

Chapitre III

Paramétrisation, calibrage et ajustement du modèle Application à la mer du Nord et au Southern Bight

par

Jacques C.J. NIHOUЛ

1.- Introduction

L'application de l'analyse des systèmes à la mer fournit une *description mathématique* du système marin. Cette description mathématique doit être confrontée à la *base de données* constituées de données existantes ou spécialement acquises (Campagnes de mesures I.C.E.S., JONSDAP, Math. Modelsea, ...).

La base de données fournit des informations permettant :

- i) une étude des *corrélations* suggérant les variables entre les-
quelles les relations sont suffisamment peu importantes pour négliger
leur interactions;
- ii) une étude des *ordres de grandeur* indiquant les processus et
les variables qui peuvent être négligés;
- iii) une analyse de *sensitivité* évaluant le degré de précision qui
est nécessaire dans la spécification des variables d'état et des lois
d'interactions;
- iv) un dialogue avec les utilisateurs du modèle permettant une
définition plus précise des objectifs et indiquant le degré de raf-
finement requis pour produire des prédictions fiables répondant aux

questions posées au modèle en évitant une inutile et coûteuse complexité.

De cette confrontation entre la description mathématique du système et la base de données surgit le véritable modèle mathématique ajusté à la région étudiée et adapté à sa gestion.

Ce modèle *spécifique* est en général plus simple que le modèle conceptuel de départ mais il est moins général et ne peut être transposé sans précautions d'une situation à une autre.

On examine dans ce chapitre les caractéristiques propres à des mers continentales telles que la mer du Nord et leurs implications sur la structure du modèle.

2.- Mélange vertical et pression hydrostatique

L'étude des corrélations permettent de négliger l'influence de la pression sur la masse spécifique et celle-ci apparaît comme une fonction linéaire des variations de température, de salinité et de turbidité ne différant jamais beaucoup d'une valeur de référence constante ρ_m ($\frac{\rho - \rho_m}{\rho_m} \lesssim 10^{-3}$).

Dans tout le sud de la mer du Nord en toute saison et dans son entièreté en hiver, la turbulence intense provoquée par les marées et les tempêtes occasionnelles maintient un complet mélange des eaux et une masse spécifique pratiquement uniforme ($\rho \sim \rho_m$ partout). Une légère stratification peut apparaître à l'endroit des estuaires et dans le nord à certaines saisons. Il est possible d'en tenir compte en ajoutant aux variables hydrodynamiques la poussée b définie au chapitre précédent [équation (19)] mais, dans la plupart des applications, cette correction n'est pas nécessaire et l'hypothèse d'une masse spécifique constante ($\rho = \rho_m$) constitue, en tout état de cause, une première approximation très satisfaisante.

Pour la simplicité de la discussion, on admettra cette hypothèse dans la suite.

Dans ces conditions, le système des équations (7), (9) et (17) constitue un système fermé pour les trois composantes de la vitesse, la pression et les variables ρ_a parmi lesquelles nous pouvons inclure la température puisque l'équation (18) est formellement la même que (17) [la vitesse de migration σ_a étant prise égale à zéro évidemment pour la température comme pour toutes les substances dissoutes représentées par ρ_a].

La force extérieure moyenne par unité de masse F apparaissant dans l'équation (9) contient la pesanteur et les forces excitatrices des marées. Ces dernières peuvent être négligées car les marées internes en mer du Nord sont très faibles et complètement dominées par les marées atlantiques qui se propagent en mer du Nord à travers ses frontières ouvertes.

La force de pesanteur n'intervient que dans la composante verticale de (9) et si on analyse les ordres de grandeurs des différents termes de cette équation, on voit immédiatement que les accélérations verticales du fluide (les termes du membre de gauche) sont tout à fait négligeables vis-à-vis de l'accélération de la pesanteur g et qu'il en est de même de la dispersion turbulente verticale.

La composante verticale de l'équation (9) se réduit par conséquent à

$$(24) \quad - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho_m} \right) = g .$$

On voit ainsi que, verticalement, l'équilibre hydrostatique est partiellement réalisé. Intégrant (24), on obtient :

$$(25) \quad - \frac{p}{\rho_m} = g x_3 + \varphi$$

où φ est une fonction de t , x_1 et x_2 à déterminer par les conditions aux limites.

A la surface de la mer $x_3 = \zeta$, on a :

$$(26) \quad - \frac{p_a}{\rho_m} = g\zeta + \varphi$$

où p_a est la pression atmosphérique.

Éliminant ϕ , il vient :

$$(27) \quad \frac{p}{\rho_m} = \frac{p_a}{\rho_m} + gn ; \quad \eta = \zeta - x_3 .$$

Les composantes horizontales de l'accélération de Coriolis $2\Omega \wedge u$ sont

$$(28) \quad 2\Omega_2 u_3 - fu_2$$

$$(29) \quad - 2\Omega_1 u_3 + fu_1$$

où la composante verticale du vecteur rotation Ω a été écrite :

$$(30) \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} f$$

pour se conformer aux notations classiques.

L'étude des ordres de grandeurs révèle que la vitesse verticale u_3 est beaucoup plus petite que la vitesse horizontale si bien que les premiers termes des expressions (28) et (29) peuvent être négligés.

En tenant compte de cette simplification et de la relation (27), on peut écrire les composantes horizontales de (9) sous la forme :

$$(31) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + \nabla \cdot (u u_1) = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_a}{\rho_m} + gn \right) + fu_2 + D_1$$

$$(32) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla \cdot (u u_2) = - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p_a}{\rho_m} + gn \right) - fu_1 + D_2 .$$

Une équation additionnelle pour η est obtenue en exprimant que la surface $\eta = 0$ est à chaque instant une surface matérielle du fluide soit :

$$(33) \quad \frac{d\zeta}{dt} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \cdot \nabla \zeta = u_3 \quad \left. \right\} \quad \text{en} \quad \eta \equiv \zeta - x_3 = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot u \eta = 0$$

[On note qu'au sens strict, en vertu de cette équation, ζ n'est pas l'élévation moyenne de l'interface mais l'élévation d'une surface conventionnelle se déplacant verticalement avec la vitesse moyenne. p_a doit être compris comme la pression agissant sur cette surface conventionnelle.]

Il y a une similitude frappante entre (31), (32) et (17). Pour chacune des composantes horizontales de la vitesse, on voit apparaître les effets :

- i) de l'advection $\nabla \cdot (u u_i)$;
- ii) des forces extérieures

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p_a}{\rho_m} + g\eta \right) ,$$

associées dans ce cas au gradient horizontal de la pression atmosphérique et à la pente de la surface libre;

- iii) des interactions f_{u_i} introduisant un couplage entre les variables u_1 et u_2 ;
- iv) de la dispersion turbulente D_i .

3.- Courants et turbulence

La mer est le siège de mouvements très diversifiés caractérisés par des échelles de temps et d'espace très différentes. Dans la mer du Nord, les courants les plus intenses sont dus aux marées — principalement la composante M_2 — et aux tempêtes externes qui pénètrent par les frontières ouvertes (essentiellement la frontière nord). Il s'y superpose une circulation résiduelle lentement variable, en relation avec la traversée de deux branches du courant nord Atlantique et toute une gamme de mouvements variés engendrés par le vent et la turbulence et caractérisés par une multiplicité de fréquences et de longueurs d'onde formant un spectre continu jusqu'aux échelles moléculaires.

La figure 11 donne à titre d'illustration en 13 cartes les valeurs horaires des directions et amplitudes des courants de marée aux vives eaux et aux mortes eaux dans le Southern Bight. Les amplitudes sont en dixièmes de noeud ($16,28 = 1,6$ noeud aux mortes eaux et $2,8$ noeuds aux vives eaux). La figure 12 montre les lignes de courant résiduel dans la même région.

La turbulence, on l'a vu, est cette agitation désordonnée produite en particulier par la friction des courants sur le fond, le

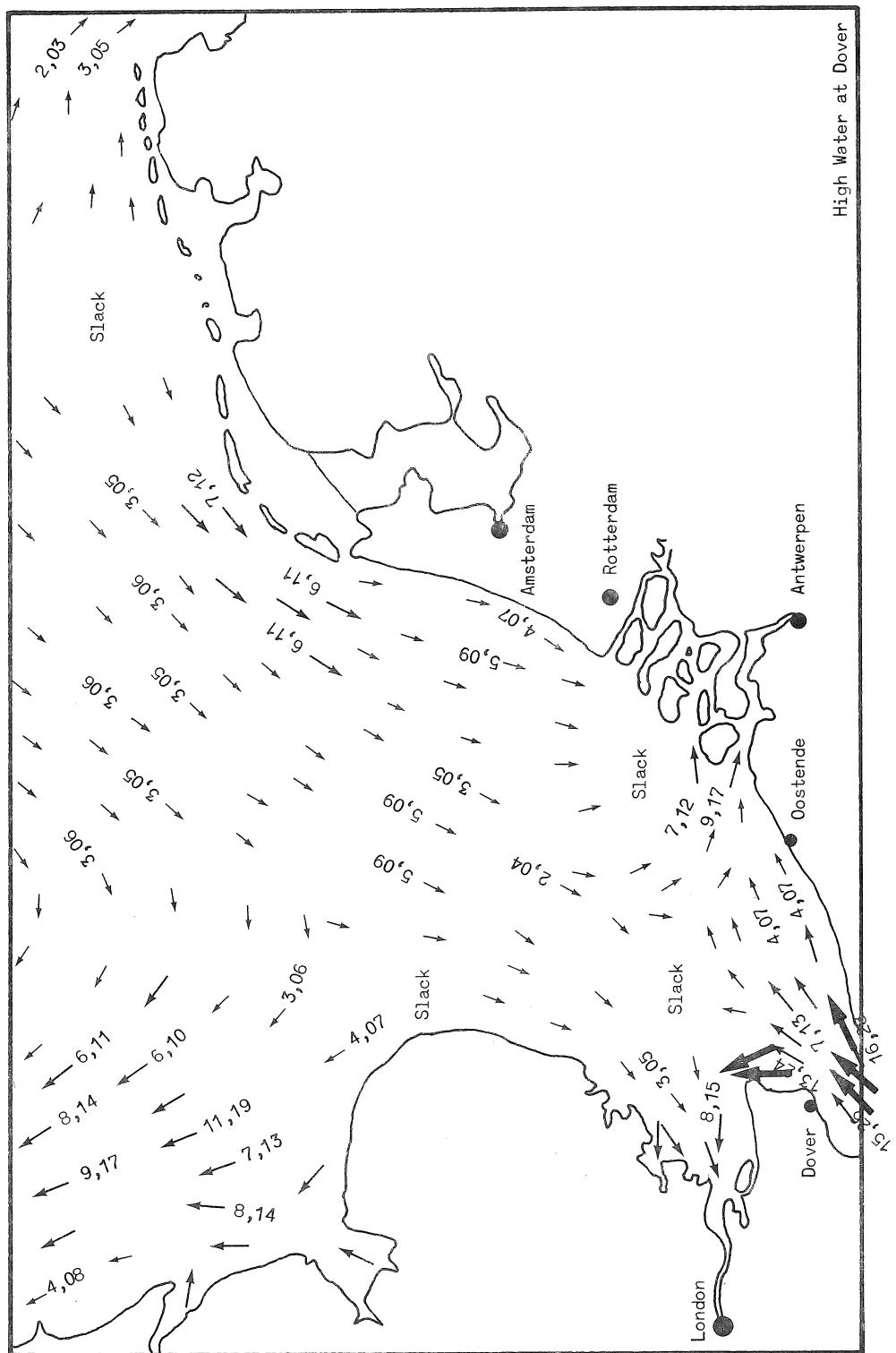


fig. 11a.

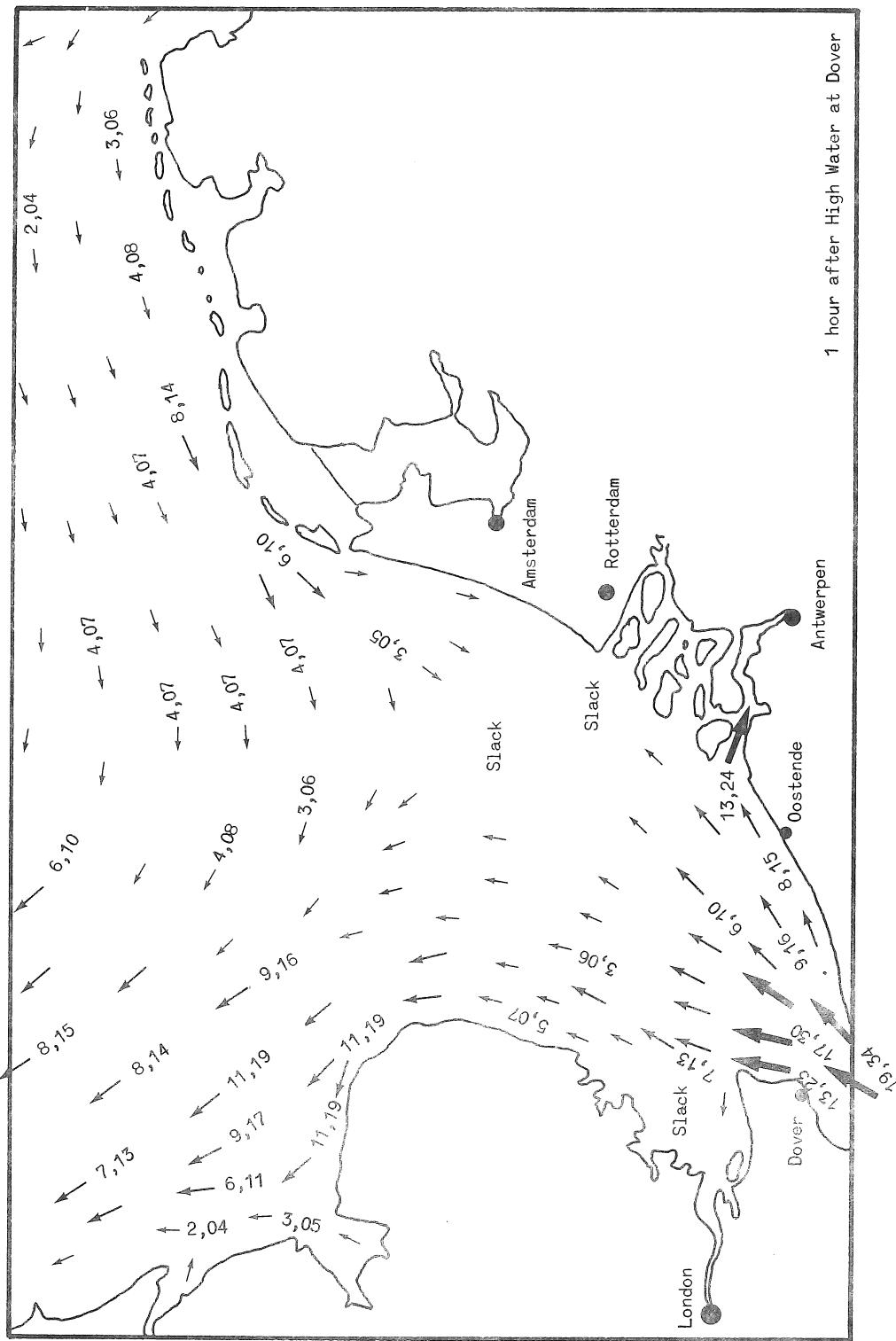


fig. 11b.

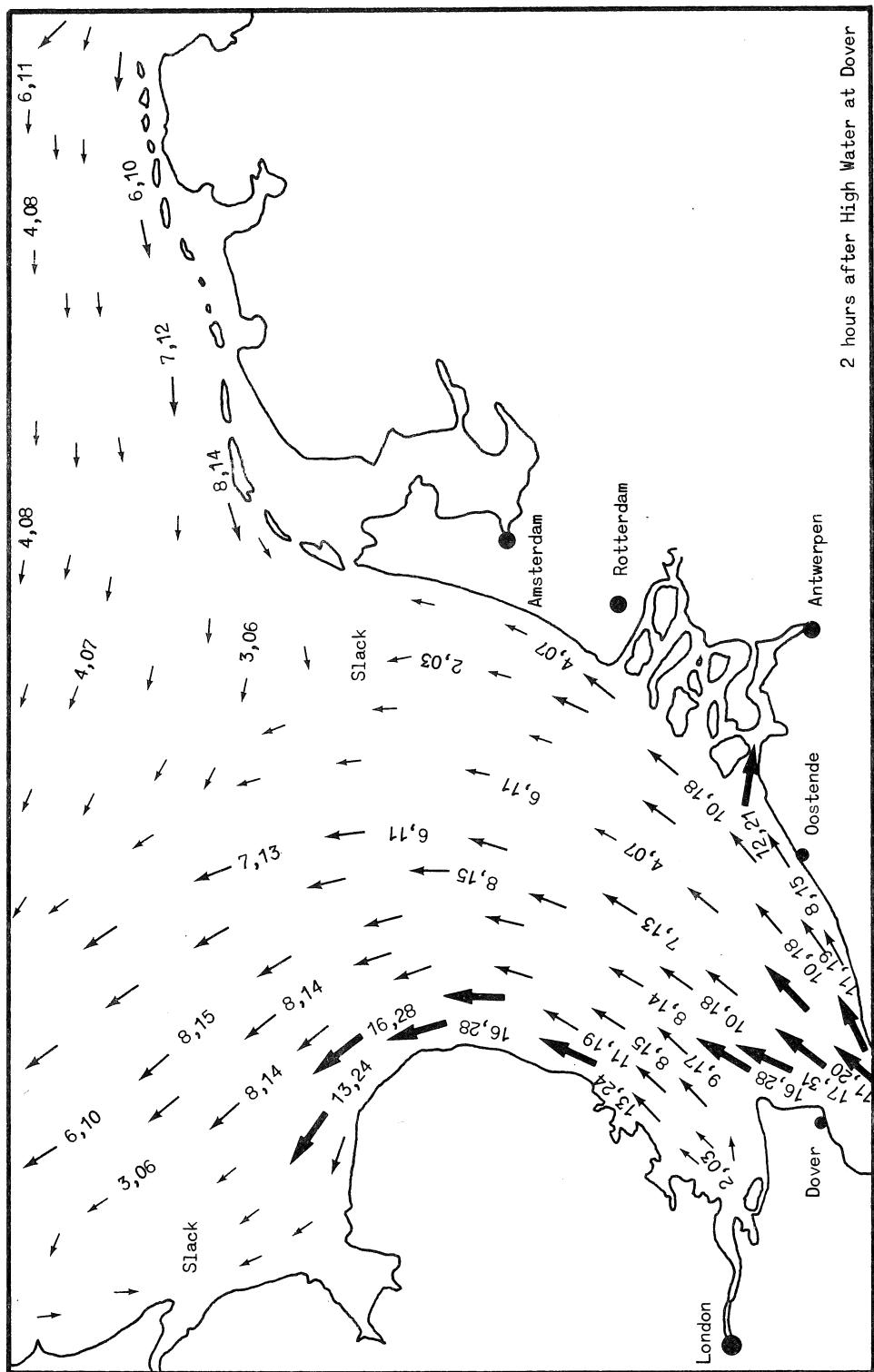


fig. 11c.

