



Vlaams Instituut voor de Zee
Flanders Marine Institute

17800

GETIJDE- EN POLLUTIEMODEL VAN DE SCHELDE

G. VAN LANGENHOVE *, J. BERLAMONT **

SAMENVATTING

Dit artikel behandelt de ontwikkeling van een wiskundig model voor het tijgebied van de Schelde.

De gebruikte vergelijkingen (kontinuïteitsvergelijking, bewegingsvergelijking en konvektie-diffusievergelijking) worden opgelost voor het ééndimensioneel geval door middel van een expliciet differentieschema.

Na afijking van het model is het mogelijk het verloop van waterhoogten en concentraties van opgeloste stoffen te volgen; tevens kan de invloed worden nagegaan van bepaalde wijzigingen in de rivier.

SUMMARY

This paper deals with the development of a mathematical model of the river Scheldt and its affluents subjected to the tide.

The governing equations (equation of continuity, equation of motion, convection-diffusion equation) are solved in the one dimensional case, by means of an explicit finite-difference scheme.

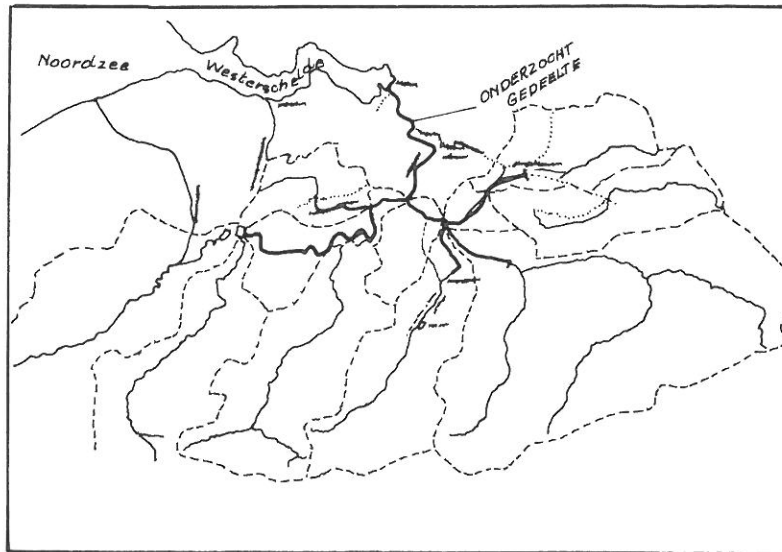
Once the model verified, it will be possible to calculate the waterdepth and the concentration of pollutants along the river as a function of time. Also the influence of some modifications of the river-bed is examined.

INLEIDING

Het hieronder beschreven wiskundig model onderzoekt het gedrag van de aan het getij onderworpen gedeelten van het stroomgebied van de Schelde (Schelde, Durme, Rupel, Dijle, Zenne, Neten) (fig. 1). Uit het oogpunt van een rationeel waterbeheer zijn van belang : de (ekstreme) waterstanden, de concentraties aan opgeloste stoffen (polluenten).

* Assistent.

** Professor Hydraulika, Afdeling Bouwkunde, K.U. Leuven.



FIGUUR 1
Bekken van de Schelde

Deze grootheden moeten in een voldoende aantal punten langs de rivier in functie van de tijd worden berekend, uitgaande van vrij te kiezen randvoorwaarden :

- het getij op de Noordzee,
- de opwaarts toegevoerde debieten,
- de geloosde hoeveelheden polluenten.

Tevens zou het mogelijk moeten zijn de invloed na te gaan van veranderingen in de rivier, zoals overstromingsbekkens, of kunstmatige hindernissen.

