DIENSTEN VAN DE EERSTE MINISTER
PROGRAMMATIE VAN HET WETENSCHAPSBELEID
Wetenschapsstraat 8
1040 BRUSSEL
BELGIE

SERVICES DU PREMIER MINISTRE
PROGRAMMATION DE LA POLITIQUE SCIENTIFIQUE
Rue de la Science, 8
1040 BRUXELLES
BELGIQUE

NATIONAAL ONDERZOEKS- EN
ONTWIKKELINGSPROGRAMMA

LEEFMILIEU

WATER

PROGRAMME NATIONAL DE RECHERCHE
ET DE DEVELOPPEMENT

ENVIRONNEMENT

EAU

PROJEKT ZEE
Eindverslag

PROJET MER
Rapport final

Boekdeel 3

HYDRODYNAMISCHE MODELLEN

uitgevoerd door

Jacques C.J. NIHOUL en F.C. RONDAY

Volume 3

MODELES HYDRODYNAMIQUES

édité par

Jacques C.J. NIHOUL et F.C. RONDAY

Dans ce volume, on établit et on résoud numériquement les équations qui régissent les circulations transitoire et résiduelle dans une mer continentale peu profonde : soit la mer du Nord.

Les équations du modèle hydrodynamique transitoire sont résolues et les solutions ainsi obtenues reproduisent, de manière très satisfaisante, la marée semi-diurne lunaire et la tempête des 18-20 novembre 1973. Les résultats de ces simulations sont prometteurs : ils permettent d'envisager l'emploi de tels modèles pour la prédiction des marées et des tempêtes.

Le modèle hydrodynamique de circulation résiduelle explique les grandes tendances de la circulation des masses d'eau : il met en évidence certaines circulations secondaires et révèle en particulier, près de la côte belge, une circulation locale qui est confirmée par de nombreuses observations.

Sans la connaissance des paramètres hydrodynamiques (courants et élévations de la surface libre) déterminés par ces modèles, il serait impossible d'étudier la dispersion spatio-temporelle des nutrients et des polluants dans la mer.

Modèles hydrodynamiques

par

François RONDAY

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I - NOTION DE MODELES MATHEMATIQUES

1.- Introduction 1
2.- Les circulations hydrodynamiques dues aux marées et aux tempêtes 1
2.1.- Etude des mouvements fluides avant l'avènement des ordinateurs 2
2.1.1.- Des marées 2
2.1.2.- Des tempêtes 4
2.2.- Les modèles hydrodynamiques classiques 5
2.2.1.- Des marées 5
2.2.2.- Des tempêtes 6
3.- Les circulations à long terme ou circulations résiduelles 7
3.1.- L'étude de la circulation résiduelle et océanique avant l'apparition des ordinateurs 8
3.2.- Les modèles hydrodynamiques pour l'étude de la circulation à long terme . 10

CHAPITRE II - LES MODELES HYDRODYNAMIQUES APPLICABLES A DES MILIEUX HOMOGENES

1.- Introduction 15
2.- Modèles hydrodynamiques intégrés sur la profondeur 21
2.1.- L'approximation quasi-statique 22
2.2.- Intégration des équations de mouvement sur la profondeur 24
3.- Etude critique des différents termes des équations du modèle hydrodynamique intégré sur la profondeur 27
3.1.- Le terme d'advection 27
3.2.- Le terme de Coriolis 28
3.3.- La force astronomique de marée moyenne 29
3.4.- Les termes de viscosité et de dispersion 30
3.5.- Le terme d'interaction à la surface libre 34
3.6.- Le terme d'interaction au fond 38
4.- La circulation résiduelle dans les mers continentales 44

CHAPITRE III - METHODES DE RESOLUTION DES MODELES HYDRODYNAMIQUES

1.- Introduction 53
1.1.- Méthode aux éléments finis 54
1.2.- Méthode aux différences finies 55
2.- Méthode numérique de résolution pour la circulation transitoire 55
2.1.- Analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations de mouvement 56
2.2.- Description des grilles spatiales et des grilles temporelles 61
2.3.- Discrétisation des équations aux dérivées partielles et détermination de la précision du schéma 63
2.4.- Recherche de la stabilité du schéma de résolution 70
2.5.- Comportement des modes vrais ou modes physiques 77
2.5.1.- Comportement du premier mode physique 78
2.5.2.- Comportement des deuxième et troisième modes physiques 79
2.5.3.- Conclusions 82
2.6.- Conditions aux limites 83
2.6.1.- Frontière fermée 83
2.6.2.- Frontière ouverte 85
2.6.3.- Conclusions 89

2.7.- Etude critique de quelques algorithmes classiques de résolution . . . 90
2.7.1.- Méthode de Lauwerier et Damsté 90
2.7.2.- Méthode de Heaps 93
2.7.3.- Méthode de Leendertse 97
2.7.4.- Méthode de Brettschneider-Koop 99
2.7.5.- Conclusions 101
3.- Méthode numérique de résolution pour la circulation résiduelle 102

CHAPITRE IV - LA MER DU NORD : UNE MER CONTINENTALE ENTOUREE DE PAYS INDUSTRIALISES, SOUMISE A DE FORTES MAREES ET A DE VIOLENTES TEMPETES

1.- Caractéristiques géographiques de la mer du Nord 105
2.- Caractéristiques hydrodynamiques de la mer du Nord 107
2.1.- Oscillations libres en mer du Nord 107
2.2.- Nature et origine des marées et des tempêtes en mer du Nord 117
2.2.1.- La marée est-elle engendrée par les forces astronomiques ? . . 118
2.2.2.- La marée est-elle engendrée par la marée océanique ? 121
2.2.3.- Origine des tempêtes et position de la frontière nord des modèles en mer du Nord 124

CHAPITRE V - APPLICATIONS DES MODELES HYDRODYNAMIQUES NON STATIONNAIRES A L'ETUDE DES MAREES ET DES TEMPETES EN MER DU NORD

1.- Modèle hydrodynamique développé pour l'analyse des marées et des tempêtes en mer du Nord 129
1.1.- Choix du pas spatial et du pas temporel d'intégration 132
1.2.- Les équations du modèle hydrodynamique en coordonnées sphériques . . . 136
1.3.- Conditions aux limites 137
2.- Simulation de la marée semi-diurne lunaire 138
2.1.- Equations du modèle de marée 139
2.2.- Conditions aux limites 140
2.3.- Conditions initiales 145
2.4.- Discussion des résultats 146
2.4.1.- Calcul de l'énergie cinétique et potentielle 146
2.4.2.- Comparaison des résultats de la simulation numérique aux observations 151
2.4.3.- Les courants de marée 158
2.4.4.- Importance des termes non-linéaires 176
2.4.5.- Vitesse de propagation et caractère de l'onde de marée 183
3.- Simulation de la tempête du 17 au 20 novembre 1973 185
3.1.- Equations du modèle de tempête 186
3.2.- Les conditions initiales et les conditions aux limites 188
3.3.- Les données météorologiques 191
3.4.- Analyse des résultats 196

CHAPITRE VI - LA CIRCULATION RESIDUELLE EN MER DU NORD

1.- Introduction 207
2.- Caractéristiques spatio-temporelles des masses d'eau en mer du Nord 208
3.- Formulation mathématique de la circulation résiduelle en mer du Nord 213
3.1.- Les conditions aux limites 214
3.1.1.- Estimation des flux aux frontières à la mer ouverte 215
3.1.2.- Distribution de la fonction de courant ψ à travers les frontières à la mer ouverte 220
3.2.- Contrainte de vent en surface 221
3.3.- La contrainte de "marée" 224

4.- Applications du modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle en mer du Nord 225
4.1.- Comparons tout d'abord les résultats du modèle (6.6) aux observations de Böhnecke et Laevastu 225
4.2.- Comparaison des courants résiduels calculés avec le modèle aux mesures courantométriques 227
4.3.- Comparons la circulation résiduelle calculée avec le modèle mathématique à celle déduite de la distribution du radio-isotope 137 . . . 232
5.- Etude de la circulation résiduelle dans le sud de la mer du Nord 235
5.1.- La distribution de la vase dans le sud de la mer du Nord 242
5.2.- La dynamique des écosystèmes dans la partie sud de la mer du Nord . . . 244
5.3.- Conclusions 246
6.- Etude critique des principaux termes de l'équation régissant la circulation résiduelle 246
6.1.- Influence de la topographie du fond sur la dynamique des courants . . . 246
6.2.- Importance de la contrainte de "marée" dans les mers peu profondes, soumises à de fortes marées 249
6.3.- Importance du paramètre de friction 251

CONCLUSIONS 255

BIBLIOGRAPHIE 257

Chapitre I

Notion de modèles mathématiques

1.- Introduction

Avant d'entrer dans le détail des modèles mathématiques existant dans la littérature scientifique, qui font un appel constant aux méthodes numériques de résolution et aux ordinateurs, il nous semble intéressant de décrire et d'analyser l'évolution de la notion de modèle.

Un modèle peut être très différent suivant le but que l'on se fixe. On peut avoir un modèle mécanique ou un modèle réduit qui reproduit certains phénomènes : l'articulation d'un bras ou d'une jambe par exemple. Un modèle peut aussi être physique, c'est-à-dire reproduire la nature à échelle réduite en se basant sur des relations de similitude. Un modèle peut également être mathématique : le phénomène est décrit par une ou plusieurs équations mathématiques qui représentent parfois d'autres processus selon le choix de la variable d'état. Une même équation, soumise aux mêmes conditions initiales et aux limites, conduit à la même solution quelle que soit la signification de la variable (fonction de courant, température ou potentiel électrique).

Notre propos est d'étudier les circulations hydrodynamiques transitoires (marée et tempête) et résiduelles, ainsi que leurs interactions au moyen de modèles mathématiques.

2.- Les circulations hydrodynamiques dues aux marées et aux tempêtes

L'étude des mouvements fluides dans l'océan s'est développée de manière quasi-indépendante suivant l'intérêt particulier des chercheurs.

Les astronomes et les mathématiciens se sont penchés sur le problème des marées en relation avec le mouvement des astres; les ingénieurs hydrographes ont étudié les marées et les tempêtes pour calculer la variation spatio-temporelle de la surface de la mer.

2.1.- Etude des mouvements fluides avant l'avènement des ordinateurs

2.1.1.- Des marées

Le mouvement périodique de la surface des océans a fortement intrigué les Anciens. C'est ainsi qu'Hérodote (425 av. J.C.) et Aristote (324 av. J.C.) mentionnèrent les marées du golfe de Suez, Posidonius (50 av. J.C.) celles des côtes espagnoles. Dans la guerre des Gaules, César (51 av. J.C.) signala que ses troupes furent effrayées de voir les plages de la Manche tantôt à sec, tantôt sous eaux.

Strabon et Pline (1er siècle après J.C.) pressentirent que le mouvement périodique du niveau de la mer était intimement lié à celui de la lune et du soleil. Il fallut attendre la fin du XVIème siècle pour assister aux premières explications du phénomène. Kepler et Galilée ne purent donner que des explications qualitatives des mouvements fluides car ils ne connaissaient pas les lois de l'attraction universelle.

Dans le remarquable livre intitulé *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* paru en 1687 et modifié en 1714, Newton établit mathématiquement la relation existant entre les marées, la lune et le soleil. En 1738, l'Académie des Sciences de Paris proposa la cause du flux et du reflux de la mer pour le sujet du prix de mathématique qu'elle décerna en 1740. Parmi les quatre oeuvres couronnées, les trois premières étaient basées sur le principe de la pesanteur universelle; elles avaient pour auteurs Bernoulli, Euler et MacLaurin. Leurs travaux s'appuyaient non seulement sur la loi de Newton mais aussi sur son hypothèse, à savoir que la mer prend à chaque instant la forme où elle est en équilibre sous l'astre qui l'attire. Ils traitèrent donc ce qu'on appelle aujourd'hui la marée statique; ils n'ont pas tenu compte des forces d'inertie qui sont loin d'être négligeables dans la dynamique des marées semi-diurnes et diurnes.

Dans son mémoire *Recherches sur quelques points du système du monde*, Laplace (1775) montra que le niveau de la mer n'obéit aux forces qui le sollicitent, qu'avec un certain coefficient de réduction ou d'amplification et un certain déphasage en raison des termes d'inertie.

Airy (1842) développa la théorie des oscillations dans des bassins non-tournants : c'est le problème classique des seiches et, en particulier, des seiches portuaires. Lorsque l'élévation de la surface libre n'est plus infinitésimale, Airy améliora la formule de Merian (1828) donnant la période des oscillations propres pour un bassin de profondeur constante pour lequel le rapport longueur-largeur est grand. Les oscillations libres dans des bassins non-tournants, de formes variant selon des lois simples, ont fait l'objet de nombreuses recherches [*e.g.* Rayleigh (1876), Goldsbrough (1931)].

La rotation de la terre complique fortement l'étude des marées dans les océans et dans les mers continentales. Thomson (1879) (Lord Kelvin) étudia les oscillations libres dans des bassins tournant à vitesse constante. Dans le cas simple d'un canal infiniment long, il démontra que la distribution transversale de la surface libre est influencée par la rotation du bassin. Sa théorie permit d'expliquer la différence de comportement de la marée le long des côtes anglaises et françaises.

Poincaré (1896, 1903 et 1910) reprit la théorie de Laplace, introduisit la force de Coriolis et établit les équations de base de l'hydrodynamique classique.

Des modèles mathématiques simples, pour l'étude des marées, furent utilisés avec plus ou moins de succès dans des golfes et dans des mers continentales [*e.g.* Taylor (1921) et Proudman (1953)].

Proudman (1936) et Doodson (1936, 1938) ont étudié mathématiquement les marées océaniques en supposant la force de friction négligeable vis-à-vis des termes de pression, d'inertie et de Coriolis. Comme ils ne disposaient pas encore d'ordinateurs électroniques, il ont dû étudier les marées dans des bassins limités par des parallèles et des

méridiens. Ils n'ont obtenu de solution analytique que dans le cas d'océans caractérisés par des profondeurs variant selon des lois simples.

L'étude des marées océaniques fut quasi abandonnée jusqu'à l'apparition des ordinateurs électroniques, capables de résoudre enfin les équations régissant le mouvement fluide dans des bassins de formes quelconques.

2.1.2.- Des tempêtes

Les élévations de la surface libre des océans, induites par les vents et par les dépressions barométriques, étaient considérées jusqu'au début du XXème siècle comme résultant de phénomènes aléatoires, et donc ne suivant pas des lois bien déterminées.

Les premiers travaux traitant de la détermination des niveaux d'eau lors d'une tempête se basaient sur une approche purement empirique. Corkan (1948) étudia la propagation des ondes de tempêtes le long des côtes est de la Grande Bretagne et la dénivellation à Dunbar et à Southend. Il examina les conditions météorologiques et conclut que l'onde de tempête à Southend est créée en partie à l'intérieur de la mer du Nord et en partie dehors. Corkan montra que l'onde de tempête, qui a son origine à l'extérieur de la mer du Nord, descend le long des côtes écossaises et anglaises comme une onde progressive qui met 9 heures pour parcourir la distance Dunbar-Southend. Il observa également que l'amplitude de la dénivellation était pratiquement la même à Southend et à Dunbar. A partir de ces résultats, il établit une relation donnant l'élévation de la surface libre en fonction des gradients de pression atmosphérique et des élévations statiques aux points considérés. Sa formule ne donne de résultats satisfaisants que pour certaines conditions de vent. La principale faiblesse d'une approche empirique réside dans une analyse d'une série trop courte d'observations.

Hellström (1941) et l'Ecole néérlandaise [Schalkwijk (1947), Weenink (1951), Weenink et Groen (1958)] ont développé une méthode mi-théorique, mi-empirique. Leur approche consiste en une méthode théorique pour la résolution du problème statique et en une partie empirique pour le calcul

des effets dynamiques. Ils supposent la linéarité des équations afin de pouvoir résoudre les équations aux dérivées partielles et appliquer le principe de la superposition des solutions. Cette méthode donne de bons résultats pour une mer de petites dimensions comme la mer du Nord. La principale difficulté, avec cette méthode, réside dans le choix des paramètres de friction et de retard. Comme l'observation montre que les termes non-linéaires sont loin d'être négligeables le long des côtes, l'hypothèse de la linéarité des équations du modèle n'est donc plus vérifiée.

La résolution des équations de l'hydrodynamique est difficile en raison du terme de Coriolis et des termes non-linéaires. Lauwerier (1960) calcula analytiquement l'élévation de la surface libre le long de la côte néerlandaise, en supposant la mer du Nord rectangulaire, la profondeur constante, le champ de vent uniforme, et en négligeant les termes non-linéaires. Dans un estuaire peu profond et de faible largeur, Rossiter (1961) a démontré que les interactions entre la marée et la tempête sont importantes : l'élévation due à la tempête est plus élevée à marée montante qu'à marée descendante. La présence du terme de Coriolis et des termes non-linéaires empêche toute résolution analytique des équations de l'hydrodynamique dans le cas de bassins de formes quelconques.

2.2.- Les modèles hydrodynamiques classiques

L'apparition des grands ordinateurs numériques a révolutionné la mécanique des fluides : en 1950, les équations de Navier-Stokes ne pouvaient se résoudre qu'en faisant de très nombreuses simplifications. Les progrès constants en électronique ont permis d'aborder des problèmes hydrodynamiques de plus en plus complexes.

2.2.1.- Des marées

Defant (1932) fut le premier à renoncer aux solutions analytiques et à remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations aux différences finies. La méthode de Defant, reprise ensuite par Hansen (1952) et Holsters (1959), suppose la linéarité des équations de

mouvement; les termes non-linéaires d'advection sont négligés et le terme de friction linéarisé. Dans ces conditions, une transformée de Laplace ramène les trois équations aux dérivées partielles de mouvement à une seule équation également aux dérivées partielles, qui ne fait intervenir que l'élévation de la surface libre. Dans les régions peu profondes, les courbes marégraphiques observées indiquent des harmoniques et des interactions non négligeables entre les marées partielles les plus importantes. La méthode de Defant qui suppose la linéarité des équations de mouvement ne peut donner que des résultats approchés le long des côtes caractérisées par une faible profondeur.

Les équations hydrodynamiques pour les ondes longues possèdent des caractéristiques réelles. Plusieurs auteurs [*e.g.* Lamoen (1949), Thijse (1964), Daubert et Graffe (1967), Townson (1974)] ont résolu le problème de la propagation de la marée avec la méthode des caractéristiques. Cette méthode conduit à de bons résultats, mais elle est quasi-inapplicable, en raison de sa lourdeur dans le cas bi-dimensionnel, lorsque la géométrie du bassin est très irrégulière.

Hansen (1956), Fischer (1959), Brettschneider (1967) et Ronday (1972) ont étudié les marées dans la mer du Nord en utilisant des méthodes d'intégration "pas à pas". Malheureusement, ces auteurs ont, soit supposé les termes d'advection négligeables, soit estimé de manière erronnée ces termes dans leur algorithme de résolution.

2.2.2.- Des tempêtes

Les méthodes empiriques et semi-empiriques exposées au paragraphe précédent n'avaient pour but que la détermination du dénivellement provoqué par le vent.

Lorsqu'on désire étudier le transport des sédiments, des polluants, des matières chimiques et du phytoplancton, on doit connaître les courants et la hauteur instantanée de la colonne d'eau. Proudman (1954) a formulé mathématiquement le problème et a donc "construit" un modèle mathématique. Welander (1961) et Groen et Groves (1966) ont légèrement modifié les équations du modèle de Proudman.

A l'aide d'ordinateurs, Hansen (1956, 1966), Fischer (1959), Lauwerier et van Dantzig (1961), Heaps (1969) et Banks (1974) ont étudié les tempêtes de 1953 et de 1962 dans la mer du Nord; Svansson (1959), dans la mer Baltique et Platzman (1958, 1963), dans les lacs Erié et Michigan.

