and undulations can develop. Field data indicate that different types of bed forms can exist. On the one hand, near the entrance of shallow embayments (e.g. those located along the east coast of the United States) so-called estuariene bars are often observed (Dalrymple and Rhodes, 1995)). These rhythmic bars have wave-lengths which scale with the width of the embayment and do not migrate. On the other hand deeper embayments, e.g. those located in the Dutch and German Wadden Sea, are characterised by a fractal pattern of channels (c.f. Ehlers, 1988; Cleveringa and Oost, 1999) which appear to scale with the length of the embayments. In many embayments both types of bottom patterns can be observed simultaneously. An example is the Western Scheldt, a tidal embayment located at the Dutch-Belgium border (see figure C.1). Its length from Vlissingen up to Gent is about 160 km. The width of the estuary decreases from approximately 6 km at the mouth to less than 100 m near Gent, while its depth decreases from approximately 15 m to only 3 m at



Figuur C.1: The marine salt and brackish part of the Western Scheldt estuary from Vlissingen to Antwerp.

the landside. The estuary can be divided in three parts, a sub-tidal delta west of Vlissingen, a multiple channel system separated by elongated shoals in the seasward mariene part between Vlissingen and Doel and a single tidal channel landward of Doel. In this contribution we will be mainly concerned with the seasward mariene section. This section can be subdivided in six distinct estuarine



Figuur C.2: the six different estuarine sections in the Western Scheldt (from Jeuken (2000)).

sections (see figure C.2). Each estuarine section has a large meander-shaped main ebb channel and a laterally bordering large straight main flood channel. These channels are usually separated by shoals and linked by connecting channels. Within these sections, bars are observed which scale with the embayment width. The system is mainly driven by tidal currents, the mean river outflow is less than one percent of the tidal volume (Van den Berg et al., 1997; Jeukens, 2000).

Both for estuarine management and scientific purposes, knowledge about the behaviour of these bar-shoal systems is relevant. Since access to the harbour of Antwerp is gained through the Western Scheldt, its main shipping lane has to be kept open and as static as possible. On the other hand, the inter-tidal areas of the estuary are important feeding and breeding grounds for birds and other animals and the flushing characteristics of the water motion play an important role in determining the ecological diversity of the area. For these latter functions the dynamic character of the area is of the utmost importance (Verbeek et al., 1999). Therefore, to make well-founded management decisions in this area with clashing interests, it is advisable to gain a better understanding of the physical and biological processes.

Basically, three types of models can be used to study the morphological behaviour of estuaries and estuarine bars. The first type of models are the so-called semi-empirical models, see e.g. Van Dongeren and de Vriend (1994); Di Silvio (1989). In these models empirical relationships between various quantities are used. From a process-oriented perspective the evolution of bars has been successfully simulated by Wang et al. (1995); Ranasinghe et al. (1999). These models are rather complex and have not been designed to gain fundamental understanding about the physical mechanisms controlling the channel-shoal dynamics. For the latter objective idealised models, which focus on isolated processes, are useful tools.

It has been demonstrated by Seminara and Tubino (1998) and Schutelaars and De Swart (1999) that bars in tidal embayments can form as inherent morphologic instabilities. Seminara and Tubino (1998) analyse a local model, which in general is designed to deal with phenomena that scale on a length scale which is small compared with both the tidal wave-length and embayment length. Thus, the dynamics is investigated in an infinitely long channel geometry. In this approach the water motion must be prescribed by specifying external pressure gradients which result from the dynamics on the global scale. In their study Seminara and Tubino (1998) use a three-dimensional model, based on the shallow water equations. They also a priori assume that the embayment width is the controlling length scale of the bed forms. Hence their model results apply to narrow, frictionally dominated tidal channels.

Schutelaars and De Swart (1999) on the other hand study a global model of a tidal embayment. This choice implies that they put emphasis on bottom patterns that occur on the length scale of the entire embayment. In this approach a semi-enclosed embayment is considered where the water motion is forced by a boundary condition at the entrance of the embayment. Their model is based on

the depth-averaged shallow water equations and assumes that the ratio of the tidal excursion length and the embayment length is small. Results are presented for the case of a short embayment (with a length being much smaller than the tidal wave-length), in which sediment transport is dominated by diffusive processes and advective terms in the flow equations can be neglected. However, the model can be generalized in a straightforward sense, as is demonstrated in Schutteelaars and De Swart (2000) (1D equilibrium dynamics in a long embayment) and Van Leeuwen and De Swart (in preparation) (2D nonlinear bed forms in a short embayment).

In this contribution the bedforms that are generated due to an inherent morphodynamic instability in a long embayment will be studied. It will be shown that both modes that scale with the embayment width (W-modes) and modes scaling with the embayment length (L-modes) are found. If the friction strength is increased, the W-modes become much more unstable than the L-modes. Furthermore, structures with typical lengths that scale with the width are superposed on the L-modes. However, using certain criteria to distinguish these types of modes, it will be shown that L-modes can always be found, even in strongly frictional regimes. The spatial structure of the L-modes can be related to the observed estuarine sections and the influence of parameters on these sections can be studied. Since the fine-structured bedforms of the global model (W-modes) and the bars in the local models must be the same features in the appropriate limit, the results from these two approaches should qualitatively agree in the appropriate limits. This is not straightforward, because the local model of Seminara and Tubino (1998) and the nonlinear global model of Schutteelaars and De Swart (2000) use different formulations and assumptions. This motivated the set up of an intermediate model, in which both the embayment width and the tidal excursion length, were retained as relevant length scales. Hence this model can deal with phenomena that scale on a length scale which is small compared with both the tidal wave-length and embayment length, but not necessarily small compared with the tidal excursion length. This intermediate model serves as a link between the two models. It is already shown that in the limit of a narrow channel (see B), the bedforms found by Seminara and Tubino (1998) are recovered. Here the connection with the bedforms found in a global model will be made.