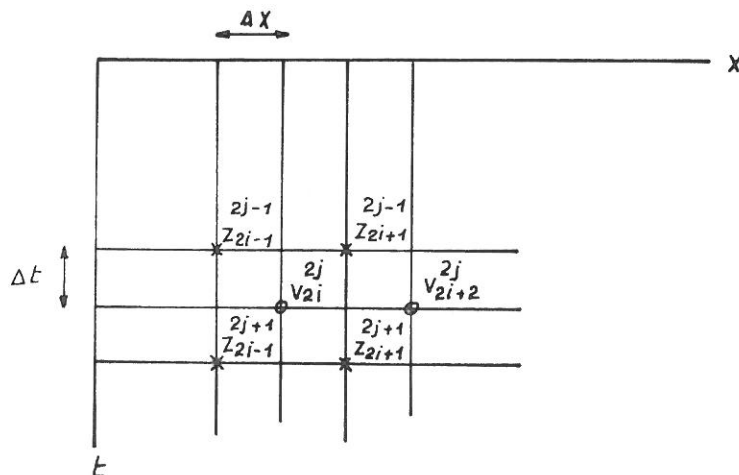
HYDRAULISCHE STUDIE : BEPALING VAN WATERSTANDEN EN SNELHEDEN

Voor ééndimensionele problemen, waarbij de bodemhelling verwaarloosbaar is, moeten de volgende vergelijkingen worden opgelost [1].

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{kontinuiteit})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} + g A \frac{\partial z}{\partial x} + g n^2 \frac{u |Q|}{R^{4/3}} = 0 \quad (\text{beweging})$$

De oplossing geschiedt door herleiding van de differentiaalvergelijkingen tot differentieschema's waarbij alternatief (zowel in plaats als tijd) de waterhoogten (z) en de snelheden (u) worden berekend (zie fig. 2).



FIGUUR 2
Differentierooster

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{2i+1, 2j+1} \approx \frac{x_{2i+1}^{2j+1} - x_{2i+1}^{2j-1}}{2\Delta t}$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{2i+1, 2j+1} \approx \frac{Q_{2i}^{2j} - Q_{2i-2}^{2j}}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial x} \right|_{2i, 2j} \approx \frac{x_{2i+1}^{2j-1} - x_{2i-1}^{2j-1}}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{2i, 2j} \approx \frac{Q_{2i}^{2j} - Q_{2i}^{2j-2}}{2\Delta t}$$

Door deze benaderingen is het mogelijk een rekursief schema op te bouwen. Omwille van stabiliteit van het schema is vereist dat

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > u + \sqrt{g h} \quad [2][3]$$

Hieraan blijkt steeds voldaan te zijn door

$$\Delta x \approx 1.000 \text{ m}$$

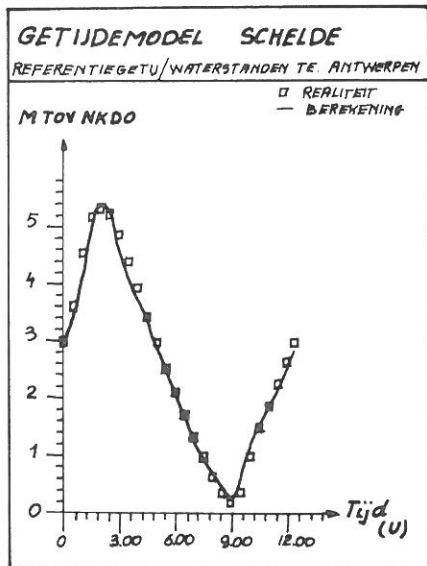
$$\Delta t \approx 60 \text{ s ,}$$

waarden waarvoor ook een voldoende nauwkeurigheid wordt bereikt.

Naast de geometrische gegevens (A, B, R) , die rechtstreeks opgemeten zijn heeft men nog informatie nodig betreffende de wrijvingscoëfficiënten $n(x)$. Deze zijn uiteraard niet rechtstreeks meetbaar en worden bepaald door een reeks afijkings- en controleberekeningen. Volgende waarden zijn door ons weerhouden :

Westerschelde	$n = 0,0285$
Schelde tot St. Amands	$n = 0,031$
Schelde voorbij St. Amands	$n = 0,0335$
Durme	$n = 0,060$
andere bijrivieren	$n = 0,040$

Als voorbeeld worden een reeks berekeningen gegeven voor een bepaald cyclisch getij. De overeenkomst is goed, zowel voor amplitudo (tabel I) als voor fase (fig. 3).