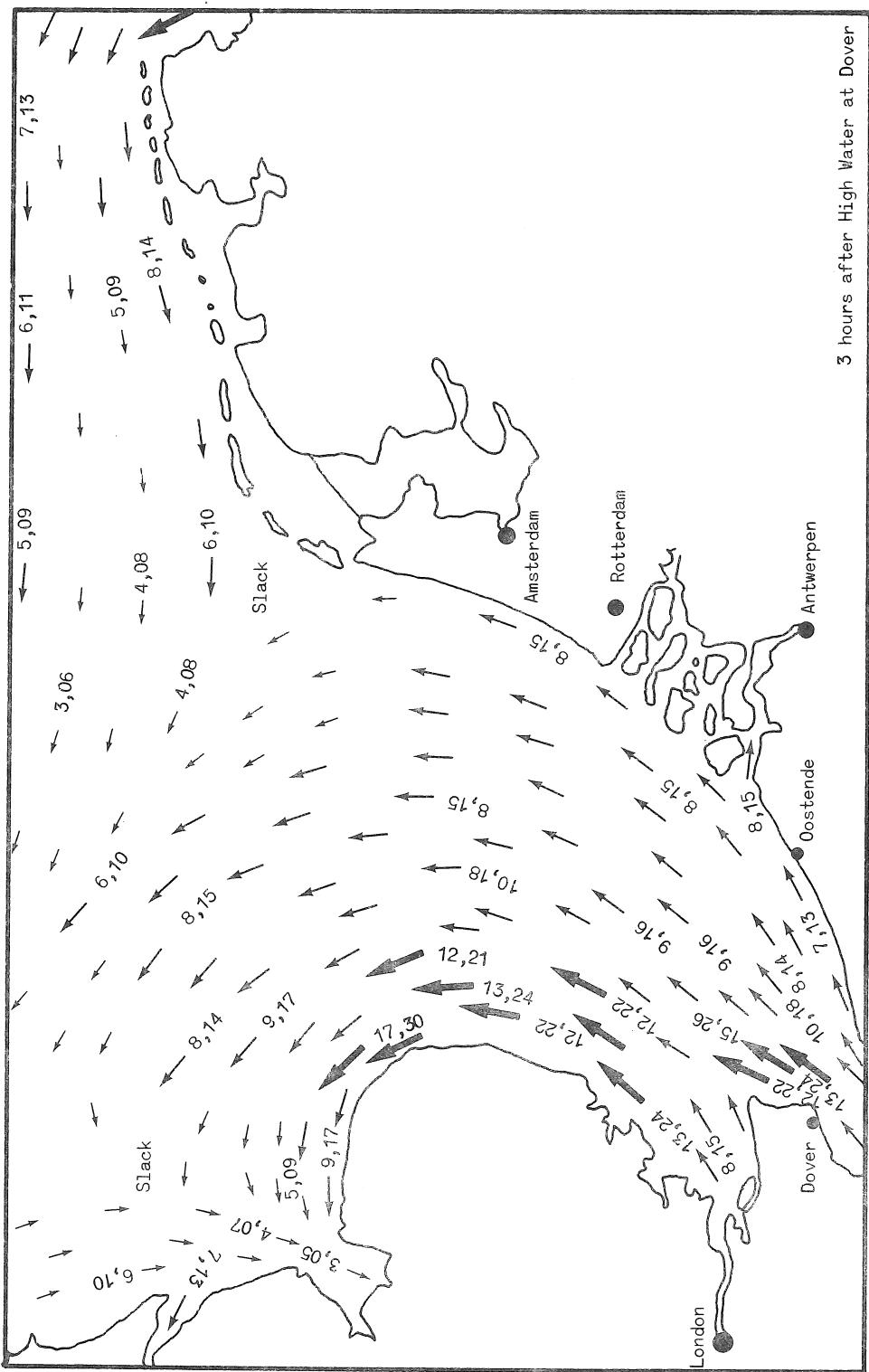
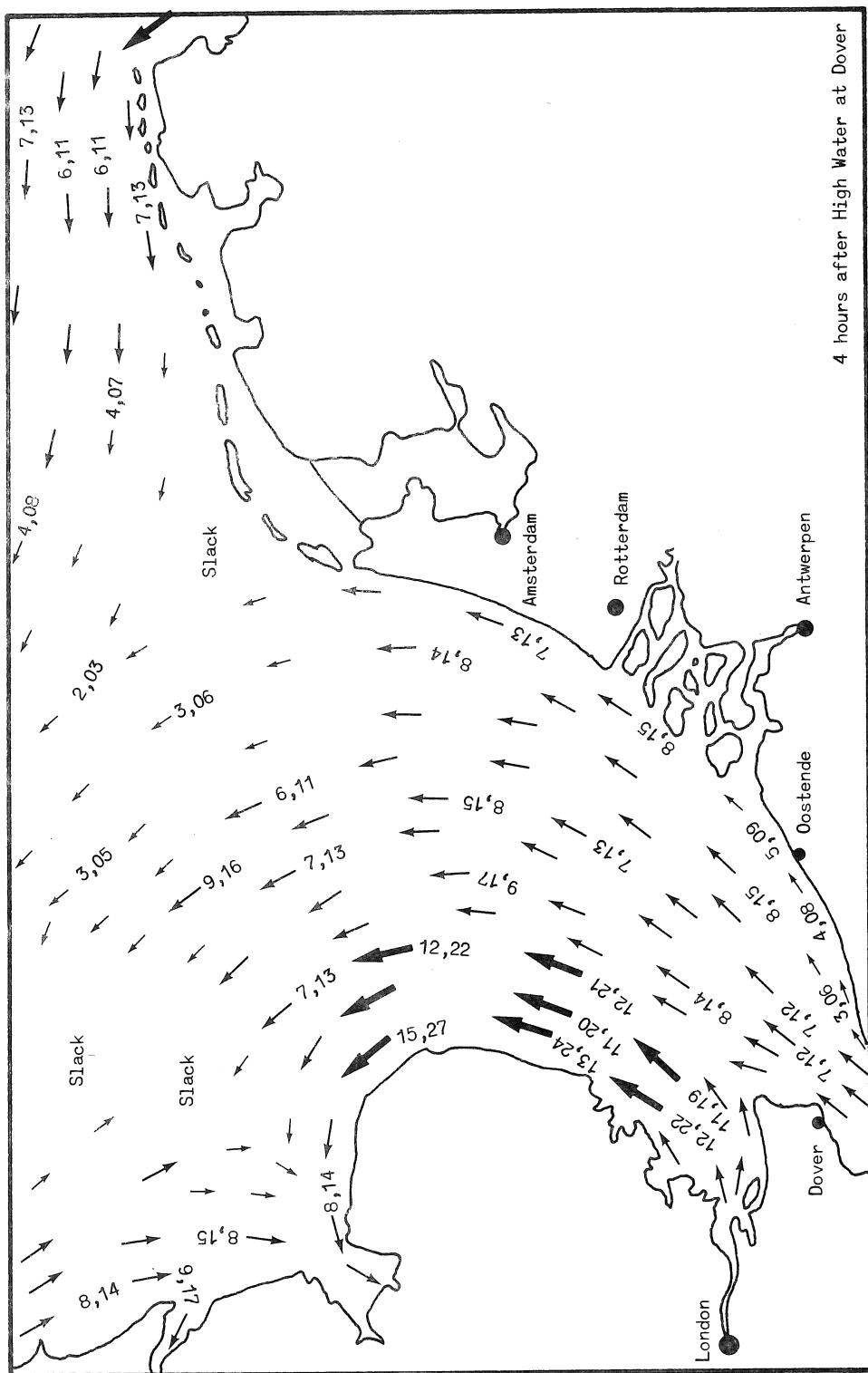


fig. 11d.



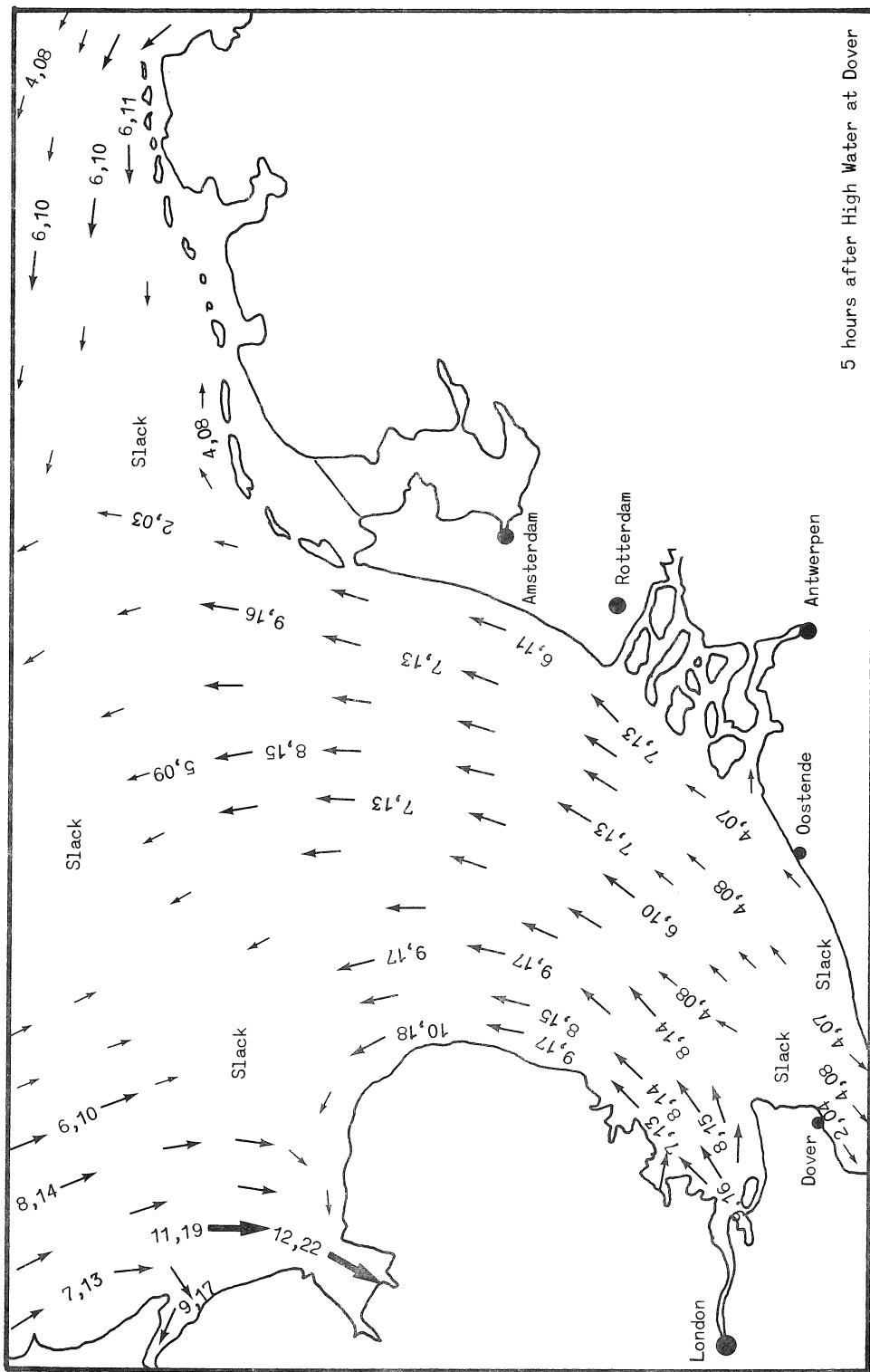


fig. 11f.

5 hours after High Water at Dover

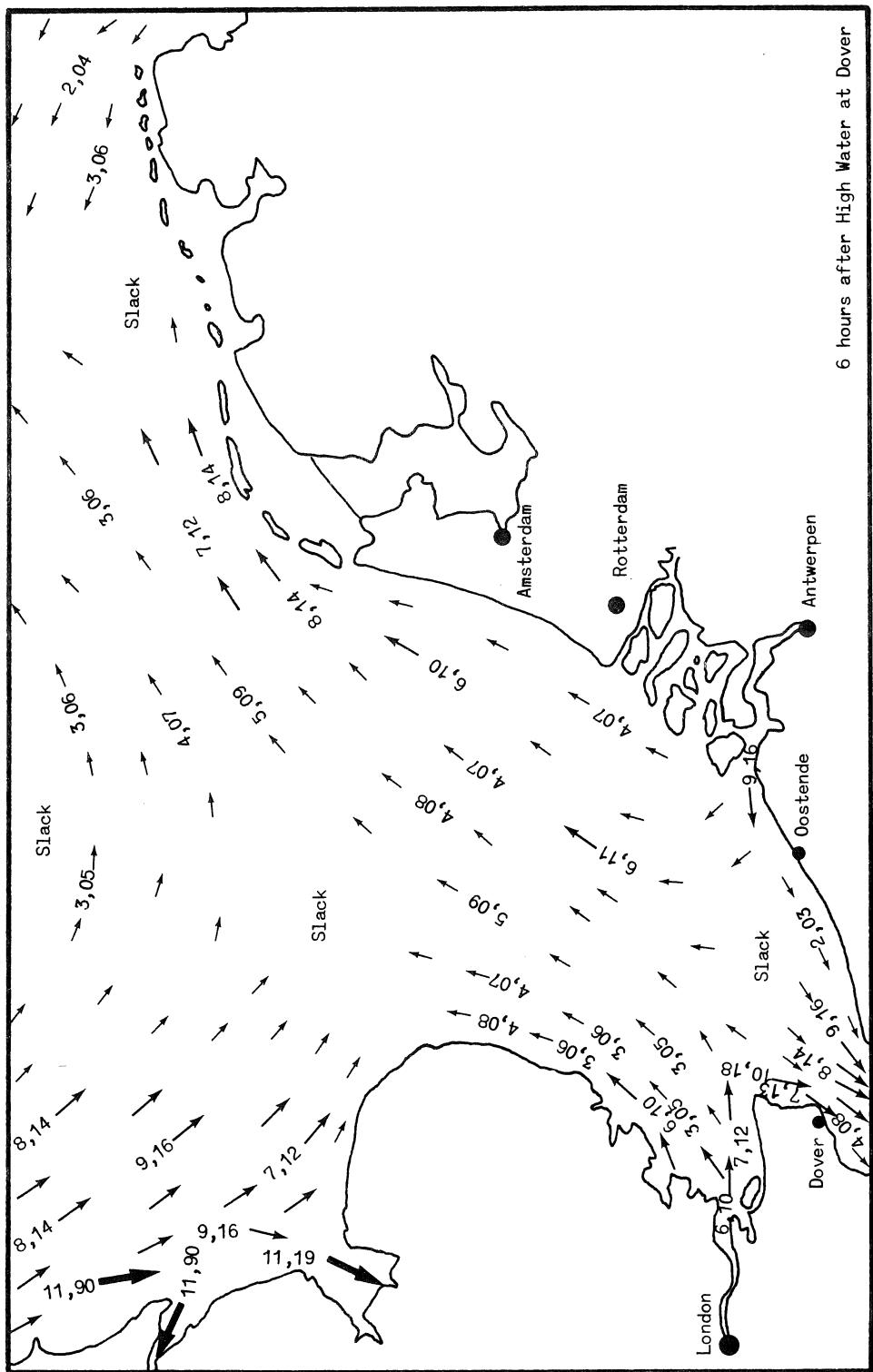


fig. 11g.

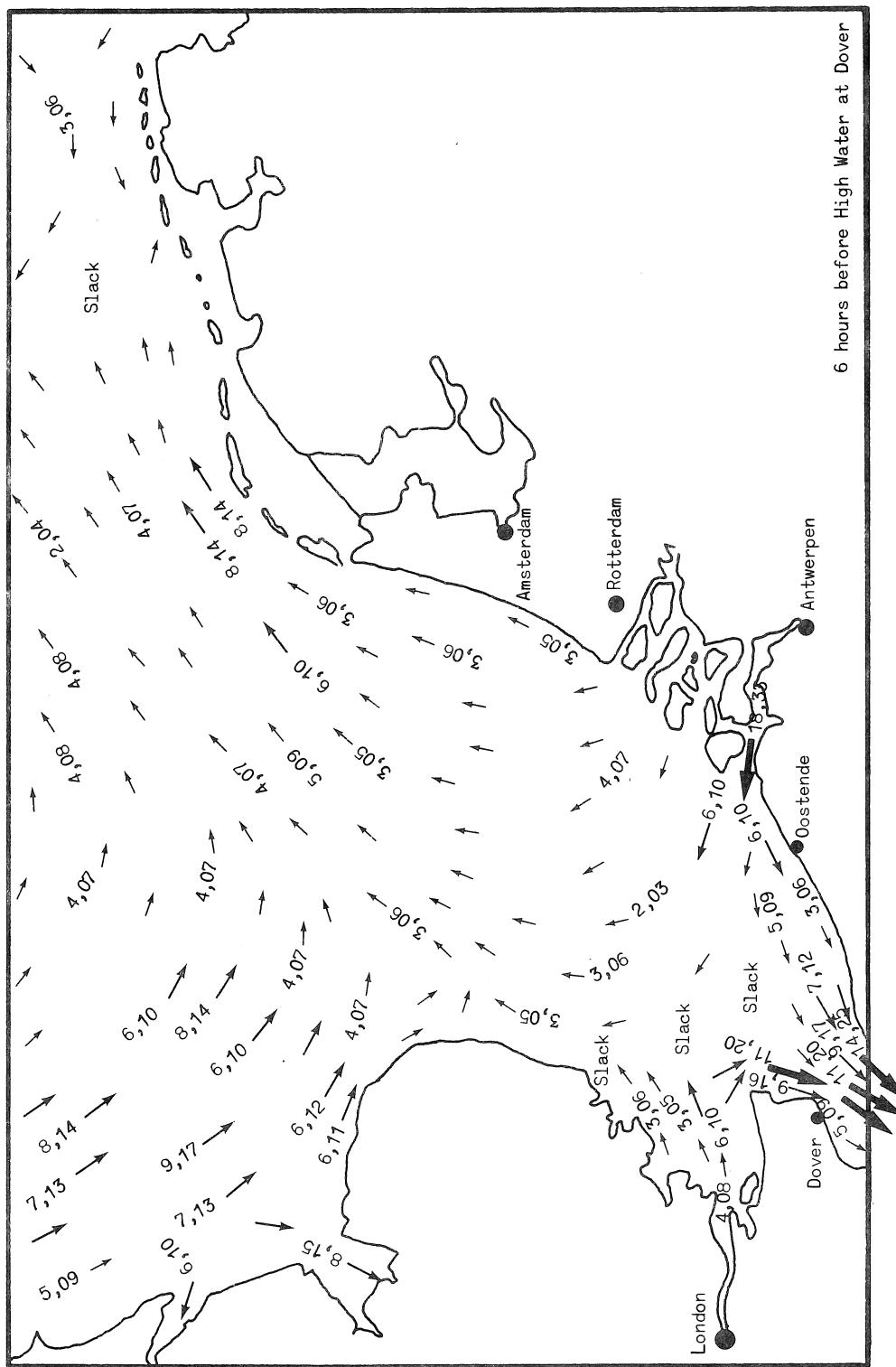


fig. 11h.