2 Model description

In this contribution the water motion is described by the depth averaged shallow water equations (see Csanady (1982)). These equations read

$$\zeta_t + [(H - h + \zeta)u]_x + [(H - h + \zeta)v]_y = 0, \quad (\text{C.1a})$$

$$u_t + uu_x + vu_y + \frac{ru}{H - h + \zeta} = -g\zeta_x, \quad (\text{C.1b})$$

$$v_t + uv_x + vv_y + \frac{rv}{H - h + \zeta} = -g\zeta_y, \quad (\text{C.1c})$$

where the free surface is denoted by $z = \zeta$, the bottom of the estuary is found at $z = H - h$, and u and v denote the depth-averaged velocities in the longitudinal and lateral direction respectively. The bottom friction is modeled to depend linearly on the depth averaged velocity (see Lorentz (1922); Zimmerman (1982)), the friction coefficient is denoted by r with dimensions ms^{-1} . Furthermore, Coriolis effects are neglected.

The dynamics of the suspended sediment is described by an advection-diffusion equation for the *volumetric* depth-integrated concentration C , which is the depth integrated sediment concentration (with dimension kg m^{-2}) divided by the sediment density (Van Rijn, 1993):

$$C_t + (uC - \mu C_x)_x + (vC - \mu C_y)_y = \alpha(u^2 + v^2) - \gamma C \quad (\text{C.2})$$

The first term on the rhs models the sediment pick-up function, and the second term the tendency of sediment to settle due to gravity effects. The coefficients α ($\mathcal{O}(10^{-6} - 10^{-8})$) and γ ($\mathcal{O}(10^{-3})$) depend on the sediment properties.

The evolution of the bottom follows from the conservation of sediment. Instead of solving the bed evolution on the short time scale, only the net effect during one tidal cycle is considered. Physically this means that the bed does not change appreciably during one tidal cycle but evolves on a much larger timescale. A good approximation is obtained by averaging the bottom evolution equation over one tidal cycle (denoted by $\langle \cdot \rangle$) and reads

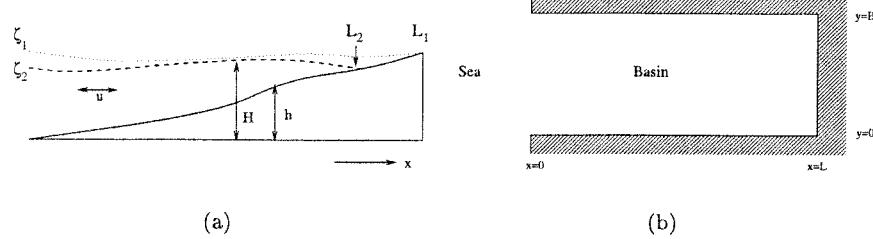
$$(1-p)h_\tau = -\langle \alpha(u^2 + v^2) - \gamma C \rangle + \lambda \nabla^2 h \quad (\text{C.3})$$

The first term on the right-hand side models the bed level changes due to erosion and deposition of sediment, while the second term introduces the effects of bedslopes. This term is incorporated since suspended load is susceptible for the presence of local slopes (see Talmom et al. (1995); Parker (1978)). A system is considered to be in morphodynamic equilibrium when the divergences and convergences of the sediment flux, averaged over one tidal period, are zero. this implies that the bed does not change anymore.

The embayment consists of a semi-enclosed domain which is connected with the open sea (see figure C.3). At the seaside the width-averaged free surface elevation is prescribed and the lateral velocity is forced to disappear. The bottom level is kept fixed at the entrance and becomes zero at the landward side of the estuary. At the sidewalls no water and sediment fluxes are allowed. Finally, at the landward side of the embayment the kinematic boundary condition is applied. For the concentration the sediment flux has to be zero and the bed level does not change in time. For a more extensive discussion of the model, see Schuttelaars and De Swart (2000).

3 Linear stability analysis

For realistic values of the parameters the two-dimensional system of equations, as described in section 2, allows for a morphodynamic equilibrium solution



Figuur C.3: Tope view (a) and side view (b) of the idealised embayment.

$\Psi_{\text{eq}} = (u, v, \zeta, C, h)_{\text{eq}}$, which is spatially uniform in the lateral direction. The longitudinal structure and time-dependence of this equilibrium solution depends sensitively on the parameter values (see Schuttelaars and De Swart (2000)). This equilibrium solution is in general not stable with respect to perturbations having a structure in the cross-channel direction. This means that such perturbations can grow due to a positive feedback between the water motion, the sediment transport and the erodible bed. The dynamics of the perturbations is analysed by substitution of

$$\Psi(x, y, t, \tau) = \Psi_{\text{eq}}(x, t) + \Psi'(x, y, t, \tau)$$

in the full equations of motion. Here the variables are assumed to depend on two time variables: the fast coordinate t and the slow time coordinate $\tau = \delta t$, which measure the evolution of the system on the tidal timescale and morphologic timescale, respectively. The parameter $\delta \ll 1$ denotes the ratio of the tidal period and the morphologic timescale and is typically of order 10^{-4} .