FIGUUR 3

Vergelijking van berekende en gemeten waterstanden te Antwerpen voor het cyclisch referentiegetij

TABEL 1

Vergelijking van berekende en gemeten ekstreme
waterstanden voor het cyclisch referentiegetij

LAAGWATER	Berekend		Gemeten	
Schelde te Terneuzen	6 u 53'	0,30 m	7 u 00'	0,30 m
Schelde te Hansweert	7 u 21'	0,18 m	7 u 20'	0,10 m
Schelde te Baalhoek	7 u 47'	0,23 m	7 u 45'	0,18 m
Schelde te Bath	8 u 05'	0,24 m	8 u 10'	0,23 m
Schelde te Liefkenshoek	8 u 37'	0,25 m	8 u 45'	0,24 m
Schelde te Antwerpen	9 u 07'	0,23 m	9 u 12'	0,10 m
Schelde te Schelle	9 u 41'	0,25 m	9 u 46'	0,13 m
Schelde te Temse	10 u 01'	0,34 m	10 u 12'	0,27 m
Schelde te Dendermonde	11 u 23'	1,37 m	11 u 36'	1,49 m
Schelde te Wetteren	1 u 20'	2,31 m	1 u 02'	2,48 m
Schelde te Melle	1 u 48'	2,53 m	1 u 30'	2,62 m
Rupel te Boom	10 u 09'	0,53 m	10 u 15'	0,38 m
Nete te Walem	10 u 33'	0,78 m	10 u 45'	0,54 m
Grote Nete te Lier	0 u 32'	2,23 m	0 u 40'	2,30 m
Durme te Waasmunster	11 u 01'	1,06 m	10 u 50'	0,90 m
Dijle te Mechelen	11 u 05'	1,39 m	11 u 18'	1,36 m
HOOGWATER	Berekend		Gemeten	
Schelde te Terneuzen	0 u 26'	4,69 m	0 u 25'	4,78 m
Schelde te Hansweert	0 u 58'	4,87 m	1 u 12'	4,86 m
Schelde te Baalhoek	1 u 22'	5,05 m	1 u 20'	5,07 m
Schelde te Bath	1 u 32'	5,15 m	1 u 28'	5,14 m
Schelde te Liefkenshoek	1 u 46'	5,30 m	1 u 40'	5,27 m
Schelde te Antwerpen	2 u 06'	5,38 m	1 u 58'	5,31 m
Schelde te Schelle	2 u 42'	5,40 m	2 u 44'	5,41 m
Schelde te Temse	2 u 54'	5,42 m	3 u 00'	5,39 m
Schelde te Dendermonde	3 u 56'	5,21 m	4 u 05'	5,13 m
Schelde te Wetteren	5 u 12'	4,34 m	5 u 12'	4,55 m
Schelde te Melle	6 u 24'	4,28 m	6 u 00'	4,52 m
Rupel te Boom	3 u 02'	5,41 m	3 u 03'	5,40 m
Nete te Walem	3 u 16'	5,47 m	3 u 18'	5,45 m
Grote Nete te Lier	4 u 08'	5,07 m	4 u 11'	5,21 m
Durme te Waasmunster	3 u 26'	5,56 m	3 u 10'	5,70 m
Dijle te Mechelen	3 u 18'	5,59 m	3 u 34'	5,50 m

INVLOED VAN KUNSTWERKEN IN DE RIVIER

Voorbeeld : Stormstuw te Oosterweel

Elke supplementaire hindernis of wijziging is eenvoudig in te bouwen in het model zodra men er een "wet" kan voor schrijven van de vorm