Les pays riverains du golfe du Mexique et ceux de l'archipel japonais doivent subir, chaque été, les conséquences meurtrières des typhons (les typhons diffèrent des tempêtes par la grande vitesse de déplacement de la dépression atmosphérique). Jelesnianski (1965) pour la côte américaine, Ueno (1964) pour l'archipel japonais ont étudié intensivement les typhons au moyen de modèles mathématiques et ont montré que les modèles empiriques conduisaient très souvent à des résultats par défaut car ils ne tenaient pas compte des effets dynamiques très importants lors d'un typhon.

Les travaux de Heaps (1969) et Ueno (1964) ont mis en évidence l'importance des termes non linéaires au voisinage des côtes dans les régions peu profondes. Heaps (1969) suggérait que le couplage entre la marée et la tempête était une des causes des erreurs introduites dans son modèle. Banks (1974) développa un modèle de marée-tempête pour le sud de la mer du Nord où il réalisa le couplage marée-tempête par l'intermédiaire du terme de friction. On montre dans la suite de ce travail que les termes non-linéaires d'advection provoquent également un couplage important.

3.- Les circulations à long terme ou circulations résiduelles

Les marées et les tempêtes, malgré l'intensité des courants induits, ne réalisent des transports d'eau qu'à des distances relativement faibles (de l'ordre de quelques centaines de kilomètres). Les océans et les mers continentales sont aussi le siège de *mouvements quasi-permanents* pouvant entraîner les particules fluides sur de très grandes distances : ce sont des courants marins. En certains endroits de l'océan, ils peuvent atteindre des vitesses de 1 à 2 m/s ; mais,

en général, ils sont caractérisés par des vitesses beaucoup plus faibles (de 10^{-1} à 10^{-2} m/s), et sont appelés courants résiduels.

3.1.- L'étude de la circulation résiduelle et océanique avant l'apparition des ordinateurs

Les grands courants océaniques étaient déjà connus au XVIème siècle. Selon Kohl (1868), le Gulf Stream était bien connu en 1515 car les bateaux espagnols suivaient le courant équatorial pour se rendre aux Amériques, mais ils empruntaient une autre route pour le retour. Ils passaient à travers le détroit de Floride et suivaient le Gulf Stream jusqu'à la latitude correspondant au cap Hatteras et ensuite rejoignaient l'Espagne. De cette façon, ils avaient des vents favorables et évitaient ainsi les courants contraires durant leurs voyages.

Il fallut attendre Franklin (1786) pour avoir la première explication scientifique de ces courants. Franklin, en se basant sur le travail de Bernoulli (1738), *Hydrodynamica*, croyait que le Gulf Stream était créé par l'accumulation d'eau sur la côte est des Amériques entre les tropiques par les vents alizés. Les mesures de température de l'eau de surface ont permis à Strickland (1802) de découvrir une extension du Gulf Stream vers la Scandinavie et vers l'Angleterre. (Remarquons cependant que les mesures de température n'étaient pas faites pour déterminer le champ de pression et, par suite, les courants géostrophiques qui ne furent découverts que plus tard.) Arago (1836) attira l'attention en montrant que la différence de niveau, dans la région de la mer de Sargasses, était trop faible pour créer des courants aussi intenses. Arago avancait l'idée que les courants résultaient de l'échauffement différent des masses d'eau aux pôles et à l'équateur. On peut donc dire qu'Arago est le père de la théorie de la circulation thermohaline.

Il est bon de souligner que l'influence de la rotation de la terre sur les courants océaniques n'était que fort mal connue par les océanographes, bien que les équations hydrodynamiques pour un fluide de masse spécifique constante étaient déjà écrites en 1775 par Laplace. (Remarquons que le physicien Thomson, en 1879, a démontré que la force

fictive de Coriolis est équilibrée par le gradient horizontal de pression dans le cas des ondes longues de marée). Les océanographes peu à peu réalisent que la force de Coriolis est équilibrée, en première approximation, par les gradients horizontaux de pression associés à des masses d'eaux de densités différentes. A partir de cette époque, l'océanographie a un support théorique : on utilise des formes très simplifiées des équations de la mécanique des fluides pour relier le champ de vitesse au champ de pression.

Les études expérimentales se sont poursuivies tout au long du XXème siècle. L'océanographie théorique, quant à elle, a progressé surtout depuis les travaux d'Ekman (1905) qui développa la théorie des courants engendrés par le vent. Il fut le premier à montrer que les courants de vent étaient déviés vers la droite par la force fictive de Coriolis dans l'hémisphère nord. Ekman étudia ce phénomène pour un océan horizontalement infini.

Pillsbury, en 1891, nota l'intensification préférentielle des courants le long de la côte est des continents dans l'hémisphère nord. Sverdrup (1947) et Stommel (1948) démontrèrent que cette intensification était due à la variation de la force de Coriolis avec la latitude. Munk (1950) calcula la circulation résiduelle dans l'océan Atlantique, en le supposant rectangulaire et en intégrant les équations hydrodynamiques depuis la surface jusqu'à une profondeur où les courants et les gradients horizontaux de pression sont nuls. En utilisant la distribution zonale des vents annuels, il parvint à mettre en évidence les grands "tourbillons" océaniques : le Gulf Stream, le courant équatorial, le contrecourant équatorial, etc. Pour le Gulf Stream, la théorie de Munk donne une largeur du courant principal 3 à 4 fois trop importante. Les travaux de Sverdrup, Stommel et Munk accordaient un rôle exagéré à la force de Coriolis et à la force de friction latérale. Charney (1955) développe une théorie inertiale où la friction n'a que peu d'importance; les termes non-linéaires d'advection, par contre, deviennent très prépondérants dans la région est des océans. Charney (1955) a montré à l'aide de son modèle inertial qu'il était également possible

de reproduire qualitativement cette intensification. Pour étudier la circulation océanique, il faut donc tenir compte des termes non-linéaires et du terme de Coriolis.

Les hydrographes, depuis de nombreuses années, se sont penchés sur le problème de la circulation résiduelle dans les mers continentales. Comme le sujet de notre travail est l'étude de la circulation résiduelle en mer du Nord, il convient de décrire brièvement les différentes méthodes utilisées pour la détermination des circulations résiduelles en mer du Nord. Böhnecke (1922) et Laevastu (1961) déduisent ces courants de la distribution de salinité obtenue par des séries de mesures faites entre 1902 et 1904. Tait (1930, 1931 et 1937) étudia les circulations à long terme dans la partie nord et la partie centrale de la mer du Nord à l'aide de bouteilles dérivantes. Dans la partie sud et en particulier au voisinage du Pas de Calais, de nombreuses mesures courantométriques [*e.g.* Carruthers (1935), Van Veen (1938), Cartwright (1961), Otto (1970)] ont mis en évidence un courant résiduel dirigé vers le nord-est.

Dans la littérature scientifique, nous n'avons trouvé aucune formulation théorique du problème de la circulation résiduelle dans des mers continentales comme la mer du Nord.

3.2.- Les modèles hydrodynamiques pour l'étude de la circulation à long terme

Les travaux théoriques de Stommel (1948), Sverdrup (1947) et de Munk (1950) ont permis d'expliquer qualitativement la plupart des grands courants de surface dans l'Atlantique sauf le courant circum-Antarctique. Gill montra, en 1968, que ces modèles pourraient reproduire également ce courant, si on prenait en considération la configuration des côtes.

Lorsqu'on désire reproduire la géométrie horizontale du bassin, il n'est plus possible de résoudre analytiquement même les formes linéarisées des équations hydrodynamiques; on doit donc utiliser des méthodes numériques, soit les éléments finis, soit les différences finies. Les modèles hydrodynamiques bidimensionnels, pour lesquels les équations

de Navier-Stokes sont intégrées sur la profondeur, donnent des résultats satisfaisants quand on tient compte des termes non-linéaires. Bryan (1963) et Veronis (1966) sont parvenus à expliquer plusieurs phénomènes océaniques mais certains détails importants, comme le contre-courant sous le Gulf Stream, n'ont pu être mis en évidence. Les modèles bidimensionnels, où les équations de mouvement sont intégrées sur la verticale, ne donnent aucune information sur la distribution verticale des courants : on a soit le courant moyen sur la verticale, soit le transport total d'eau dans la couche fluide considérée. Stommel, Sverdrup et Munk ont intégré les équations de la surface jusqu'à une profondeur où les courants et gradients horizontaux de pression sont nuls. L'épaisseur de cette couche étant d'environ 200 mètres, ils n'ont donc étudié et mis en évidence que les courants de surface. Si ces auteurs avaient intégré les équations hydrodynamiques du fond à la surface, ils auraient obtenu un courant moyen sur la profondeur beaucoup plus faible. Lorsqu'on veut déterminer la distribution verticale des courants dans un océan profond caractérisé par une distribution non homogène de la masse spécifique de l'eau, il faut utiliser un modèle tri-dimensionnel [*e.g.* Bryan et Cox (1967), Leenderste, Alexander et Liu (1973)]. Ces auteurs sont parvenus à mettre en évidence des *up-wellings*, des contre-courants et des profils verticaux de courant.

Dans les mers côtières peu profondes et dans les lacs, les observations océanographiques montrent que toute la colonne d'eau est influencée directement par le vent soufflant sur la surface libre et que la direction du courant du fond est voisine de celle du courant en surface. Lorsque les marées sont intenses, le mélange turbulent est suffisant pour homogénéiser toute la colonne d'eau si la profondeur n'est pas trop grande (*e.g.* Manche, mer d'Irlande et mer du Nord). On observe cependant des thermoclines dans les régions de profondeurs moyennes (80 à 200 m) durant les mois d'été. Les modèles bidimensionnels barotropes (c'est-à-dire caractérisés par une distribution uniforme de la masse spécifique) peuvent donc s'appliquer dans la plupart des cas.

Rao et Murty (1970) et Murty (1970) ont étudié la circulation résiduelle due aux vents dans les Grands Lacs américano-canadiens durant les mois d'hiver, c'est-à-dire lorsque la stratification verticale est inexistante. Ils ont montré que le mouvement des masses d'eau est fortement influencé par la géométrie horizontale et par la bathymétrie du bassin. Rao et Murty sont parvenus à reproduire les principales caractéristiques observées de la circulation durant les mois d'hiver. Krauss (1974) appliqua avec moins de succès ce même type de modèle pour la circulation résiduelle en mer Baltique car l'hypothèse d'homogénéité du fluide était loin d'être vérifiée.

Lorsqu'il s'agit d'étudier la circulation à long terme dans une mer continentale, c'est-à-dire une mer en communication avec l'océan, il se pose le problème des flux d'eau à travers les différentes frontières ouvertes. Weenink (1958) posa le problème linéaire d'un point de vue théorique et traita le problème de la circulation due à un vent stationnaire dans une mer continentale, en supposant la profondeur constante et en assimilant la géométrie du bassin à un rectangle. En 1972, nous avons développé le premier modèle hydrodynamique (du type Rao et Murty) pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord. Les flux aux diverses frontières ouvertes étaient déduits de mesures expérimentales. Ce modèle explique les grandes tendances de la circulation résiduelle observée [*e.g.* Böhnecke (1922), Tait (1930, 1931, 1937), Ramster (1965)]. Nous avons montré l'importance de la force de friction et de la topographie du fond dans la distribution des courants. Certains phénomènes plus locaux, comme les tourbillons ou gyres observés dans certaines régions de la mer du Nord, n'ont pu être mis en évidence avec un tel modèle.

Tous les modèles hydrodynamiques classiques reposent sur l'hypothèse suivant laquelle les circulations transitoires, dont le temps caractéristique peut varier de la minute à plusieurs jours, induisent un mélange turbulent. Les auteurs de tels modèles admettent qu'il existe un couplage entre les deux types de circulation par l'intermédiaire du terme non linéaire d'advection. Afin de simplifier la résolution des équations du modèle, ils remplacent ce terme par un terme de

viscosité purement dissipatif. Dans leur conception, les circulations transitoires de marée et de tempête ne peuvent induire aucune composante à long terme. Du point de vue de la circulation résiduelle, les marées n'ont d'autre rôle que de dissiper et de redistribuer la quantité de mouvement.

Dans ce travail, nous montrons tout d'abord que les circulations transitoires de marée et de tempête induisent un courant permanent du même ordre de grandeur que celui engendré par le vent moyen. Nous établissons un modèle mathématique hydrodynamique pour l'étude de la circulation non stationnaire dans une mer continentale peu profonde. Ce modèle permet de calculer explicitement le terme de couplage. Nous développons ensuite un modèle décrivant la circulation à long terme : il contient non seulement les termes classiques de Coriolis, de pression et de friction, mais également ceux qui font intervenir les variations de profondeur et les interactions entre les phénomènes stationnaires et transitoires.

Chapitre II

Les modèles hydrodynamiques applicables à des milieux homogènes

1.- Introduction

Le but final de ce travail est d'établir un modèle hydrodynamique pour l'étude de la circulation à long terme en mer du Nord. Cette mer, peu profonde, est soumise à de fortes marées qui sont capables d'un mélange turbulent suffisant pour homogénéiser une grande partie ou toute la colonne d'eau. Les mesures *in situ* montrent que la distribution horizontale de la salinité est quasi-uniforme; certaines inhomogénéités existent cependant dans la région du Skagerrak qui relie la mer du Nord, caractérisée par une salinité de 34,5 ‰, à la mer Baltique de salinité plus faible 33 ‰. La stratification verticale de la colonne d'eau est faible (en été) ou inexistante (en hiver) sauf dans la région du canal norvégien et du Skagerrak. A ces endroits, un modèle basé sur l'hypothèse de l'homogénéité de la colonne fluide donne des résultats moins précis. On pourrait tenir compte de la stratification verticale en utilisant des modèles à plusieurs couches, chacune d'elles étant caractérisée par une salinité constante. Comme la détermination des conditions aux limites pour des frontières ouvertes pose déjà des problèmes pour un modèle à une couche, la recherche de conditions supplémentaires pour un modèle multicouche est quasi-impossible. Heaps (1972, 1974) développa différents modèles hydrodynamiques pour l'étude des tempêtes dans la mer d'Irlande. Son modèle tridimensionnel donna de moins bons résultats que son modèle

bidimensionnel à une couche en raison des erreurs importantes introduites lors de l'établissement des conditions aux limites le long des frontières ouvertes. Les incertitudes et erreurs résultant des conditions aux limites avec un modèle multi-couche annihilent les avantages procurés par de tels modèles.

L'homogénéité de la colonne d'eau est l'hypothèse fondamentale des modèles qu'on se propose d'établir. L'équation d'état du fluide sera donc

(2.1) $$\rho = \text{constante.}$$

Les équations régissant le mouvement fluide ne sont que des applications des lois de conservation. La loi de la conservation de la masse s'écrit de la manière suivante :

(2.2) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . (\rho \mathbf{V}) = 0$$

où $\mathbf{V} = \mathbf{V}(v_1, v_2, v_3)$ représente la vitesse du fluide.

En introduisant la relation (2.1) exprimant l'homogénéité dans l'équation (2.2), nous obtenons :

(2.3) $$\nabla . \mathbf{V} = 0 .$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement dans le champ de pesanteur et dans un référentiel lié à la terre, se met la forme [*e.g.* Nihoul (1975)] :

(2.4) $$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + 2 \rho \, \Omega \wedge \mathbf{V} + \nabla . (\rho \mathbf{V}\mathbf{V}) = - \nabla \pi + \rho \, \mathbf{F} + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

où $2 \Omega \wedge \mathbf{V}$ représente l'accélération de Coriolis, π la pression, $\mathbf{F}$ la résultante des forces extérieures par unité de masse (force astronomique et force de pesanteur) et μ la viscosité moléculaire.

Dans la mer, le champ de vitesse est toujours extrêmement complexe. Différents types de mouvements existent, caractérisés par des échelles de temps et de longueur différentes, depuis des courants quasi-stationnaires jusqu'à des tourbillons rapides; ils agissent les uns sur les autres et forment un modèle insoluble sauf dans les cas très simples.

Les mouvements erratiques rapides tendent à s'annuler mais ils contribuent à une dispersion de la quantité de mouvement qui est beaucoup plus efficiente que la diffusion moléculaire.

Soit T un temps caractéristique pour l'étude des courants (T peut être de l'ordre de quelques minutes pour les courants de marée et de l'ordre de la semaine pour les courants résiduels). Les processus qui ont un temps caractéristique $\theta \gg T$ évoluent peu durant l'intervalle de temps T. Parmi les processus rapides, nous pouvons distinguer :

i) les processus purement aléatoires correspondant à la dégradation de l'énergie depuis les ondes de fréquence supérieure à τ^{-1} jusqu'à la turbulence. Ils contiennent peu d'énergie, tendent à s'annuler sur une période T et peuvent être considérés comme ayant une moyenne nulle sur T. Les termes contenant les produits moyens des fluctuations de vitesse et d'élévation sont généralement remplacés par des termes de dissipation.

ii) les processus correspondant à des structures cohérentes hautement énergétiques. Lors de l'étude de la circulation résiduelle correspondant à un temps caractéristique de l'ordre du mois, Nihoul et Ronday (1975) ont montré que les structures cohérentes, intimement liées aux ondes de marée, interagissent avec le courant moyen. Les termes quadratiques des équations de mouvement ne produisent pas seulement une dissipation mais aussi un mouvement permanent.

Ces termes quadratiques, de moyennes non nulles, ne peuvent donc plus être estimés en fonction de termes visqueux purement dissipatifs.

La distinction entre les processus rapides — processus aléatoires et processus correspondant à des structures cohérentes — se fera au niveau du traitement des termes contenant le produit moyen des fluctuations de vitesse et d'élévation.

Si q représente une variable d'état quelconque (v_i, ρ, θ), on peut écrire :

$$q = \overline{q} + \hat{q} \tag{2.5}$$

où $\overline{q}$ est la valeur moyenne de q et $\hat{q}$ la déviation de q par

rapport à $\bar{q}$. $\bar{q}$ et $\hat{q}$ sont définis par

$$\bar{q} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} q \, dt \qquad \text{et} \qquad \int_t^{t+T} \hat{q} \, dt \sim 0 \, . \tag{2.6}$$

Comme $\frac{\partial \hat{q}}{\partial t}$ se rapporte à des processus rapides qui s'annulent sur la période T , on a :

$$\int_t^{t+T} \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} \, dt \sim 0 \, . \tag{2.7}$$

On a également

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial q}{\partial t} \, dt \sim \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \, dt \sim \frac{\bar{q}(\tau + T) - q(\tau)}{T} \sim \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} \tag{2.8}$$

parce que le temps T est petit, comparé au temps caractéristique de l'évolution de $\bar{q}$, alors la différence finie peut être approchée par une dérivée.

Si q et q' sont deux variables d'état, on obtient

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} q \, q' \, dt \sim \bar{q} \, \bar{q'} + \overline{\hat{q} \, \hat{q}'} \tag{2.9}$$

car

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \bar{q} \, \hat{q}' \, dt \sim \bar{q} \, \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \hat{q}' \, dt \sim 0 \, . \tag{2.10}$$

Cette méthode de moyenne avec les hypothèses (2.7) et (2.8) est appelée la méthode de Krilov-Bogolioulov-Mitropolski [*e.g.* Nihoul (1973)].

Séparons le champ de vitesse en une partie moyenne $\mathbf{u}$ et une partie fluctuante de moyenne nulle W :

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \, .$$

L'application de la méthode de moyenne de K.B.M. aux équations (2.3) et (2.4) donne

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.11}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2 \, \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{\pi} + \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{D} \tag{2.12}$$

où $\bar{\pi}$ est la pression moyenne et $\bar{\mathbf{F}}$ la résultante des forces extérieures

moyennes. D représente le terme de dispersion de la quantité de mouvement soit :

$$D = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u - \overline{\nabla.(ww)} \quad . \tag{2.13}$$

Le terme $\overline{\nabla.(ww)}$ représente la moyenne du produit des fluctuations de vitesse soit w . La théorie de la turbulence [*e.g.* Batchelor (1967)] indique que ce terme a un effet dispersant beaucoup plus intense que la viscosité moléculaire lorsque les fluctuations de vitesse correspondent à un processus purement aléatoire. Nous montrons, dans la suite du travail, que le terme $\overline{\nabla.(ww)}$ peut également fournir de l'énergie au courant moyen lorsque les fluctuations de vitesse w résultent de phénomènes non aléatoires comme les marées.