Next it is assumed that the amplitude of the perturbations is small with respect to that of the equilibrium state. This allows for a linearization of the equations of motion. The linearized equations read

$$\begin{aligned} \zeta'_t + [(H - h_{\text{eq}} + \zeta_{\text{eq}})u']_x + [(H - h_{\text{eq}} + \zeta_{\text{eq}})v']_y \\ + [(-h' + \zeta')u_{\text{eq}}]_x + [-h' + \zeta']_y v_{\text{eq}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.4a})$$

$$u'_t + (u_{\text{eq}}u')_x + \frac{ru'}{H - h_{\text{eq}} + \zeta_{\text{eq}}} + \frac{ru_{\text{eq}}}{(H - h_{\text{eq}} + \zeta_{\text{eq}})^2}(h' - \zeta') = -g\zeta'_x, \quad (\text{C.4b})$$

$$v'_t + u_{\text{eq}}v'_x + \frac{rv'}{H - h_{\text{eq}} + \zeta_{\text{eq}}} = -g\zeta'_y, \quad (\text{C.4c})$$

$$C'_t + (u_{\text{eq}}C' + u'C_{\text{eq}} - \mu C'_x)_x + (v'C_{\text{eq}} - \mu C'_y)_y = 2.0\alpha u_{\text{eq}}u' - \gamma C', \quad (\text{C.4d})$$

$$(1 - p)h'_t = -\langle 2.0\alpha u_{\text{eq}}u' - \gamma C' \rangle + \lambda \nabla^2 h'. \quad (\text{C.4e})$$

The boundary conditions at the closed end of the embayment read

$$u'_x \text{ is finite,} \quad (\text{C.5a})$$

$$\langle u' C_{\text{eq}} + u_{\text{eq}} C' - \mu C'_x \rangle = 0, \quad (\text{C.5b})$$

$$\hat{C}(x, t, \mu) = \hat{C}(x, t, \mu = 0), \quad (\text{C.5c})$$

$$h' = 0, \quad (\text{C.5d})$$

where \hat{C} is the oscillatory part of the concentration. The first condition is the kinematic boundary condition; the second one states that no net sediment flux is allowed through the landward side of the embayment. The third condition states that no diffusive boundary layer develops in the time dependent part of the concentration and the last condition that the perturbed depth is zero and hence the length of the embayment is fixed. The boundary conditions at the seaward end read

$$\begin{cases} \zeta' = 0 & \text{if no lateral structure,} \\ v' = 0 & \text{if lateral structure,} \end{cases} \quad (\text{C.6a})$$

$$\hat{C}(x, t, \mu) = \hat{C}(x, t, \mu = 0), \quad (\text{C.6b})$$

$$(u' C_{\text{eq}} + u_{\text{eq}} C' - \mu C'_x)_x = 0, \quad (\text{C.6c})$$

$$h' = 0. \quad (\text{C.6d})$$

The first condition states that, if the perturbations do not have a lateral structure, the sea level perturbation is zero. However, if a lateral structure is present, a perturbed sea level is allowed but the lateral velocities have to be zero. The perturbation of the sea level is used to balance the forces exerted on the open boundary by both the advective and frictional contributions. The second condition states that no diffusive boundary layer develops at the seaside in the time dependent part of the concentration and the last two conditions state that both the convergence of sediment due to suspended load transport and slope effects must be zero.

At the sidewalls the condition that both the water and sediment fluxes vanish, is imposed.

Careful examination of this system of equations shows that the perturbations are composed of the following eigenmodes:

$$\Psi'(x, y, t, \tau) = \Re \left[e^{\omega \tau} \hat{\Psi}(x, y, t) \right]; \quad \hat{\Psi}(x, y, t) = \sum_{m,n} f_m(x, t) \otimes g_n(y). \quad (\text{C.7})$$

Here \Re denotes the real part of the solution. The evolution of the perturbations on the slow morphodynamic timescale thus turns out to be exponential, with $\Re(\omega)$ denoting the growth rate and $-\Im(\omega)$ being the migration rate. The structure of the eigenfunction $g_n(y)$ in the lateral direction equals $\cos(l_n y)$, except for the second component which reads $\sin(l_n y)$. Here $l_n = n\pi/B$ where $n = 0, 1, 2, \dots$ is the cross-channel mode number. Furthermore, on the short timescale the flow and concentration consists of a superposition of tidal harmonics (M_2, M_4, \dots) and a residual component. Of course the bed perturbation h'

only has a residual component on the tidal timescale. Using this information, the system of equations and boundary conditions yields an *eigenvalue* problem for the eigenfunction structure in the longitudinal direction, $f_m(x, t)$, and grow rate ω .

This eigenvalue problem is solved by first making an expansion up to first order with respect to the small parameters $\epsilon \equiv U/\sigma L$ and β , the ratio of the amplitudes of the M_2 and M_4 externally prescribed free surface elevation. Hence it is assumed that $\epsilon \ll 1$ and $\beta \ll 1$, but the ratio of ϵ to β is not prescribed. The condition on β implies that the M_2 constituent is much stronger than the externally prescribed M_4 constituent. Hence the following expansions are made:

$$\Psi = \Psi_0 + \epsilon \Psi_1 + \beta \hat{\Psi}_1 \dots , \quad (\text{C.8})$$

with

$$\Psi_0 = \Psi^s \sin(t) + \Psi^c \cos(t), \quad (\text{C.9a})$$

$$\Psi_1 = <\Psi> + \Psi^{2s} \sin(2t) + \Psi^{2c} \cos(2t), \quad (\text{C.9b})$$

$$\hat{\Psi}_1 = \hat{\Psi}^{2s} \sin(2t) + \hat{\Psi}^{2c} \cos(2t), \quad (\text{C.9c})$$

where Ψ is any of the variables ζ' , u' , and v' . For \hat{C}' a similar kind of expansion is made. The component Ψ_0 describes the main tidal constituent, and $<\Psi>$ describes the mean contributions generated by nonlinear interactions. By definition $<\hat{C}'> = 0$. Furthermore, Ψ^{2c} and Ψ^{2s} are the internally generated M_4 overtide and $\hat{\Psi}^{2s}$ and $\hat{\Psi}^{2c}$ the M_4 overtide components generated by external forcing. After this expansion, the eigenvector $\mathbf{f}_m(x, t)$ with six components has been rewritten as an eigenvector $\hat{\mathbf{f}}_m(x)$, independent of time, with 29 components. The vector \mathbf{g}_n has been expanded likewise. Now an eigenvalue problem is obtained, which can be solved using standard techniques.