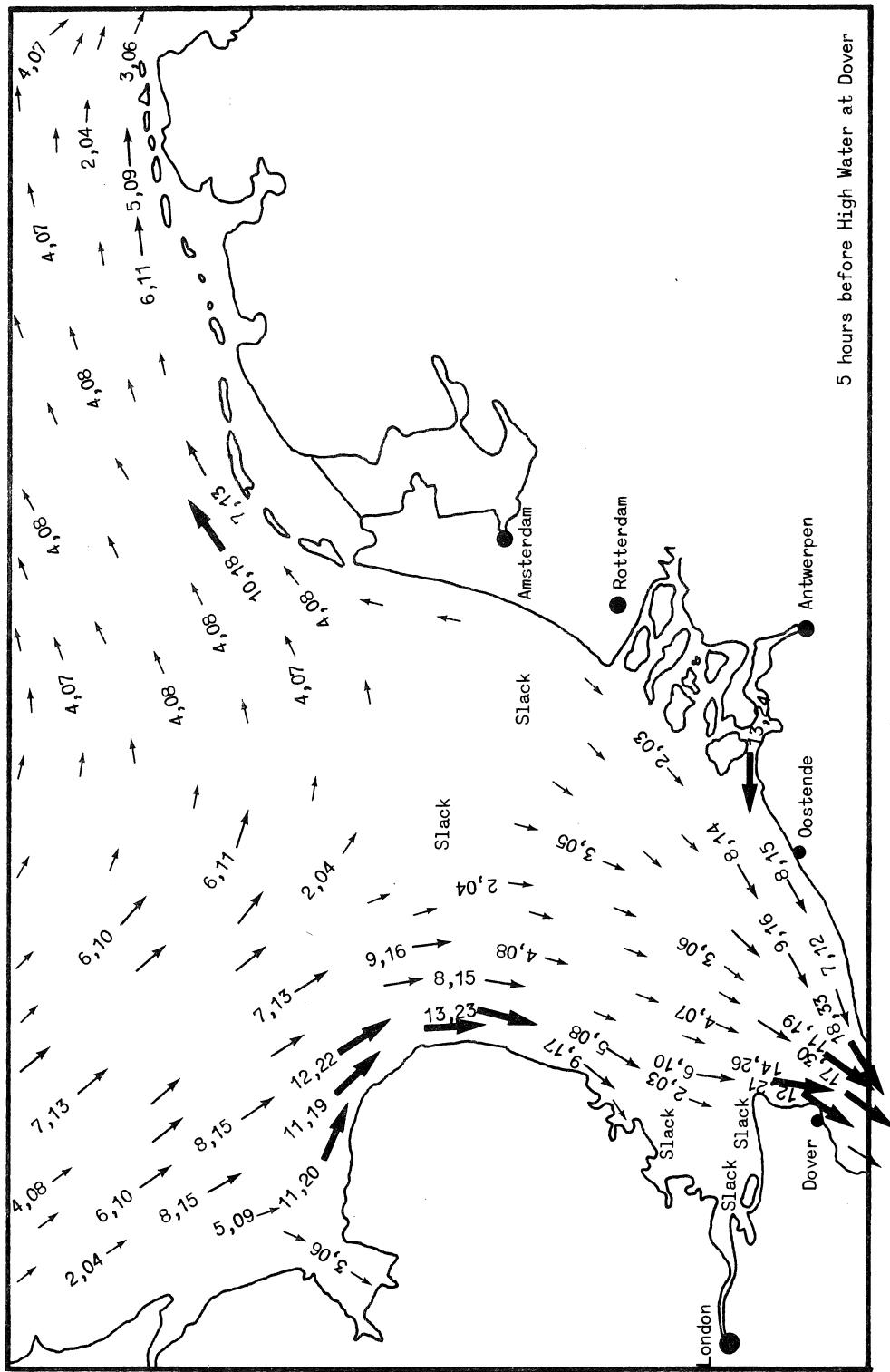


fig. 11i.

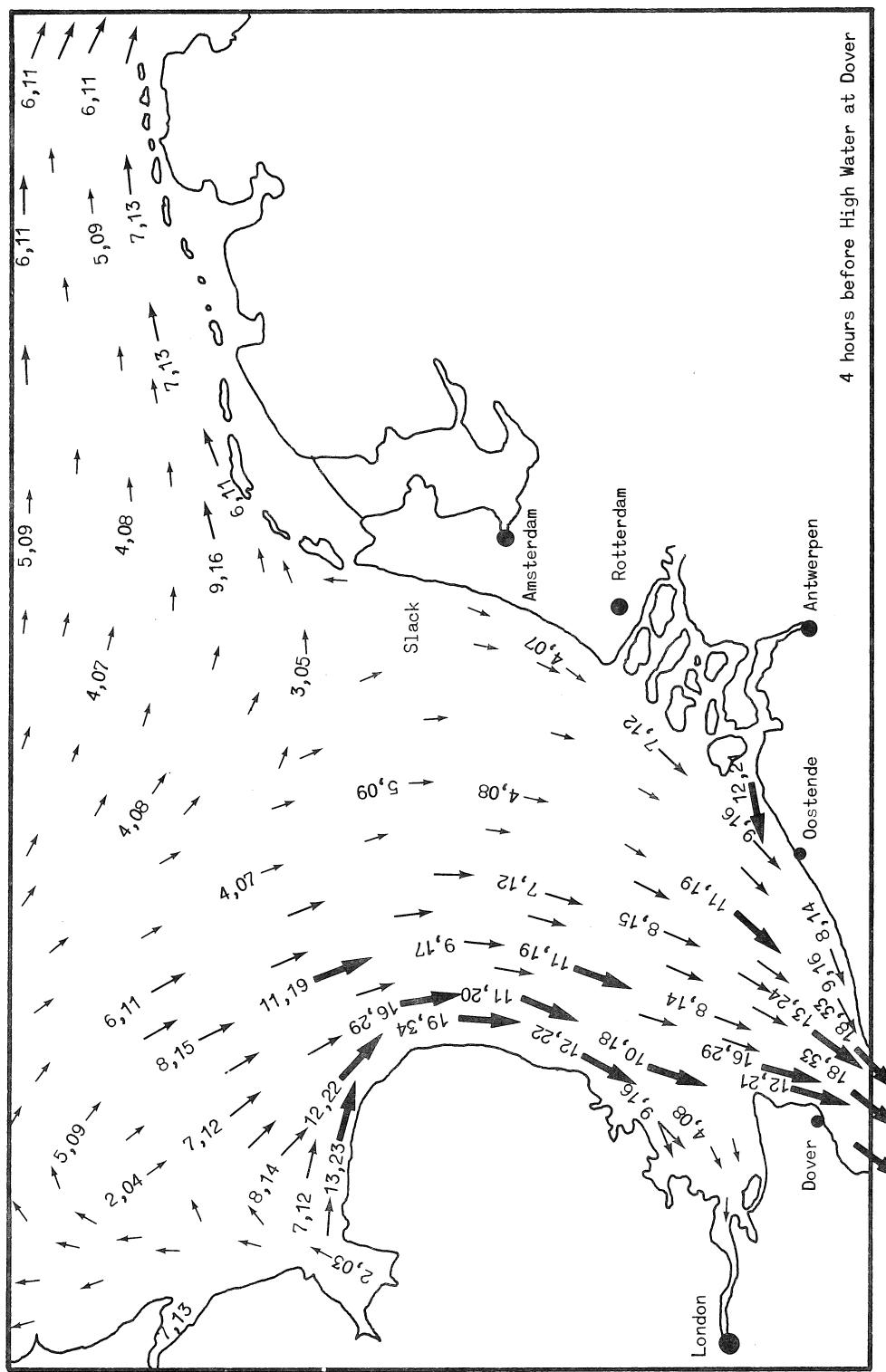


fig. 11j.

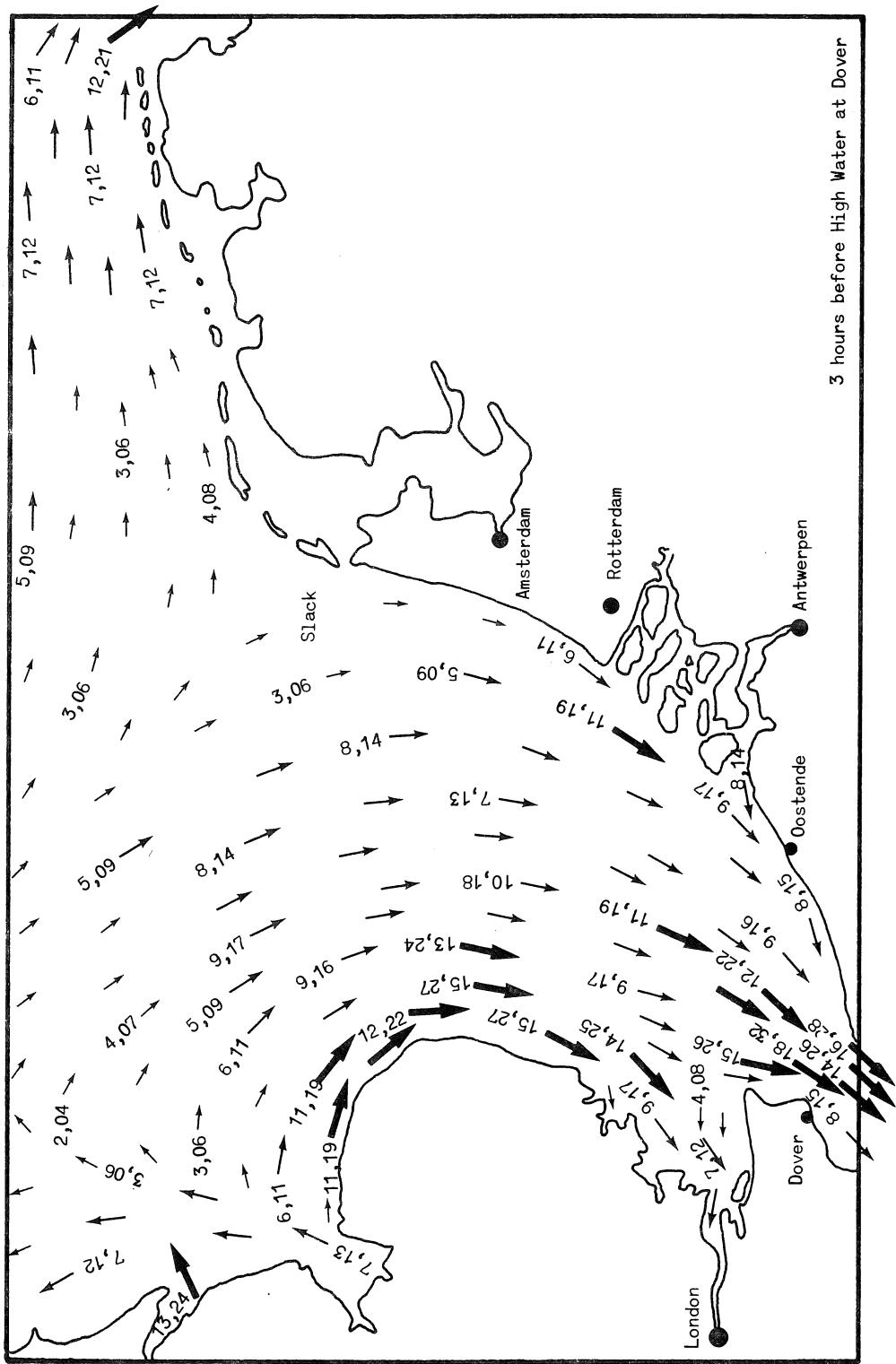


fig. 11k.

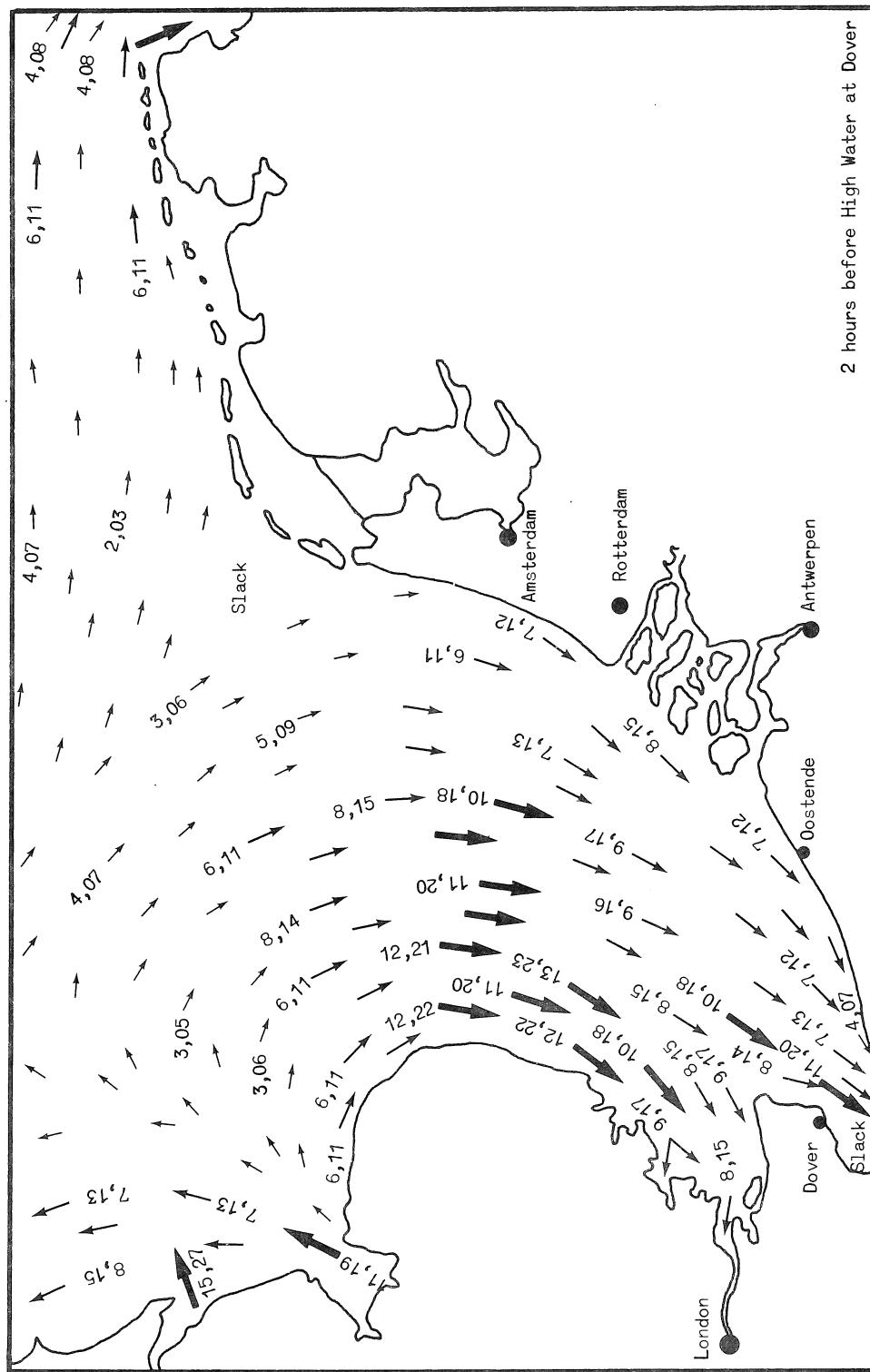


fig. 111.

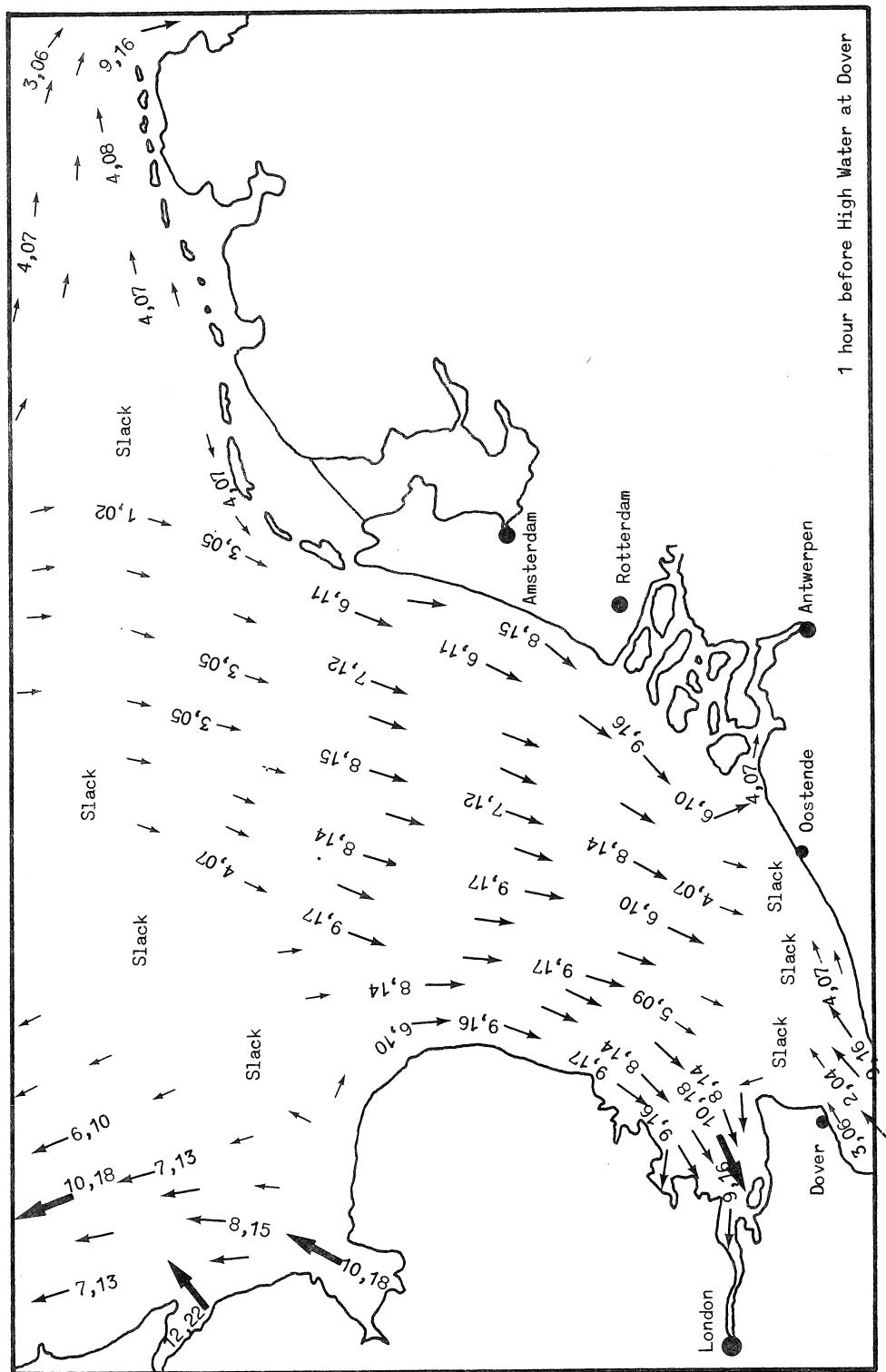


fig. 11m.