Lorsqu'on intègre les équations de mouvement sur un intervalle de temps de l'ordre de la minute, on peut supposer que toutes les fluctuations de vitesse résultent de processus aléatoires. Dans ce cas, il semble logique d'exprimer D sous la forme d'un terme de diffusion moléculaire. Nous avons donc :

$$D = \nu_t \nabla^2 u \quad . \tag{2.14}$$

Le coefficient ν_t devant $\nabla^2 u$ prend souvent le nom de viscosité turbulente ou de Reynolds (dans des modèles très évolués, on pourrait associer différents coefficients aux différentes directions spatiales). Kolmogorov (1941) montre que le coefficient de viscosité dépend du temps T de séparation défini précédemment et que l'énergie est distribuée selon les différentes longueurs caractéristiques. Il obtient la relation suivante :

$$E(\ell) \sim \varepsilon^{2/3} \ell^{5/3} \tag{2.15}$$

où ℓ est la longueur caractéristique du mouvement et ε le taux de transfert d'énergie dépendant également de ℓ . Dans les mers et dans les océans, les vents, les marées et la houle fournissent de l'énergie au milieu. Ozmidov (1965) a déduit expérimentalement la distribution d'énergie donnée à la figure 1.

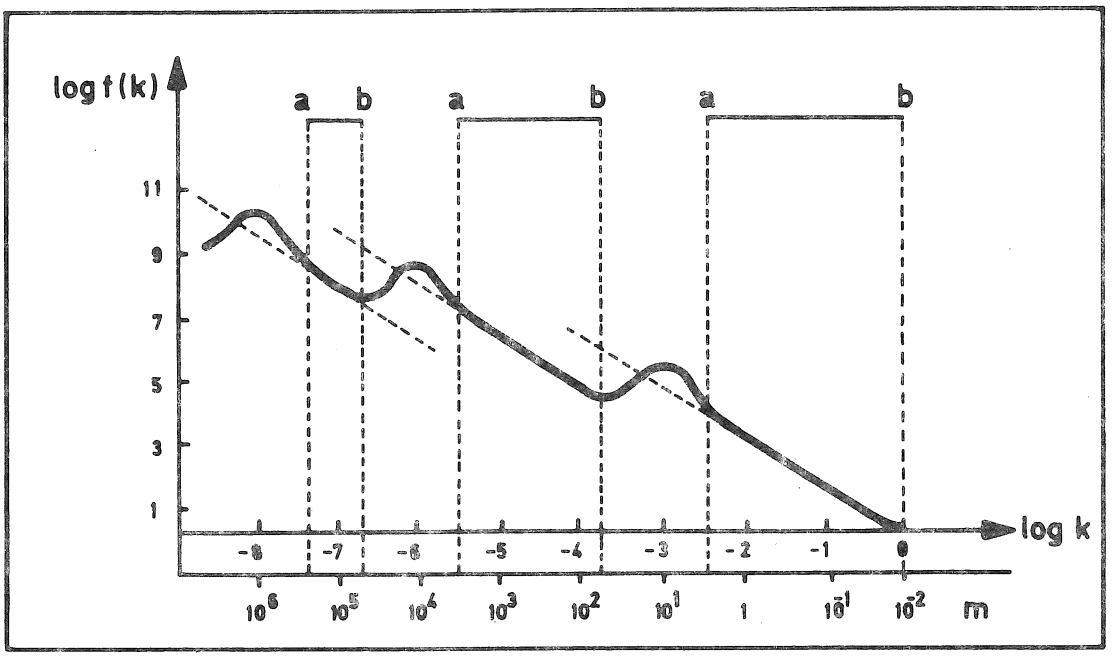


fig. 1.

Distribution de la densité d'énergie entre les mouvements océaniques de différentes échelles d'après Ozmidov (1965) . $\overline{ab}$ désigne la zone d'application de la loi en $\frac{5}{3}$ de Kolmogorov.

Si on choisit un intervalle de temps T pour intégrer les équations de mouvement, on élimine tous les mouvements dont la longueur caractéristique est inférieure à

$$\ell \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} T^{3/2} \tag{2.16}$$

En accord avec la théorie de Kolmogorov, la viscosité turbulente peut être estimée de la manière suivante :

$$\nu_t \sim \varepsilon^{1/3} \ell^{4/3} \sim \varepsilon T^2 . \tag{2.17}$$

Divers auteurs [*e.g.* Ozmidov (1965)] ont tenté d'estimer le taux de transfert d'énergie ε . Le tableau ci-après donne une estimation de ε .

Pour l'étude des marées, nous choisissons un temps de séparation d'environ 5 minutes pour éliminer tous les mouvements caractérisés par $\theta < 2$ min . En se basant sur la théorie de Kolmogorov, et en utilisant

Tableau 1

Longueur caractéristique ℓ (m)	Taux de transfert d'énergie ϵ (m^2/s^3)
Région 1	10^{-6}
Région 2	10^{-8}
Région 3	10^{-10}

les estimations de ϵ données au tableau ci-dessus, nous avons :

(2.18) $$\nu_t \sim 10^{-1} \ m^2/s \ .$$

Cette viscosité associée aux fluctuations de la vitesse est donc beaucoup plus grande que la viscosité moléculaire

(2.19) $$\nu_m = \frac{\mu}{\rho} \sim 10^{-6} \ m^2/s \ .$$

2.- Modèles hydrodynamiques intégrés sur la profondeur

Le modèle mathématique défini par les équations (2.11) et (2.12) est un modèle à 4 dimensions (3 dimensions spatiales et une temporelle). Il existe dans la littérature scientifique quelques modèles quadri-dimensionnels [Leenderste, Alexander et Liu (1973), Caponi (1974), Simons (1974), Heaps (1972, 1974)]. D'un point de vue théorique, ils sont intéressants car ils donnent des informations concernant les profils verticaux de courant et de densité : les *upwellings* et les zones de convergence peuvent être découverts et leurs intensités calculées. D'un point de vue plus pratique, ils ne peuvent pas être opérationnels parce que les variations spatio-temporelles des paramètres de viscosité et les conditions aux limites le long des frontières ouvertes sont mal connues.

Pour la prédiction des marées et des tempêtes, pour la gestion de l'environnement marin, il convient de développer des modèles hydrodynamiques qui permettent d'obtenir des résultats précis le plus rapidement possible.

Tableau 1

Longueur caractéristique ℓ (m)	Taux de transfert d'énergie ϵ (m^2/s^3)
Région 1	10^{-6}
Région 2	10^{-8}
Région 3	10^{-10}

les estimations de ϵ données au tableau ci-dessus, nous avons :

(2.18) $$\nu_t \sim 10^{-1} \ m^2/s \ .$$

Cette viscosité associée aux fluctuations de la vitesse est donc beaucoup plus grande que la viscosité moléculaire

(2.19) $$\nu_m = \frac{\mu}{\rho} \sim 10^{-6} \ m^2/s \ .$$

2.- Modèles hydrodynamiques intégrés sur la profondeur

Le modèle mathématique défini par les équations (2.11) et (2.12) est un modèle à 4 dimensions (3 dimensions spatiales et une temporelle). Il existe dans la littérature scientifique quelques modèles quadri-dimensionnels [Leenderste, Alexander et Liu (1973), Caponi (1974), Simons (1974), Heaps (1972, 1974)]. D'un point de vue théorique, ils sont intéressants car ils donnent des informations concernant les profils verticaux de courant et de densité : les *upwellings* et les zones de convergence peuvent être découverts et leurs intensités calculées. D'un point de vue plus pratique, ils ne peuvent pas être opérationnels parce que les variations spatio-temporelles des paramètres de viscosité et les conditions aux limites le long des frontières ouvertes sont mal connues.

Pour la prédiction des marées et des tempêtes, pour la gestion de l'environnement marin, il convient de développer des modèles hydrodynamiques qui permettent d'obtenir des résultats précis le plus rapidement possible.

Les marées, les tempêtes et les courants à long terme sont des mouvements pour lesquels le déplacement des particules fluides est pratiquement horizontal. Il semble donc logique d'intégrer les équations de mouvement (2.11) et (2.12) du fond à la surface. Le modèle hydrodynamique ainsi obtenu est appelé modèle hydrodynamique intégré sur la profondeur.

2.1.- L'approximation quasi-statique

L'équation (2.12) fait apparaître la résultante des forces extérieures (force de gravité et force astronomique de marée). La théorie des marées [*e.g.* Lamb (1935), Platzman (1970)] montre que le rapport entre les forces astronomiques de marée et la force de gravité est très petit. On a

$$\text{(2.20)} \qquad \begin{aligned} \frac{\text{Force de marée lunaire}}{\text{Force de gravité}} &= 0{,}56 \times 10^{-7} \\ \frac{\text{Force de marée solaire}}{\text{Force de gravité}} &= 0{,}26 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

La seule contribution importante à la composante verticale de la force de volume $\overline{F}$ est donc la force de gravité. La composante verticale de l'équation (2.12) s'écrit :

$$\text{(2.21)} \qquad \frac{\partial u_3}{\partial t} + 2(\Omega_1 u_2 - \Omega_2 u_1) + \nabla.(\mathbf{u}\, u_3) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial x_3} - g + \nu_t \nabla^2 u_3$$

Ω_1 et Ω_2 sont les deux composantes horizontales du vecteur rotation de la terre Ω, et g est la composante verticale de la force de pesanteur.

Pour les phénomènes étudiés (marées, tempêtes et courants résiduels), la vitesse verticale est beaucoup plus petite que la vitesse horizontale; en effet, l'équation de continuité (2.11) permet d'estimer u_3 de la manière suivante :

$$\text{(2.22)} \qquad u_3 \sim \frac{h}{\ell}\, u_1$$

où h est la profondeur moyenne et ℓ la longueur caractéristique de variation horizontale de u_1. Pour la mer du Nord, on peut estimer les

ordres de grandeur de u_1 , h , ℓ , Ω , g , ρ , ν_t :

Tableau 2

$u_1 \sim 1$ m/s
$h \sim 60$ m
$\ell \sim 4 \times 10^5$ m
$\Omega \sim 0{,}7 \times 10^{-4}$ s^{-1}
$g \sim 10$ m^2/s
$\rho \sim 10^3$ kg/m^3
$\nu_t \sim 10^{-1}$ m^2/s

En utilisant la relation (2.22), on trouve aisément :

$$u_3 \sim 10^{-4} \text{ m/s} .$$

Une analyse d'ordre de grandeur permet de simplifier fortement l'équation (2.21). Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_3} = - \rho g . \tag{2.23}$$

La relation (2.23) signifie donc qu'il y a équilibre hydrostatique dans la direction verticale.

L'intégration de (2.23) sur la verticale donne :

$$\pi = - \rho g x_3 + f(x_1, x_2) . \tag{2.24}$$

La fonction d'intégration f est déterminée par la condition à la surface libre ζ . A cet endroit, la pression π est équilibrée par la pression atmosphérique p_a ; ceci se traduit mathématiquement par

$$p_a = - \rho g \zeta + f(x_1, x_2) . \tag{2.25}$$

L'élimination de f entre (2.24) et (2.25) donne :

$$\pi = p_a + \rho g (\zeta - x_3) . \tag{2.26}$$

Les composantes horizontales de la force de Coriolis $2 \Omega \wedge \mathbf{u}$ se simplifient si on tient compte de la petitesse de la composante verticale de la vitesse. On a donc :

suivant l'axe 1

(2.27) $\qquad (2\,\Omega \wedge \mathbf{u})_1 = - f u_2$

suivant l'axe 2

(2.27') $\qquad (2\,\Omega \wedge \mathbf{u})_2 = f u_1$

où f représente le double de la composante verticale du vecteur rotation de la terre, soit

(2.28) $\qquad f = 2\,\|\Omega\| \sin \phi$

ϕ désignant la latitude.

En tenant compte de (2.14), (2.26) et (2.27), les composantes horizontales de l'équation de conservation de l'impulsion (2.12) se transforment comme suit :

$$(2.29) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} + \nabla.(\mathbf{u}\, u_1) - f u_2 = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right) + \xi_1 + \nu_t\, \nabla^2 u_1$$

$$(2.30) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla.(\mathbf{u}\, u_2) + f u_1 = - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right) + \xi_2 + \nu_t\, \nabla^2 u_2$$

ξ_1 et ξ_2 sont les deux composantes de la force de marée astronomique par unité de masse.

L'approximation faite en écrivant (2.24), (2.29) et (2.30) est équivalente à assumer un équilibre statique dans la direction verticale et à négliger toutes les composantes du vecteur rotation de la terre sauf la verticale : c'est ce qu'on appelle l'approximation quasi-statique.

2.2.- Intégration des équations de mouvement sur la profondeur

Lorsque les ingénieurs sont confrontés à des problèmes de génie maritime (construction de digues et de chenaux de navigation), ils sont surtout intéressés par l'élévation maximale ou minimale de la surface libre. Dans les problèmes d'environnement, la question importante est la concentration en polluants de la colonne d'eau. Pour ces raisons purement pratiques et pour simplifier la résolution des équations de mouvements, il convient d'intégrer les équations (2.11), (2.29) et (2.30)

sur la profondeur. On utilise, dans ce travail, soit le formalisme du transport d'eau intégré sur la profondeur, soit le formalisme de la vitesse moyenne sur la profondeur. On définit ces deux grandeurs de la manière suivante :

$$\mathbf{U} = U_1\,\mathbf{e}_1 + U_2\,\mathbf{e}_2 = H\,\overline{\mathbf{u}} \tag{2.31}$$

avec

$$U_i = \int_{-h}^{\zeta} u_i\,dx_3 = H\,\overline{u}_i \qquad (i = 1,2) \tag{2.32}$$

où $H = h + \zeta$ est la profondeur instantanée, ζ la surface libre et h la profondeur à l'équilibre.

Si $\hat{}$ désigne la déviation par rapport à la moyenne verticale, on a :

$$u_i = \overline{u}_i + \hat{u}_i$$

et

$$\int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i\,dx_3 = 0 \,. \qquad (i = 1,2) \tag{2.33}$$

L'intégration de l'équation (2.11) sur la profondeur donne en appliquant la condition cinématique à la surface libre :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \tag{2.34}$$

ou encore

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H\,\overline{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H\,\overline{u}_2}{\partial x_2} = 0 \,. \tag{2.35}$$

Comme les variations temporelles de la topographie du fond sont négligeables sur des intervalles de temps de quelques semaines, nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \sim \frac{\partial \zeta}{\partial t} \,. \tag{2.36}$$

L'intégration des équations (2.29) et (2.30) sur la profondeur fait apparaître des termes supplémentaires en raison des termes non linéaires. En effet,

$$\int_{-h}^{\zeta} u_i\,u_j\,dx_3$$

se décompose en deux termes de la manière suivante :

$$\int_{-h}^{\zeta} u_i\, u_j\, dx_3 = H\, \bar{u}_i\, \bar{u}_j + \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i\, \hat{u}_j\, dx_3 \,. \tag{2.37}$$

Le premier terme du membre de droite représente le produit des moyennes sur la profondeur et le deuxième, le produit moyen des déviations par rapport à la moyenne. Nous montrons, dans la suite de ce chapitre, que le deuxième terme a pour effet de disperser la quantité de mouvement U ou $\bar{u}$.

Les équations (2.29) et (2.30), après l'intégration sur la profondeur, donnent dans :

a) le formalisme du transport intégré sur la profondeur soit U

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_1^2}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{U_1\, U_2}{H}\right) - f\, U_2 \\ = H\left[\bar{\xi}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right)\right] + \int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) dx_3 \\ - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_1\, \hat{u}_j\, dx_3 + \nu_t \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=\zeta} - \nu_t \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h}\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_1\, U_2}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{U_2^2}{H}\right) + f\, U_1 \\ = H\left[\bar{\xi}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right)\right] + \int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) dx_3 \\ - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_2\, \hat{u}_j\, dx_3 + \nu_t \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=\zeta} - \nu_t \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h}\end{aligned} \tag{2.39}$$

b) le formalisme de la vitesse moyenne sur la profondeur soit $\bar{u}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - f\, \bar{u}_2 \\ = \bar{\xi}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right) + H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) dx_3 \\ - \sum_{j=1}^{2} H^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_1\, \hat{u}_j\, dx_3 + H^{-1}\left\{\nu_t \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=\zeta} - \nu_t \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h}\right\}\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial t} + \overline{u}_1 \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1} + \overline{u}_2 \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_2} + f\,\overline{u}_1$$

$$= \overline{\xi}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p_a}{\rho} + g\,\zeta\right) + H^{-1}\int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) dx_3 \qquad (2.41)$$

$$- \sum_{j=1}^{2} H^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_2\, \hat{u}_j\, dx_3 + H^{-1}\left\{\nu_t \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=\zeta} - \nu_t \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h}\right\}$$

Les équations (2.38) à (2.41) font intervenir des grandeurs reliées aux profils verticaux des courants et des termes d'interactions aux frontières surface et fond. Elles ne peuvent se résoudre sans faire intervenir les relations de fermeture.

3.- Etude critique des différents termes des équations du modèle hydrodynamique intégré sur la profondeur

3.1.- Le terme d'advection

Le terme d'advection [$\nabla . (H^{-1}\,\mathbf{U}\,\mathbf{U})$ ou $\overline{u}.\nabla\,\overline{u}$ suivant le formalisme choisi] est une des causes de la non-linéarité des équations de mouvement. Il crée non seulement des harmoniques du signal fondamental, mais provoque aussi un couplage entre des phénomènes comme les marées et les tempêtes. Ce terme est généralement négligé pour simplifier la résolution numérique des équations (2.38) à (2.41).

Brettschneider (1967) estime l'ordre de grandeur de l'advection avec un modèle numérique linéaire. Il obtient les résultats du tableau 3.

Tableau 3

$\|\overline{u}\|$ (m/s)	0,2	0,2	1,0	1,0
Dimension de la maille (m)	10^4	10^5	10^4	10^5
Terme d'advection / Terme de Coriolis ($f = 1{,}21 \times 10^{-4}\ s^{-1}$)	0,25	0,02	1,12	0,11

Nous constatons donc que l'advection devient de moins en moins négligeable quand la dimension du pas de la grille numérique diminue, c'est-à-dire quand on tient mieux compte de la topographie du fond. Pour des vitesses du mètre par seconde et pour des mailles caractérisées par un pas spatial de 10^4 mètres, le terme d'advection est aussi important que le terme de Coriolis.

En mer du Nord, il n'est pas rare d'observer des courants de l'ordre du mètre par seconde, et, comme nous le démontrons dans le chapitre traitant des méthodes numériques de résolution des équations du modèle, le pas spatial doit être choisi suffisamment petit pour que le déphasage entre la solution numérique et la solution analytique soit réduit à un niveau acceptable. Le terme non linéaire d'advection ne peut donc être négligé si on a la prétention de développer un modèle mathématique fiable. Remarquons qu'il est curieux de voir Brettschneider revendiquer des erreurs de l'ordre du % dans ces prédictions, alors qu'il néglige le terme d'advection.

3.2.- Le terme de Coriolis

Une simple analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations (2.38) à (2.41) montre que le terme de Coriolis est aussi important que les termes d'inertie et de pression.