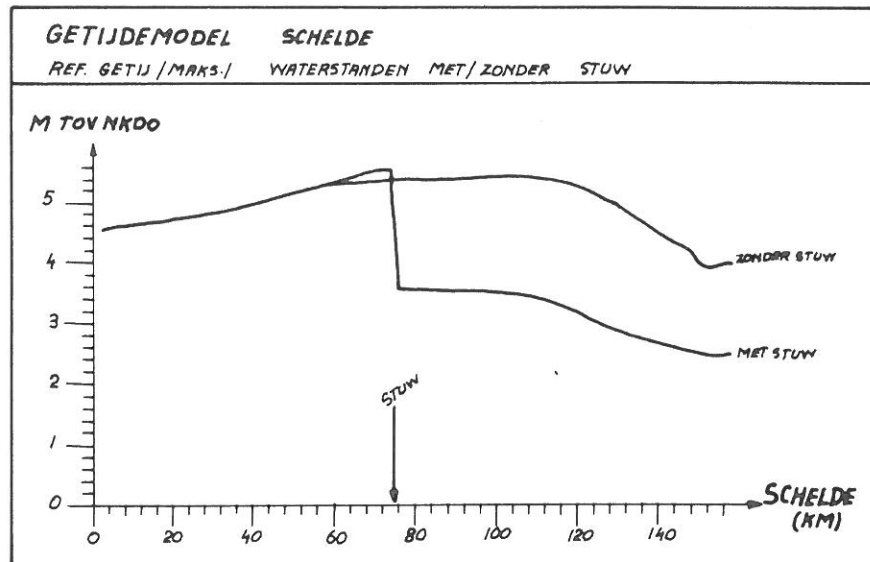
$$Q = f \text{ (gekende grootheden)}$$

Dit moet men in de meest algemene betekenis opvatten : de gekende grootheden zijn waterstanden, verschillen van waterstanden, snelheden, ..., de functie zelf kan beslissingswaarden inhouden.

Als voorbeeld is de volgende berekening gemaakt : stuw te Oosterweel.

criterium : 1) maximale waterafvoer,
2) maximaal verval = 2 m.

In figuur 4 worden de hoogwaterstanden gegeven bij een bepaald getij met sluiting van de stuw bij eb kentering.



FIGUUR 4

Vergelijking waterstanden met en zonder stuw

STUDIE VAN DE POLLUTIE : BEPALING VAN CONCENTRATIES AAN OPGELOSTE STOFFEN

Hiervoor wordt uitgegaan van de konvektie-diffusie vergelijking :

$$A \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (uAC) + \frac{\partial}{\partial x} (AD \frac{\partial C}{\partial x}) + P \quad (4)$$

(voor de gebruikte symbolen wordt naar de lijst verwezen).

De oplossing geschiedt opnieuw door middel van een differentieschema. Om de berekening simultaan met deze van de waterstanden te laten verlopen worden de concentraties berekend in de punten en op de tijdstippen waar de snelheden worden berekend. Omwille van stabiliteit zou dan moeten gelden

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{\Delta D}{\Delta x} ,$$

hieraan is voldaan.

Men moet ook kennis hebben van de langse dispersiecoëfficiënt D . Principieel is het mogelijk deze te vinden via een afijkingsberekening. Spijtig genoeg is D niet alleen afhankelijk van de sekte, maar ook van de vorm van het snelheidsprofiel, de turbulentie, ...; bovendien zijn de gegevens voor het uitvoeren van een afijking (nog) niet alle voorhanden. Daarom is (voorlopig) uitgegaan van in de literatuur gegeven uitdrukkingen zoals $D = 63,3 R^{5/6}$ n.u [5]. Om het onregelmatig verloop in te rekenen nemen we $D = 100 R^{5/6}$ n.u.

Bijvoorbeeld : $R = 20$ m, $n = 0.03$, $u = 1.5$ m/s , $D = 55$ m²/s
 $R = 1$ m, $n = 0.03$, $u = 0,1$ m/s , $D = 0.1$ m²/s

De invloed van deze koëfficiënt is nader onderzocht voor het volgende geval.

Referentiegetijde

Beginsituatie : concentraties overal nul

Lozingen : in Antwerpen 2.000 eenheden*/s

Als waarden zijn geprobeert

D = konstante = 0 1

D = konstante = 100 2

D = $100 R^{5/6}$ n.u (zie vroeger) 3

Resultaten (in eenheden*/m³) na 1 getijde

	1	2	3
sekte 9	.000	.000	.000
sekte 17	.000	.000	.000
sekte 25	.001	.002	.001
sekte 33	.342	.341	.341
sekte 41	.617	.659	.623
sekte 49	.000	.001	.001
sekte 57	.000	.000	.000
sekte 65	.000	.000	.000

* Bijvoorbeeld gram.

Bijgevolg is de relatieve invloed van een fout op de dispersiecoëfficiënt relatief klein.

Een tweede probleem betreft de bron- en put-term gezien hier een afbraak moet in voorzien zijn. In eerste benadering is uitgegaan van een evenredige afname, dus volgens een wet

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{CA}{\tau} ,$$

met als tijdconstante τ bijvoorbeeld 10^6 s (4,5 % afbraak per getij).