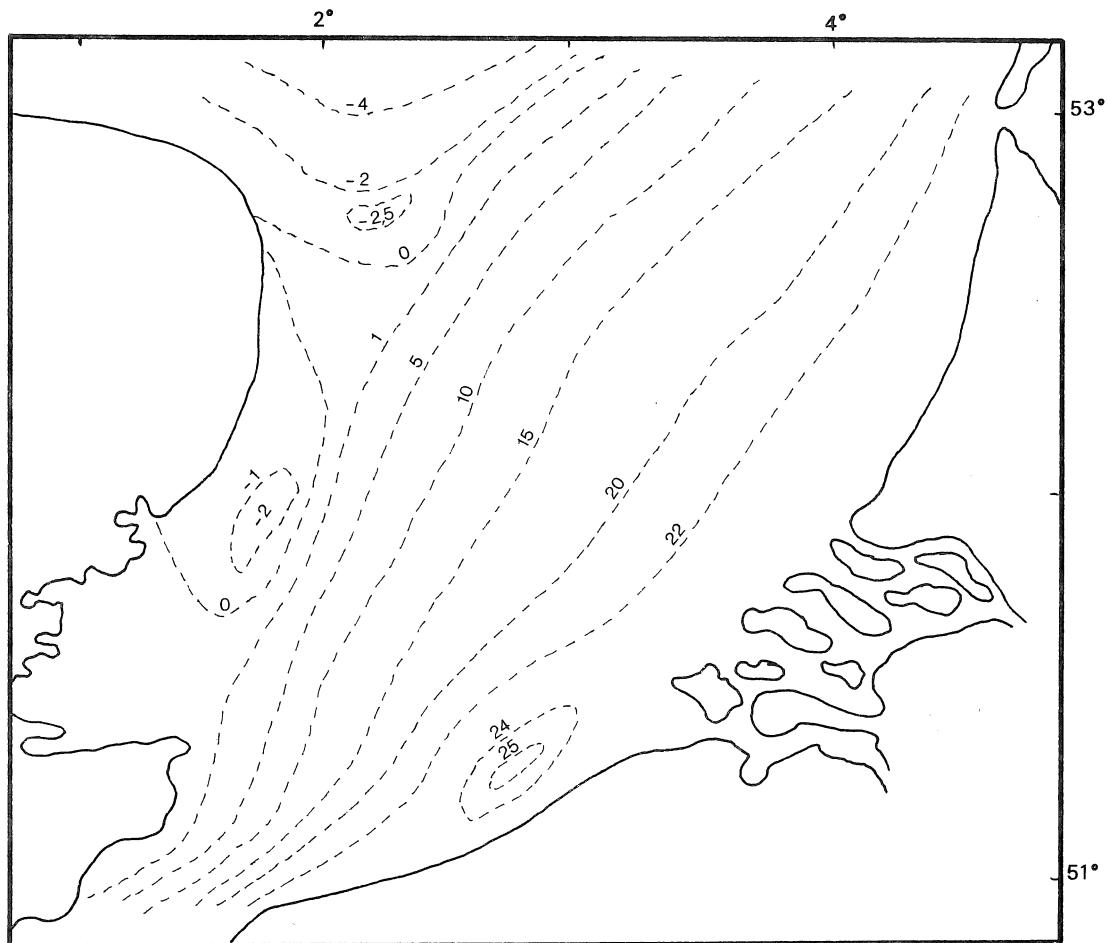


fig. 12.
Circulation résiduelle dans le Southern Bight. Lignes de courant $\psi = C^{\text{te}}$ (en $10^4 \text{ m}^3/\text{s}$)

déferlement des vagues et les variations erratiques du vent. On peut la regarder comme une superposition de tourbillons de toutes dimensions se transmettant l'énergie en cascade des échelles les plus grandes où elle est fournie aux échelles moléculaires où elle est dissipée. Dans ce processus, les tourbillons perdent le souvenir des structures imposées aux grandes échelles par les mécanismes de production de la turbulence et, à partir d'une certaine dimension de tourbillons, on peut considérer que la turbulence est homogène et isotrope et satisfait à la théorie de Kolmogorov.

Selon cette théorie, on peut associer à un tourbillon de dimension ℓ , une vitesse caractéristique v_ℓ et un temps caractéristique τ_ℓ donnés respectivement par

$$(34) \quad v_\ell \sim \varepsilon^{1/3} \ell^{1/3}$$

$$(35) \quad \tau_\ell \sim \varepsilon^{-1/3} \ell^{2/3}$$

où ε ($\text{m}^2 \text{s}^{-3}$) est le taux de transfert de l'énergie à travers la cascade.

Des tourbillons de l'ordre du mètre peuvent être considérés comme raisonnablement homogènes et isotropes. Il leur correspond des temps caractéristiques de l'ordre de la minute et des vitesses de l'ordre du centimètre par seconde. En effet, la valeur appropriée de ε étant 10^{-6} , on peut calculer (MKS) :

$$(36) \quad \ell \sim 1, \quad v_1 \sim 10^{-2}, \quad \tau_1 \sim 10^2.$$

Il n'est évidemment pas raisonnable de vouloir décrire les moindres fluctuations du milieu marin. Des variations dont les temps caractéristiques sont inférieurs à la minute ne sont pas significatives dans la grande majorité des problèmes et il paraît justifié de se borner à la valeur moyenne des variables d'état sur une période de temps de cet ordre.

Lorsqu'on fait la moyenne des équations, les fluctuations disparaissent des termes linéaires mais elles subsistent dans les termes non-linéaires et leur effet doit être paramétrisé par des formules du type (11), (12), (15) et (16).

Avec un temps d'intégration de l'ordre de la minute, il n'est pas nécessaire de définir des diffusivités différentes dans des directions différentes (isotropie statistique à l'échelle du mètre ou plus petit) et la théorie de Kolmogorov permet d'estimer la viscosité turbulente :

$$(37) \quad v \sim v_\ell \ell \sim 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Utilisant l'expression (11), on voit que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\
 (38) \quad &\sim 0 \left(\frac{vv}{d_h^2} \right) + 0 \left(\frac{vv}{d_v^2} \right)
 \end{aligned}$$

où v est une valeur caractéristique de u , d_h et d_v des longueurs caractéristiques de ses variations horizontales et verticales respectivement.

Les termes de Coriolis dans les équations (31) et (32) sont de l'ordre fv (avec $f \sim 10^{-4}$). Utilisant (37) et $d_v \sim 10$ pour une mer peu profonde, on voit que le terme de dispersion verticale est du même ordre que le terme de Coriolis. Comme les dimensions caractéristiques horizontales sont beaucoup plus grande, la dispersion "proprement turbulente" horizontale est tout à fait négligeable (il existe évidemment une dispersion horizontale mais celle-ci est, à ce stade, comprise dans le terme d'advection. On verra qu'elle correspond à des mouvements de plus grande échelle constituant une sorte de turbulence horizontale quasi-homogène et isotrope).

La condition d'incompressibilité (7) suggère que les vitesses caractéristiques horizontales et verticales sont dans le même rapport que les longueurs d_h et d_v . Dans ces conditions, les trois composantes des termes d'advection dans (31) et (32) sont du même ordre et

$$(39) \quad \nabla \cdot (u u_i) \sim \frac{v^2}{d_h} .$$

Aux ondes longues comme les marées, on peut associer une fréquence ω qui, dans la mer du Nord, est du même ordre que la fréquence de Coriolis f . Dans ces conditions :

$$(40) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim \omega u \sim f u ,$$

$$(41) \quad \nabla \cdot (u u) \sim \omega u \frac{v}{c} ,$$

utilisant (39), assimilant d_h à la longueur d'onde et introduisant la vitesse de phase c . Comme le rapport $\frac{v}{c}$ est en général petit

(< 0,1), le terme d'advection paraît négligeable. Il est bon cependant de le conserver pour deux raisons :

- i) à certains endroits (notamment près des points d'amphidromie) d_h peut être plus petit que la longueur d'onde;
- ii) l'effet moyen du terme d'advection sur la circulation résiduelle est essentiel.

Il faut noter que négliger le terme d'advection pour les marées et les tempêtes reviendrait à linéariser (31) et (32) pour ce problème. Cette simplification est cependant illusoire car les conditions aux limites à l'interface air-mer et au fond sont, de toutes façons, non-linéaires (les modèles intégrés sur la profondeur sont donc décrits par des équations non-linéaires puisqu'elles contiennent ces valeurs limites).

On a, en effet :

$$(42) \quad \tau_s = [\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}]_s \mathbf{e}_1 + [\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_3}]_s \mathbf{e}_2 = C V \|V\|$$

où V est la vitesse du vent à une hauteur de référence (10 m) et C un coefficient de *drag* donné par [Nihoul et Ronday (1976)] :

$$(43) \quad C = (0,98 + 0,14 V) 10^{-6}.$$

D'autre part,

$$(44) \quad \tau_b = [\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}]_b \mathbf{e}_1 + [\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_3}]_b \mathbf{e}_2 = D \bar{u} \|\bar{u}\|$$

où \bar{u} est la vitesse horizontale moyenne sur la profondeur et D un coefficient de *drag* donné par :

$$(45) \quad D = \frac{\alpha_0}{(1,23 + \ln \frac{0,14 H}{z_0})^2}$$

où z_0 est la longueur de rugosité, H la profondeur totale et α_0 une constante.

La détermination des courants de marées et de tempêtes et de l'élévation de la surface qui leur est associée est évidemment primordiale. En particulier, les élévations d'eau à la côte conditionnent tous les travaux de génie maritime (ports, digues, ...).

Pour d'autres problèmes (dérive et hétérogénéité du plancton, temps de résidence des polluants), on s'intéresse moins aux détails horaires ou journaliers des courants qu'à leurs moyennes sur une période relativement longue, peut-être plusieurs mois.

Ces courants, dont on a éliminé, par la moyenne, l'essentiel des courants de marée et des courants transitoires dus aux vents, sont généralement appelés "résiduels", encore que le mot "résiduel" est parfois utilisé dans des acceptations légèrement différentes et que "courants moyens" est plus clair, particulièrement si l'on spécifie la période à laquelle ils se rapportent.

En principe, les courants résiduels pourraient être déterminés en résolvant les équations (31) et (32) avec des conditions aux limites appropriées. On peut montrer, cependant qu'il est impossible, de cette façon, d'obtenir une précision suffisante. En effet, les courants résiduels sont considérablement plus petits que les courants de marées et de tempêtes. Ils sont, en réalité, à peu près du même ordre de grandeur que les erreurs commises dans la détermination de ces derniers et induites, entre autre, par l'imprécision des conditions aux limites aux frontières en mer ouverte [Nihoul et Ronday (1976)].

En prenant la moyenne des solutions de (31) et (32), on arrive, avec une erreur de 10 % sur la circulation transitoire, à une erreur de 100 % sur la circulation résiduelle.

Il en est autrement si l'on prend la moyenne des équations (31) et (32) et si l'on résout séparément les équations moyennes pour les courants résiduels avec les conditions aux limites moyennes adaptées à ces équations.

Soient en effet u^0 et u^1 le courant moyen (résiduel) et la déviation de moyenne nulle par rapport à celui-ci. On a :

$$(46) \quad u = u^0 + u^1.$$

Si la période de temps θ sur laquelle on prend la moyenne est suffisamment grande, les moyennes des dérivées temporelles $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$ peuvent être négligées (elles sont inférieures à deux fois la

vitesse maximale divisée par θ). Le champ de vitesse u^0 est dès lors décrit par des équations stationnaires.

Celles-ci s'obtiennent en prenant les moyennes de (31) et (32).

Soient

$$(47) \quad \nabla \cdot (u^0 u_1^0) + \nabla \cdot (u^1 u_1^1)_0 = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p^0}{\rho_m} \right) + f u_2^0 + D_1^0$$

$$(48) \quad \nabla \cdot (u^0 u_2^0) + \nabla \cdot (u^1 u_2^1)_0 = - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p^0}{\rho_m} \right) - f u_1^0 + D_2^0 .$$

La pression résiduel p^0 est, d'après (25), donnée par

$$(49) \quad - \frac{p^0}{\rho_m} = g x_3 + \varphi^0$$

où φ^0 est une fonction de x_1 et x_2 à déterminer.

Si ζ^0 est l'élévation résiduelle (c'est-à-dire l'élévation d'une surface conventionnelle qui se déplace verticalement avec le courant résiduel u_3^0) et si p_a^0 est la pression atmosphérique sur cette surface, on a

$$(50) \quad \varphi^0 = - \frac{p_a^0}{\rho_m} + g \zeta^0$$

$$\text{et} \quad - \frac{p^0}{\rho_m} = - \frac{p_a^0}{\rho_m} + g \eta^0$$

avec

$$(51) \quad \nabla \cdot u^0 \eta^0 = 0 \quad \text{en} \quad \eta^0 \equiv \zeta^0 - x_3 = 0 .$$

Les premiers termes des membres de gauche de (47) et (48) sont négligeables devant les seconds, lesquels sont du même ordre que les termes des membres de droite¹. Par exemple,

$$\nabla \cdot (u^1 u_1^1)_0 \sim \frac{v^1 v^1}{d_h^1} \sim 10^{-5}$$

pour $v^1 \sim 1$, $d_h^1 \sim 10^5$,

1. L'erreur sur u^0 induite par une erreur sur u^1 peut facilement s'estimer. On a

$$f \delta u^0 \sim 0 [\delta \nabla \cdot (u^1 u_1^1)] \sim 0 [\nabla \cdot (u^1 u_1^1) \frac{\delta u^1}{u^1}] \sim f u^0 \frac{\delta u^1}{u^1} .$$

D'où $\frac{\delta u^0}{u^0} \sim \frac{\delta u^1}{u^1} .$

$$fu_2^0 \sim fv^0 \sim 10^{-5}$$

pour $f \sim 10^{-4}$, $v^0 \sim 10^{-1}$.

On constate que les courants transitoires u^1 disparaissent des termes linéaires mais subsistent dans les termes non linéaires où ce sont au contraire les courants résiduels u^0 qui peuvent être négligés.

Les termes $\nabla \cdot (u^1 u_i^1)_0$ représente une accélération de la circulation résiduelle par les interactions non-linéaires des courants transitoires et particulièrement des courants de marée. C'est pourquoi le nom de "tensions de marée" a été introduit pour les désigner dans le contexte légèrement différent des modèles pré-intégrés sur la profondeur [Nihoul et Ronday (1975)].

On a déjà noté que, à résoudre les équations (31) et (32) avec les conditions aux limites appropriées, on n'obtenait virtuellement que u^1 (la contribution minime de u^0 étant de l'ordre de l'erreur). Cette solution peut être utilisée pour évaluer explicitement les "tensions de marées" et les substituer dans (47) et (48) où elles jouent le rôle de forces extérieures.

Les équations (47) et (48) sont indépendantes du temps. Elles ne nécessitent donc que des conditions aux limites. Ce sont évidemment des conditions prises en moyenne sur la période de temps qui a servi à définir u^0 qu'il convient d'imposer.

Il est intéressant de noter qu'en raison de la norme apparaissant dans la formule (44), le flux résiduel τ_b^0 devient, en première approximation linéaire en la vitesse résiduelle moyenne, c'est-à-dire

$$(52) \quad \tau_b^0 \sim C^0 \bar{u}^0.$$

Le nouveau coefficient de *drag* dépend de $\|u^1\|$ et peut être calculé en chaque point à l'aide du modèle de courants transitoires préalable.

4.- Advection et dispersion

L'analyse de l'équation (17) est beaucoup moins facile que celle des équations hydrodynamiques discutées à la section précédente.

i) Le terme d'advection $\nabla \cdot \mathbf{r}_a \mathbf{u}$ peut s'écrire, en vertu de (7), en distinguant les transports horizontaux et les transports verticaux

$$(53) \quad \nabla \cdot \mathbf{r}_a \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r}_a = (u_1 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_3})$$

Les ordres de grandeur des deux termes du membre de droite peuvent être évalués en introduisant des vitesses caractéristiques horizontale et verticale respectivement v_h et v_v et des longueurs δ_h , δ_v caractéristiques des variations respectivement horizontale et verticale de \mathbf{r}_a . On a

$$(54) \quad u_1 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_2} \sim O\left(\frac{v_h \mathbf{r}_a}{\delta_h}\right)$$

$$(55) \quad u_3 \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial x_3} \sim O\left(\frac{v_v \mathbf{r}_a}{\delta_v}\right).$$

En se basant sur l'équation (7), on avait admis

$$(56) \quad \frac{v_h}{d_h} \sim \frac{v_v}{d_v}$$

d_h et d_v étant des longueurs caractéristiques des variations de \mathbf{u} . d_v est toujours comparable à la profondeur h car la vitesse, nulle au fond et maximale en surface, présente naturellement un profil marqué sur une distance de l'ordre de h .

Ceci n'est pas nécessairement vrai de la distribution de \mathbf{r}_a qui, en présence d'une forte turbulence, peut être sensiblement uniforme sur la hauteur d'eau, entraînant $\delta_v \gg d_v \sim h$.

Les variations horizontales de \mathbf{r}_a peuvent être comparables à celles du champ de vitesse si elles résultent d'un long ajustement à celui-ci. Dans de nombreux cas, cependant, par exemple dans le domaine qui entoure un point de déversement, les gradients de \mathbf{r}_a peuvent être considérablement plus importants et

$$(57) \quad \delta_h \lesssim d_h.$$

Comparant dès lors (54), (55) et (56), on voit que, le plus souvent, l'advection horizontale domine l'advection verticale.

ii) Les apports extérieurs Q_a sont imposés au problème. Ils se font à un certain rythme que l'on peut caractériser par un temps τ_e tel que

$$(58) \quad Q_a \sim \frac{r_a}{\tau_e}$$

τ_e peut être très différent selon les circonstances.

Dans de nombreux problèmes cependant, les apports extérieurs n'affectent pas vraiment les équations d'évolution. C'est le cas des apports aux frontières ou des déversements rapides (mathématiquement instantanés). Ceux-ci interviennent respectivement dans les *conditions aux limites* et dans les *conditions initiales* et Q_a peut être négligé dans les équations.

Pour la simplicité de la discussion, on se placera désormais dans ce cas.

iii) Les interactions I_a et la migration $\nabla \cdot r_a \sigma_a$ peuvent être combinés. La migration (la sédimentation par exemple) apparaît en effet comme une interaction du premier ordre ne faisant intervenir que la variable r_a . C'est le cas également de la décroissance radioactive qui apparaîtrait dans I_a par un terme de la forme $-kr_a$. On peut introduire un temps caractéristique des interactions τ_i tel que

$$(59) \quad I_a - \nabla \cdot r_a \sigma_a \sim \frac{r_a}{\tau_i}.$$

iv) La dispersion turbulente peut être divisée en dispersion horizontale et dispersion verticale dont on peut estimer les ordres de grandeur :

$$(60) \quad \kappa \left(\frac{\partial^2 r_a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 r_a}{\partial x_2^2} \right) \sim \frac{\kappa r_a}{\delta_h^2}$$

$$(61) \quad \kappa \frac{\partial^2 r_a}{\partial x_3^2} \sim \frac{\kappa r_a}{\delta_v^2}$$

La comparaison des deux termes est difficile car, on l'a vu, δ_v dépend de l'efficacité du mélange préalable. Dans le sud de la mer du Nord où le mélange est très intense et la profondeur faible, le

temps caractéristique de la dispersion verticale est de l'ordre de

$$(62) \quad \frac{\delta_v^2}{\kappa} \sim 10^4 .$$

Bien entendu, le processus ralentit à mesure que la distribution s'uniformise (δ_v augmente) mais l'homogénéisation reste très rapide.

Il convient alors d'étudier la dispersion horizontale de la concentration moyenne sur la colonne d'eau.

Les modèles de dispersion adaptés à cette étude sont développés dans le volume 5. Un des points saillants de ces modèles est la participation dominante de certaines contributions du terme d'advection à la dispersion horizontale.

Ce résultat peut être pressenti d'une manière générale en comparant (54) et (60). Les deux termes sont dans le rapport :

$$(63) \quad \frac{v_h \delta_h}{\kappa} \gg 1 .$$

Ce n'est donc pas la diffusion turbulente proprement dite qui assure la dispersion mais l'advection par des courants irréguliers et changeants.

Ces courants présentent toute une gamme de temps et de longueurs caractéristiques, de la circulation résiduelle à l'échelle du bassin à la turbulence homogène à l'échelle du mètre et de la minute. Ils font penser à une forme de *turbulence horizontale* qui ne serait ni entièrement aléatoire (certaines structures organisées se distinguant nettement) ni parfaitement homogène et isotrope (des directions privilégiées, comme celles des marées s'y faisant clairement sentir).

C'est pourquoi, malgré d'évidentes différences, de nombreux auteurs ont proposé d'étendre, à la dispersion horizontale, des formules semblables à celles de Kolmogorov, imaginant une cascade de pseudo-tourbillons horizontaux, maintenant une constante interaction entre les différentes échelles du mouvement et assurant ainsi le mélange des eaux.