For future reference, the zeroth order perturbed vorticity equation and the equation describing the generation and destruction of the tidally averaged vorticity, are written down. After expanding the perturbed vorticity $\Omega' \equiv v'_x - u'_y$ in the small parameter ϵ , one obtains:

$$\Omega'_{0,t} + \frac{r}{H - h_{\text{eq}}} \Omega'_0 = \frac{r}{(H - h_{\text{eq}})^2} (u_{0,\text{eq}} h'_y + v'_0 h_{\text{eq},x}) \quad (\text{C.10a})$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{H - h_{\text{eq}}} \langle \Omega'_1 \rangle &= - \langle u_{\text{eq}} \Omega'_0 \rangle_x - \frac{r}{(H - h_{\text{eq}})^2} \langle v'_1 \rangle h_{\text{eq},x} + \\ &\quad \frac{r}{(H - h_{\text{eq}})^2} \langle \zeta'_0 \Omega'_0 + u_{\text{eq}} \zeta'_{0,y} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.10b})$$

The first equation (C.10a) describes the dynamics of the M_2 -vorticity. If friction is large or the spatial derivatives are strong, an instantaneous balance between the dissipation (2nd term on the right hand side) and the generation (1st term on the left hand side) is obtained. The residual vorticity equation is given in C.10b. Here the dissipation of rest vorticity (left hand side) balances the advection of

<i>Variable</i>	<i>Symbol</i>	<i>Repr. Value</i>
Water Depth	H	10 m
Embayment Width	B	$5 \cdot 10^3$ m
Tidal Period	σ	$1.4 \cdot 10^{-4}$ s $^{-1}$
Velocity Scale	U	1 m s $^{-1}$
Settling Period	γ	$4 \cdot 10^{-3}$ s $^{-1}$
Friction parameter	r	10^{-3} m s $^{-1}$
Erosion Constant	α	10^{-2} kg s m $^{-4}$
Sediment Density	ρ_s	2650 kg m $^{-3}$
Sediment Porosity	p	0.4
Bedslope Parameter	λ	10^{-4} m s $^{-1}$
Gravity Constant	g	9.8 m s $^{-2}$

Tabel C.1: Parameter values, representative for the marine part of the Western Scheldt.

the M_2 -vorticity (1st term on the right hand side) and the generation of rest vorticity due to the dependency of friction on the spatial variation of the large-scale equilibrium bottom and instantaneous water depth (other terms on the rhs).

4 Results

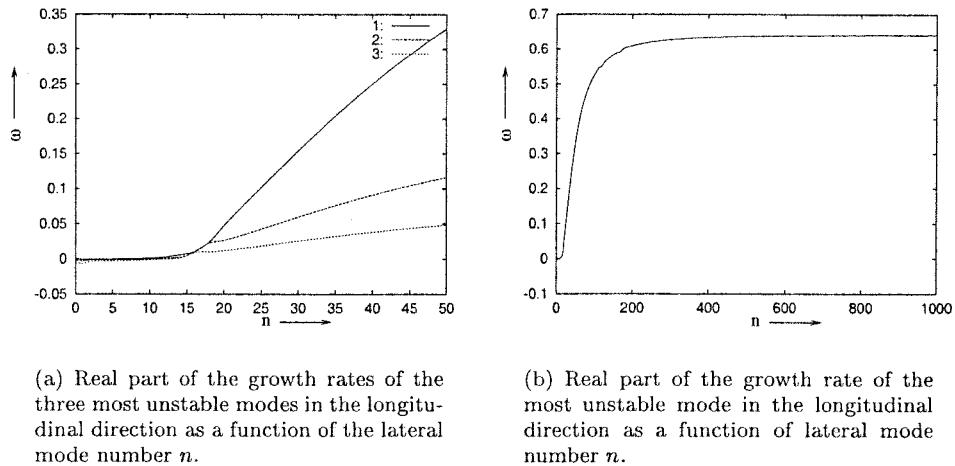
In this section, results from the global model will be described. Default values which are characteristic for the Western Scheldt inlet system will be used, see table C.1. Unless specified otherwise, bedslope effects will be ignored hereafter. Also, the growth rates presented below will be expressed in units $\alpha U^2 / (\rho_s(1 - p)H)$ where $U \equiv 1$ m s $^{-1}$.

In the experiments, the embayment length is varied. The first embayment studied is an embayment with a length of 20 km. It turns out that both for the global equilibrium and the bedforms that start to grow as linear instabilities on this equilibrium, the parameterisation of the bottom friction and the magnitude of the diffusion constant μ are very important. In these experiments, r will be varied from 0.03 to 3 ms $^{-1}$.

In the second experiment, the embayment length is increased to 60 km. The depth at the entrance of the estuary is 10 m, at the end of the estuary it is finite with a depth of 3m. These length and depths correspond to the values observed in the marine part of the Western Scheldt, an estuary in the southwest of the Netherlands. Furthermore, the influence of the slope term on the suspended load processes is taken into account ($\lambda \sim 10^{-6}$).

4.1 Short embayment

Weak friction In this experiment the friction parameter $r = 0.03$. Since $\lambda = 0$, one expects the growth-rates to saturate with $Re(\omega) > 0$ for large l_n . This can be shown analytically in case of a short embayment (see Schuttelaars and De Swart (1999)). The same asymptotic expansion in l_n is still valid for arbitrary embayment length. In Fig. C.4(a) the grow rates for the first three modes in the longitudinal direction, in Fig. C.4(b) the growth rate of the most unstable mode in the longitudinal direction is plotted for very large l_n .