De lozingen in de Schelde geschieden op relatief grote afstand (70 ... 80 km) van de monding; gezien het transport hoofdzakelijk geschiedt door konvektie kunnen de deeltjes per getij slechts 10 ... 20 km afleggen en resulterend zelfs minder.

De opgeloste stoffen bewegen dus globaal heen en weer

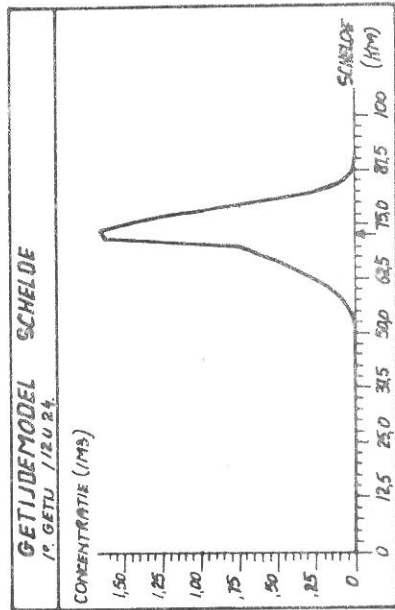
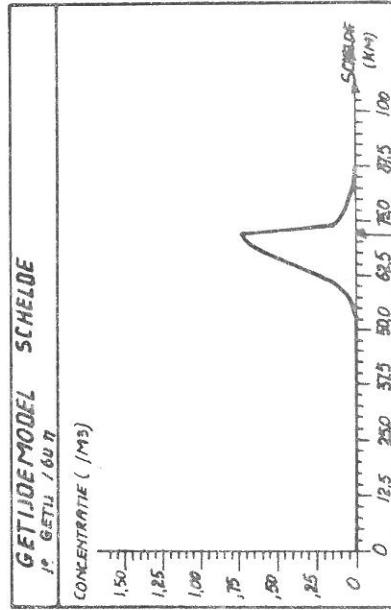
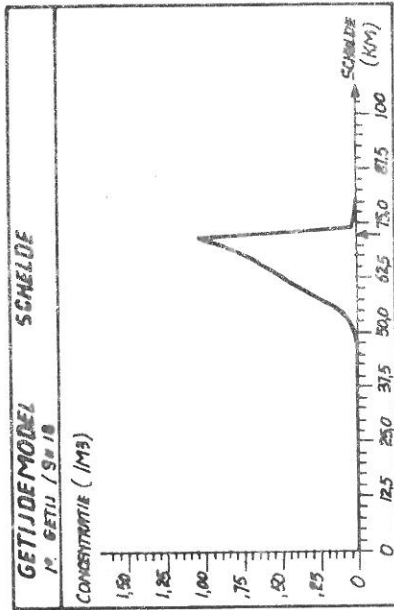
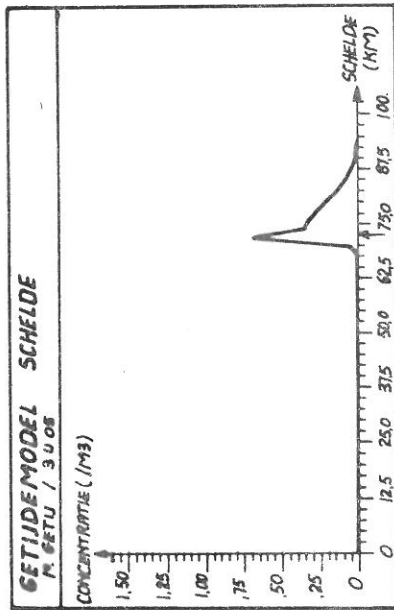
- waarbij slechts weinig deeltjes de monding bereiken om daar te verdwijnen door uitwisseling,
- waarbij er een langzame afbraak plaatsgrijpt waardoor de meeste geloosde deeltjes verdwijnen.