Le facteur de Coriolis f n'est pas constant. La relation (2.28) donne la loi de variation de f

(2.28) $$f = 2 \|\Omega\| \sin \phi \ .$$

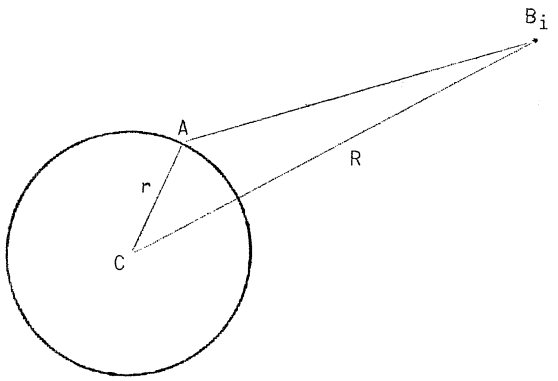
Si les dimensions sont faibles, nous pouvons considérer le facteur de Coriolis f comme constant. Pour un bassin comme la mer du Nord, la variation de f est la suivante :

$$\delta f = \frac{\sin 60^\circ - \sin 50^\circ}{\sin 55^\circ} \sim 0{,}12 \ .$$

Afin de réduire les erreurs, il convient donc de tenir compte de la variation de f avec la latitude.

3.3.- La force astronomique de marée moyenne

Soit ξ_1 et ξ_2 les deux composantes horizontales de la force génératrice des marées astronomiques. Si on se rappelle la définition de la force de marée : "la force de marée relative à l'astre i est la force d'attraction due à l'astre placé en B_i quand elle est mesurée en A moins la force d'attraction due au même astre mais mesurée au centre de la terre" [Platzman (1970)], on peut aisément montrer que le rapport entre la force de marée et la force de gravité est donné par :



$$\mathcal{R} = \frac{\xi}{g} \sim 2 \frac{M}{M_\oplus} \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

où M est la masse de l'astre considéré et $M_\oplus$ la masse de la terre. Pour la marée

- lunaire : $\mathcal{R} \sim 0{,}56 \times 10^{-7}$
- solaire : $\mathcal{R} \sim 0{,}26 \times 10^{-7}$.

La relation ci-dessus permet de négliger la variation verticale de la force génératrice des marées astronomiques

$$\overline{\xi} \sim \xi \ .$$

La composante horizontale de $\overline{\xi}$ est donc la vraie force génératrice de la marée océanique car la composante horizontale de la gravité apparente est nulle. La force horizontale de marée vaut environ :

(2.42) $\qquad (0{,}2 \quad \text{ou} \quad 0{,}5) \times 10^{-6}$ m/s^2

selon l'astre générateur considéré.

Au chapitre IV, nous démontrons que la force astronomique $\overline{\xi}$ ne provoque que de faibles dénivellations pour des bassins de petites dimensions comme la mer du Nord.

3.4.- Les termes de viscosité et de dispersion

Les termes

$$\int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right) dx_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j \, dx_3 \qquad i = 1,2$$

(2.43)

$$H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right) dx_3 - \sum_{j=1}^{2} H^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j \, dx_3 \quad i = 1,2$$

sont associés à la dispersion de la quantité de mouvement, ils dépendent de la structure verticale du champ horizontal de vitesse et de la viscosité ν_t. Pour résoudre les équations du modèle, il faut soit connaître expérimentalement les profils verticaux de courant, soit trouver une relation théorique de fermeture qui permet de relier les termes de (2.43) à l'écoulement moyen ou au transport intégré sur la profondeur.

Au premier paragraphe de ce chapitre, lors de la séparation du champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante, nous avons obtenu des termes contenant le produit moyen des fluctuations de vitesse dans l'équation régissant l'écoulement moyen. En accord avec la théorie de la turbulence, nous avions associé des termes de dispersion aux termes contenant les fluctuations temporelles de la vitesse.

Lors de l'intégration de l'équation (2.12) sur la profondeur, une vitesse moyenne sur la profondeur et sa déviation furent introduites. Connaissant l'effet dispersif des fluctuations temporelles et spatiales [Elder (1959), Bowden (1965), Ronday (1971), Nihoul (1972), (1975)], nous remplaçons les termes contenant les déviations verticales du courant par des termes de dispersion. Ils sont définis par, soit

$$(2.44) \quad \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j \, dx_3 = \nu_{cis} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad , \text{ soit} \quad H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j \, dx_3 = \nu_{cis} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

L'ordre de grandeur de ν_{cis} est donné par

$$\nu_{cis} \sim \ell \frac{\hat{u}^2}{\bar{u}}$$

où $\bar{u}$ et $\hat{u}$ sont des valeurs caractéristiques du courant moyen et de

sa déviation sur la profondeur, ℓ est la longueur caractéristique des variations horizontales de la vitesse $\bar{u}$.

En raison de la valeur élevée de ℓ (de l'ordre de 10^5 m) , la viscosité due à l'effet cisaillant peut devenir très importante; tout dépend du rapport $\frac{\hat{u}^2}{\bar{u}}$. Etudions divers profils :

a) le profil logarithmique de vitesse

Si la colonne verticale d'eau est parfaitement mélangée, le profil théorique déduit de considérations dimensionnelles est le suivant [*e.g.* Roll (1965)] :

$$u(x_3) = \frac{u_*}{\alpha} \ln \frac{x_3 + h}{z_0} \tag{2.46}$$

où u_* est la vitesse de friction, α la constante de Von Karman ($\alpha = 0{,}40$) et z_0 la longueur de rugosité.

En mer du Nord, Charnock (1959) détermina la longueur de rugosité à partir de mesures courantométriques. Elle vaut :

$$z_0 = (1{,}6 \pm 0{,}6)\ 10^{-3} \text{ m} . \tag{2.47}$$

En introduisant (2.46) dans le nombre de gauche de (2.44) et en intégrant, on trouve :

$$\nu_{cis} = \frac{\bar{u}^2}{(\ln \frac{h}{z_0} - 1)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} . \tag{2.48}$$

L'expression (2.48) peut encore se mettre sous la forme suivante :

$$\nu_{cis} \sim A \bar{u} \ell$$

Le tableau 4 donne des estimations du paramètre A .

Tableau 4

h (m)	10	20	40	80
A (10^{-2})	1,7	1,4	1,2	1,0

avec $z_0 = 1{,}6 \times 10^{-3}$ m .

b) Le profil expérimental logarithmique-parabolique

En 1938, Van Veen étudia la distribution verticale du courant au bateau-phare Varne (mer du Nord). Il obtint la loi empirique :

$$u(x_3) = u_s \left(\frac{x_3 + h}{h}\right)^{\beta} \tag{2.50}$$

où u_s est le courant de surface.

Les services hydrographiques déterminent avec un certain succès le courant de surface à partir des informations fournies par un courantomètre placé à 3 m au dessus du fond. Malheureusement, l'accord entre cette loi et les profils observés n'est pas très satisfaisant au voisinage du fond où le gradient vertical est le plus intense.

Des expériences plus récentes en mer du Nord [*e.g.* Bowden (1965)] ont permis de déterminer le profil vertical de vitesse :

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \frac{u_*}{\alpha}\left\{\ln\left(\frac{h}{z_0}\eta\right) - \eta + \frac{z_0}{h}\right\} && 0{,}0001 \le \eta \le 0{,}14 \\ u(\eta) &= \frac{u_*}{\alpha}\left\{\beta^{-1}\left(\eta - \frac{1}{2}\eta^2\right) + \ln\frac{\beta h}{z_0} - \frac{\beta}{2} - 1\right\} && 0{,}14 < \eta \le 1 \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec $\beta = 0{,}14$ et $\eta = \dfrac{x_3 + h}{h}$.

Le coefficient de viscosité due à l'effet cisaillant, pour le profil donné par (2.51), se calcule aisément à l'aide de la relation (2.44)

$$\nu_{cis} = \frac{\overline{u}^2\left(0{,}016 \ln \beta \frac{h}{z_0} + 1{,}555 + \frac{0{,}23}{h} \ln \beta \frac{h}{z_0} - \frac{2{,}3}{h}\right)}{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)\left(1{,}236 + \ln \beta \frac{h}{z_0}\right)^2} \tag{2.52}$$

En estimant $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}$ par $\dfrac{\overline{u}}{\ell}$ dans (2.52), la viscosité vaut environ

$$\nu_{cis} \sim A\, \overline{u}\, \ell \,. \tag{2.53}$$

Le tableau 5 donne la variation de A avec la profondeur.

Tableau 5

h (m)	10	20	40	80
A (10^{-2})	2,5	2,2	1,9	1,6

avec $z_0 = 1{,}6 \times 10^{-3}$ m.

En adoptant les grandeurs caractéristiques pour $\bar{u}$ et pour ℓ données au tableau 2, la viscosité due à l'effet cisaillant vaut

$$\nu_{cis} \sim (0,4 \text{ à } 1)\ 10^{4}\ m^2/s$$

suivant la profondeur et le choix du profil vertical de courant. La viscosité turbulente associée à l'opération de moyenne sur le temps (2.13) est beaucoup plus faible que celle associée au cisaillement vertical du courant, nous avons donc :

$$\nu_{mol} \ll \nu_t \ll \nu_{cis} \tag{2.54}$$

Aux termes

$$\int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right) dx_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j\, dx_3 \qquad i = 1,2 \tag{2.43}$$

nous associons un terme de dispersion de la quantité de mouvement défini soit par

$$\int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right) dx_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j\, dx_3 = \nu_{cis} \nabla^2 U_i \qquad i = 1,2 \tag{2.55}$$

soit par

$$H^{-1} \int_{-h}^{\zeta} \nu_t \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}\right) dx_3 - \sum_{j=1}^{2} H^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \hat{u}_i \hat{u}_j\, dx_3 = \nu_{cis} \nabla^2 \bar{u}_i \qquad i = 1,2 \tag{2.56}$$

suivant le formalisme choisi.

Les coefficients ν_{cis} dans les expressions (2.55) ou (2.56) ne sont évidemment pas identiques car le passage de l'une à l'autre doit faire apparaître des termes supplémentaires qui contiennent les dérivées spatiales de la profondeur. Comme l'estimation du paramètre de dispersion ν_{cis} est déjà grossière, il semble illusoire de vouloir raffiner. Au chapitre suivant, l'analyse des ordres de grandeur montrera que le terme de dispersion est petit comparé aux autres termes, pour des phénomènes comme les marées et les tempêtes. Dans nos modèles, le terme de dispersion sera négligé car sa contribution est inférieure ou égale à 1 %.

Le cisaillement vertical du courant n'est cependant pas négligeable dans les problèmes de diffusion où il joue un rôle capital [Nihoul (1972, 1974)].

3.5.- Le terme d'interaction à la surface libre

L'intégration des équations (2.29) et (2.30) fait apparaître des termes d'interaction avec l'atmosphère. Ils sont généralement apprcché en introduisant le concept de la contrainte de cisaillement τ_s à la surface [*e.g.* Welander (1961), Nihoul (1973)].

Le vent transfère de l'énergie à travers l'interface air-mer d'une manière très complexe : il engendre les ondes de surface, les grands courants et les tempêtes. Le vent joue également un rôle très important dans le transfert de la chaleur et de la vapeur d'eau.

Depuis Ekman (1905), Rossby et Montgomery (1935), les nombreuses recherches en météorologie et océanographie ont permis de comprendre certains mécanismes de transfert de l'énergie (influence de la vitesse du vent et de la stratification de l'air). Les résultats pratiques pour les modèles de simulation sont malheureusement assez décevants.

Les mesures [*e.g.* Monin (1970)] montrent que la structure de la couche limite turbulente atmosphérique, où interviennent la dispersion turbulente et les forces de Coriolis, est très irrégulière et que sa hauteur est de l'ordre du kilomètre. Dans la partie inférieure de cette couche, une autre sous-couche, appelée couche limite de la surface atmosphérique, est caractérisée par des flux verticaux de moment, de chaleur et de masse constants, lorsque le vent est suffisamment homogène horizontalement et statistiquement stationnaire. La force de Coriolis peut être négligée et l'épaisseur de cette couche est d'environ 10 mètres.

Comme le gradient vertical du flux de moment est nul dans la couche limite de la surface atmosphérique, la contrainte de cisaillement du vent τ_{s_w} est définie par :

$$\lim_{x_3 \to 0} \left[-\overline{(W_{v_1} W_{v_3})} \; \nu_a \frac{\partial W}{\partial x_3} \right] = \frac{\tau_{s_w}}{\rho_a} = u^{*2} \qquad (2.57)$$

si la direction de l'axe 1 coïncide avec la direction du vent. W_{v_1} et W_{v_3} sont les deux composantes des fluctuations turbulentes de vent et W est l'amplitude moyenne du vent. u^* représente la vitesse de friction, ρ_a la masse spécifique de l'air et ν_a la viscosité moléculaire de l'air.

Le principe de continuité impose que les cisaillements air-mer et mer-air soient identiques

$$\tau_s \equiv \tau_{s_w} \quad . \tag{2.58}$$

L'évaluation du terme de surface τ_s revient donc à déterminer u^{*2}. Krauss (1972) et d'autres auteurs ont étudié l'influence de la stratification thermique et de l'état de la surface libre de la mer. La théorie de la turbulence atmosphérique [*e.g.* Krauss (1972)] dit que l'influence de la stratification thermique diminue lorsque on se rapproche de l'interface air-mer : il existe une sous-couche, appelée sous-couche dynamique, où les seuls paramètres mécaniques entrent en jeu. L'épaisseur de cette couche peut varier dans de très grandes proportions. Dans le cas d'une stratification neutre, Krauss montre que les seuls paramètres mécaniques sont ν_a , u^* et h_s la hauteur des irrégularités de la surface.

a) Si $h_s < \frac{\nu_a}{u^*}$ les forces visqueuses dominent; il s'agit du cas de vents très légers qui n'induisent que de faibles courants.

b) si $h_s \gg \frac{\nu_a}{u^*}$ les contraintes turbulentes sont prépondérantes; une telle situation se présente lors de vents moyens ou forts.

c) Pour $x_3 \gg \frac{\nu_a}{u^*}$ et h_s , la turbulence est à petite échelle et dépend uniquement de u^* . La théorie, à partir d'arguments dimensionnels, donne

$$W(x_3) = \frac{u^*}{\alpha} \ln \frac{x_3}{z_0} \tag{2.59}$$

où α est la constante de Von Karman ($\alpha = 0{,}40$) et z_0 la longueur de rugosité de la surface libre.

Le profil logarithmique donné par la relation (2.59) est, en général, en bon accord avec les observations. La connaissance de la vitesse

du vent à une certaine hauteur permet de calculer la vitesse de friction u^* par l'intermédiaire de (2.59) si on connaît le paramètre z_0 . La longueur de rugosité z_0 dépend non seulement de la hauteur des vagues mais aussi du champ local de vent

Le but des expériences menées par Hasse (1968, 1974) en mer Baltique et en mer du Nord, par Smith (1967, 1970) dans le détroit de Vancouver et au large de la Nouvelle Ecosse est de déterminer le rapport

$$C_d = \frac{u^{*2}}{W^2} \quad . \tag{2.60}$$

Le coefficient de proportionnalité entre u^{*2} et W^2 porte le nom de coefficient de friction à la surface (en anglais *surface drag coefficient*). Pour des raisons pratiques, la détermination du coefficient C_d se fait à une hauteur de référence soit 10 mètres (il s'agit de la hauteur approximative de la passerelle des bateaux qui prennent les mesures météorologiques). Plusieurs méthodes existent pour la détermination du coefficient de friction C_d . Les plus anciennes se basaient sur la recherche du profil vertical et déduisaient les paramètres C_d et z_0 en supposant le profil expérimental comme étant logarithmique. Rossby et Montgomery ont obtenu en 1935 :

$$C_d = 0{,}9 \times 10^{-3}$$

pour W variant entre 10 et 23 m/s .

Les nouveaux anémomètres à fil-chaud et à poussée permettent de calculer directement le produit des fluctuations turbulentes W_{v_1} et W_{v_3} . Les mesures sont faites à partir de plateformes stables ou de bouées stabilisées pour réduire au maximum le roulis et le tangage. Le but de ces observations n'est plus de déterminer le profil vertical du vent, mais bien de calculer directement le produit moyen des fluctuations de vent. Les résultats de Hasse (1968), Smith (1967, 1970) sont donnés au tableau 6.

La moyenne pondérée de ces résultats donne :

$$C_d = (1{,}26 \pm 0{,}29) \times 10^{-3} \quad .$$

Tableau 6

Auteur	Nombre d'expériences	Valeur moyenne de $C_{10} \times 10^3$	Déviation standard $\times 10^3$
Smith (1967)	8	1,03	0,18
(1970)	32	1,35	0,34
Hasse (1968)	18	1,21	0,24

L'erreur sur le coefficient de friction est encore importante malgré l'utilisation d'un matériel de haute qualité. Les résultats de Rossby et Montgomery sont inférieurs à ceux obtenus par des techniques modernes.

Smith (1974) a mesuré les fluctuations de la vitesse du vent en utilisant un anémomètre sonique (basé sur l'effet Doppler) plus précis que ceux à fil-chaud et à poussée. Il a obtenu sur 39 expériences :

$$(2.62) \qquad - \overline{w_{v_1} w_{v_2}} = (- 0{,}002 + 1{,}2 \times 10^{-3} W_{10}^2) \pm 0{,}007 \ m^2/s$$

où W_{10} représente la vitesse du vent à une hauteur de 10 mètres.

Le coefficient de corrélation vaut 0,98 et la pente de la droite de régression donne

$$(2.63) \qquad C_d = 1{,}2 \times 10^{-3} .$$

L'accord entre (2.61) et (2.63) est satisfaisant. La relation (2.62) montre que le produit moyen des fluctuations de vitesse est affecté d'une erreur qui diminue avec la vitesse du vent. Les estimations de Hasse et Smith sont basées sur des vents moyens de l'ordre de 10 m/s . Pour des vitesses de vent plus élevées, les mouvements désordonnés des bouées portant les anémomètres empêchent toute mesure précise du produit moyen des fluctuations. La détermination du coefficient de friction est alors basée sur la méthode du profil vertical de vitesse. Hasse (1974) montre que le coefficient de friction augmente avec la vitesse du vent. Selon Wilson (1960) et Hasse (1974), C_d vaut

$$(2.64) \qquad C_d = (2{,}4 \pm 0{,}5) \ 10^{-3} \quad \text{pour} \quad W > 10 \ m/s .$$

La précision des résultats des simulations de tempêtes est forcément limitée par l'incertitude relative aux coefficients de friction à la surface de la mer.

La détermination des vents à 10 m se fait à partir de la pression atmosphérique et des différences de température de l'eau et de l'air.

3.6.- Le terme d'interaction au fond

L'intégration des équations (2.29) et (2.30) fait apparaître les termes d'interaction avec le fond de la mer. Comme pour le terme d'interaction à la surface, on associe à

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h} \qquad i = 1,2$$

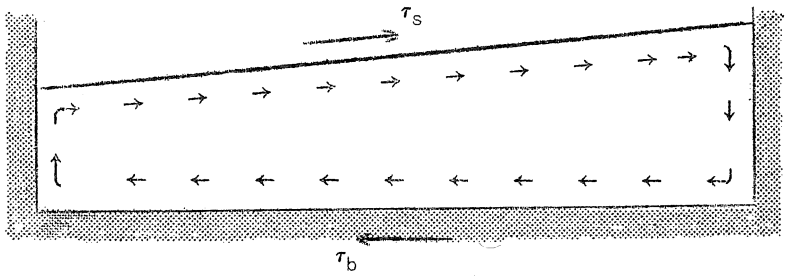
une tension de cisaillement sur le fond τ_b définie par

$$\tau_{b_i} = \nu_t \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\right|_{x_3=-h} \qquad i = 1,2 \tag{2.65}$$

Pour pouvoir résoudre les équations (2.38) à (2.41), il faut avoir une relation de fermeture entre τ_b, les variables d'états $U(\bar{u})$, ζ et certains paramètres. Selon Welander (1961), le profil vertical de vitesse est déterminé par l'histoire locale de la contrainte de vent et par la pente de la surface; la tension de cisaillement et le courant sont donc solutions d'équations intégrales. Un modèle basé sur de telles équations est inapplicable pour des calculs de simulation de tempêtes lorsque la géométrie et la bathymétrie du bassin sont irrégulières. On recherche plutôt un expression simple entre la tension de cisaillement τ_b et l'écoulement moyen. Il est utile de distinguer deux types de profils verticaux de vitesse :

a) Circulation quasi-stationnaire avec un transport vertical

Dans le cas d'un vent constant soufflant à la surface libre d'un bassin peu profond où la longueur est beaucoup plus grande que la largeur, les courants de surface et de fond ont des directions opposées.