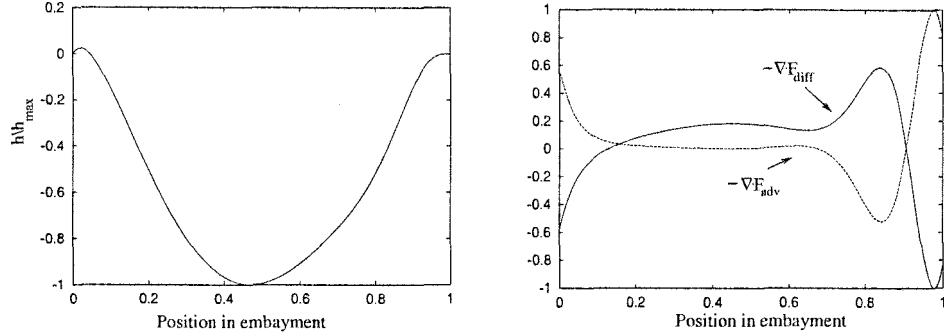
(a) Real part of the growth rates of the three most unstable modes in the longitudinal direction as a function of the lateral mode number n .

(b) Real part of the growth rate of the most unstable mode in the longitudinal direction as a function of lateral mode number n .

Figuur C.4: Plots of the real parts of the growth rates versus the lateral mode number n for friction coefficient $r = 0.03$ and embayment length $L = 20$ km.

In the following only the most unstable mode in the longitudinal direction will be studied in more detail. For low lateral mode numbers ($n < 7$), the first eigenmode in the longitudinal direction has a global character for which diffusive convergences and divergences of sediment fluxes are much stronger than advective ones (see Fig. C.5). If the lateral mode number is increased, both advective and diffusive sediment fluxes become important. No situation with dominating advective convergences is observed. If n is increased even more, a bedform is found at the end of the embayment. This bedform does not scale with the lateral lengthscale B/n but can be considered as a continuation of the global mode near $n = 0$. From Fig C.6 it follows that both advective and diffusive convergences of sediment fluxes are of equal importance.

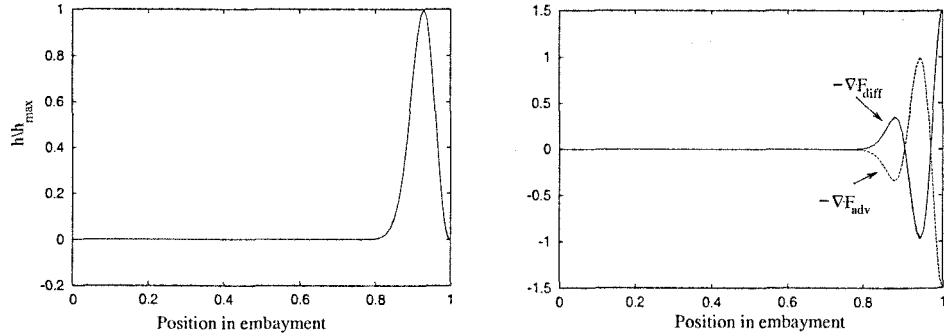
Physically, the behaviour of the perturbation can be understood as follows: if both r and n are very small, the generation of M_2 vorticity is weak (note that there is no instantaneous balance between generation and dissipation of vorticity). Since the advection of M_2 vorticity is an important source for the rest vorticity, the rest vorticity will be small as well. Hence no advective bedforms can be formed and only diffusive ones are obtained. If n is increased,



(a) Longitudinal structure of the most unstable eigenmode with $n = 3$.

(b) The divergence and convergence of the advective and diffusive sediment flux for the most unstable eigenmode with $n = 3$.

Figuur C.5: Bed form and divergence of the sediment fluxes for $n = 3$, $r = 0.03$ and $L = 20$ km.



(a) Longitudinal structure of the most unstable eigenmode with $n = 20$.

(b) The divergence and convergence of the advective and diffusive sediment flux for the most unstable eigenmode with $n = 20$.

Figuur C.6: Bed form and divergence of the sediment fluxes for $n = 20$, $r = 0.03$ and $L = 20$ km.

the generation of M_2 vorticity becomes more efficient. From C.10a it follows that generation is most efficient in the shallower areas (i.e. at the end of the embayment) while the dissipation is less susceptible for changing water depth. Since the generation of vorticity is essential for the bed perturbations to grow, the modes will tend to grow near the end of the embayment. If n is very large,

diffusive fluxes become very important. Again, it is more advantageous for these modes to grow near the end. However, near the end of the embayment, if friction is very weak, finite sea-level excursions ζ^{M_2} are observed. This results in large lateral velocities (which scale with the mode number n) which in their turn can result in vertical convergences of advective sediment fluxes which are of the same order as the diffusive ones.

Moderate friction If the friction coefficient is increased ($r = 0.3$), the bed perturbations become more unstable (see Fig. C.7). Only the mode with $n = 0$ is a diffusive one. For $n > 0$, bed perturbations that scale with the embayment