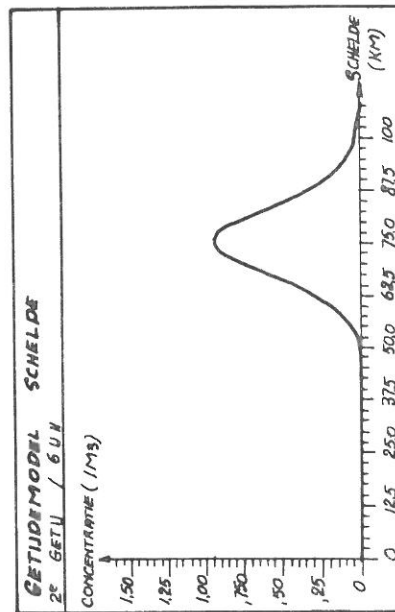
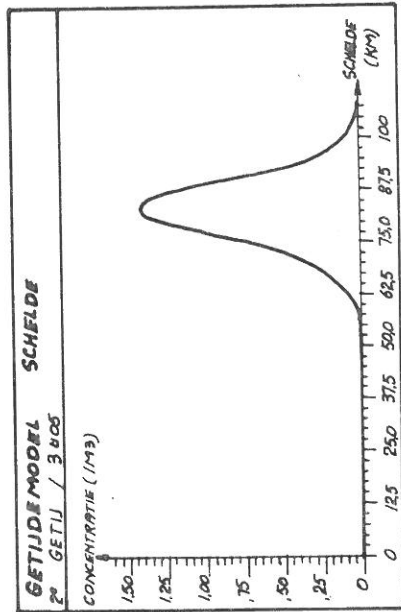
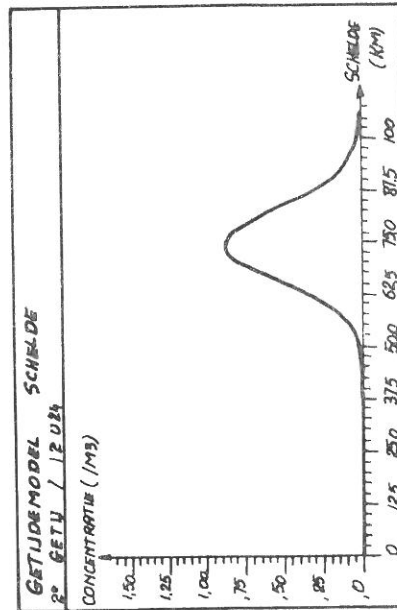
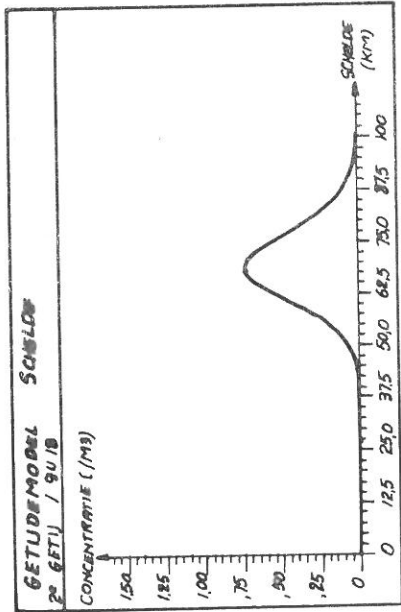
(Deze redenering is uiteraard slechts geldig in zoverre de gekozen afbraakwet geldig is).