Au voisinage des deux extrémités du bassin, on observe un transport vertical d'eau (*upwellings*).

Si le vent souffle suivant l'axe du bassin et si la viscosité verticale est constante, le transport U et le courant moyen sur la profondeur sont nuls. Ekman (1905) a également montré que

$$\tau_b = - m \tau_s \qquad (2.66)$$

avec $m = 0,5$.

b) Circulation purement horizontale

Les observations courantométriques dans la partie peu profonde de la mer du Nord [*e.g.* Hill (1974)] semblent indiquer que le courant garde une direction quasi-constante sur toute la profondeur et que l'eau circule horizontalement. Au moment du renversement de la marée, la direction du courant de surface est opposée à celle du courant de fond. En général, ces courants sont assez faibles. On peut donc supposer, en bonne approximation, une tension de cisaillement du même signe que le courant moyen sur la profondeur.

Dans les régions plus profondes, la théorie classique d'Ekman (1905) indique que la direction du courant est déviée vers la droite, dans l'hémisphère nord, en raison de la force de Coriolis. En dessous de la profondeur d'Ekman

$$h_D = \pi \sqrt{\frac{2 \nu_{verticale}}{f}}$$

la vitesse du courant est au moins 23 fois plus faible que celle du courant existant à la surface.

Comme le coefficient de viscosité verticale est de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-2} m^2/s , la profondeur d'influence d'Ekman sera d'environ 80 mètres . Dans les régions profondes de la mer du Nord, les courants sont généralement plus faibles et leur dynamique est régie par des équations plus simples ne faisant pas intervenir la friction sur le fond.

Pour la mer du Nord, on peut donc relier la tension de cisaillement sur le fond à la vitesse moyenne sur la profondeur. Suivant le choix du profil vertical de la vitesse, on obtient des variations non négligeables dans le calcul τ_b .

1) profil logarithmique de vitesse

Ce profil théorique est donné par la relation (2.46). En exprimant la tension de cisaillement en fonction de la vitesse de friction u^* , nous obtenons :

$$\tau_b = \frac{\alpha^2}{\{\ln(\frac{h}{z_0}) - 1\}^2} \|\bar{u}\| \bar{u} \qquad (2.67)$$

2) profil parabolique logarithmique

Ce profil mi-théorique, mi-expérimental semble bien convenir à la mer du Nord. La tension de cisaillement, exprimée en fonction de la vitesse moyenne sur la profondeur, est donnée par

$$\tau_b = \frac{\alpha^2 \|\bar{u}\| \bar{u}}{(1{,}236 + \ln \frac{0{,}14\ h}{z_0})^2} \qquad (2.68)$$

Comme pour la tension de cisaillement à la surface, il est possible de calculer τ_b à partir des fluctuations turbulentes de la vitesse. Les mesures courantométriques de Bowden (1953, 1962) et de Bowden et Fairbairn (1956) donnent pour des fonds sablonneux et peu profonds :

$$\tau_b = D \|\bar{u}\| \bar{u} \qquad (2.69)$$

avec $D \sim (2{,}16 \pm 0{,}20)\ 10^{-2}$.

Charnock (1959) et Dronkers (1961), pour un fond sablonneux, peu profond

mais présentant de nombreux *sand ripples*, obtiennent :

(2.70) $$D \sim (3{,}22 \pm 0{,}44)\ 10^{-3} .$$

Taylor (1919) étudia la marée dans la mer d'Irlande caractérisée par une profondeur moyenne de 80 mètres . Il détermina expérimentalement D

(2.71) $$D \sim (1{,}8 \pm 0{,}1)\ 10^{-3} .$$

Les différentes estimations du coefficient de friction D sont données au tableau 7.

Tableau 7

Profondeur h (m)	Coefficient de friction D x 10^3						
	Déterminé expérimentalement	Calculé à partir du profil logarithmique avec z_o =			Calculé à partir du profil parabolique-logarithmique avec z_o =		
		$6\ 10^{-4}$ m	$1{,}6\ 10^{-3}$ m	$2{,}6\ 10^{-3}$ m	$6\ 10^{-4}$ m	$1{,}6\ 10^{-3}$ m	$2{,}6\ 10^{-3}$ m
10	3,22 * / 2,16 **	2,1	2,7	3,0	2,0	2,5	2,8
20	-	1,8	2,2	2,5	1,7	2,1	2,4
40	-	1,6	1,9	2,1	1,5	1,8	2,0
80	1,8 ***	1,4	1,7	1,8	1,3	1,6	1,7

* Bowden ** Charnock *** Taylor

L'analyse de ces différentes estimations du coefficient de friction D semble indiquer que le coefficient dépend peu du type de profil considéré mais est fortement influencé par la longueur de rugosité qui dépend de la hauteur des irrégularités du fond.

Dans les régions peu profondes, les courants sont généralement intenses et la direction du courant change peu avec la profondeur; dans les régions plus profondes, par contre, le coefficient de friction D et les courants sont beaucoup plus faibles. Pour ces raisons, l'erreur introduite dans le modèle en utilisant la formulation (2.67) à (2.69) est donc limitée.

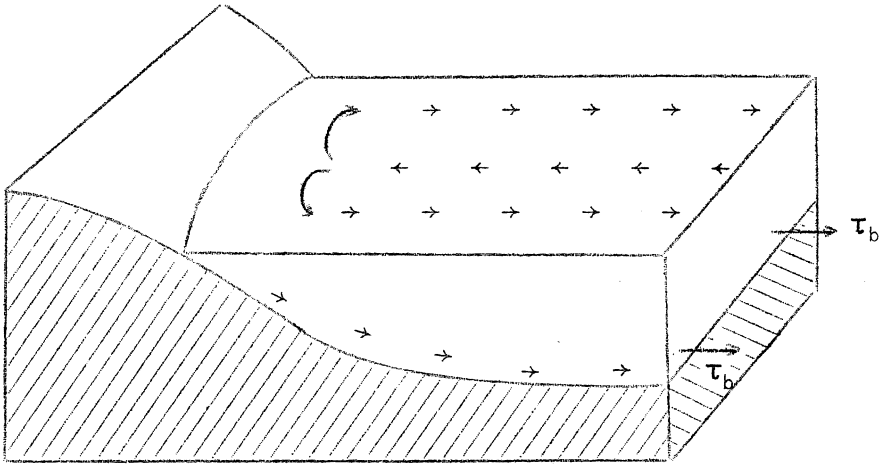
Afin de tenir compte de l'influence directe du vent sur la tension de friction sur le fond [voir la relation (2.66)], Groen et Groves (1966) et Heaps (1967) ont ajouté à

$$\tau_{b_1} = D \, \|\vec{u}\| \, \vec{u} \qquad (2.69)$$

un terme supplémentaire, proportionnel à la tension de cisaillement à la surface, de la forme :

$$\tau_{b_2} = - m \, \tau_s \qquad (2.66)$$

où m est un paramètre plus petit que l'unité. Heaps (1967) propose $m = 0,1$. Le facteur de proportionnalité m est fortement réduit par rapport à la valeur obtenue par Ekman ($m = 0,5$) dans le cas d'un bassin unidimensionnel. Dans un bassin bidimensionnel, avec une géométrie des côtes et une bathymétrie variables, les modèles réduits et les observations indiquent que la circulation verticale est quasi-inexistante au voisinage de la côte, en raison même de la topographie irrégulière du fond et de la côte. On observe souvent une circulation du type suivant :



où le courant de surface a la même direction que celui du fond. En combinant (2.66) et (2.69), la loi de friction s'écrit dans le formalisme du transport :

$$\tau_b = - m \tau_s + D \frac{\|U\| U}{H^2} \qquad (2.72)$$

et dans celui de la vitesse moyenne $\bar{u}$:

$$\tau_b = - m \tau_s + D \|\bar{u}\| \bar{u} \qquad (2.73)$$

Les estimations des profils verticaux de la vitesse et de la longueur de rugosité induisent des erreurs qui expliquent une partie des écarts perçus entre les résultats observés expérimentalement et les résultats obtenus par le calcul.

En introduisant les relations (2.55 ou 56), (2.57), (2.60) et (2.72 ou 73) dans (2.38) à (2.41), les équations régissant le mouvement fluide s'écrivent dans le formalisme du transport U

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla . U = 0 \qquad (2.34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla . (H^{-1} U U) + f e_3 \wedge U = H \{\xi - \nabla (\frac{p_a}{\rho} + g \zeta)\} + a \nabla^2 U + \frac{\rho_a}{\rho} (1 + m) C_d W \|W\| - \frac{D}{H^2} \|U\| U \qquad (2.74)$$

et dans celui du courant moyen sur la profondeur $\bar{u}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{u} . \nabla H + H \nabla . \bar{u} = 0 \qquad (2.35)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} . \nabla \bar{u} + f e_3 \wedge \bar{u} = \xi - \nabla (\frac{p_a}{\rho} + g \zeta) + a \nabla^2 \bar{u} + \frac{\rho_a}{\rho} (1 + m) \frac{C_d}{H} W \|W\| - \frac{D}{H} \|\bar{u}\| \bar{u} \qquad (2.75)$$

avec $H = h + \zeta$

et $U = \int_{-h}^{\zeta} u \, dx_3 = H \bar{u}$

Ces équations ne peuvent se résoudre sans faire appel à des conditions initiales et aux limites. On discute ce problème aux chapitres III et V.

4.- La circulation résiduelle dans les mers continentales

Dans les paragraphes précédents, nous avons établi un modèle mathématique pour l'étude des marées et des tempêtes. Les courants induits par de tels phénomènes permettent de déterminer à court terme les courants qui transportent et dispersent polluants et diverses espèces de plancton. La dérive à long terme du plancton et des polluants, la sédimentation et la distribution spatiale des masses d'eau sont des phénomènes pour lesquels le temps caractéristique de variation est beaucoup plus grand que la période d'une marée et d'une tempête.

Il est généralement admis que les mouvements fluides qui ont des temps caractéristiques de variation très importants peuvent être approchés par une succession de mouvements permanents correspondant à des états stationnaires. On donne habituellement le nom de courants résiduels à de tels écoulements.

Différentes interprétations existent quant à la description mathématique des courants résiduels.

Les expérimentateurs déterminent les courants résiduels à partir des mesures courantométriques. Ils considèrent le courant résiduel comme le courant obtenu en soustrayant de l'enregistrement courantométrique réel, le courant de marée calculé le plus important [*e.g.* Otto (1970)]. Cette méthode ne peut donner de bons résultats car les ordres de grandeur du courant mesuré et du courant de marée sont semblables et les erreurs affectant ces courants sont de l'ordre de grandeur du courant résiduel.

D'un point de vue mathématique, il serait tentant de définir le courant résiduel comme solution des équations (2.34), (2.74) ou (2.35), (2.75) pour lesquelles on supposerait les dérivées temporelles nulles. Cette façon d'agir conduirait à de mauvais résultats car les termes non-linéaires et les termes représentant les forces extérieures dépendent du temps.

En turbulence, on distingue deux types d'écoulement, l'écoulement moyen et l'écoulement turbulent. Le courant moyen est défini comme étant

la moyenne temporelle du courant réel. Les hydrodynamiciens [Nihoul et Ronday (1975)] définissent le courant résiduel comme le courant intégré sur un intervalle de temps suffisamment long pour couvrir plusieurs périodes de marée et pour ainsi supprimer la plupart des contributions transitoires. La définition est semblable à celle de la turbulence mais il existe cependant des différences fondamentales. En turbulence, l'écoulement moyen fournit de l'énergie à l'écoulement turbulent [*e.g.* Batchelor (1967)]. Pour l'écoulement en conduite, la turbulence tire son énergie de l'écoulement moyen et se dégrade vers des longueurs d'onde de plus en plus petites, pour enfin se dissiper en chaleur par la viscosité. En géophysique, l'énergie n'est pas entièrement fournie aux très grandes échelles de temps ou d'espace. Les vents, les marées et les variations de la pression atmosphérique agissent plutôt comme des sources d'énergie à des échelles de temps intermédiaires. La figure 1 donne une bonne représentation de la distribution d'énergie. L'énergie de marée, par exemple, est transférée aux phénomènes caractérisés par des grandes et des petites échelles de temps par l'intermédiaire des termes non linéaires des équations (2.74) ou (2.75).

Si U_0 et H_0 représentent les parties résiduelles de U et de H, nous pouvons écrire :

$$U = U_0 + U_1 \qquad (2.76)$$

$$H = H_0 + \zeta_1$$

avec $H_0 = h + \zeta_0$ et $\zeta_0 \ll h$.

L'indice $_0$ indique qu'il s'agit d'une moyenne sur un intervalle de temps choisi suffisamment grand pour éliminer la plupart des contributions transitoires (c'est en fait une nouvelle application de la méthode de K.B.M. décrite au paragraphe 2 de ce chapitre). On a donc :

$$(U_1)_0 \sim 0 \qquad (2.77)$$

$$(\zeta_1)_0 \sim 0$$

Les équations régissant la circulation résiduelle sont données par la moyenne temporelle des équations (2.34) et (2.74). Les termes linéaires

donnent une seule contribution correspondant à la valeur moyenne. Les termes non linéaires donnent évidemment deux contributions : le produit des moyennes et le produit moyen des fluctuations.

Etudions les termes non linéaires de l'équation (2.74). L'équation (2.35) permet d'écrire :

$$\zeta_1 \sim O(\frac{H\,\overline{u}_1}{c}) \tag{2.78}$$

avec $c = \sqrt{g\,H}$ la vitesse de phase pour les mouvements de marée. Comme $\overline{u}_1 \ll c$, on a $\zeta_1 \ll H$. Négligeant ζ_1 par rapport à H_0, les termes non linéaires moyens de l'équation (2.74) donnent :

$$[\nabla.(H^{-1}\,U\,U)]_0 \sim \nabla.(H_0^{-1}\,U_0\,U_0) + \nabla.(H_0^{-1}\,U_1\,U_1)_0 \tag{2.79}$$

$$[D\,H^{-2}\,U\,\|U\|]_0 \sim D\,H_0^{-2}\,U_0\,\|U_0\| + D\,H_0^{-2}[U_0\,\|U_1\| + U_1\,\|U_1\|]_0 \tag{2.80}$$

$$[g\,H\,\nabla\zeta]_0 \sim g\,H_0\,\nabla\zeta_0 + g\,(\zeta_1\,\nabla\zeta_1)_0 \tag{2.81}$$

Dans une mer continentale, les termes quadratiques dans les fluctuations ne sont généralement pas négligeables. En effet, dans les régions peu profondes de la mer du Nord, les courants et les élévations de la surface libre induits par les marées et les tempêtes sont respectivement de l'ordre du m/s et du mètre. Les mesures expérimentales de Cartwright (1961), Ramster (1965) et Hill (1973) montrent que l'amplitude des courants résiduels varie entre 10^{-2} à 10^{-1} m/s : les courants résiduels sont donc beaucoup plus faibles que les courants transitoires de marée et de tempête. Pour ces raisons, nous pouvons négliger le premier terme dans le membre de gauche des expressions (2.79) et (2.80). Négligeant ces termes, nous obtenons :

i) une friction sur le fond linéaire en U_0 [Bowden (1953)];

ii) un terme d'advection indépendant de U_0. Il dépend uniquement des termes transitoires en U_1.

Les mesures *in situ* [*e.g.* Hill (1974)] montrent que les longueurs caractéristiques de variations horizontales de ζ_0 et de ζ_1 sont semblables. Dans ces conditions, on ne peut donc pas négliger le deuxième terme du membre de gauche de (2.81).

En tenant compte des relations 2.79 à 2.81 et des hypothèses simplificatrices déduites des mesures *in situ*, les équations (2.34) et (2.74) intégrées sur le temps s'écrivent de la manière suivante :

$$\nabla . U_0 = 0 \tag{2.82}$$

$$f\, e_3 \wedge U_0 = - H_0\, \nabla\left(\frac{p_a}{\rho} + g\, \zeta_0\right) - K\, H_0^{-1}\, U_0 + C_{10}(W\, \|W\|)_0 - [D\, H_0^{-2}\, (U_1\, \|U_1\|) + g\, \zeta_1\, \nabla\zeta_1 + \nabla(H_0^{-1}\, U_1 \|U_1\|)]_0 \tag{2.83}$$

où $$C_{10} = \frac{\rho_a}{\rho}\,(1 + m)\, C_d$$

représente le coefficient de friction à la surface libre et où

$$K = D\, H_0^{-1}\, \|U_1\|_0$$

est un nouveau coefficient de friction.

Le terme entre crochets doit être estimé par des données expérimentales ou par des modèles hydrodynamiques adaptés à l'étude des circulations transitoires de marées et de tempêtes.

Par analogie avec la tension de vent, nous définissons une contrainte additionnelle τ_t par :

$$\tau_t = - [g\, \zeta_1\, \nabla\zeta_1 + \nabla.(H_0^{-1}\, U_1 \|U_1\|) + D\, H_0^{-2}\, (U_1\, \|U_1\|)]_0 \tag{2.84}$$

τ_t est appelé tension de marée en raison du rôle prépondérant joué par la marée dans la circulation transitoire en mer du Nord (voir fig. 2) (en réalité, elle contient aussi bien la contribution des marées que celle des vents transitoires).

L'équation (2.83) peut encore se mettre sous la forme :

$$f\, e_3 \wedge U_0 = - H_0\, \nabla\left(\frac{p_a}{\rho} + g\, \zeta_0\right) - K\, H_0^{-1}\, U_0 + \Theta \tag{2.85}$$

où $\Theta = C_{10}(W\, \|W\|)_0 + \tau_t$ représente les sources extérieures d'énergie.

L'équation de continuité (2.82) permet d'introduire une fonction de courant ψ définie par

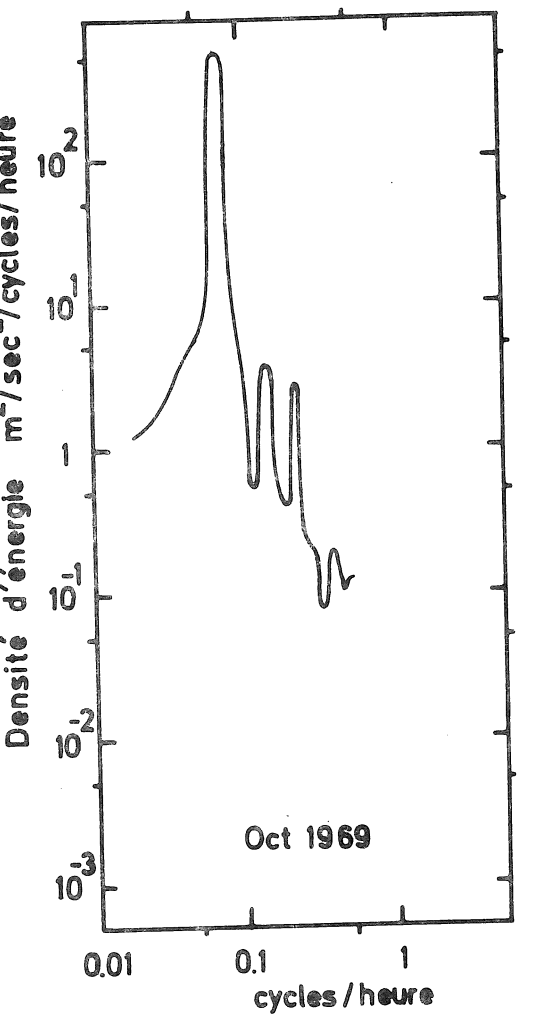


fig. 2.
Densité d'énergie en octobre 1969 dans la partie sud de la mer du Nord [d'après Talbot (1972)]

$$U_{0,1} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \qquad (2.86)$$

$$U_{0,2} = + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \qquad (2.87)$$

En divisant (2.85) par H_0 et en prenant le rotationnel pour éliminer l'élévation de surface, nous obtenons :

$$K\,\nabla^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial K}{\partial x_1} - \frac{2K}{H_0}\frac{\partial H_0}{\partial x_1} + \beta H_0 - f\frac{\partial H_0}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\left(\frac{\partial K}{\partial x_2} - \frac{2K}{H_0}\frac{\partial H_0}{\partial x_2} + f\frac{\partial H_0}{\partial x_1}\right)$$

(2.89)

$$= H_0\,\omega_3 + \frac{\partial H_0}{\partial x_2}\,\Theta_1 - \frac{\partial H_0}{\partial x_1}\,\Theta_2$$

où $\omega = (\nabla \wedge \Theta)_3$

et $\beta = \frac{df}{dx_2} \sim O(\frac{2\Omega}{a})$.