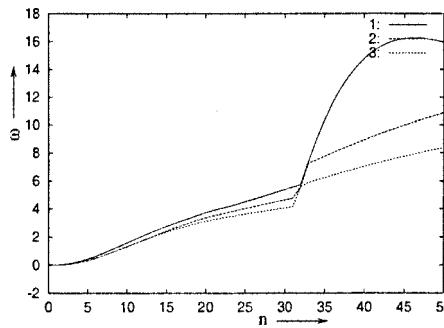
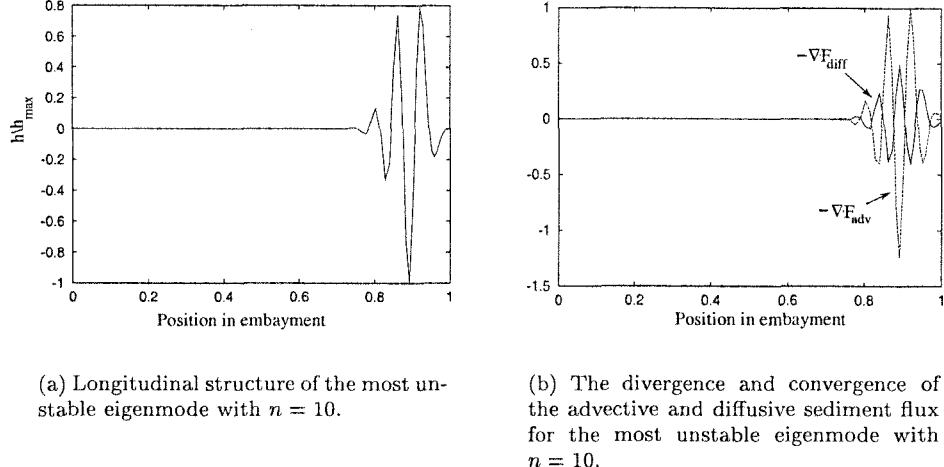


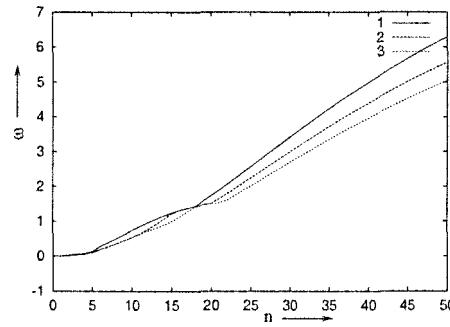
Figure C.7: Plots of the real parts of the growth rates versus the lateral mode number n for $r = 0.3$ and $L = 20$ km.

width are found. Advective divergences and convergences of sediment fluxes dominate over the diffusive ones, diffusive fluxes try to stabilize the perturbations. Again, the bedforms have a tendency to be generated near the end of the embayment (see Fig. C.8). If n is increased even further, only diffusive modes are found again. Now the friction is strong enough to reduce the run-up and set-up of the sea level and hence to reduce the lateral velocities and advective sediment fluxes.

Strong friction If the friction coefficient is increased to $r = 3$ the bedforms still scale with the embayment width and are generated due to advective processes. In Fig. C.9 the growth rates are plotted as a function of lateral mode number n . The mean difference with moderate friction is that for this frictional strength the bedforms manifest themselves near the entrance of the embayment (see Fig. C.10). This can be understood as follows: for a very strong friction, the generation and dissipation of vorticity ω is instantaneous, and hence independent of the magnitude of rl_n . However, the dissipation of $\langle \omega \rangle$ is proportional to r while the advection of ω is independent of r . Hence the vorticity $\langle \omega \rangle$ is being reduced in strength and hence the mechanism to generate the advective bedforms is less efficient. Since at the end of the embayment the generation of overtides (u^{2c}) is very efficient if the friction is strong enough and since the



Figuur C.8: Bed form and divergence of the sediment fluxes for $n = 10$, $r = 0.3$ and $L = 20$ km.

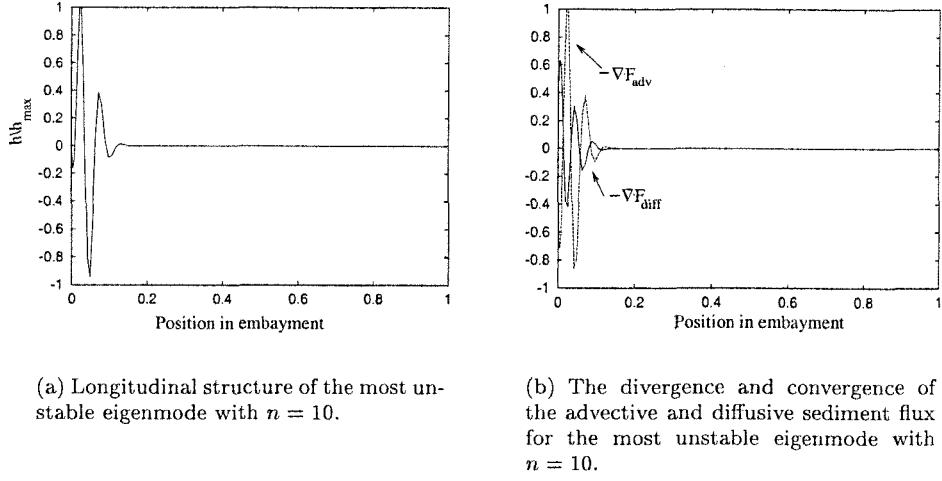


Figuur C.9: Plots of the real parts of the growth rates versus the lateral mode number n for $r = 3$ and $L = 20$ km.

term $\langle u^{2c} C^{2c} \rangle$ opposes the bar generating flux $u^0 C^0$, the bedform will start to shift towards the entrance of the embayment. For very large n the bedforms become diffusive again.

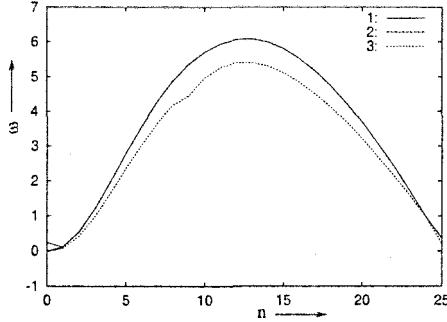
4.2 Long embayment

In the experiment presented here, a moderate friction value of $r = 0.15$ is chosen. Since in long embayments advective processes ($\sim \sigma A^2 H^{-2}$) are much more efficient than diffusive ones ($\sim \mu/L^2$), one only expects diffusion to be important in thin boundary layers near the end and entrance of the embayment. In Fig C.11 the real part of the first three eigenvalues is plotted. One observes