La façon la plus simple d'exposer cette théorie est de considérer le cas d'un rejet instantané ($Q_a \sim 0$) d'un contaminant passif

$(I_a - \nabla \cdot r_a \sigma_a \sim 0)$ qui reste confiné dans une couche mince homogène à la hauteur du rejet ($u_3 \frac{\partial r_a}{\partial x_3} \sim 0$; $\kappa \frac{\partial^2 r_a}{\partial x_3^2} \sim 0$). Cette situation est extrêmement improbable dans le sud de la mer du Nord, étant donné la rapidité du mélange vertical et ne pourrait concerner, dans cette région, que les premiers temps du déversement. Elle pourrait se produire dans le nord en fin de printemps ou en été à l'endroit où une thermocline saisonnière a pu se développer (e.g. figure 13). En effet, la stratification diminue considérablement la diffusivité verticale qui peut tomber à des valeurs aussi basses que $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ dans certains cas.

De toute façon, le problème considéré est d'application dans d'autres régions marines et n'est pas du tout irréalisté.

Si nous négligeons la dispersion horizontale proprement turbulente devant l'advection, l'équation (17) se réduit, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, à

$$(64) \quad \frac{\partial r_a}{\partial t} + \nabla \cdot r_a u_h = 0$$

où u_h désigne le vecteur vitesse horizontale.

Soit

$$u_h = u_c + \tilde{u}$$

où u_c désigne un courant constant de référence caractéristique de la région et de l'époque du déversement (u_c est obtenu en faisant par exemple la moyenne des courants observés sur toute la région concernée à différentes reprises pendant la même époque de l'année).

L'équation (64) devient :

$$(66) \quad \frac{\partial r_a}{\partial t} + u_c \cdot \nabla r_a + \nabla \cdot r_a \tilde{u} = 0.$$

Si on répète la même expérience de déversement plusieurs fois au même endroit, à la même époque de l'année mais dans des conditions chaque fois particulières (début du déversement à un moment différent de la marée, conditions atmosphériques différentes), on observera, par définition, la même déplacement global de la nappe avec la vitesse u_c

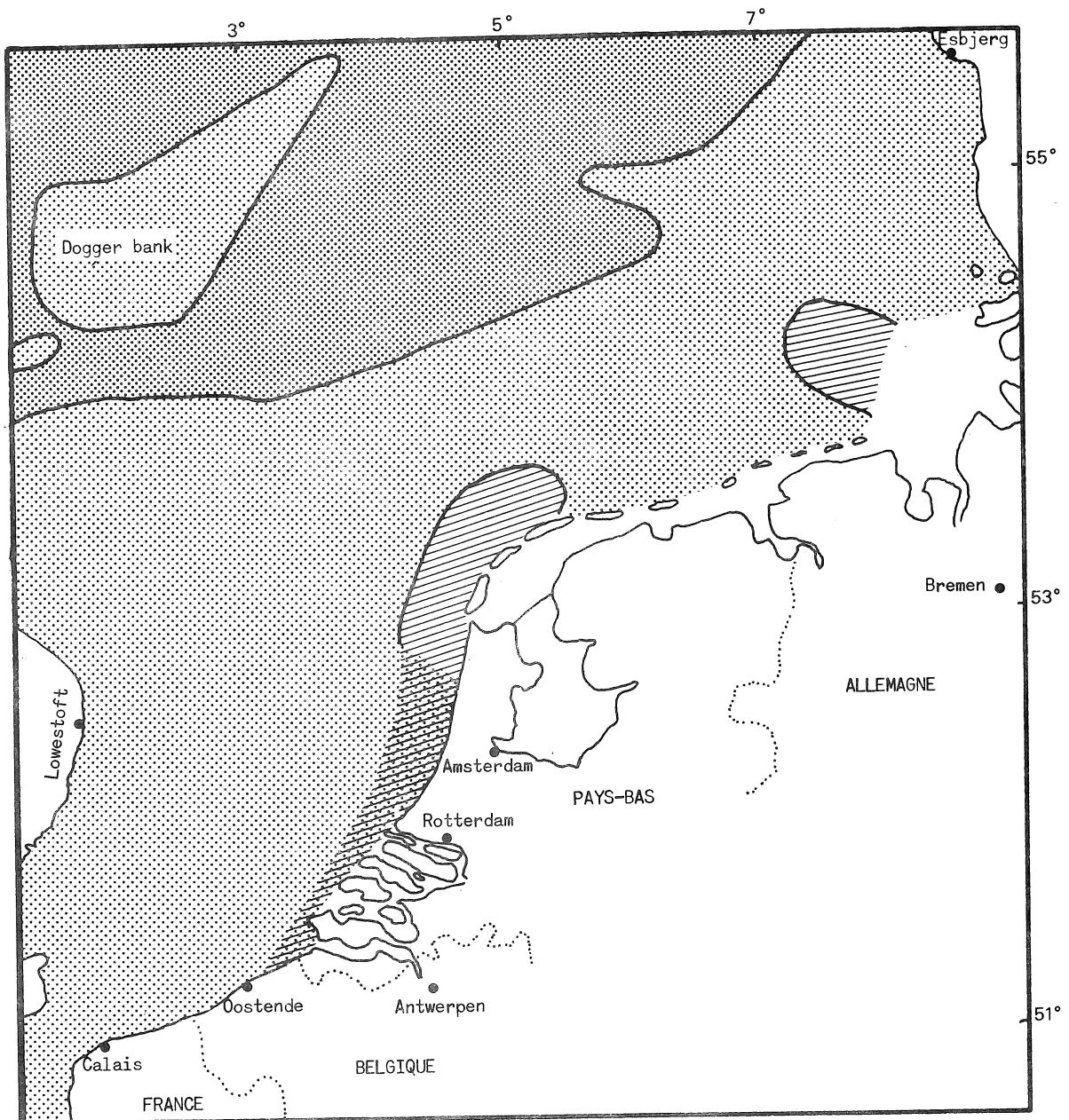


fig. 13.

- [Dotted] Région homohaline et homotherme.
- [Hatched] Région homohaline et généralement homotherme avec toutefois une possibilité de thermocline saisonnière (maximum de 1° à 7°) se développant à la fin du printemps et pouvant atteindre une profondeur maximale de 20 m en août pour disparaître à nouveau en septembre.
- [Diagonal-hatched] Région de stratification halocline avec thermoclines temporaires en juin et juillet (1° C, 5 m).

mais celle-ci sera élonguée, distordue et en définitive dispersée différemment selon l'action spécifique des courants \tilde{u} .

Dans une expérience précise, on s'intéresse évidemment aux détails de la dispersion et on souhaite pouvoir reproduire aussi fidèlement que possible la grandeur et la forme de la nappe en fonction du temps. Dans le cadre d'un modèle prédictif axé sur des objectifs de gestion, on recherche plutôt un outil permettant *d'évaluer a priori l'ampleur* du déversement et, sans nécessairement reproduire tous les détails occasionnels des processus impliqués, on veut être à même de prédire rapidement, et au moindre coût, toutes les caractéristiques distinctives du phénomène.

Ce déversement idéalisé, typique, on le connaît évidemment si l'on pouvait effectivement réaliser un très grand nombre d'expériences semblables au même point et à la même époque, et faisant la moyenne des observations, tracer l'évolution temporelle des courbes d'égales concentrations représentatives de la tendance permanente.

Cette série d'expériences n'est évidemment pas réalisable mais le concept peut être exploité mathématiquement pour déduire de (66) une équation décrivant un déversement hypothétique présentant toutes les caractéristiques permanentes essentielles des déversements réels.

Considérant, par la pensée, la série des expériences possibles, on effectue une moyenne stochastique de l'équation (66). Si c désigne la moyenne de r_a dans ce sens et \tilde{c} la déviation autour de cette moyenne, on déduit de (66), l'équation de dispersion "type" :

$$(67) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}_c \cdot \nabla c + \nabla \cdot (\tilde{c} \tilde{u})_c = 0$$

où $(\tilde{c} \tilde{u})_c$ est la moyenne stochastique du produit des fluctuations.

Le second terme de (67) représente un déplacement d'ensemble de la nappe, le troisième terme une dispersion de celle-ci par les mouvements irréguliers et variables de la mer.

On peut admettre que la moyenne stochastique, en considérant un grand nombre d'exemplaires du même problème, a "éffacé" les structures

semi-organisées et les directions privilégiées et il devient raisonnable de décrire la dispersion horizontale assurée par le terme $\nabla \cdot (\tilde{c}u)_c$ à l'aide des concepts de la turbulence.

Dans cette optique, on pose

$$(68) \quad (\tilde{c}u)_c = - \lambda \nabla c$$

introduisant un paramètre de commande λ .

On pressent que les "intermédiaires" de la dispersion sont ces "tourbillons" horizontaux, dont les dimensions sont comparables aux distances caractéristiques des gradients de concentration moyenne. A ces tourbillons, on peut associer, par la théorie de Kolmogorov un temps caractéristique :

$$(69) \quad \tau \sim \varepsilon^{-1/3} \delta_h^{2/3},$$

une vitesse caractéristique :

$$(70) \quad v \sim \varepsilon^{1/3} \delta_h^{1/3},$$

et une diffusivité :

$$\lambda \sim \alpha \varepsilon^{1/3} \delta_h^{4/3}$$

où α est un facteur numérique liant la diffusivité λ à la viscosité $\varepsilon^{1/3} \delta_h^{4/3}$ et pouvant dépendre de la nature de c . ε est, comme précédemment, le taux de transfert de l'énergie à travers la cascade.

Une difficulté se présente ici parce que la théorie de Kolmogorov et la notion même de ε reposent sur la conception d'une cascade énergétique par laquelle les grands tourbillons transfèrent leur énergie de proche en proche vers les petits tourbillons où celle-ci est dissipée.

La région concernée par un déversement peut s'étendre sur une centaine de km^2 et le modèle doit faire intervenir des tourbillons allant de 10^4 m à la limite de la turbulence.

Il n'est pas possible d'admettre dans ces conditions que toute l'énergie est fournie aux grandes échelles et simplement transmise aux plus petites. Des apports énergétiques aux échelles intermédiaires ne peuvent pas être exclus et de tels apports sont susceptibles de modifier "en cours de cascade" la valeur de ε .

Les observations semblent indiquer cependant qu'on peut séparer les tourbillons en trois catégories selon leurs tailles et associer à chacune d'elle une valeur constante de ϵ (fig. 14).

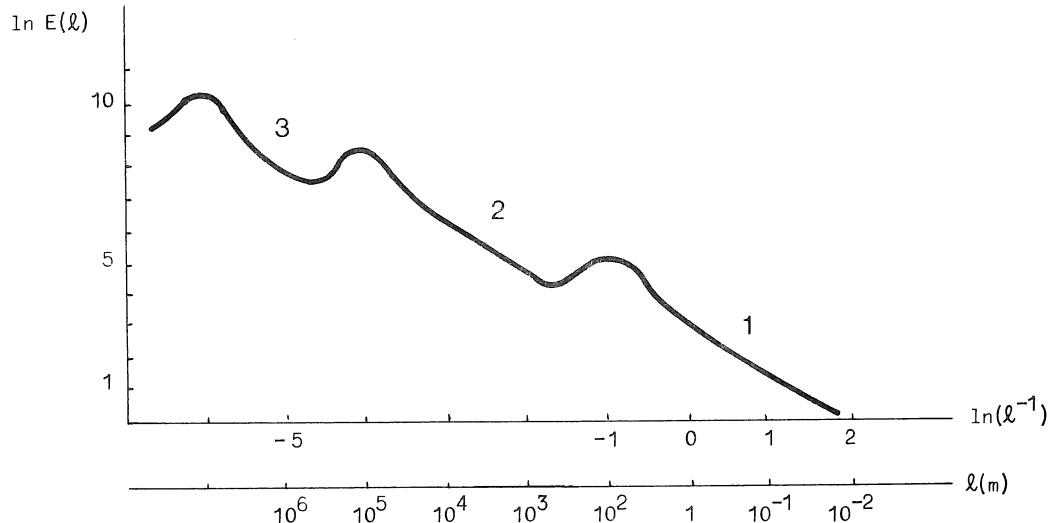


fig. 14.
Répartition de l'énergie entre les différentes échelles horizontales

Echelle ℓ (m)	Taux de transfert ϵ ($m^2.s^{-3}$)
Catégorie 1	10^{-6}
Catégorie 2	10^{-8}
Catégorie 3	10^{-10}

Dans ces conditions, pourvu qu'on change la valeur de ϵ lorsque δ_h dépasse une valeur critique, la formule (71) est applicable.

Bien qu'il soit généralement admis qu'à cause du spectre très étendu de mouvement horizontaux, la diffusivité horizontale est une fonction croissante de l'échelle du mélange, la loi en $\frac{4}{3}$ de l'équation (71) n'est pas unanimement utilisée et, sur la base d'observations particulières, différents auteurs ont proposé des formes

légèrement différentes où λ se comporte comme une puissance différente de la longueur de mélange (1 ; 1,15 ; ...).

Pour résoudre l'équation (67), il est commode de se placer dans des axes se déplaçant avec la vitesse de référence u_c .

Les nouvelles coordonnées x_1^*, x_2^* sont données par

$$(72) \quad x^* = x - u_c t .$$

Dans les axes en mouvement, la dérivée temporelle devient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} - u_c \cdot \nabla c$$

et, substituant dans (67), utilisant (68), on obtient :

$$(73) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla c) .$$

On peut considérer que la dispersion est isotrope dans les axes en mouvement et, travaillant en coordonnées polaires r, θ , on peut admettre que c est une fonction de t et de r seulement et ne dépend pas de θ .

La diffusivité λ est aussi une fonction de r puisqu'elle dépend de l'échelle du mélange ($\delta_h \sim r$). La formule (71), comme les formules du même type qui ont été proposées, peut se mettre sous la forme générale :

$$(74) \quad \lambda = \alpha r^q$$

$$(q = 1 ; 1,15 ; \frac{4}{3} ; \dots) .$$

Combinant (73) et (74), on obtient en coordonnées polaires :

$$(75) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^{q+1} \frac{\partial c}{\partial r}) .$$

On cherche une solution de la forme :

$$(76) \quad c = \gamma(t) \exp[-\sigma(t) r^m] .$$

Substituant dans (75), on trouve :

$$(77) \quad \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\sigma}{dt} r^m = m^2 \sigma^2 \alpha \gamma r^{2m+q-2} - (q+m) \alpha \gamma \sigma m r^{q+m-2} .$$

L'existence d'une solution de similitude du type (76) dépend de la possibilité de choisir m de telle manière que les mêmes puissances de r apparaissent dans les deux membres. On voit immédiatement que le seul choix possible ($q \neq 2$) est

$$q + m - 2 = 0$$

$$2m + q - 2 = m$$

et

$$(78) \quad \frac{d\gamma}{dt} = - 2 (2 - q) \alpha \gamma \sigma$$

$$(79) \quad \frac{d\sigma}{dt} = - (2 - q)^2 \alpha \sigma^2$$

Tirant σ de (79), substituant dans (78) et intégrant, on obtient :

$$(80) \quad \sigma^{-1} = (2 - q)^2 \int_0^t \alpha dt$$

$$(81) \quad \gamma = A \sigma^{\frac{2}{2-q}}$$

où A est une constante d'intégration.

On a donc

$$(82) \quad c = A \sigma^{\frac{2}{2-q}} \exp[-\sigma r^{\frac{2}{2-q}}].$$

Quand t tend vers zéro, σ tend vers l'infini et c tend vers zéro partout sauf à l'origine $r = 0$. La solution de similitude (82) est donc appropriée au problème d'un déversement instantané en $r = 0$ en $t = 0$.

Si C est la quantité totale déversée par unité de profondeur (on rappelle que le contaminant est en réalité uniformément distribué sur une mince couche horizontale), la constante d'intégration A peut être déterminée en fonction de C soit en imposant la condition initiale soit en exprimant la conservation de la masse :

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty c r dr = 2\pi \int_0^\infty c r dr = C.$$

Substituant (82) et effectuant l'intégration, on obtient :

$$(83) \quad A = \frac{(2-q)C}{2\pi \Gamma(\frac{2}{2-q})}$$

où Γ est la fonction gamma. D'où

$$c = \frac{(2-q)C}{2\pi \Gamma(\frac{2}{2-q})} \sigma^{\frac{2}{2-q}} \exp[-\sigma r^{\frac{2}{2-q}}].$$

Des formes particulières de (84) ont été utilisées par différents auteurs dans l'hypothèse où α est une constante (σ proportionnel à t^{-1}) et pour des valeurs de q égales à 0, 1 et $\frac{4}{3}$ respectivement.

On a :

i) $\alpha = C^{te}$, $q = 0$ (diffusivité constante),

$$c = \frac{C}{4\pi\alpha t} \exp(-\frac{r^2}{4\alpha t}).$$

ii) $\alpha = C^{te}$, $q = 1$ (diffusivité linéaire) [α est appelé dans ce cas la vitesse de diffusion $\alpha \sim 10^{-2}$ m/s],

$$c = \frac{C}{2\pi\alpha^2 t^2} \exp(-\frac{r}{\alpha t}).$$

iii) $\alpha = C^{te}$, $q = \frac{4}{3}$ [diffusivité de Kolmogorov-Ozmidov, formule (71)],

$$c = \frac{C}{6\pi t^3} (\frac{9}{4\alpha})^3 \exp(-\frac{9r^{2/3}}{4\alpha t}).$$

L'équation (84) montre que la concentration au centre de la nappe ($r = 0$) est donnée par :

$$(88) \quad c_0 = \frac{(2-q)C}{2\pi \Gamma(\frac{2}{2-q})} \sigma^{\frac{2}{2-q}}.$$

Combinant (84) et (88) et posant

$$(89) \quad n = \ln \ln \frac{c_0}{c}$$

$$(90) \quad \xi = \ln \frac{r}{r_1}$$

$$(91) \quad \varphi(t, q) = \ln \sigma r_1^{2-q} = \ln \frac{r_1^{2-q}}{(2-q)^2 \int_0^t \alpha dt}$$

où r_1 est une valeur de référence de r introduite pour rendre les variables sans dimensions, soit la plus petite valeur de r où les concentrations sont effectivement mesurées, on obtient :

$$(92) \quad n = (2 - q)\xi + \varphi.$$

Cette formulation convient particulièrement bien pour interpréter les observations. En effet, n peut être aisément calculé en fonction de ξ à partir du relevé de la tache de polluant à un instant quelconque. Sur un diagramme de n en fonction de ξ tous les points expérimentaux doivent se trouver sur une même droite. La pente de la droite détermine q et par conséquent la forme la plus appropriée de la diffusivité λ .