β est le facteur introduit par Rossby [*e.g.* Stommel (1949)] pour tenir compte de la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude. a et Ω sont respectivement le rayon et la vitesse de rotation angulaire de la terre.

L'équation (2.89) pourrait se résoudre très facilement si l'élévation résiduelle ζ_0 était négligeable vis-à-vis de h . L'ordre de grandeur de ζ_0 se calcule aisément.

Comme le temps caractéristique des courants résiduels est très grand, on peut supposer, en première approximation, que le fluide est en équilibre géostrophique. Ceci se traduit par :

(2.90) $$f\,e_3 \wedge U_0 = -\,h\,\nabla(g\,\zeta_0) .$$

Cette équation permet donc de calculer l'ordre de grandeur de ζ_0 :

$$\zeta_0 \sim O(\frac{f\,\bar{u}_0}{g}\,\ell)$$

où $\bar{u}_0$ représente le courant résiduel moyen sur la profondeur et ℓ la longueur caractéristique de variation de ζ_0 . En supposant ℓ égal à la moitié de la plus grande dimension du bassin de la mer du Nord, soit 10^6 m , et en prenant l'estimation du courant résiduel donnée par Cartwright (1961), nous obtenons :

(2.92) $$\zeta_0 \sim 0{,}3 \text{ m} .$$

Les variations de la bathymétrie de la mer du Nord sont suffisamment importantes pour qu'on puisse négliger $\frac{\partial\zeta_0}{\partial x_i}$ devant $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ (i = 1,2) (voir carte des profondeurs au chapitre IV). Nous pouvons donc négliger ζ_0 devant h dans (2.84) et (2.89). La tension de marée (2.84) devient

indépendante de la circulation résiduelle et l'équation (2.89) se met sous la forme :

$$K\nabla^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial K}{\partial x_1} - \frac{2K}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \beta h - f\frac{\partial h}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\left(\frac{\partial K}{\partial x_2} - \frac{2K}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2} + f\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)$$

(2.93)

$$= h\,\omega_3 + \frac{\partial h}{\partial x_2}\Theta_1 - \frac{\partial h}{\partial x_1}\Theta_2$$

Le membre de droite de (2.93) représente l'ensemble des forces extérieures et est indépendant de ψ ou ζ_0 . L'équation (2.93) se résoud en utilisant l'algorithme numérique développé au chapitre III. Les grandeurs Θ et ω_3 doivent être connues en tous les noeuds du réseau maillé et la fonction de courant ψ le long des frontières :

i) le long d'une côte, le flux d'eau normal à la côte est nul. Cette condition s'exprime mathématiquement par :

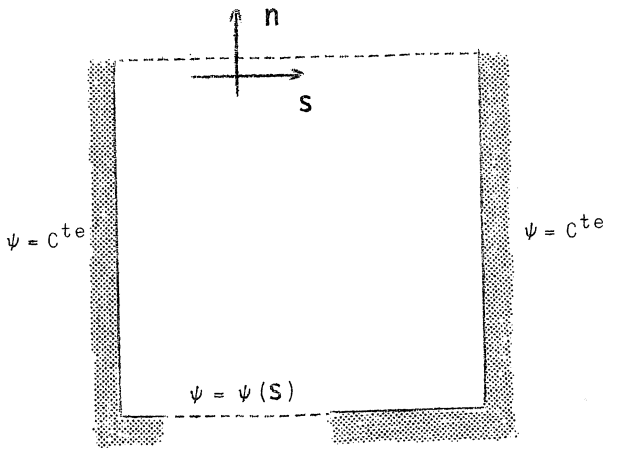
(2.94) ψ = constante ;

ii) le long d'une frontière ouverte. L'équation (2.93) est une équation aux dérivées partielles elliptique. Les conditions aux limites sont soit

(2.95) $\psi = \psi(s)$

soit

(2.96) $\frac{\partial\psi}{\partial n} = f(s)$.



Nous discutons l'emploi des conditions aux limites applicables à la mer du Nord au chapitre VI.

Remarque importante

En principe, il serait possible de déterminer le courant résiduel à partir de la solution des équations (2.34) et (2.74). Le courant résiduel serait obtenu en intégrant la solution de (2.34) et (2.74) sur un intervalle de temps suffisamment long pour éliminer la plupart des contributions transitoires de marée et de tempête.

En pratique, cette méthode doit être rejetée car les courants de marée ou de tempête sont dix à cent fois plus intenses que les courants résiduels et sont affectés d'erreurs importantes : la solution de (2.34) et (2.74) est essentiellement la contribution transitoire. Si nous admettons une erreur de 10 % sur les courants de marée et de tempête et un courant résiduel dix fois plus faible que le courant de marée, nous avons :

$$\delta U \sim \delta U_1$$

et l'erreur absolue sur U_0 vaut :

$$\frac{\delta U_0}{U_0} = \frac{\delta(U - U_1)}{U_0} \sim 2 \frac{\delta U_1}{U_0} \sim 200\ \% \ . \tag{2.97}$$

L'erreur sur le courant résiduel est donc du même ordre de grandeur que le courant résiduel : la méthode qui consiste à intégrer la solution doit donc être rejetée.

Pour éviter de telles difficultés, il faut :

i) résoudre la circulation transitoire de marée et de tempête à l'ordre du modèle hydrodynamique décrit par les équations (2.34) et (2.74);

ii) résoudre l'équation (2.93) qui traduit mathématiquement la circulation résiduelle. La tension de "marée" est calculée explicitement par le modèle de marée et de tempête.

Dans la partie peu profonde de la mer du Nord, nous pouvons aisément montrer que les ordres de grandeur du terme de Coriolis et du terme de tension de marée sont semblables.

L'erreur sur le terme de Coriolis vaut :

$$\delta(f\, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{U}_0) \sim f\, U_0 \frac{\delta U_0}{U_0} \tag{2.98}$$

Si nous supposons

$$\frac{\delta U_1}{U_1} \sim \frac{\delta \zeta_1}{\zeta} \tag{2.99}$$

l'erreur sur la tension de marée s'exprime par :

$$\delta(\tau_t) \sim 2\, \tau_t \frac{\delta U_1}{U_1} \tag{2.100}$$

Comme les ordres de grandeur de τ_t et du terme de Coriolis sont les mêmes, il s'ensuit que :

$$\frac{\delta U_0}{U_0} \sim 2 \frac{\delta U_1}{U_1} \sim 20\ \% \ . \tag{2.101}$$

La méthode développée dans ce travail semble donc prometteuse puisque nous sommes parvenus à réduire à 20 % l'erreur commise sur le courant résiduel.

Chapitre III

Méthodes de résolution des modèles hydrodynamiques

1.- Introduction

Les équations décrivant les circulations des masses d'eau dans des mers peu profondes ne peuvent se résoudre complètement sans faire des hypothèses simplificatrices.

Les méthodes analytiques de résolution sont généralement inapplicables car la géométrie des côtes et la bathymétrie des bassins réels sont irrégulières. Des modèles hydrodynamiques très simplifiés, pour lesquels on peut obtenir une solution analytique, sont cependant utiles pour comprendre certains phénomènes comme l'influence des termes non linéaires d'advection sur la courbe marégraphique dans les régions peu profondes [*e.g.* Kreiss (1958)].

L'aménagement de digues suffisantes, la détermination de routes sûres pour les pétroliers géants et l'étude de la dérive du plancton et des polluants exigent une connaissance précise des marées, des tempêtes et des courants résiduels. Il faut donc résoudre les équations de mouvement établies au chapitre II en réduisant le plus possible le nombre d'hypothèses simplificatrices. De telles équations doivent être résolues numériquement.

Pour l'étude de l'environnement marin, il faut développer des algorithmes de résolution qui doivent non seulement être précis mais aussi rapides. Il existe, en analyse numérique, deux techniques de

résolution, l'une basée sur les différences finies, l'autre sur les éléments finis.

1.1.- Méthode aux éléments finis

En élasticité, la méthode de résolution basée sur les éléments finis connaît de nombreux succès depuis plus de dix ans. L'emploi de mailles irrégulières et de conditions aux limites compliquées ne pose aucune difficulté majeure. Habituellement, on développe un principe variationnel pour formuler la méthode aux éléments finis. L'obtention d'un principe variationnel ne pose en général pas de problème lorsqu'on traite des problèmes d'élasticité.

Les équations de l'hydrodynamique sont beaucoup plus compliquées que les équations de l'élasticité; de plus, elles n'admettent aucun principe variationnel vrai lorsqu'on étudie le mouvement non linéaire de fluides visqueux. Les applications de la méthode aux éléments finis pour le problème de la propagation d'ondes de gravité sont très rares. Grotkop (1973) étudia la marée semi-diurne lunaire dans la mer du Nord en utilisant la méthode des éléments finis dans l'espace et dans le temps; l'algorithme de résolution est basé sur celui de Galerkin. Selon Grotkop, cette méthode a :

i) deux avantages :
   - il n'y a pas de condition de stabilité sur le pas temporel d'intégration pour un algorithme de résolution implicite dans l'espace et dans le temps.
   - le problème des grilles variables est résolu.

ii) deux inconvénients :
   - comme l'algorithme de résolution est doublement implicite, il faut résoudre un système de 18 équations algébriques pour chaque cellule élémentaire et pour chaque pas de temps.
   - le temps de calcul est très important. Grotkop a montré que sa méthode, pour une même précision dans les résultats, est

moins rapide qu'une méthode aux différences finies utilisant un algorithme explicite.

Pour ces raisons, nous n'utiliserons pas les éléments finis pour la résolution des modèles hydrodynamiques établis dans ce travail.

1.2.- Méthode aux différences finies

Cette méthode est maintenant bien connue en mécanique des fluides. On peut distinguer deux grandes familles d'algorithmes numériques : les schémas implicites ou semi implicites et les schémas explicites. Comme les modèles hydrodynamiques doivent être des instruments de prédiction et de gestion, il convient d'utiliser un algorithme qui allie la précision et la rapidité du calcul. Nous développons au paragraphe suivant un schéma de résolution dérivé de celui de Hansen. L'analyse critique de ce schéma et de ceux existant dans la littérature [Van Dantzig (1960), Hansen (1966), Leenderste (1967), Heaps (1969)] fera ressortir les avantages de notre algorithme.

2.- Méthode numérique de résolution pour la circulation transitoire

La méthode de résolution du système d'équations aux dérivées partielles (2.34),(2.74) ou (2.35),(2.75) selon le formalisme choisi est basée sur une méthode aux différences finies utilisant un algorithme explicite. Une grille spatiale tirée de la littérature [*e.g.* Brettschneider (1967)] et un schéma original de discrétisation permettent de résoudre correctement le problème de la propagation des ondes de marée et de tempête dans des mers peu profondes. Dans tout ce chapitre, nous étudions en détail la résolution des équations (2.35),(2.75), c'est-à-dire dans le formalisme du courant moyen sur la profondeur. On pourra sans peine adapter cette méthode pour la résolution des équations (2.34) (2.74).

Les équations (2.35),(2.75), établies au chapitre précédent, s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H\bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - f\,\bar{u}_2 + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \\ &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \xi_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p_a}{\rho}\right) + a\,\nabla^2 \bar{u}_1 + \frac{\rho_a}{\rho}(1+m)\frac{C_d}{H} W_1 \|W\| - \frac{D}{H}\bar{u}_1 \|\bar{u}\|\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + f\,\bar{u}_1 + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \\ &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \xi_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p_a}{\rho}\right) + a\,\nabla^2 \bar{u}_2 + \frac{\rho_a}{\rho}(1+m)\frac{C_d}{H} W_2 \|W\| - \frac{D}{H}\bar{u}_2 \|\bar{u}\|\end{aligned} \tag{3.3}$$

où $H = h + \zeta$ est la profondeur instantanée, ζ l'élévation de la surface libre par rapport à sa position d'équilibre h, ξ la force astronomique génératrice des marées, p_a la pression atmosphérique, ρ la masse spécifique de l'eau de mer, ρ_a la masse spécifique de l'air, C_d le coefficient de friction à la surface, D le coefficient de friction sur le fond, a la viscosité due à l'effet cisaillant et f le paramètre de Coriolis.

Les équations (3.2) et (3.3) ont un caractère mixte : elles sont paraboliques-elliptiques en raison du terme de viscosité. Pour les ondes de marée ou de tempête, les forces de viscosité ne jouent pratiquement aucun rôle.

2.1.- Analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations de mouvement

L'emploi de variables sans dimension facilite l'étude des différents termes des équations de mouvement. Le temps caractéristique des phénomènes transitoires de marée et de tempête est voisin de la période de la marée semi-diurne soit environ 5×10^4 s. Les grandeurs sans dimension sont introduites par les relations suivantes :

$$\bar{u}_i = u_c\,\bar{u}'_i \qquad i = 1,2$$

$$W_i = W_c\,W'_i \qquad i = 1,2$$

$$h = h_c\ h'$$

$$\zeta = \zeta_c\ \zeta'$$

$$\xi_i = \xi_c\ \xi_i' \qquad i = 1,2$$

$$x_i = \ell_c\ x_i' \qquad i = 1,2$$

$$t = t_c\ t'$$

Les mesures océanographiques montrent que les variations spatiales des profondeurs et des courants sont intimement liées. On a généralement :

$$O(\bar{u}_i \frac{\partial h}{\partial x_i}) \sim O(h \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}) \ .$$

En introduisant ces relations dans les équations (2.35) et (2.75), nous obtenons :

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + N_2\ \bar{u}'.\nabla\zeta' = - N_8\ h'\ \nabla.\bar{u}' - N_2\ \zeta'\ \nabla.\bar{u}' - N_8\ \bar{u}'.\nabla h' \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + N_2\ \bar{u}'.\nabla\bar{u}' + N_1\ e_3 \wedge \bar{u}'$$

$$= N_4\ \xi' - N_3\ \nabla\zeta' + N_5 \frac{W'\ \|W'\|}{h'(1+\frac{\zeta_c}{h_c}\zeta')} + N_6\ \nabla^2\bar{u}' - N_7 \frac{u'\ \|u'\|}{h'(1+\zeta_c\ h_c^{-1}\ \zeta')} \tag{3.6}$$

avec

$$N_0 = \frac{\lambda}{\ell_c} = \frac{t_c\ \sqrt{g\ h_c}}{\ell_c} = \frac{t_c\ c}{\ell_c}$$

$$N_1 = f\ t_c$$

$$N_2 = \frac{u_c}{c}\ N_0$$

$$N_3 = \frac{g\ \zeta_c}{c\ u_c}\ N_0$$

$$N_4 = \frac{t_c\ \xi_c}{u_c}$$

$$N_5 = \frac{\rho_a}{\rho}\ t_c\ \frac{C_d}{u_c}\ (\frac{1+m}{h_c})\ W_c^2$$

Tableau 1

$N_o = 5$

$D = 2\ 10^{-3}$, $C_d = 10^{-3}$, $W_c = 10$ m/s , $t_c = 5\ 10^4$ s

h_c (m)	10	30	50	100	300
ζ_c (m)	2	1	1	0,5	0,5
u_c (m/s)	1,5	1	0,5	0,3	0,1
N_1	5	5	5	5	5
$N_2 = N_2'$	1	$3\ 10^{-1}$	10^{-1}	$5\ 10^{-2}$	10^{-2}
$N_3 = N_3'$	5	3	5	3	3
$N_4 = N_4'$	10^{-2}	$3\ 10^{-2}$	$5\ 10^{-2}$	10^{-1}	$3\ 10^{-1}$
$N_5 = N_5'$	$5\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$
N_6	10^{-2}	$5\ 10^{-3}$	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}
$N_7 = N_7'$	10	3	1	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-2}$
$N_8 = N_8'$	3	10	5	10	30
Cas possible	oui	oui	oui	oui	oui

$$N_6 = \frac{a\ t_c}{\ell_c^2} = \frac{A\ u_c}{c} N_0$$

$$N_7 = \frac{D\ u_c\ t_c}{h_c}$$

$$N_8 = \frac{h_c\ u_c}{c \zeta_c} N_0 \ .$$

Ces nombres sans dimension peuvent varier dans de grandes proportions selon les caractéristiques de l'écoulement. Le nombre N_0 compare la longueur d'onde d'une onde progressive dans un milieu infini à la longueur caractéristique du phénomène considéré. Pour une mer continentale, la longueur caractéristique de variation est limitée pour deux

Tableau 2

$N_o = 3$

$D = 2\ 10^{-3}$, $C_d = 10^{-3}$, $W_c = 10$ m/s , $t_c = 5\ 10^4$ s

h_c (m)	10	30	50	100	300
ζ_c (m)	2	1	1	0,5	0,3
u_c (m/s)	1,5	1	0,5	0,3	0,1
N_1	5	5	5	5	5
$N_2 = N_2'$	$5\ 10^{-1}$	10^{-1}	10^{-1}	$3\ 10^{-2}$	$5\ 10^{-3}$
$N_3 = N_3'$	3	1	3	1	1
$N_4 = N_4'$	10^{-2}	$3\ 10^{-2}$	$5\ 10^{-2}$	10^{-1}	$3\ 10^{-1}$
$N_5 = N_5'$	$5\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$
N_6	10^{-2}	$3\ 10^{-3}$	10^{-3}	$5\ 10^{-4}$	10^{-4}
$N_7 = N_7'$	10	3	1	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-2}$
$N_8 = N_8'$	3	5	3	5	5
Cas possible	oui	oui	oui	non	non

raisons : les dimensions du bassin fixent une borne supérieure pour ℓ_c ; de plus, la rotation de la terre confère à l'onde un caractère plus ou moins rotatoire. La friction influence également la longueur ℓ_c car elle réduit la célérité de l'onde. Dans les régions très peu profondes, le rapport N_0 peut atteindre sa valeur limite, soit $N_0 = 1$, mais en général N_0 varie entre 3 et 5 . La théorie des marées [*e.g.* Dronkers (1966)] et les observations [*e.g.* Defant (1961)] montrent qu'il existe des zones de faibles étendues pour lesquelles la variation temporelle de la surface est très faible : il s'agit d'une région d'amphidromie. Les variations spatiales de la vitesse du fluide et de l'élévation sont par contre beaucoup plus importantes. A ces endroits, le nombre N_0 peut atteindre des valeurs de 10 à 30 .