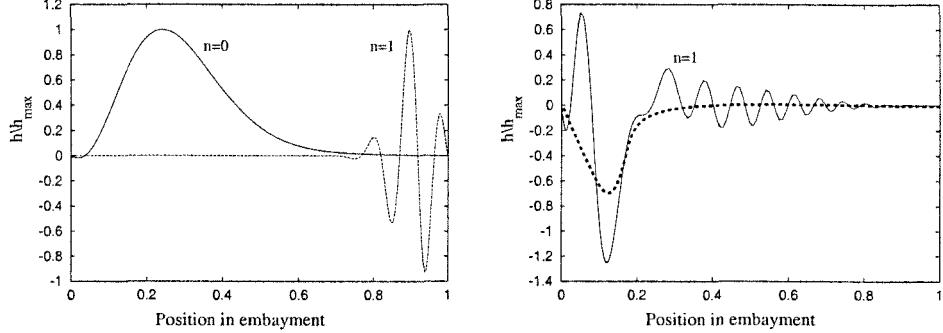
Figuur C.10: Bed form and divergence of the sediment fluxes for $n = 10$, $r = 3$ and $L = 20$ km.

that the incorporation of the bedslope term indeed results in a stabilization of the fast oscillating modes (n large). For $n > 0$ the most unstable modes all



Figuur C.11: Plots of the real parts of the growth rates versus the lateral mode number n for $r = 0.15$ and $L = 60$ km.

scale with the embayment width B . It should be noted that modes that scale with the embayment length are still present. First of all, modes with lateral mode number $n = 0$ always scale with L (see Fig. C.12(a)). Furthermore, even though for $n > 1$ the modes that scale with the embayment width are much more unstable, modes that scale with the embayment length can still be identified. In Fig. C.12(b) mode 21 in the longitudinal direction for $n = 1$ is plotted ($\text{Re}(\omega) = 0.00063$). One observes that global modes do still exist (see the dotted line in Fig. C.12(b)) and can become unstable, but that oscillations



(a) Longitudinal structure of the most unstable eigenmodes with $n = 0$ and $n = 1$.

(b) Longitudinal structure of the eigenmode with lateral mode number $n = 1$ and longitudinal mode number 21. The dashed line shows the eigenfunction when the oscillation that scales with the width is removed.

Figuur C.12: Bed form and divergence of the sediment fluxes for $n = 10$, $r = 3$ and $L = 20$ km.

that scale with the embayment width are superimposed on it. Careful inspection of eigenfunctions reveals that this observation is still valid for higher lateral mode numbers as well.

5 Discussion and conclusions

First of all, a comparison between the W-modes from the global model and the instabilities from the local model made. Qualitative results appear to show significant differences. This is in particular true for low friction values ($r = 0.03$). Here, the low- n modes occur on the scale for the embayment length; thus they cannot be described by a local model. For higher n -values, the modes become more localized towards the end of the basin. Their dynamics, though, is governed by both diffusion as well as advection while the local model yields diffusion dominated modes for all lateral wavenumbers. Only the diffusion dominated limit for large n appears to be recovered in both models. We attribute the observed discrepancies partly to the fact that the modes are situated near the end of the embayment. There, the equilibrium water depth shows a relatively sharp decline; the related mechanism for vorticity generation, however, cannot be described by the local model which assumes a flat equilibrium bed. Moreover, the local model takes a rigid lid approximation which is not able to describe the free surface effects that are observed to be important if friction is weak. It appears that neither of these two effects can be incorporated into a local model straightforwardly.

The agreement between local and global model is more satisfactory for intermediate friction values ($r = O(0.1) - O(1)$). Here, both models give that perturbations with low lateral wave numbers are advection dominated. In particular, at the higher end of the regime ($r = 3$) the local model explicitly reproduces counteracting effects of advection (destabilizing) and diffusian (stabilizing) that are in agreement with the local model. However, the counteracting effect is not reproduced by the local model for the lower end. We think that this difference is related to the positioning of the modes within the basin. At lower friction values, the bottom patterns are located towards the end of the basin. For moderate friction values, the shallow water depth in this region will generate overtides. These overtides will already be present in the basic state tidal motions and are likely to play an important role in the advective sediment fluxes. In a local model where the equilibrium tide consists of an M_{rm2} component only, the effect of such overtides cannot be captured. A better agreement with the global model may thus be achieved by adding overtides to the basic state of the local model. This will be subject of future investigations of the 2D local model.

At the higher end of intermediate friction values, modes are situated near the entrance of the basin. There, the water depth is relatively large so that friction will yield a less pronounced generation of overtides in the basic state. Also, the change in waterdepth is small as compared to the end of the embayment. Thus effects of the non-flat equilibrium bottom are expected to become weaker near the entrance. These properties indicate that the global model may yield an appropriate prescription for the bathymetric features near $r = O(1)$. This indeed appears to be the case.

In the global model, another class of instabilities can be found, the L-modes. One of the main differences with the W-modes is that the spatial structure of the underlying morphodynamic equilibrium is crucial. The most unstable global mode is characterised by a longitudinal mode number m and a lateral mode number n . The number of estuarine sections can be related to m , while n counts the number of channels in the lateral direction. From the experiments it follows that both m and n are highly dependent on the friction parameter. It was shown that on the L-modes structures that scale with the width were superimposed. For realistic values of the friction parameter it is very difficult to make a clear distinction between L- and W-modes. This is one of the points of current research, since this question has to be solved in order to develop a nonlinear model that describes the long-time behaviour of the estuarine sections.