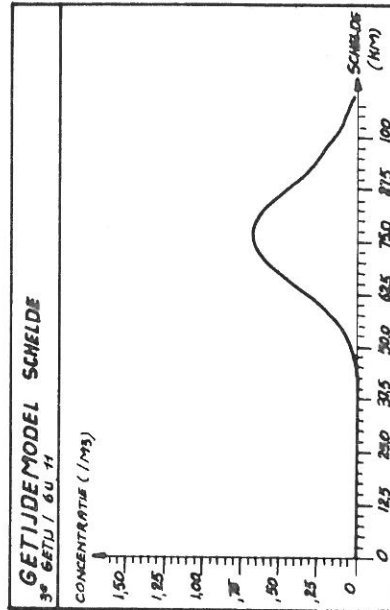
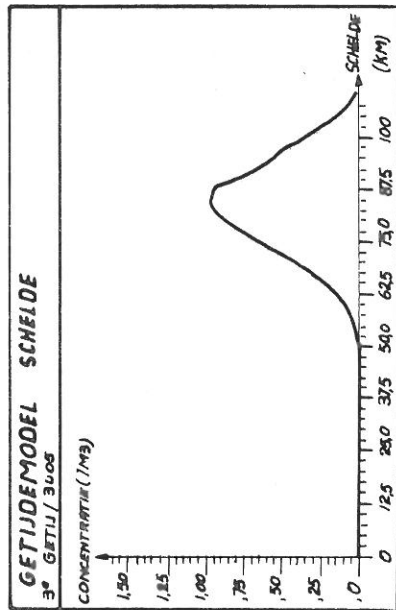
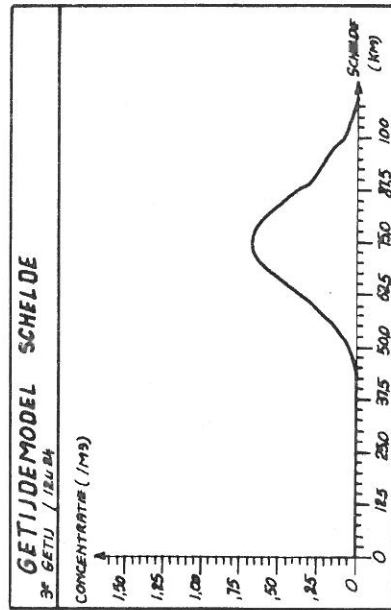
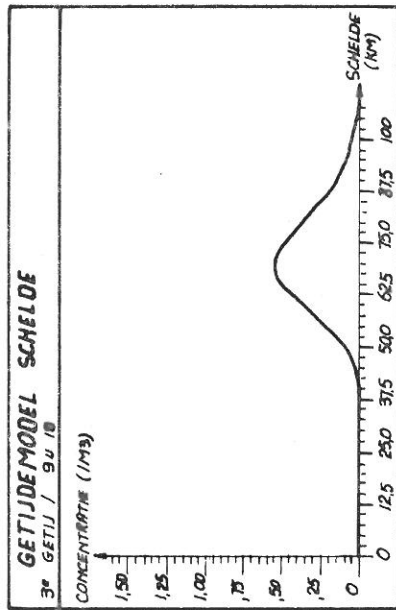
Als voorbeeld hiervan wordt het verloop voor een eenmalige lozing onderzocht : cyclisch getij

Beginsituatie : concentraties overal nul

Lozingen : gedurende 1 getijde 2.000 eenheden (bijv. g)/s.







NAUWKEURIGHEID

De nauwkeurigheid wordt in het algemeen door 3 factoren beperkt :

- 1) de gebrekkige beschrijving van de werkelijkheid door theoretische vergelijkingen : vermits we in ons model geopteerd hebben voor een ééndimensionele oplossing, betekent dit dat alle verschijnselen die hiervan afwijken aanleiding kunnen geven tot problemen, bijvoorbeeld : het niet konstant zijn van snelheden en concentraties in een dwarssectie;
- 2) de onmogelijkheid om de theoretische vergelijkingen eksakt op te lossen : vermits de oplossing geschiedt door diskretisatie in tijd en ruimte (eindige differenties), zullen we (waarschijnlijk) des te nauwkeuriger werken naarmate we meer punten beschouwen; deze eis moet echter worden verzoend met de beperking van de rekentijd;
- 3) de onnauwkeurigheid van een reeks vaste gegevens (geometrie, wrijvingskoëfficiënten, dispersiekoëfficiënten) : deze gegevens zijn gedeeltelijk bekomen uit metingen, gedeeltelijk berekend via afijking en gedeeltelijk ontleend aan de literatuur (bij gebrek aan de juiste cijfers voor de Schelde).