Tableau 3

$N_o = 30$

$D = 2\ 10^{-3}$, $C_d = 10^{-3}$, $W_c = 10$ m/s , $t_c = 5\ 10^4$ s

h_c (m)	10	30	50	100	300
ζ_c (m)	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
u_c (m/s)	1,5	1	0,5	0,3	0,1
N_1	5	5	5	5	5
$N_2 = N_2'$	5	1	$5\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$5\ 10^{-2}$
$N_3 = N_3'$	5	5	5	3	5
$N_4 = N_4'$	10^{-2}	$3\ 10^{-2}$	$5\ 10^{-2}$	10^{-1}	$3\ 10^{-1}$
$N_5 = N_5'$	$5\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-1}$
N_6	$5\ 10^{-2}$	$3\ 10^{-2}$	10^{-2}	$5\ 10^{-3}$	10^{-3}
$N_7 = N_7'$	10	3	1	$3\ 10^{-1}$	$3\ 10^{-2}$
$N_8 = N_8'$	10^2	10^2	$3\ 10^2$	$3\ 10^2$	10^2
Cas possible	oui	oui	oui	oui	oui

Les tableaux 1 et 2 montrent les domaines de variation des nombres sans dimension N_i $(i = 1,8)$ lorsqu'on se trouve éloigné des régions d'amphidromie. Le tableau 3 donne par contre les variations de N_i $(i = 1,8)$ au voisinage d'une amphidrimie. Pour chaque cas, nous envisageons si un tel écoulement est possible : un écoulement est possible si deux termes, au moins, sont du même ordre de grandeur.

L'analyse de ces divers tableaux permet de tirer les conclusions suivantes :

i) le terme viscosité N_6 est toujours négligeable si on admet une erreur inférieure ou égale à un pourcent;

ii) le terme d'advection N_2 est souvent petit $(< 20\ \%)$ lorsqu'on se trouve loin d'une région d'amphidromie; il devient par contre

important pour une amphidromie en eau peu profonde;

iii) le terme astronomique de marée N_4 est très petit dans les régions peu profondes, mais il atteint une valeur non négligeable dans les régions où la profondeur est supérieure à 300 mètres .

En l'absence de termes de viscosité, les équations (3.5) et (3.6) perdent le caractère parabolique-elliptique : elles deviennent hyperboliques (on pourrait montrer que les caractéristiques de ces équations sont distinctes et réelles).

Le système d'équations régissant le mouvement des marées et des tempêtes est donc donné par :

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + N_2\, \overline{u}'.\nabla\zeta' = N_8\, h'\, \nabla.\overline{u}' - N_2\, \zeta'\, \nabla.\overline{u}' - N_8\, \overline{u}'.\nabla h' \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \overline{u}'}{\partial t} + N_2\, \overline{u}'.\nabla\overline{u}' + N_1\, e_3 \wedge \overline{u}' = N_4\, \xi' - N_3\, \nabla\zeta' + N_5 \frac{W' \|W\|}{h'(1+\frac{\zeta_c}{h_c}\zeta')} - N_7 \frac{\overline{u}' \|\overline{u}'\|}{h'(1+\frac{\zeta_c}{h_c}\zeta')} \tag{3.8}$$

Dans la suite du chapitre, les ' seront supprimés pour simplifier l'écriture.

Pour résoudre ce système, il faut connaître :

i) les conditions initiales pour $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ et ζ ;

ii) les conditions aux limites. Comme le problème est hyperbolique il suffit d'avoir une et une seule condition aux limites, soit sur $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$ ou ζ . En général, on impose un flux normal d'eau nul à la côte et on donne ζ sur la frontière ouverte.

2.2.- Description des grilles spatiales et des grilles temporelles

La grille spatiale utilisée pour la résolution de la circulation transitoire est une grille classique adoptée par de nombreux chercheurs en météorologie et en océanographie [*e.g.* Hansen (1966), Brettschneider (1967), Leendertse (1967) Reid et Bodine (1968)].

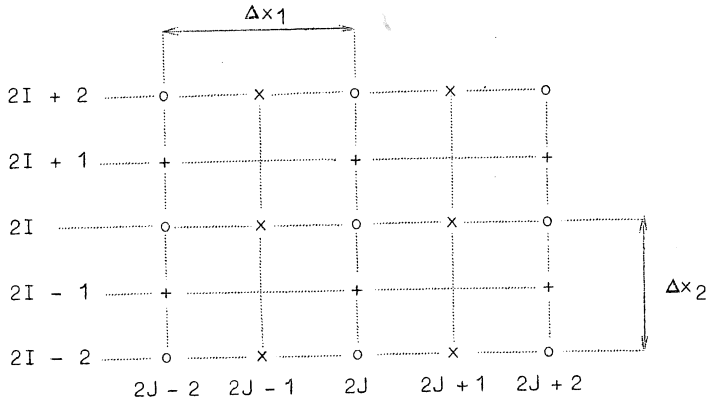


fig. 1.

Les variables $\bar{u}_1$ (U_1) sont calculées aux noeuds x , les variables $\bar{u}_2$ (U_2) sont calculées aux noeuds + , et l'élévation ζ aux noeuds o . Cette grille a l'avantage de simplifier fortement l'expression des conditions aux limites car on ne devra résoudre aucune équation à la frontière.

Quant à la grille temporelle, nous utilisons une procédure quasi-classique : les variables $\bar{u}_1$ (U_1) , $\bar{u}_2$ (U_2) et ζ sont calculées au même instant. La seule, mais importante, différence consiste en l'emploi des nouvelles estimations de $\bar{u}_1$ (U_1) et $\bar{u}_2$ (U_2) dans le calcul de ζ . Dans le cas unidimensionnel, l'algorithme de résolution est le suivant :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{n+1} &= a\, \bar{u}_1^{n} + b\, \zeta^{n} \\ \zeta^{n+1} &= c\, \bar{u}_1^{n+1} + d\, \zeta^{n} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Au paragraphe 2.7 de ce chapitre, nous demontrons que l'algorithme

$$\bar{u}_1^{n+1} = a\, \bar{u}_1^{n} + b\, \zeta^{n}$$

$$\zeta^{n+1} = c\, u^{n} + d\, \zeta^{n}$$

est instable lorsqu'on utilise des grilles décentrées pour $\bar{u}_1$ et ζ .

2.3.- Discrétisation des équations aux dérivées partielles et détermination de la précision du schéma

La discrétisation des dérivées est la première étape dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer les pas spatiaux constants et égaux. Un développement de Taylor donne pour $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}$ soit

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = \frac{\bar{u}_1(x_1 + \Delta x) - \bar{u}_1(x_1 - \Delta x)}{2\,\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{3.10}$$

soit

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = \frac{\bar{u}(x_1 + \Delta x) - u(x_1)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3.11}$$

suivant la précision désirée.

En l'absence des forces extérieures qui doivent être fournies à tous les noeuds de la grille numérique (fig. 1), les équations (3.5) et (3.8) s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_2\, \bar{\mathbf{u}}.\nabla\zeta = - N_8\, h\, \nabla.\bar{\mathbf{u}} - N_2\, \zeta\, \nabla.\bar{\mathbf{u}} - N_8\, \bar{\mathbf{u}}.\nabla h \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + N_2\, \bar{\mathbf{u}}.\nabla\bar{\mathbf{u}} + N_1\, \mathbf{e}_3 \wedge \bar{\mathbf{u}} = - N_3\, \nabla\zeta - N_7\, \frac{\bar{\mathbf{u}}\,\|\bar{\mathbf{u}}\|}{h(1 + \frac{\zeta_c}{h_c}\,\zeta)} \tag{3.13}$$

Pour étudier la stabilité de l'algorithme de résolution, il faut "linéariser" les équations ou plutôt geler les coefficients des dérivées. Elles deviennent alors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_2\, \bar{\mathbf{u}}_0.\nabla\zeta = - N_8\, h_0\, \nabla.\mathbf{u} - N_2\, \zeta_0\, \nabla.\bar{\mathbf{u}} - N_8\, \bar{\mathbf{u}}.\nabla h \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + N_2\, \bar{\mathbf{u}}_0.\nabla\bar{\mathbf{u}} + N_1\, \mathbf{e}_3 \wedge \bar{\mathbf{u}} = - N_3\, \nabla\zeta - N_9\, \bar{\mathbf{u}} \tag{3.15}$$

avec

$$N_9 = N_7\, \frac{\|\mathbf{u}_0\|}{h_0(1 + \frac{\zeta_c}{h_c}\,\zeta_0)} \sim N_7 \tag{3.16}$$

car en variables sans dimension, on a

$$\|\bar{u}_0\| \sim 1$$

$$\|\zeta_0\| \sim 1$$

(3.17)

$$h_0 \sim 1$$

et $\zeta_c \ll h_c$.

1) La discrétisation temporelle de (3.14) et (3.15) donne

$$\frac{\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n}{\tau} = -N_2\,\bar{u}_{0_1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}\Big)^n - N_2\,\bar{u}_{0_2}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\Big)^n + N_1\,\bar{u}_2)^n - N_3\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n - N_9\,\bar{u}_1)^n \tag{3.18}$$

$$\frac{\bar{u}_2^{n+1} - \bar{u}_2^n}{\tau} = -N_2\,\bar{u}_{0_1}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}\Big)^n - N_2\,\bar{u}_{0_2}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\Big)^n - N_1\,\bar{u}_1)^n - N_3\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\Big)^n - N_9\,\bar{u}_2)^n \tag{3.19}$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\tau} = -N_2\,\bar{u}_{0_1}\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n - N_2\,\bar{u}_{0_2}\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\Big)^n - (N_8\,h_0 + N_2\,\zeta_0)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}\Big)^{n+1} - (N_8\,h_0 + N_2\,\zeta_0)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\Big)^{n+1} - N_8\,u_1^{n+1}\frac{\partial h}{\partial x_1} - N_8\,u_2^{n+1}\frac{\partial h}{\partial x_2} \tag{3.20}$$

n indique l'indice temporel de discrétisation.

2) Discrétisation spatiale

Les variables $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ et ζ sont calculées aux noeuds de la grille décentrée représentée à la figure 1. Les termes purement linéaires des équations sont exprimés en fonction des différences centrées du type (3.10). Les termes non linéaires d'advection sont en général beaucoup plus faibles que les autres (voir tableau 1). Il existe cependant des régions *très localisées* (points amphidromiques en eaux peu profondes, tableau 3) où les termes d'advection deviennent aussi importants que le terme de pression. A ces endroits, la solution numérique donne des résultats peu satisfaisants pour deux raisons :

i) la longueur caractéristique devient infiniment petite;

ii) le pas spatial ne peut être réduit au-delà d'une certaine valeur

pour des raisons économiques (coût du calcul) et technologiques (la dimension de la mémoire centrale des ordinateurs).

La singularité au point d'amphidromie ne perturbe pas la solution numérique aux alentours car la viscosité numérique introduite par la discrétisation devient très importante au voisinage de ce point. Dans notre travail, les termes d'advection sont discrétisés en utilisant un schéma décentré [du type (3.11)] dans l'espace et dans le temps. Cette façon de procéder introduit inévitablement la viscosité numérique suivante :

$$\nu_{num} \sim \frac{u_0 \Delta x}{2} \quad . \tag{3.21}$$

Pour que l'algorithme de résolution reste stable, nous devons prendre des dérivées avant ou arrière pour les termes d'advection suivant le signe de $\overline{u}_i$ [*e.g.* Richtmyer et Morton (1967)]. La discrétisation des termes

$$\overline{u}_{0_1} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1} \quad , \quad \overline{u}_{0_1} \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1} \quad , \quad \overline{u}_{0_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$$

dépend du signe de $\overline{u}_{0_1}$: on a

$\overline{u}_{0_1} > 0$

$$\overline{u}_{0_1} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J+1} = \frac{\overline{u}_{0_1}}{\Delta x_1} (\overline{u}^n_{1\,2I,2J+1} - \overline{u}^n_{1\,2I,2J-1})$$

$$\overline{u}_{0_1} \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1}\Big)^n_{2I+1,2J} = \frac{\overline{u}_{0_1}}{\Delta x_1} (\overline{u}^n_{2\,2I+1,2J} - u^n_{2\,2I+1,2J-2})$$

$$\overline{u}_{0_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J} = \frac{\overline{u}_{0_1}}{\Delta x_1} (\zeta^n_{2I,2J} - \zeta^n_{2I,2J-2})$$

$\overline{u}_{0_1} < 0$

$$\overline{u}_{0_1} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J+1} = -\frac{\|\overline{u}_{0_1}\|}{\Delta x_1} (\overline{u}^n_{1\,2I,2J+3} - u^n_{1\,2I,2J+1})$$

$$\bar{u}_{0_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1}\Big)^n_{2I+1,2J} = - \frac{\|\bar{u}_{0_1}\|}{\Delta x_1} (\bar{u}^n_{2\,2I+1,2J+2} - u^n_{2\,2I+1,2J})$$

$$\bar{u}_{0_1} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J} = - \frac{\|\bar{u}_{0_1}\|}{\Delta x_1} (\zeta^n_{2I,2J+2} - \zeta^n_{2I,2J})$$

Des relations équivalentes sont utilisées pour la discrétisation des termes non linéaires d'advection

$$\bar{u}_{0_2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad , \quad \bar{u}_{0_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \quad , \quad \bar{u}_{0_2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \quad .$$

Sans nuire à la généralité de notre étude, nous pouvons supposer que les vitesses $\bar{u}_{0_1}$ et $\bar{u}_{0_2}$ sont des grandeurs positives. Dans ce cas, la forme discrétisée des équations (3.18) à (3.20) est la suivante :

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{n+1}_{1\,2I,2J+1} = {} & \bar{u}^n_{1\,2I,2J+1} - N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_1}}{\Delta x} (\bar{u}^n_{1\,2I,2J+1} - \bar{u}^n_{1\,2I,2J-1}) \\
& - N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_2}}{\Delta x} (\bar{u}^n_{1\,2I,2J+1} - \bar{u}^n_{1\,2I-2,2J+1}) \\
& + \frac{N_1\, \tau}{4} (\bar{u}^n_{2\,2I+1,2J+2} + \bar{u}^n_{2\,2I+1,2J} + \bar{u}^n_{2\,2I-1,2J+2} + \bar{u}^n_{2\,2I-1,2J}) \\
& - \frac{N_3\, \tau}{\Delta x} (\zeta^n_{2I,2J+2} - \zeta^n_{2I,2J}) - N_9\, \tau\, \bar{u}^n_{1\,2I,2J+1} + A_{2I,2J+1}(\tau, \Delta x)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{n+1}_{2\,2I+1,2J} = {} & \bar{u}^n_{2\,2I+1,2J} - N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_1}}{\Delta x} (\bar{u}^n_{2\,2I+1,2J} - \bar{u}^n_{2\,2I+1,2J-2}) \\
& - N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_2}}{\Delta x} (\bar{u}^n_{2\,2I+1,2J} - \bar{u}^n_{2\,2I-1,2J}) \\
& - \frac{N_1\, \tau}{4} (\bar{u}^n_{1\,2I+2,2J+1} + \bar{u}^n_{1\,2I,2J+1} + \bar{u}^n_{1\,2I+2,2J-1} + \bar{u}^n_{1\,2I,2J-1}) \\
& - \frac{N_3\, \tau}{\Delta x} (\zeta^n_{2I+2,2J} - \zeta^n_{2I,2J}) - N_9\, \tau\, \bar{u}^n_{2\,2I+1,2J} + B_{2I+1,2J}(\tau, \Delta x)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\zeta^{n+1}_{2I,2J} = \zeta^{n}_{2I,2J} - N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_1}}{\Delta x} (\zeta^{n}_{2I,2J} - \zeta^{n}_{2I,2J-2})$$

$$- N_2 \frac{\tau\, \bar{u}_{0_2}}{\Delta x} (\zeta^{n}_{2I,2J} - \zeta^{n}_{2I-2,2J})$$

$$- (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0) \frac{\tau}{\Delta x} (\bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J+1} - \bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J-1})$$

$$- (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0) \frac{\tau}{\Delta x} (\bar{u}_2^{n+1}_{2I+1,2J} - \bar{u}_2^{n+1}_{2I-1,2J})$$

(3.25)

$$- N_8 \frac{\tau}{2} \frac{\partial h}{\partial x_1}\Big)_{2I,2J} (\bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J+1} + \bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J-1})$$

$$- N_8 \frac{\tau}{2} \frac{\partial h}{\partial x_2}\Big)_{2I,2J} (\bar{u}_2^{n+1}_{2I+1,2J} + \bar{u}_2^{n+1}_{2I-1,2J})$$

$$+ C_{2I,2J}(\tau, \Delta x)$$

avec

$$A_{2I,2J+1} = \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial t^2}\Big)^{n}_{2I,2J+1} + N_2 \frac{\bar{u}_{0_1}\, \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}\Big)^{n}_{2I,2J+1}$$

$$+ N_2 \frac{\bar{u}_{0_2}\, \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2}\Big)^{n}_{2I,2J+1} + N_3 \frac{\Delta x^2}{24} \tau \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3}\Big)^{n}_{2I,2J+1}$$

(3.26)

$$- N_1 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2}\Big)^{n}_{2I,2J+1} - N_1 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2}\Big)^{n}_{2I,2J+1}$$

$$B_{2I+1,2J} = \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial t^2} \Big)^n_{2I+1,2J} + N_2 \frac{\bar{u}_{0_1} \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2} \Big)^n_{2I+1,2J}$$

$$+ N_2 \frac{\bar{u}_{0_2} \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} \Big)^n_{2I+1,2J} + N_3 \frac{\Delta x^2}{24} \tau \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_2^3} \Big)^n_{2I+1,2J} \qquad (3.27)$$

$$+ N_1 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} \Big)^n_{2I+1,2J} + N_1 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} \Big)^n_{2I+1,2J}$$

$$C_{2I,2J} = \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \Big)^n_{2I,2J} + N_2 \frac{\bar{u}_{0_1} \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \Big)^n_{2I,2J} + N_2 \frac{\bar{u}_{0_2} \Delta x}{2} \tau \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \Big)^n_{2I,2J}$$

$$+ (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0) \left(\frac{\Delta x^2 \tau}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial x_1^3} + \frac{\Delta x^2 \tau}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_2}{\partial x_2^3} \right)^{n+1}_{2I,2J}$$

$$+ N_8 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial h}{\partial x_1} \Big)_{2I,2J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} \Big)^{n+1}_{2I,2J}$$

$$+ N_8 \frac{\Delta x^2}{8} \tau \frac{\partial h}{\partial x_2} \Big)_{2I,2J} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} \Big)^{n+1}_{2I,2J} .$$

$A_{2I,2J+1}$, $B_{2I+1,2J}$ et $C_{2I,2J}$ représentent les erreurs de discrétisations. La précision globale de l'algorithme de résolution est donc en τ et Δx .

Pour des pas spatiaux Δx fixés, l'erreur de discrétisation reste faible car les termes d'advection sont multipliés par un nombre sans dimension N_2 petit (voir tableau 1). Dans les régions très peu profondes ($h < 10$ m) et près des points amphidromiques, les coefficients N_2 deviennent une fraction importante de N_8 ou N_3 . Pour ces situations bien précises, le schéma décrit dans ce chapitre amortit exagérément l'onde réelle.