Bibliografie

- Cleveringa, J., Oost, A. P., 1999. The fractal geometry of tidal channel systems in the dutch wadden sea. *Geologie en Mijnbouw* 78, 21–30, special Issue on Prediction in Geology.
- Csanady, G. T., 1982. Circulation in the coastal ocean. Reidel, Dordrecht.
- Dalrymple, R. W., Rhodes, R. M., 1995. Estuarine dunes and bars. In: Perillo, G. M. E. (Ed.), *Geomorphology and Sedimentology of Estuaries*. Vol. 53 of *Development in Sedimentology*. Elsevier, New York, pp. 359–422.
- De Jong, K., 1998. Tidally averaged transport models. Ph.D. thesis, Delft University of Technology.
- Di Silvio, G., 1989. Modelling the morphological evolution of tidal lagoons and their equilibrium configurations. In: Proc. XIIIrd IAHR Congress. IAHR.
- Ehlers, J., 1988. The Morphodynamics of the Wadden Sea. Balkema, Rotterdam.
- Friedrichs, C. T., Aubrey, D. G., 1994. Tidal propagation in strongly convergent channels. *J. Geophys. Res.* 99, 3321–3336.
- Jeuken, M. C. J. L., 2000. On the morphologic behaviour of tidal channels in the westerschelde estuary. Vol. 279 of *Netherlands geographical studies*. KNAG.
- Lorentz, H. A., 1922. Het in rekening brengen van den weerstand bij schommelende vloeistofbewegingen. *De Ingenieur*, 695.
- Parker, G., 1978. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 1. the sand-silt river. *J. Fluid Mech.* 89, 109–125.
- Perillo, G. M. E. (Ed.), 1995. *Geomorphology and sedimentology of estuaries. Developments in sedimentology* 53. Elsevier, New York.
- Ranasinghe, R., Pattiaratchi, C., Masselink, G., 1999. A morphodynamic model to simulate the seasonal closure of tidal inlets. *Coastal Eng.* 37, 1–36.
- Schramkowski, G., De Swart, H. E., submitted. Morphodynamic equilibrium in 3d tidal model: combined effects of Coriolis force and external over tides. *J. Geo. Res.* .

- Schramkowski, G. P., Schuttelaars, H. M., De Swart, H. E., submitted to JCR. In: Friedrichs, C. T., Valle-Levinson, A. (Eds.), Physics of Estuaries and Coastal Seas. PECS 2000.
- Schuttelaars, H. M., De Swart, H. E., 1996. An idealized long-term morphodynamic model of a tidal embayment. *Eur. J. Mech., B/Fluids* 15 (1), 55–80.
- Schuttelaars, H. M., De Swart, H. E., 1999. Initial formation of channels and shoals in a short tidal embayment. *J. Fluid Mech.* 386, 15–42.
- Schuttelaars, H. M., 1997. Evolution and stability analysis of bottom patterns in tidal embayments. Ph.D. thesis, University of Utrecht, The Netherlands.
- Schuttelaars, H. M., De Swart, H. E., 2000. Multiple morphodynamic equilibria in tidal embayments. *J. Geo. Res.* 105, 24105–24118.
- Schuttelaars, H. M., Schramkowski, G. P., De Swart, H. E., in preparation. Estuarine bar formation in a global model. ?? .
- Seminara, G., Tubino, M., 1998. On the formation of estuarine free bars. In: Dronkers, J., Scheffers, M. (Eds.), Physics of Estuaries and Coastal Seas. PECS 96, Balkema, Rotterdam.
- Speer, P. E., Aubrey, D. G., 1985. A study of nonlinear tidal propagation in shallow inlet/estuarine systems. part 2: Theory. *Est. Coastal Shelf Sci.* 21, 207–224.
- Talmon, A. M., Mierlo, M. C. L. M. v., Struiksma, N., 1995. Laboratory measurements of the direction of sediment transport on transverse alluvial-bed slopes. *J. Hydr. Res.* 33, 495–517.
- Terra, G., 2000. Cyclic bar behaviour in an idealized nonlinear model of a short embayment. report V-00-04, IMAU.
- Thoolen, P. M. C., Wang, Z. B., 1998. Modelling of sediment transport in the Western Scheldt (in dutch). report Z2489, Delft Hydraulics.
- Thoolen, P. M. C., Wang, Z. B., 1999. Modelling of sediment transport in the Western Scheldt (in dutch). report Z2649, Delft Hydraulics.
- Van den Berg, J., Jeuken, M., van der Spek, A., 1997. Hydraulic processes affecting the morphology and evolution of Westerschelde estuary. In: Nordstrom, K., Roman, C. (Eds.), Estuarine shores: Evolution, Environments and Human Alterations. John Wiley and Sons Ltd., Chichester.
- Van Dongeren, A. R., de Vriend, H. J., 1994. A model of morphological behaviour of tidal basins. *Coastal Eng.* 22, 287–310.
- Van Leeuwen, S. M., De Swart, H. E., in preparation. Title. *J. Fluid Mech.* .

- Van Rijn, L. C., 1993. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. Aqua Publ., Amsterdam.
- Verbeek, H., Tank, F., Groenewoud, M., 1998. Drempels in de westerschelde, natuur en mens samen aan het werk. Tech. rep., RIKZ.
- Verbeek, H., Wang, Z., Schuttelaars, H., 2000. A comparison between process-based and idealized morphodynamic models for the Western Scheldt case. PECS 2000.
- Verbeek, H., Wang, Z., Thoelen, P., 1999. Secondary currents in estuarine morphodynamic modelling, a case-study of the western scheldt. In: Seminara, G. (Ed.), River, Coastal and Estuarine Morphodynamics. IAHR 1999.
- Wang, Z., Louters, T., De Vriend, H., 1995. Morphodynamic modelling for a tidal inlet in the Wadden Sea. Mar. Geol. 126, 289–300.
- Zimmerman, J. T. F., 1982. On the Lorentz linearization of a quadratically damped forced oscillator. Phys. Lett. 89A, 123–124.
- Zimmerman, J. T. F., 1992. On the Lorentz linearization of a nonlinearly damped tidal Helmholtz oscillator. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. 95, 127–145.