La figure 15 montre les diagrammes obtenus lors de trois déversements expérimentaux en mer du Nord. La valeur $q = 0$ semble la plus proche de la réalité même si, dans les premiers temps de

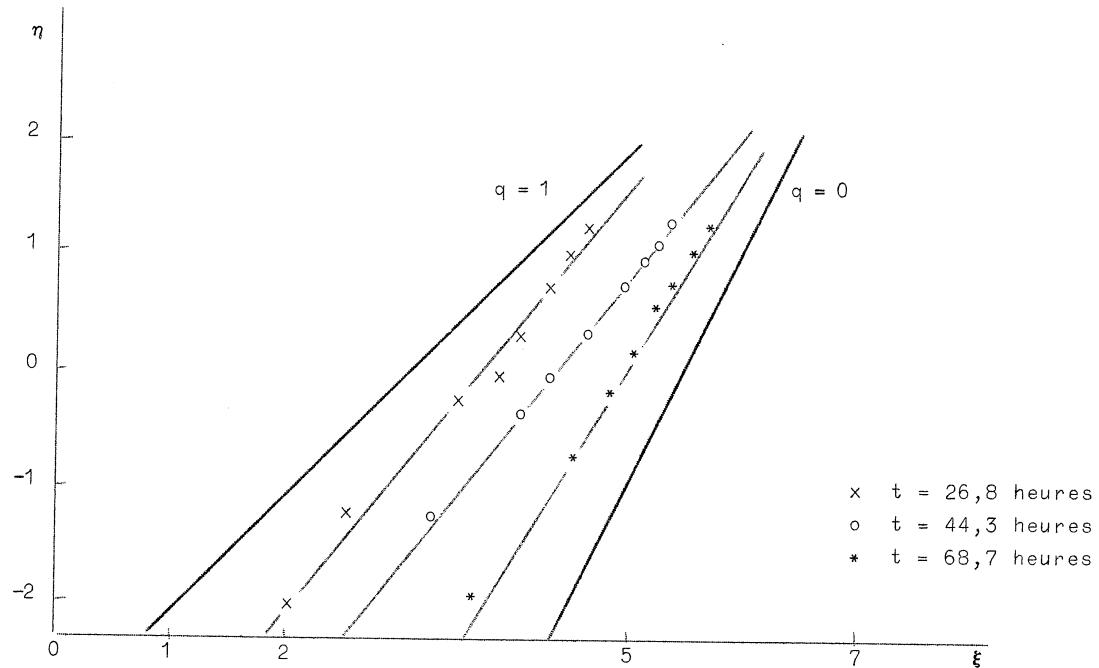


fig. 15a.
Expérience de diffusion en mer du Nord
Diagramme $n-\xi$ ($r_1 = 10$ m)

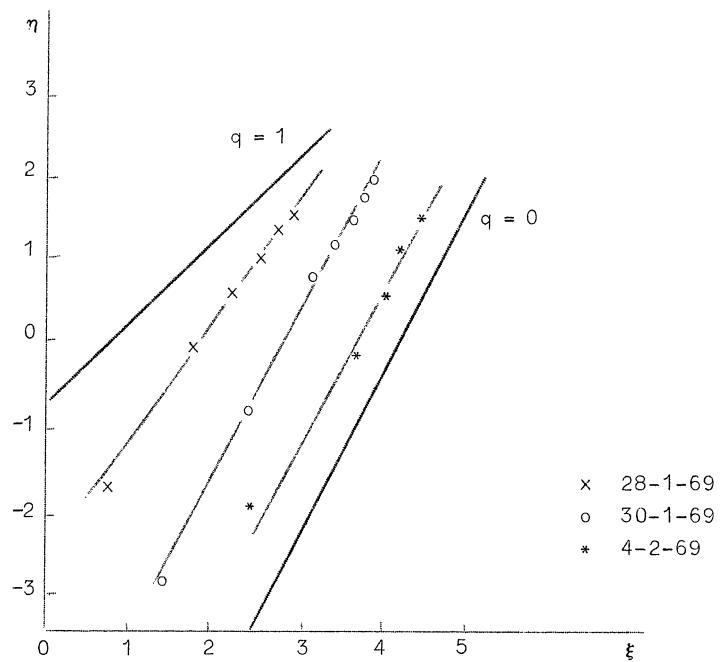


fig. 15b.
Expérience de diffusion dans le Southern Bight
Diagramme η - ξ
($r_1 = 100$ m)

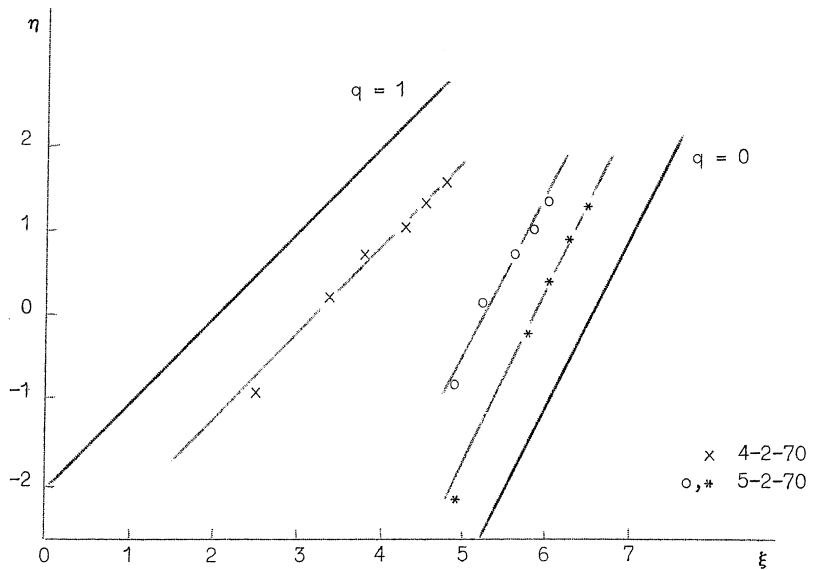


fig. 15c.
Expérience de diffusion en mer du Nord (au large de la côte du Yorkshire)
Diagramme η - ξ
($r_1 = 10$ m)

l'expérience, les droites s'inclinent vers $q = 1$ ou $q = \frac{4}{3}$. La valeur $q = 0$ correspond à une diffusivité qui ne dépend pas de l'échelle horizontale de la nappe. Cette observation confirme l'analyse faite au début de cette section : la dispersion verticale est rapide et le schéma de dispersion pseudo-turbulente horizontale n'est pas applicable. Il convient d'étudier la dispersion horizontale de la concentration moyenne sur la profondeur. Les modèles qui seront présentés au volume 5 montreront qu'effectivement la diffusivité qu'il appartient d'associer à ce type de dispersion est fonction de la vitesse du courant et de la profondeur mais ne varie pas avec l'échelle horizontale du phénomène.

5.- Interactions et translocations

Un véritable modèle chimique et écologique exige la solution de l'équation (17) en tenant compte non seulement des effets hydrodynamiques (advection, sédimentation, dispersion) mais également des interactions rassemblées dans le terme I_a . En général, ces interactions impliquent d'autres variables r_β , r_γ , ... et des équations analogues à l'équation (17), décrivant l'évolution de ces variables associées, doivent être résolues en parallèle avec l'équation (17) pour r_a . On a donc un système d'équations aux dérivées partielles à résoudre. Celui-ci peut constituer un fardeau numérique et il est impérieux de restreindre les interactions prises en cause aux plus essentielles d'entre elles. Une analyse soignée des corrélations significatives et des ordres de grandeurs, fondée sur l'exploitation de la base de données, est ici particulièrement indispensable.

Souvent, il est économique d'approcher le problème par ses deux extrêmes et de développer d'une part des modèles boîtes où, les effets hydrodynamiques ayant disparu dans une intégration spatiale complète, les interactions sont mises en exergue et, d'autre part, des modèles de dispersion passive où l'effet global des interactions est pris en

compte par un terme de production ou de destruction qui n'est fonction que de la variable r_a considérée.

En réalité, ces deux approches simplifiées trouvent toutes deux leur origine dans la difficulté de paramétriser les lois d'interactions. C'est pourquoi, tandis que les modèles de dispersion passive les résument sommairement, les modèles boîtes évitent de devoir les modéliser en chaque point et se contentent de les représenter en moyenne pour l'ensemble d'une région donnée.

En fait, le problème est à la fois simple et complexe. Il est simple parce que les interactions qui interviennent dans le modèle sont des *translocations* qui résument, dans un modeste transfert d'un compartiment à un autre, un entrelacement de réactions multiples et parce que les lois qui gouvernent les réponses des familles et des agrégats sont toujours infiniment plus élémentaires que celles qui gouvernent les parties qui les constituent.

Le problème est complexe cependant parce que les lois des *translocations* ne peuvent pas être déduites, de façon rationnelle, des lois chimiques et écologiques qui gouvernent les différentes réactions qui les composent. En effet, la cinétique nécessaire, si elle existe souvent en laboratoire, n'est pas toujours adaptée au milieu marin, et, de toutes façons, le volume d'équations chimiques et biochimiques qu'il faudrait combiner rendrait l'aventure sans issue.

Il faut paramétriser directement les *translocations* en se guidant de ses connaissances chimiques et écologiques, en s'aidant de l'analyse des données et de leurs corrélations et en recherchant la confirmation de chaque hypothèse dans un dialogue permanent entre les prédictions du modèle et les observations.

En réalité, il semble que les *translocations*, qu'elles soient chimiques ou écologiques, obéissent toutes à des lois simples que l'on peut construire en combinant de façon appropriée (par sommes et produits) différentes formes d'un noyau fondamental : la loi de Michaelis-Menten-Monod; un peu comme on reconstitue une fonction périodique à l'aide de sinus ou de cosinus.

La fonction de Michaelis-Menten-Monod s'écrit pour une variable r quelconque :

$$(93) \quad I = a \frac{r}{b + r}$$

où a et b sont des paramètres de commande.

On note immédiatement que cette loi en contient beaucoup d'autres classiques. Par exemple, si $r \ll b$, (93) devient

i) en première approximation :

$$(94) \quad I = \frac{a}{b} r \quad (\text{loi linéaire});$$

ii) en seconde approximation :

$$(95) \quad I = \frac{a}{b} r \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (\text{loi quadratique});$$

si $r \gg b$, (93) devient

iii) en première approximation :

$$(96) \quad I = a \quad (\text{loi constante});$$

iv) en seconde approximation :

$$(97) \quad I = a \left(1 - \frac{b}{r}\right).$$

La forme de la fonction de Michaelis-Menten-Monod se comprend facilement. On s'attend en effet à ce que le taux de translocation dépende des concentrations des "réactifs" chimiques ou écologiques dans les compartiments en présence. Plus ceux-ci sont disponibles, plus rapide devrait être le transfert. Par exemple, le transfert d'éléments nutritifs du compartiment dissous au compartiment phytoplancton doit procéder d'autant plus rapidement que la concentration des nutrients est grande et que la biomasse du phytoplancton est importante.

Le taux de transfert cependant ne peut augmenter indéfiniment avec les concentrations protagonistes. Pour garder l'exemple précédent, il y a une limite physique à la quantité de nourriture que le phytoplancton peut absorber et, par ailleurs, l'accroissement de sa biomasse

finit par faire écran à la lumière et à diminuer sa productivité. C'est cet effet de saturation que traduit le dénominateur de (93)¹. Il augmente d'autant moins rapidement quand r est grand et la limite pour r tendant vers l'infini est une constante.

Selon les valeurs des paramètres de commande, les formes de Michaelis-Menten-Monod peuvent évidemment dégénérer en des lois plus simples. C'est ainsi par exemple qu'en multipliant deux expressions du type (94) on retrouve la relation bi-linéaire proposée par Lotka et Volterra pour l'interaction proie-prédateur.

Pichot (1973) donne deux exemples de dégénérescence dans son modèle de productivité du bassin de Chasse d'Ostende :

i) l'absorption des nutriments par le phytoplancton dépend des nitrites et des nitrates mais pas de la concentration en phosphate qui est 20 fois plus grande que la valeur de saturation;

ii) le *grazing* n'est pas affecté par la biomasse du phytoplancton qui excède la valeur correspondant au taux de nutrition maximum du zooplancton.

Adam (1973) a étudié la sensibilité des équations d'évolution aux valeurs des paramètres de commande a_i , b_i apparaissant dans les noyaux de Michaelis-Menten-Monod et conditionnant l'apparition de formes dégénérées éventuelles pouvant conduire à une complète linéarisation du système.

Etudiant le cycle du phosphore dans le bassin de Chasse d'Ostende, Adam étudie l'évolution temporelle de six variables représentant les quantités totales de phosphore dans six compartiments; respectivement x_1 pour les phosphates dissous dans la colonne d'eau, x_2 pour les suspensions inertes, x_3 pour les phosphates dissous dans les eaux interstitielles, x_4 pour les sédiments de fond, x_5 pour le plancton et x_6 pour le benthos. Les translocations sont formulées à l'aide de sommes et de produits de noyaux de Michaelis-Menten-Monod.

1. L'application à la chimie proprement dite paraît moins universelle mais il faut se souvenir qu'une translocation est l'aboutissement de nombreuses réactions et que la translocation finale risque d'être freinée au-delà de certaines valeurs des concentrations par la vitesse des étapes intermédiaires.

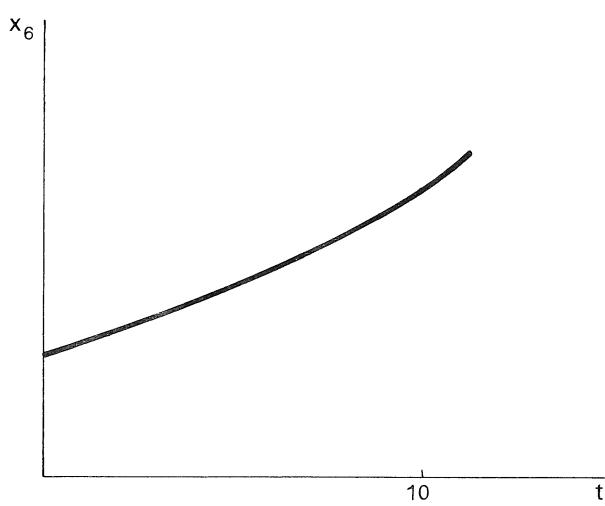
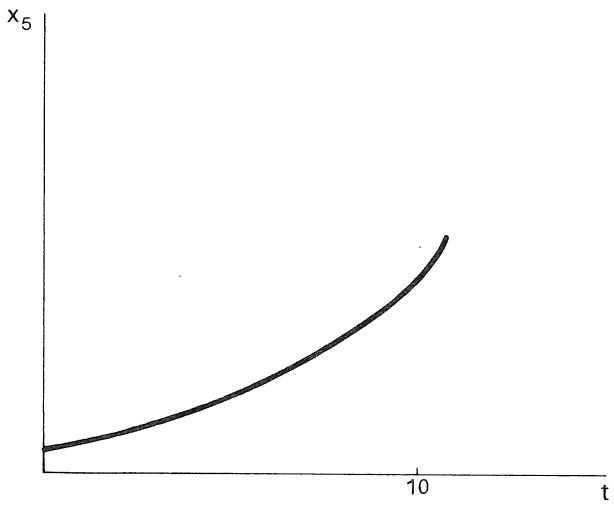
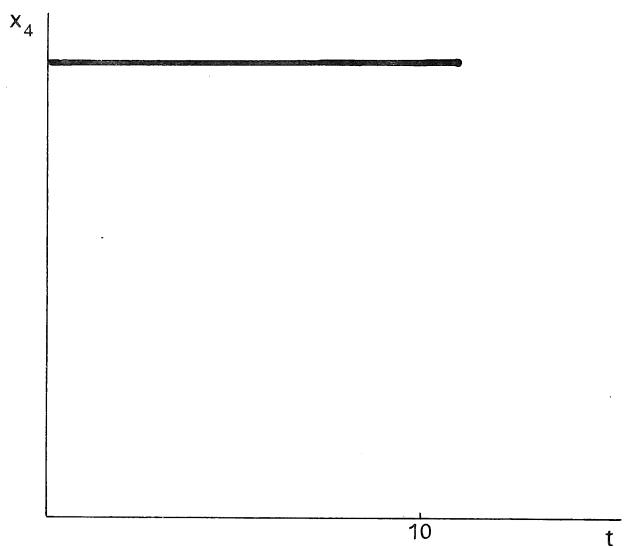
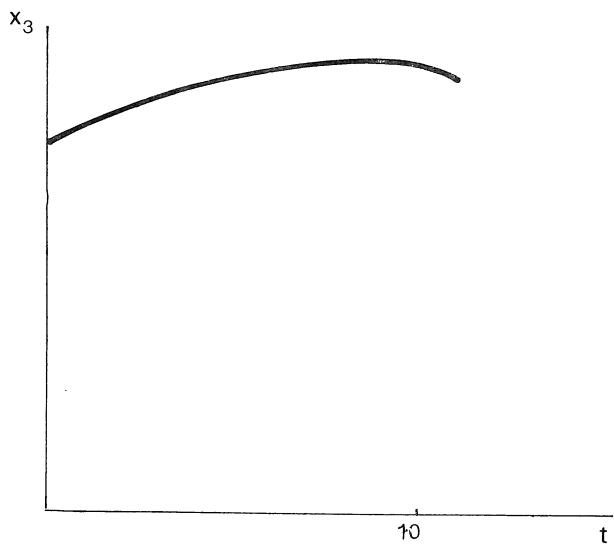
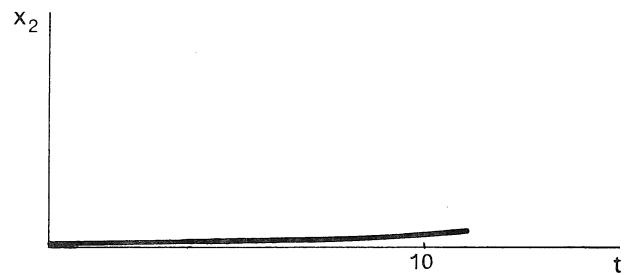
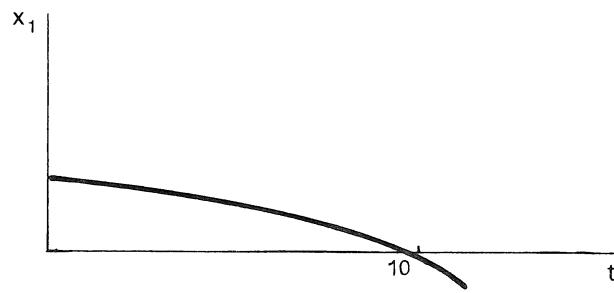


fig. 16a.

Evolution de six formes différentes de phosphore dans un bassin marin fermé, dans l'hypothèse de translocations complètement linéaires.