Praktisch gesproken kan men over deze 3 aspecten het volgende opmerken :

- 1) De ééndimensionele beschrijving zou problemen kunnen geven :
 - in het gebied van de Westerschelde waar de dwarse afmeting van de grootte-orde van enkele km wordt; dit geeft echter geen praktische problemen gezien we in dit gebied zelf minder zijn geïnteresseerd en de invloed ervan op de overige gedeelten overschaduw wordt te worden door de natuurlijke randvoorwaarde van de Noordzee (getij in Vlissingen);
 - bij veranderingen in de rivier die moeilijk ééndimensioneel te beschrijven zijn : dit geldt bijvoorbeeld voor tracé-wijzigingen (deze aspecten kunnen dan ook beter niet worden berekend met dit model).
- 2) Het werken met eindige differenties volgens het klassieke expliciete schema vereist dat men zich houdt aan de voorwaarden voor numerieke stabiliteit (Courant) : dit legt reeds eisen vast voor de tijdsstap die voldoende streng zijn om een voldoende nauwkeurigheid te realiseren, zowel qua fase als amplitudo (zie tabel 1 en figuur 3).
- 3) De gebruikte gegevens zijn de volgende :
 - 1) geometrische gegevens A , B , R
bron : metingen [1]
nauwkeurigheid : bevredigend
 - 2) wrijvingskoëfficiënten n
bron : afijkingsberekening [6]
nauwkeurigheid : waarschijnlijk bevredigend
 - 3) dispersiekoëfficiënten D
bron : literatuur
nauwkeurigheid : twijfelachtig
(de invloed op het resultaat is echter vrij klein).

Algemeen gesproken blijkt de relatieve onnauwkeurigheid van de gegevens het meeste invloed te hebben; het schijnt dan ook weinig zin te hebben een

verbetering van de nauwkeurigheid te gaan zoeken in een eksaktere wiskundige verwerking (vijfv. hogere-orde-differenties) daar dit alleen maar de rekentijd nodeloos zal opdrijven.

BESLUITEN

1. Het hydraulische gedrag van het onderzochte stroombekken kan op efficiënte wijze worden onderzocht met een ééndimensioneel expliciet differentieschema :
 - er zijn geen moeilijkheden ter plaatse van de samenvloeiing van 2 rivieren,
 - bij vergelijking met metingen in de natuur is de overeenkomst voldoende goed,
 - de rekentijd is beperkt.
2. De invloed van kunstwerken in de rivier kan worden onderzocht. Het plaatsen van een stormstuw te Oosterweel zou mits de schuiven voldoende snel kunnen worden geopend e.d., aanleiding geven tot een efficiënte verlaging van de hoogwaterstanden opwaarts van de stuw, zonder de waterstanden afwaarts sterk te verhogen.
3. De uitbreiding van het model tot REAL-TIME pollutiemodel biedt principieel evenmin moeilijkheden. Evenwel is er een gebrek aan voldoende gegevens om dispersiecoëfficiënten en afbraaktermen goed te benaderen. Om deze reden voorspelt het model op dit ogenblik het best de supplementaire invloed van plotse lozingen (hiervoor is het konvektief aspect van overwegend belang.

GEBRUIKTE SYMBOLEN

t : tijd
x : koördinaat volgens de lengte-as van de rivier
z(x,t) : waterhoogte t.o.v. een (willekeurig) gekozen referentievlak
h(x,t) : waterhoogte t.o.v. de bodem
A(x,z) : oppervlak van de dwarssektie
B(x,z) : breedte aan het oppervlak
R(x,z) : hydraulische straal
Q(x,t) : debiet
u(x,t) : gemiddelde snelheid
C(x,t) : concentratie van de "opgeloste stof"
P(x,t) : bron- en put-term voor de opgeloste stoffen
n(x) : wrijvingscoëfficiënt volgens Manning
D(x) : longitudinale dispersiecoëfficiënt
 τ : tijdsconstante voor de afbraak

REFERENTIES

- [1] WATERBOUWKUNDIG LABORATORIUM BORGERHOUT, "Mathematisch Model van het Tijgebied der Schelde", (1977), MOD 331-1.
- [2] BARNETT A.G., "Numerical Stability in Unsteady Open Channel Flow Computations", (International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels, Newcastle, 1976 - Paper D4).
- [3] COURANT et al., "On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Difference", (Pure and Appl. Mechanics, pag. 243).
- [4] A.C.W. Studiegroep, "De Waterkwaliteit van de Schelde", Antwerpen, 1977.
- [5] IPPEN, "Estuary and Coastline Hydrodynamics", (New York, 1966), pag. 585.
- [6] VAN LANGENHOVE G., "Getijde- en Pollutiemodel Schelde", Intern Rapport K.U.Leuven, (Leuven, 1977).