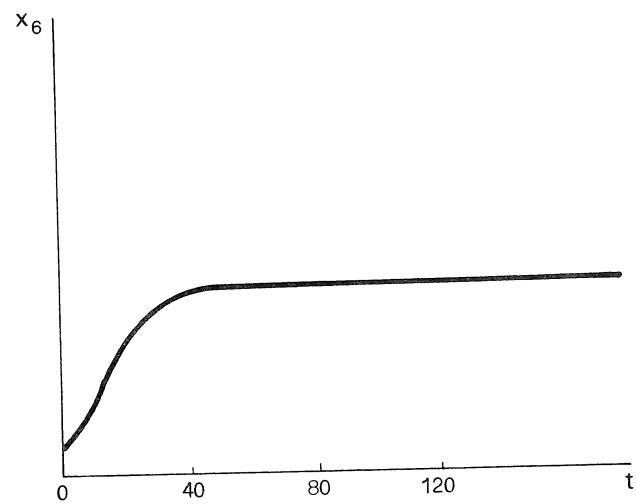
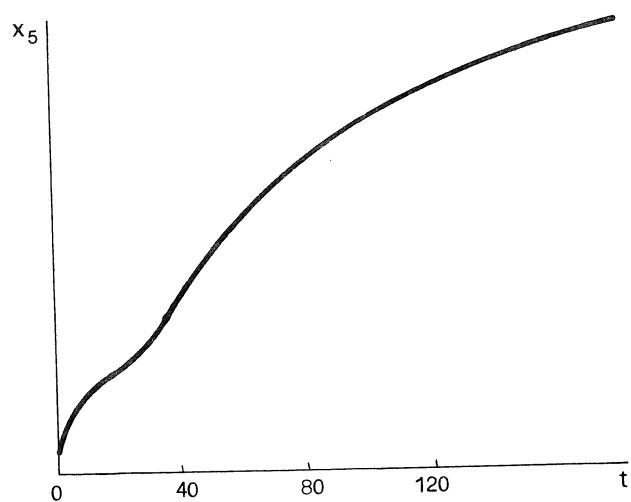
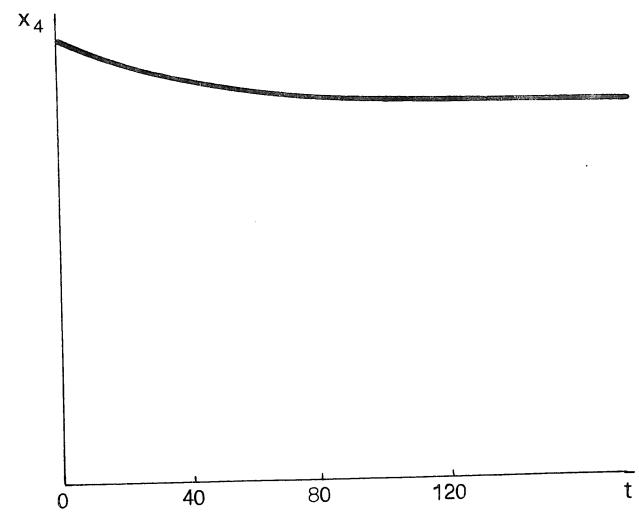
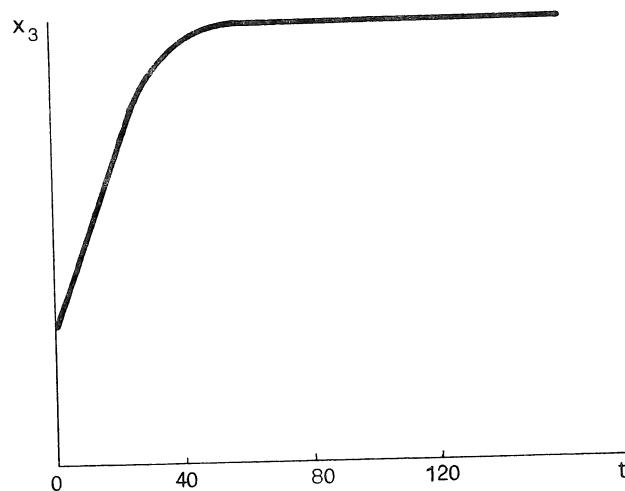
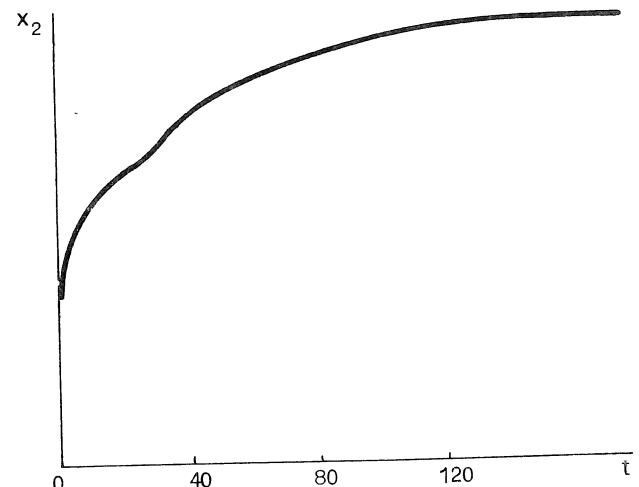
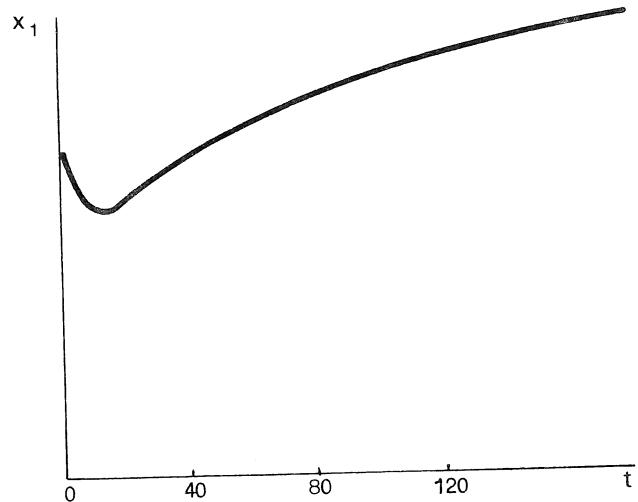


fig. 16b.

Evolution de six formes différentes de phosphore dans un bassin marin fermé, dans l'hypothèse de translocations quadratiques bi-linéaires.

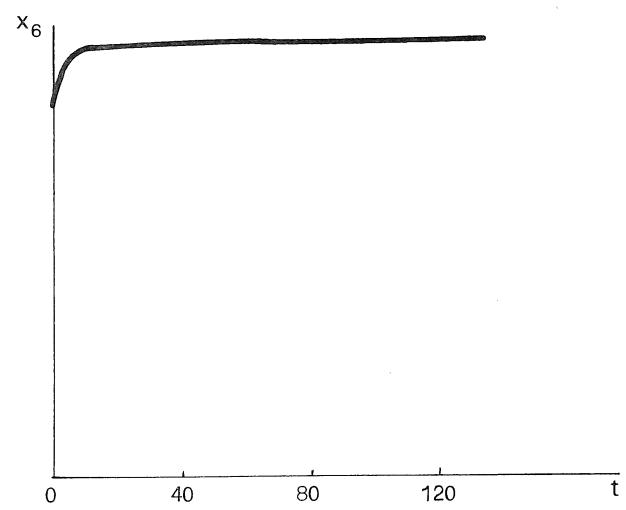
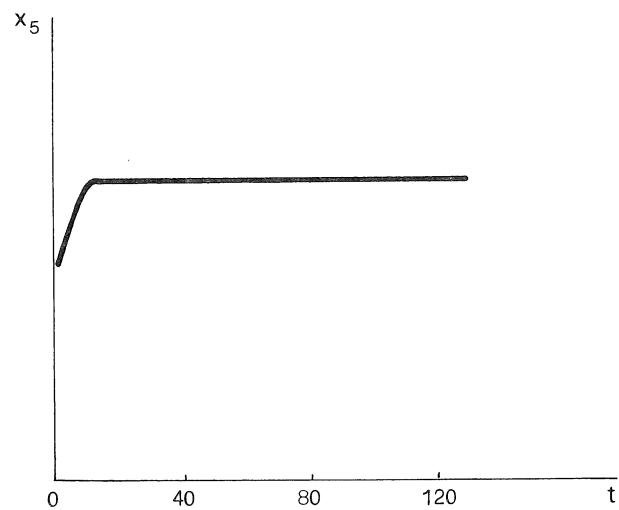
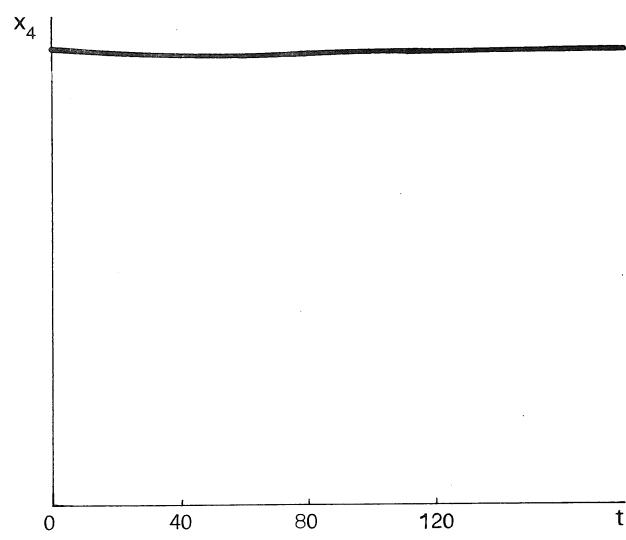
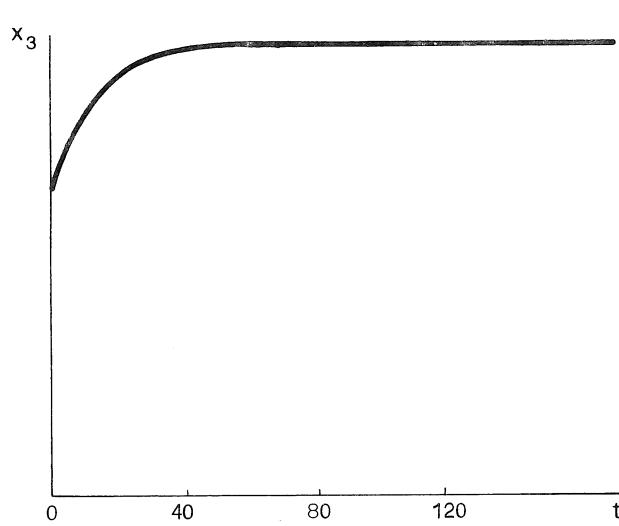
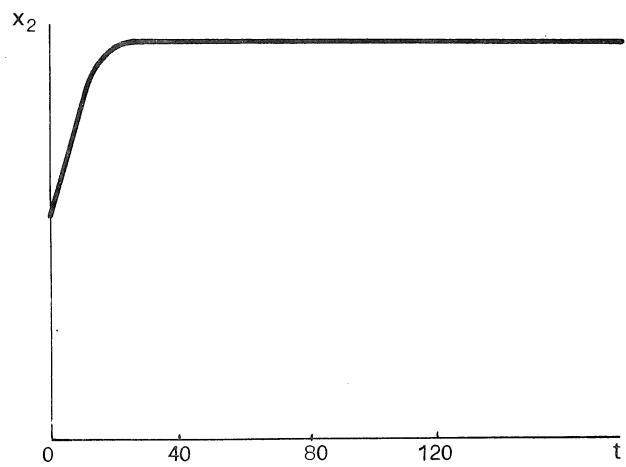
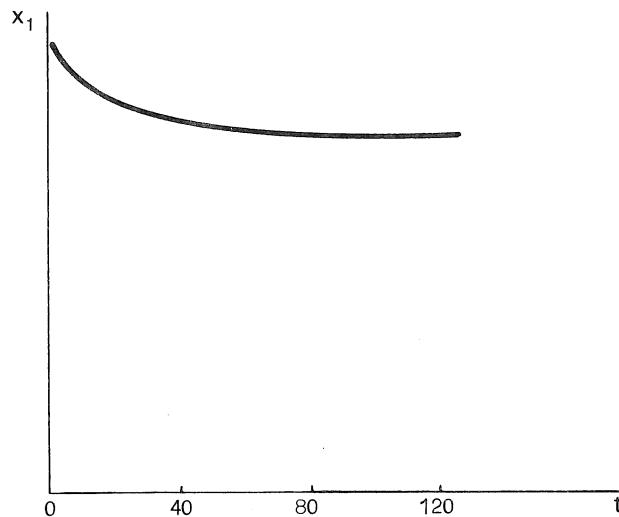


fig. 16c.

Evolution de six formes différentes de phosphore dans un bassin marin fermé,
dans l'hypothèse de translocations fortement non-linéaires.

La figure 16 montre les résultats de la simulation dans trois cas typiques :

16a.- équations complètement linéarisées;

16b.- équations partiellement linéarisées contenant des termes d'interactions quadratiques bi-linéaires;

16c.- équations complètement non-linéaires.

L'unité de temps est le jour.

Les défauts des équations complètement linéarisées sont évidents : croissances illimitées, concentrations négatives, ...

Comparant les deux systèmes non-linéaires, on voit que les variations temporelles sont plus prononcées dans le cas quadratique-bilinéaire. Dans le cas fortement non-linéaire, un état stationnaire est atteint rapidement.

On voit, par conséquent, que les paramètres de commande peuvent modifier radicalement la réponse du système. Leurs valeurs peuvent varier considérablement d'une région à l'autre. Il faut les ajuster aux conditions du modèle et ceci nécessite une base de données importante qui fait encore défaut.

On commence à discerner l'influence de certains facteurs locaux (température, visibilité, ...) sur les paramètres mais on ne possède pas encore assez d'informations pour évaluer leurs variations spatiales. C'est ce qui justifie le recours à des modèles boîtes ne faisant intervenir que des valeurs moyennes prises sur toute une région.

Lorsqu'on possède un nombre suffisant de données expérimentales, on peut *optimiser* les paramètres, c'est-à-dire rechercher, dans les limites de valeurs que leur autorisent les observations, celles qui rendent la solution du modèle théorique aussi proche que possible de la distribution expérimentale.

Cette optimisation se fait très élégamment sur un calculateur hybride et, à titre d'exemple, illustrant les possibilités et les servitudes des modèles d'interactions, il est intéressant de terminer ce chapitre par une brève discussion d'un modèle de productivité primaire en mer du Nord.

Le modèle conçu par Steele, adapté par Lassen et Nielsen, a été implanté sur ordinateur hybride par Droissart et Smitz [Steele (1958), Lassen et Nielsen (1972), Droissart et Smitz (1973), Nihoul (1975)].

En appelant $N(t)$ la concentration en phytoplancton et $C_p(t)$ la concentration en phosphate, le système d'équations s'écrit :

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = [\bar{p}(t) f(C_p) - k(t)] N \end{array} \right.$$

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_p}{dt} = - \frac{v W_c}{Z_m} p(t) f(C_p) N - m(t) (C_p - C_p^0) \end{array} \right.$$

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} k(t) = m(t) + g Z(t) + \frac{v}{Z_m} \end{array} \right.$$

où t varie de 0 à 1 an. N^0 représente la concentration initiale en phytoplancton (le 1er janvier), C_p^0 la concentration initiale en phosphate, $\bar{p}(t)$ le taux de production du phytoplancton, $f(C_p)$ la réduction du taux de croissance due à une concentration non-optimale en nutriments, $m(t)$ le coefficient de mélange dans la colonne d'eau, $g Z(t)$ la consommation du phytoplancton par le zooplancton, $\frac{v}{Z_m}$ le passage du phytoplancton dans la couche d'eau inférieure,

$$\frac{v W_c}{Z_m} \bar{p} f(C_p)$$

la consommation en phosphate; $\bar{p}(t)$, $g Z(t)$ et $m(t)$ sont des fonctions connues.

La résolution de ce type de problème est classique sur calculateur analogique. Cependant, il est difficile, vu leur forme, d'engendrer analogiquement les fonctions \bar{p} , $g Z$ et m . Le calculateur hybride engendre ces fonctions par le calcul digital, sous forme de tables; le transfert vers le système analogique se fait au moyen de dispositifs spéciaux.

La mise à l'échelle

Avant de commencer toute résolution, il faut ramener toutes les variables (et en particulier N et C_p) à des valeurs comprises entre - 1 et + 1, l'unité représentant la valeur maximale admissible sur

le calculateur (10 volts). Pour augmenter la précision relative, on veillera à ce que les valeurs maximales des nouvelles variables ainsi obtenues approchent l'unité.

Un rapide essai donne : $N_{\max} \sim 5 \times 10^4$, $C_{p_{\max}} \sim 0,7$. D'autre part, $\bar{p}_{\max} \sim 8400$, $m_{\max} \sim 2500$, $k_{\max} \sim 3360$.

On choisit également une correspondance entre temps analogique et temps réel.

$$(1 \text{ an})_{\text{réalité}} = (2.000 \text{ s})_{\text{analogique}}$$

(ce changement d'échelle-temps sera discuté ultérieurement).

En effectuant les changements de variables suivant : $N' = 10^{-5} N$, $C'_p = \frac{C_p}{0,7}$, $p' = \frac{p}{8400}$, $m' = \frac{m}{2500}$, $k' = \frac{k}{3360}$ et en revenant aux variables non primées, le système d'équations devient :

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = 10 [0,42 p f(0,7 C_p) - 0,168 k] N \end{array} \right.$$

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_p}{dt} = - 10 \times 0,5804 p f(0,7 C_p) N - 1,25 m (C_p - C_p^0) \end{array} \right.$$

Conditions initiales

$$C_p^0 = 1, \quad N^0 = 10^4 \quad (\text{arbitraire}) \quad \text{avec} \quad f(C_p) \quad \text{qui vaut :}$$

Premier cas (modèle de Steele)

$$f(C_p) = \begin{cases} 1 & \text{si} & C_p > 0,8571 \\ \frac{C_p}{0,8571} & \text{si} & C_p < 0,8571 \end{cases}$$

Deuxième cas (modèle de Lassen)

$$f(C_p) = \phi(a, \sigma^2, C_p) \quad \text{où} \quad \phi \quad \text{est la distribution de Gauss cumulée.}$$

Génération de fonctions

L'intervalle temporel est fractionné en 100 parties. Les fonctions k , p et m ($k = g Z + m + \frac{v}{Z_m}$) sont calculées digitale-ment et rangées en mémoire sous forme de vecteurs à 101 composantes (tables). A chacun des intervalles de temps, on injecte dans le système analogique la valeur correspondante de la fonction.

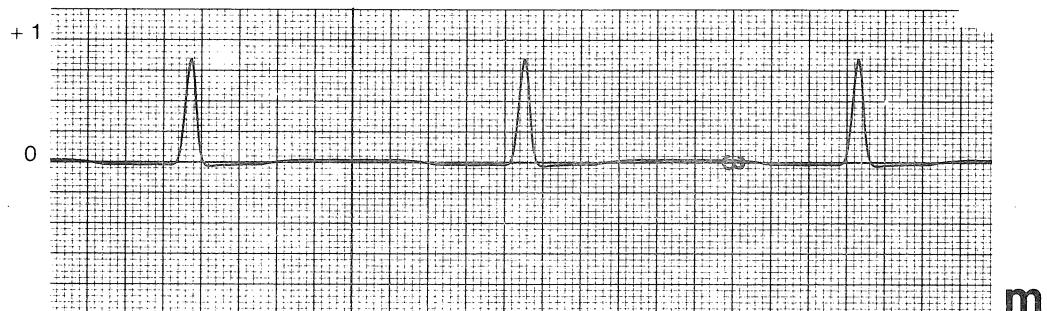
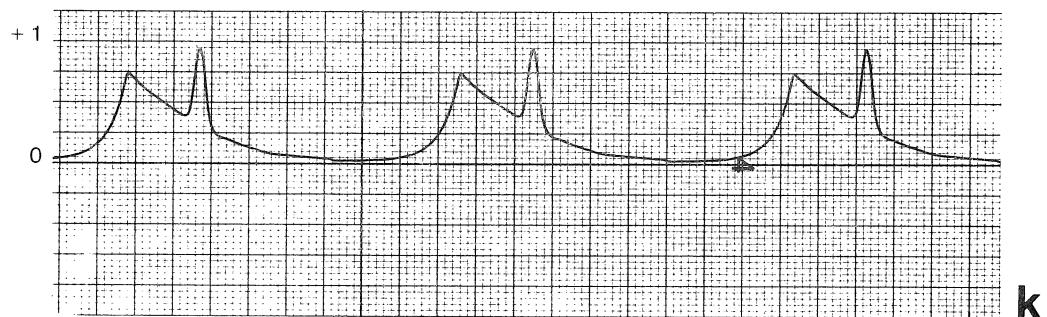
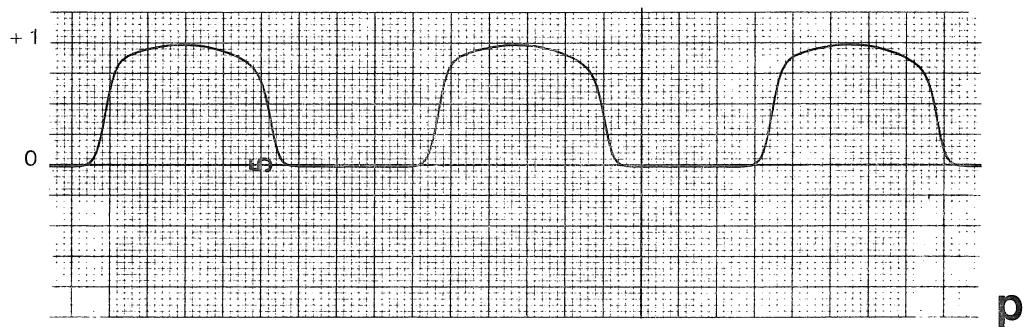


fig. 17.

Valeurs des fonctions p , k , m sur trois périodes

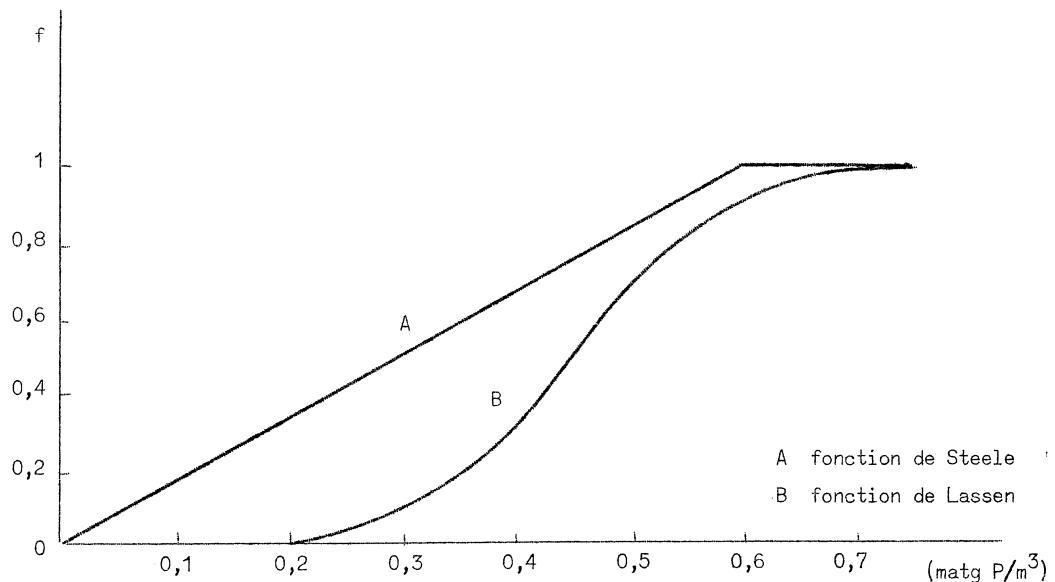


fig. 18.
Limitation du taux de production par la concentration en phosphate

On engendre ainsi des fonctions-escaliers qui approchent les fonctions réelles avec d'autant plus de précision que le nombre de points choisi est élevé.

Pour exprimer la discontinuité de $f(C_p)$ (premier cas), on utilise un comparateur dont la sortie est au niveau logique 1 (ou 0) si la somme des entrées est positive (négative). La fonction $f(C_p)$ en distribution de Gauss (deuxième cas) est donnée par un générateur de fonction analogique à 16 points.

Les fonctions p , k et m engendrées par tables sont représentées à la figure 17. Les fonctions $f(C_p)$ (premier et deuxième cas) sont données à la figure 18.

Choix du temps d'exécution

En plus du mode standard, existent trois autres modes qui permettent d'accélérer l'exécution d'un facteur 10, 1.000 ou 10.000.

Pour choisir le temps d'exécution, il faut respecter plusieurs critères :

i) Il doit être le plus court possible, afin d'optimiser l'utilisation de la machine.

ii) Il ne peut être trop réduit. A chacun des 100 pas, on injecte des valeurs obtenues à partir de tables mises en mémoire; le temps de transfert doit être négligeable par rapport au pas temporel choisi.

iii) Il doit être adapté au mode de visualisation et d'enregistrement choisi.

Afin de respecter ces critères, on a adopté le changement d'échelle-temps suivant :

$$(1 \text{ an})_{\text{réalité}} = (2.000 \text{ s})_{\text{analogique}}$$

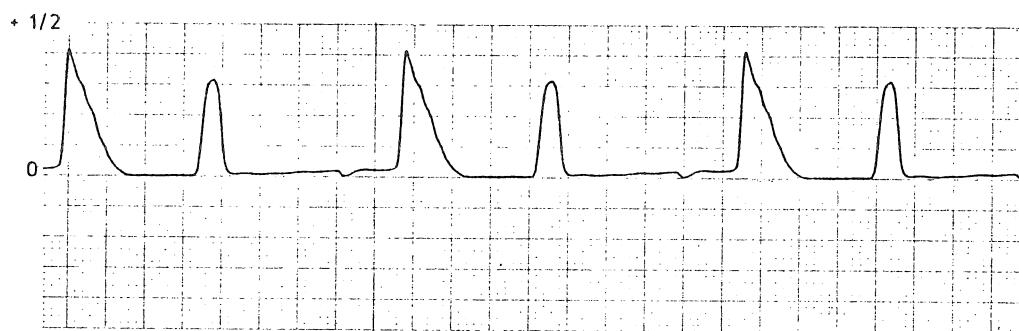


fig. 19a.

Variation de la concentration en phytoplancton N sur trois périodes lorsqu'on utilise pour $f(C_p)$ la fonction de Steele.

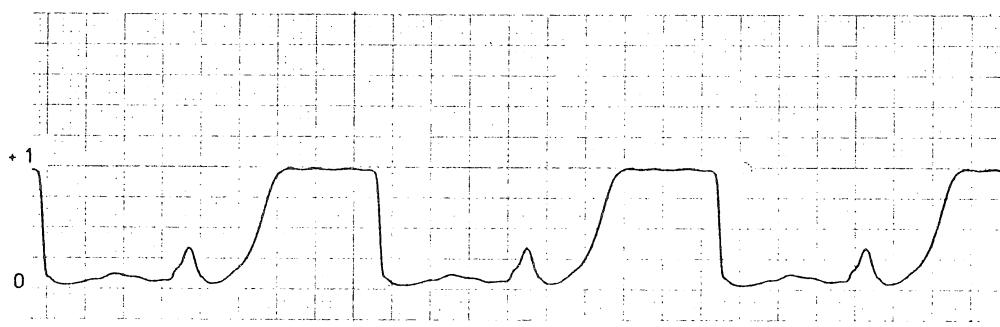


fig. 19b.

Variation de la concentration en phosphate C_p sur trois périodes lorsqu'on utilise pour $f(C_p)$ la fonction de Steele.

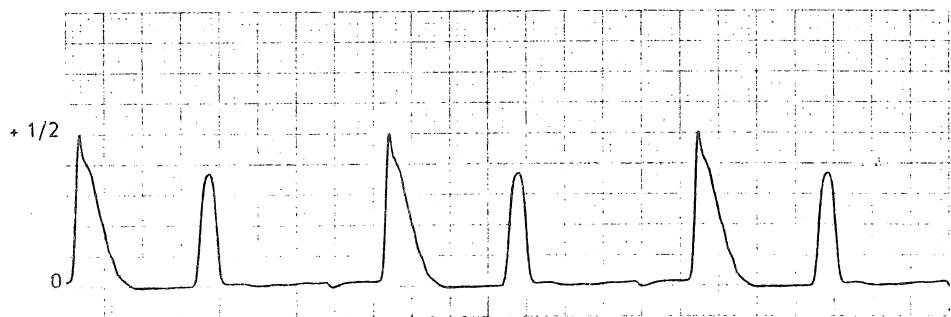


fig. 20a.

Variation de la concentration en phytoplancton N sur trois périodes lorsqu'on utilise pour $f(C_p)$ la fonction de Lassen.

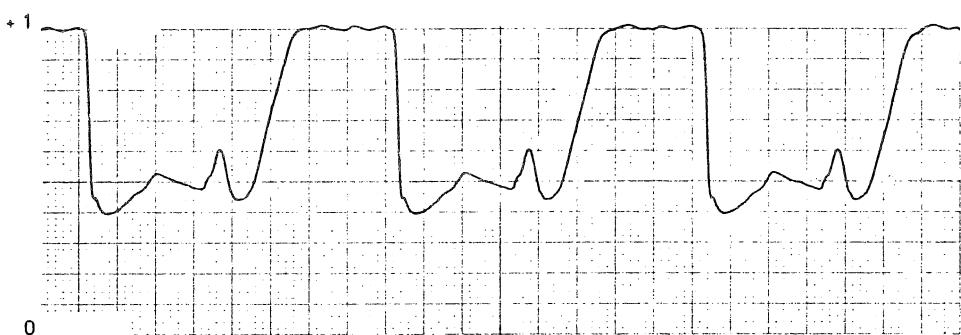


fig. 20b.

Variation de la concentration en phosphate C_p sur trois périodes lorsqu'on utilise pour $f(C_p)$ la fonction de Lassen.

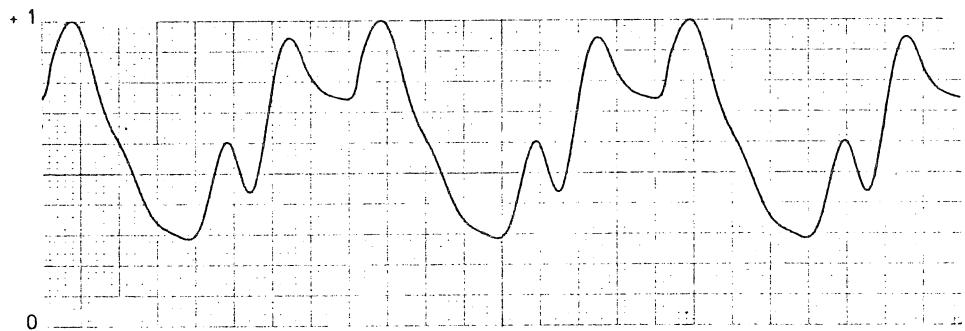


fig. 21.

Courbe expérimentale de la variation en phosphate sur trois périodes

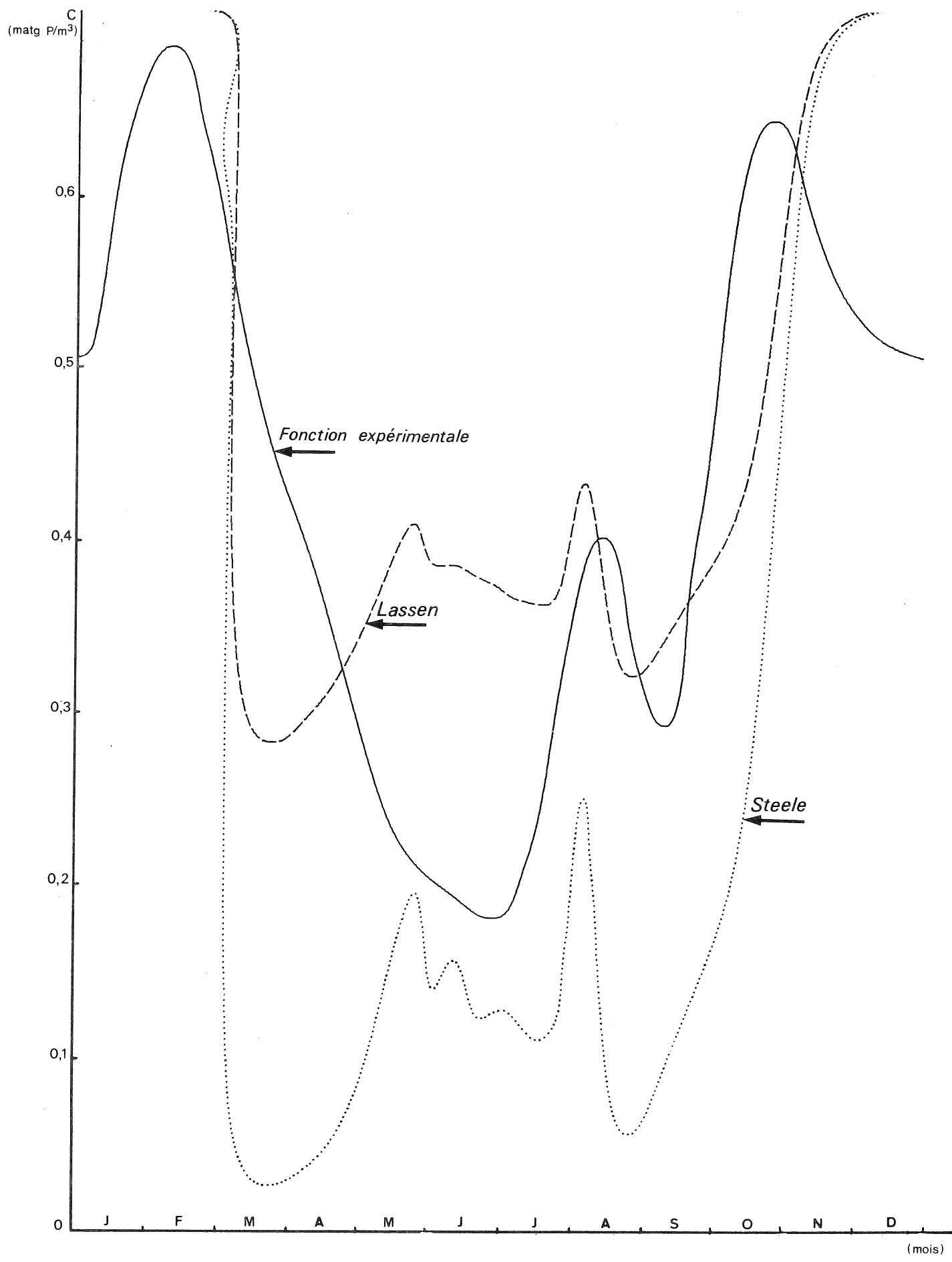


fig. 22.

et le facteur d'accélération 10.000, ce qui donne un temps d'exécution effectif en machine de 200 ms par période.

Résultats obtenus

L'ordinateur est mis sur le *mode répétitif* : à la fin de chaque période (0,2 s) toutes les variables reprennent les valeurs

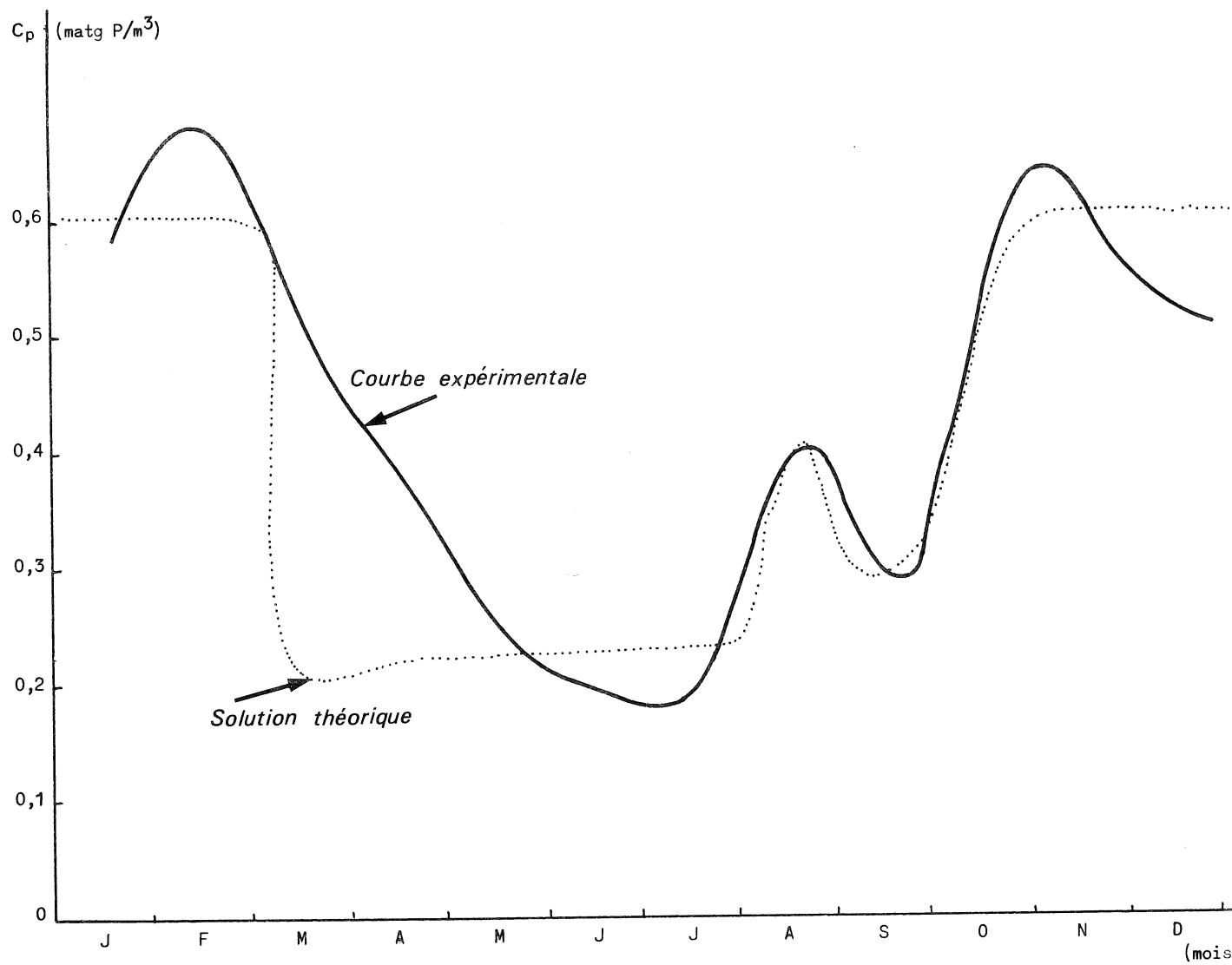


fig. 23.

Courbe expérimentale et solution théorique de la concentration en phosphate en mer du Nord [Droissart et Smitz (1973)].

initiales et l'intégration recommence. Ce procédé permet la visualisation directe des solutions.

On peut aussi laisser se poursuivre l'intégration. On constate (fig. 19, 20 et 21) que les solutions obtenues sont bien périodiques, ainsi qu'on peut le démontrer théoriquement pour ce système d'équations.

La figure 22 montre une comparaison entre les variations annuelles de la concentration en phosphate observée et calculée par les modèles de Steele et de Lassen et Nielsen.

La figure 23 montre la comparaison entre la concentration observée et la prédition théorique de Droissart et Smitz à l'aide d'un modèle hybride permettant l'optimisation des paramètres.

L'accord est nettement plus satisfaisant sur la figure 23 mais les résultats de Droissart et Smitz présentent le même défaut que ceux de Steele ou de Lassen et Nielsen, prédisant comme ces derniers une chute beaucoup trop abrupte de la teneur en phosphate au début du mois de mars. Ce défaut, que l'optimisation des paramètres ne peut effacer est vraisemblablement lié à l'imperfection du modèle de base limité à deux variables d'état et à une représentation peut-être trop élémentaire des interactions.

Références

- ADAM, Y., (1973). Working papers, NATO Science Committee Conference on Modelling of Marine Systems, OFIR, June 4-8, 1973.
- DROISSART, A. et SMITZ, J., (1973). Programme National sur l'Environnement Physique et Biologique, Projet Mer, Rapport N 22.
- LASSEN, H. and NIELSEN, P.B., (1972). I.C.E.S. Plankton Committee, CM 1972/L:6.
- NIHOUL, J.C.J., (1975). *Modelling of Marine Systems*, Elsevier Publ., Amsterdam.
- NIHOUL, J.C.J. and RONDAY, F.C., (1975). The influence of the tidal stress on the residual circulation, *Tellus*, 27, 5.

- NIHOUL, J.C.J. and RONDAY, F.C., (1976). Hydrodynamic Models of the North Sea, *Mém. Soc. Liège*, 2 [Proc. 7th Liège Coll. on Ocean Hydrodynamics, May 1975]
- PICHOT, G., (1973). Working papers, NATO Science Committee Conference on Modelling of Marine Systems OFIR, June 4-8, 1973.
- STEELE, J.H., (1958). *Mar. Res. Scot.*, 7, 36.