Si nous admettons une erreur de discrétisation en τ et $N_2 \Delta x$, les équations aux différences régissant la circulation transitoire se mettent sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n+1} = \overline{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n} &- N_2 \frac{\tau\,\overline{u}_{0_1}}{\Delta x}\left(\overline{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n} - \overline{u}_{1\,2I,2J-1}^{\,n}\right) \\
&- N_2 \frac{\tau\,\overline{u}_{0_2}}{\Delta x}\left(\overline{u}_{1\,2I+1,2J}^{\,n} - \overline{u}_{1\,2I-1,2J}^{\,n}\right) \\
&+ N_1 \frac{\tau}{4}\left(\overline{u}_{2\,2I+1,2J+2}^{\,n} + \overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n} + \overline{u}_{2\,2I-1,2J+2}^{\,n} + \overline{u}_{2\,2I-1,2J}^{\,n}\right) \\
&- N_3 \frac{\tau}{\Delta x}\left(\zeta_{2I,2J+2}^{\,n} - \zeta_{2I,2J}^{\,n}\right) - N_9\,\overline{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n+1} = \overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n} &- N_2 \frac{\tau\,\overline{u}_{0_1}}{\Delta x}\left(\overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n} - u_{2\,2I+1,2J-2}^{\,n}\right) \\
&- N_2 \frac{\tau\,\overline{u}_{0_2}}{\Delta x}\left(\overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n} - \overline{u}_{2\,2I-1,2J}^{\,n}\right) \\
&- N_1 \frac{\tau}{4}\left(\overline{u}_{1\,2I+2,2J+1}^{\,n} + \overline{u}_{1\,2I+2,2J-1}^{\,n} + \overline{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n} + \overline{u}_{1\,2I,2J-1}^{\,n}\right) \\
&- N_3 \frac{\tau}{\Delta x}\left(\zeta_{2I+2,2J}^{\,n} - \zeta_{2I,2J}^{\,n}\right) - N_9\,\overline{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

$$\zeta^{n+1}_{2I,2J} = \zeta^{n}_{2I,2J} - N_2 \frac{\tau\,\bar{u}_{0_1}}{\Delta x}(\zeta^{n}_{2I,2J} - \zeta^{n}_{2I,2J-2}) - N_2 \frac{\tau\,\bar{u}_{0_2}}{\Delta x}(\zeta^{n}_{2I,2J} - \zeta^{n}_{2I-2,2J})$$

$$- (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0)\frac{\tau}{\Delta x}(\bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J+1} - \bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J-1})$$

$$- (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0)\frac{\tau}{\Delta x}(\bar{u}_2^{n+1}_{2I+1,2J} - \bar{u}_2^{n+1}_{2I-1,2J}) \qquad (3.31)$$

$$- \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)_{2I,2J}(\bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J+1} + \bar{u}_1^{n+1}_{2I,2J-1})$$

$$- \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)_{2I,2J}(\bar{u}_2^{n+1}_{2I+1,2J} + \bar{u}_2^{n+1}_{2I-1,2J})$$

L'algorithme de résolution décrit ci-dessus est dissipatif car la discrétisation des termes d'advection induit une viscosité numérique. Pour réduire cette viscosité et les erreurs de discrétisation, il faudrait choisir un pas spatial très petit. Malheureusement, ce choix est conditionné par la dimension de la mémoire centrale de l'ordinateur et par nos crédits de recherche. Pour la mer du Nord, le pas spatial optimum vaut environ 20 km . En remplacant dans (3.21) $\bar{u}_0$ et Δx par leurs valeurs caractéristiques, nous obtenons :

$$\nu_{num} \sim 10^4\ m^2/s\ . \qquad (3.32)$$

Cette viscosité artificielle ne perturbe pas la solution car nous avons montré, au début de ce chapitre, que le terme physique de viscosité est négligeable même lorsque a ($\sim A\,u_c\,\ell_c$) est de l'ordre de $10^4\ m^2/s$.

2.4.- Recherche de la stabilité du schéma de résolution

La stabilité de l'algorithme de résolution établi au paragraphe précédent est indispensable pour que les résultats aient un sens.

Il convient de ne pas confondre la stabilité numérique et la stabilité physique. (En effet la solution numérique d'un phénomène qui est naturellement instable, ne pourra jamais être stable quelle que soit la méthode numérique utilisée.)

Pour étudier la stabilité numérique de l'algorithme décrit par les équations aux différences (3.29) à (3.31), il suffit de considérer la stabilité numérique du schéma correspondant au système différentiel :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + N_2\,\bar{u}_1\,\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + N_2\,\bar{u}_2\,\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = -\,N_3\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + N_2\,\bar{u}_1\,\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + N_2\,\bar{u}_2\,\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = -\,N_3\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_2\,\bar{u}_1\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + N_2\,\bar{u}_2\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = -\,(N_8\,h_0 + N_2\,\zeta_0)\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\right)$$

S'il n'en était pas ainsi, ou bien la discrétisation serait absurde du point de vue précision, ou bien il y aurait une instabilité physique ou encore une instabilité numérique non linéaire.

Von Neumann [*e.g.* Richtmyer et Morton (1967)] a établi une condition nécessaire de stabilité pour un système d'équations linéaires à coefficients constants, à pas constant et pour un domaine infini. L'expérience montre que ce critère donne une estimation satisfaisante du pas temporel d'intégration. Le critère de Von Neumann est le suivant : si un algorithme de résolution est numériquement stable, les valeurs propres de la matrice d'amplification vérifient l'inégalité suivante :

$$\lambda_i \leq 1 + O(\tau) \qquad \forall i \qquad (3.34)$$

où λ_i est la $i^{ème}$ valeur propre de la matrice d'amplification.

De nombreux auteurs [*e.g.* Fisher (1959), Holsters (1961), Leenderste (1967), Krauss (1974)] ont recherché les conditions de stabilité pour le système différentiel complet, c'est-à-dire comprenant tous les termes des équations de mouvement même ceux qui ne sont pas différentiels. Ils ont obtenu des conditions de stabilité additionnelles car ils ont utilisé le critère :

(3.35) $\lambda_i \leq 1$

au lieu de la relation (3.34). S'ils avaient employé la condition réelle de stabilité $\lambda_i \leq 1 + O(\tau)$, ils n'auraient pas trouvé ces conditions additionnelles. Fischer (1959) donne la condition additionnelle

(3.36) $$\tau < \frac{D \|u\|}{hf^2}$$

où D est le coefficient de friction, $\|u\|$ la norme de la vitesse, h la profondeur à l'équilibre et f le paramètre de Coriolis.

Si la relation additionnelle (3.36) était violée, la discrétisation serait absurde du point de vue précision. En effet, pour la marée semi-diurne et pour les grandeurs caractéristiques de D , $|u|$, h et f , la condition (3.36) donne :

(3.37) $$\frac{\tau}{T_{M_2}} < 0{,}06 \ .$$

Cette inégalité signifie que le pas temporel d'intégration doit être beaucoup plus petit que le temps caractéristique du phénomène étudié. Violer l'inégalité (3.36) n'entraînerait pas une instabilité numérique, mais provoquerait des erreurs de discrétisation importantes. La solution d'un tel algorithme s'écarterait fortement de la solution réelle.

L'étude de la stabilité du schéma numérique est basée sur le principe de l'amplification des modes de Fourier. Les modes de Fourier correspondant à $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ et ζ sont les suivants :

(3.38)
$$\bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{\,n} = U \exp(in\sigma\,\Delta t) \exp i[Ik_1\Delta x + (J + \tfrac{1}{2})k_2\Delta x]$$
$$\bar{u}_{2\,2I+1,2J}^{\,n} = V \exp(in\sigma\,\Delta t) \exp i[(I + \tfrac{1}{2})k_1\Delta x + J\,k_2\Delta x]$$
$$\zeta_{2I,2J}^{\,n} = Z \exp(in\sigma\,\Delta t) \exp i[Ik_1\Delta x + J\,k_2\Delta x]$$

k_1 et k_2 représentent les nombres d'onde dans les directions x_1 et x_2 . Les équations aux différences correspondant au système (3.33) donnent

en adoptant la méthode de discrétisation développée au paragraphe précédent :

$$\bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{n+1} = \bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{n} - \alpha(\bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{n} - \bar{u}_{1\,2I,2J-1}^{n}) - \delta(\bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{n} - \bar{u}_{1\,2I-2,2J+1}^{n}) - \beta_1(\zeta_{2I,2J+2}^{n} - \zeta_{2I,2J}^{n})$$

$$u_{2\,2I+1,2J}^{n+1} = \bar{u}_{2\,2I+1,2J}^{n} - \alpha(\bar{u}_{2\,2I+1,2J}^{n} - \bar{u}_{2\,2I+1,2J-2}^{n}) - \delta(\bar{u}_{2\,2I+1,2J} - \bar{u}_{2\,2I-1,2J}) - \beta_1(\zeta_{2I+2,2J}^{n} - \zeta_{2I,2J}^{n}) \qquad (3.39)$$

$$\zeta_{2I,2J}^{n+1} = \zeta_{2I,2J}^{n} - \alpha(\zeta_{2I,2J}^{n} - \zeta_{2I,2J-2}^{n}) - \delta(\zeta_{2I,2J}^{n} - \zeta_{2I-2,2J}^{n}) - \beta_2(\bar{u}_{1\,2I,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{1\,2I,2J-1}^{n+1}) - \beta_2(\bar{u}_{2\,2I+1,2J}^{n+1} - \bar{u}_{2\,2I-1,2J}^{n+1})$$

(3.40)

où $\alpha = N_2 \dfrac{\bar{u}_{0_1}\,\tau}{\Delta x}$; $\delta = N_2 \dfrac{\bar{u}_{0_2}\,\tau}{\Delta x}$; $\beta_1 = N_3 \dfrac{\tau}{\Delta x}$, $\beta_2 = (N_8 h_0 + N_2 \zeta_0) \dfrac{\tau}{\Delta x}$

Pour la simplification des expressions finales, on approchera β_2 par

$$\beta_2 \sim (N_8 + N_2) \frac{\tau}{\Delta x} \qquad (3.41)$$

car h_0 et ζ_0 sont des grandeurs voisines de l'unité.

L'introduction des modes de Fourier (3.38) dans (3.39) donne :

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= A\,U^n + 0\,V^n + B\,Z^n \\ V^{n+1} &= 0\,U^n + A\,V^n + C\,Z^n \qquad (3.42) \\ Z^{n+1} &= AD\,U^n + AE\,V^n + (A + BD + EC)\,Z^n \end{aligned}$$

où

$$A = 1 - \alpha(1 - e^{-i\theta_1}) - \delta(1 - e^{-i\theta_2})$$

(3.43)
$$B = -2i\,\beta_1 \sin\frac{\theta_1}{2} \qquad C = -2i\,\beta_1 \sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$D = -2i\,\beta_2 \sin\frac{\theta_1}{2} \qquad E = -2i\,\beta_2 \sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$\theta_1 = k_1\,\Delta x \qquad \theta_2 = k_2\,\Delta x$$

U^n , V^n et Z^n représentent respectivement $U \exp(in\sigma\,\Delta t)$, $V \exp(in\sigma\,\Delta t)$, $Z \exp(in\sigma\,\Delta t)$.

La solution numérique obtenue devra être stable pour tous les nombres d'onde, c'est-à-dire pour :

$$k_i \in [0\,, \frac{\pi}{\Delta x}] \ .$$

La matrice d'amplification G est définie par :

(3.44)
$$G \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A & C \\ AD & AE & A + DB + EC \end{pmatrix}$$

Les équations (3.42) se mettent aisément sous forme matricielle :

(3.45)
$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix}^{n+1} = G \begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix}^{n} = G^n \begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix}^{0}$$

Pour avoir un schéma numériquement stable, il est nécessaire que toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification vérifient l'inégalité donnée à la relation (3.35).

Les valeurs propres de la matrice G sont les racines λ_i de l'équation caractéristique :

(3.46)
$$(A - \lambda)[\lambda^2 - 2\,(A + \frac{DB + EC}{2}) + A^2] = 0 \ .$$

1) Première valeur propre

$$\|\lambda_1\|^2 = A\,A^*$$

où $$A = 1 - (\alpha + \delta) + (\alpha \cos\theta_1 + \delta \cos\theta_2) - i\,(\alpha \sin\theta_1 + \delta \sin\theta_2)$$

Le carré du module de λ_1 vaut donc

$$\|\lambda_1\|^2 = [1 - 2(\alpha + \delta) + 2(\alpha^2 + \delta^2 + 2\delta)] + 2\alpha\delta \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2[1 - (\alpha + \delta)][\alpha \cos\theta_1 + \delta \cos\theta_2] .$$

Il est aisé de montrer que $\|\lambda_1\|^2$ est inférieur à l'unité pour tout θ si

$$\alpha + \delta \leq 1 \qquad (3.47)$$

avec α et $\delta > 0$.

En repassant aux grandeurs dimensionnelles, la condition (3.47) devient :

$$\frac{\bar{u}_{0_1}\,\tau}{\Delta x} + \frac{\bar{u}_{0_2}\,\tau}{\Delta x} \leq 1 . \qquad (3.48)$$

On retrouve donc bien la condition de Courant.

2) Deuxième et troisième valeurs propres

Avant de rechercher une relation générale entre α , δ , β_1 et β_2, satisfaisant la condition $\lambda_i \leq 1$, il est intéressant de connaître cette relation pour le cas simple sans advection.

Sans advection

L'équation caractéristique (3.46) se simplifie fortement dans le cas où $\alpha = \delta = 0$. λ_2 et λ_3 sont solutions de

$$\lambda^2 - 2\lambda\,[1 - 2\beta_1\beta_2(\sin^2\frac{\theta_1}{2} + \sin^2\frac{\theta_2}{2})] + 1 = 0$$

Les racines λ_2 et λ_3 restent dans le cercle de rayon unité si

$$\beta_1\beta_2(\sin^2\frac{\theta_1}{2} + \sin^2\frac{\theta_2}{2}) \leq 1 .$$

Dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire pour $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, on obtient la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\beta_1 \beta_2 \leq \frac{1}{2} \quad . \tag{3.49}$$

En repassant aux grandeurs dimensionnelles, la condition ci-dessus devient :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta_c}{h_c}}} \quad \frac{1}{\sqrt{2\ gh_c}} \tag{3.50}$$

Fischer (1959) avait déterminé une condition de stabilité moins restrictive :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2\ gh_c}} \tag{3.51}$$

car il ne tenait pas compte de la présence du terme en ζ_c .

Avec advection

Dans le cas général (avec advection), la recherche d'une relation entre α , δ , β_1 , β_2 , θ_1 et θ_2 vérifiant (3.34) est difficile. Pour cette raison, nous nous limitons à la détermination d'une relation entre les divers paramètres quant aux modes numériques les plus dangereux pour la stabilité de l'algorithme de résolution : ils sont caractérisés par $\theta_1 = \theta_2 = \pi$.

Dans ce cas, l'équation caractéristique pour λ_2 et λ_3 devient :

$$\lambda^2 - 2\lambda[1 - 2(\alpha + \delta + 2\beta_1\beta_2)] + [1 - 2(\alpha + \delta)]^2 = 0 \quad . \tag{3.52}$$

Les deux racines λ_2 et λ_3 sont les suivantes :

$$\lambda_{\substack{2\\3}} = 1 - 2(\alpha + \delta + 2\beta_1\beta_2) \pm \sqrt{8\beta_1\beta_2[2\beta_1\beta_2 + 2(\alpha + \delta) - 1]} \tag{3.53}$$

Si $2\beta_1\beta_2 + 2(\alpha + \delta) < 1$, (3.53) se transforme pour donner :

$$\lambda_{\substack{2\\3}} = 1 - 2(\alpha + \delta + 2\beta_1\beta_2) \pm 2i\ \sqrt{\beta_1\beta_2}\ \sqrt{2[1 - 2\beta_1\beta_2 - 2(\alpha + \delta)]} \tag{3.54}$$

Le carré du module des racines λ_2 et λ_3 :

$$\|\lambda_{2\atop 3}\|^2 = 1 - 4(\alpha + \delta) + 4(\alpha + \delta)^2$$

reste inférieur ou égal à l'unité si la condition de stabilité (3.47) est vérifiée.

Les valeurs propres λ_2 et λ_3 sont donc en module inférieures ou égales à l'unité si

(3.55) $$2\beta_1\beta_2 + 2(\alpha + \delta) \leq 1$$

et si

(3.47) $$\alpha + \delta \leq 1 .$$

En repassant aux grandeurs dimensionnelles, la condition de stabilité (3.55) s'écrit de la manière suivante :

(3.56) $$2\left(\frac{\bar{u}_{0_1}\,\tau}{\Delta x} + \frac{\bar{u}_{0_2}\,\tau}{\Delta x}\right) + 2\left[\sqrt{gh_c\left(1 + \frac{\zeta_c}{h_c}\right)}\ \frac{\tau}{\Delta x}\right]^2 \leq 1 .$$

Si l'inégalité (3.55) ou (3.56) est vérifiée, l'inégalité (3.47) ou (3.49) le sera *a fortiori* car α , β et δ sont des grandeurs positives.

Afin de tester la qualité de la condition nécessaire de stabilité (3.55), nous avons calculé numériquement les valeurs propres de la matrice d'amplification G pour diverses valeurs des paramètres. Ainsi, pour

$$N_2\ u_{0_1} \sim N_2\ u_{0_2} \sim N_2 = 4 \times 10^{-1} ,$$

les valeurs propres calculées restent inférieures ou égales à 1 jusqu'à $\sqrt{\beta_1\beta_2} = 0{,}45$. En remplacant $N_2\ \bar{u}_{0_1}$, $N_2\ \bar{u}_{0_2}$ et $\sqrt{\beta_1\beta_2}$ dans la relation (3.55), on trouve 1,125 au lieu de 1 . Le critère de stabilité (3.35) établi dans ce paragraphe est donc satisfaisant.

2.5.- Comportement des modes vrais ou modes physiques

La solution des équations aux différences finies se rapproche d'autant plus de celle des équations aux dérivées partielles correspondantes que la discrétisation spatio-temporelle est meilleure (voir

p.70). Il convient donc d'étudier le comportement des solutions pour des petites valeurs de Δx et Δt .

a) Si la discrétisation était *infiniment fine*, la solution numérique serait identique à la solution différentielle car le schéma de discrétisation est consistant. Dans ce cas idéal, les grandeurs A , B et C , définies par la relation (3.43), deviennent :

$$A = 1 \qquad B = C = 0 \tag{3.57}$$

lorsqu'on fait tendre Δt et Δx vers 0 . En introduisant (3.57) dans (3.46), nous trouvons immédiatement que

$$\lambda_1^\circ = \lambda_2^\circ = \lambda_3^\circ = 1 \ . \tag{3.58}$$

λ_i° représente la valeur propre i pour une discrétisation infiniment fine.

b) Si la discrétisation n'est *pas infiniment fine*, la solution numérique diffère de la solution exacte (ou différentielle).

Le comportement des ondes calculées est caractérisé par le module et par la phase des λ_i . Pour les modes vrais ou modes physiques, nous pouvons prendre les développements asymptotiques des valeurs propres puisque θ_1 et θ_2 sont petits.

2.5.1.- Comportement du premier mode physique

Lorsque θ_1 et θ_2 sont petits, λ_1 est donné par le comportement asymptotique suivant :

$$\lambda_1 \sim 1 - \frac{1}{2}(\alpha\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) - i(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2) \ . \tag{3.59}$$

Le module et l'argument de λ_1 sont respectivement :

$$\|\lambda_1\| \sim 1 - \frac{1}{2}(\alpha\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) + \frac{1}{2}(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)^2$$

$$\text{Arg } \lambda_1 \sim \text{Atg} \frac{-(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)}{1 - \frac{1}{2}(\alpha\theta_1^2 + \delta\theta_2^2)} \tag{3.60}$$

Cas particuliers

1) $\alpha = \delta = 0$ En l'absence d'advection, il n'y a aucun amortissement et aucun déphasage.

2) $\alpha = \delta$ et $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

(3.61) $$\|\lambda_1\| \sim 1 - \alpha\theta^2(1 - 2\alpha)$$

$\|\lambda_1\| \leq 1$ car α doit être inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$ pour vérifier la condition de stabilité (3.55). La solution numérique sera donc inférieure à la solution vraie.

Pour la mer du Nord, la vitesse du courant est au moins 10 fois plus petite que la vitesse de phase : on a généralement $N_2 \sim 5 \times 10^{-1}$. En adoptant les rapports suivants :

$$(\frac{\tau}{\Delta s}) = 0,1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda}{\Delta s} = 20$$

nous trouvons immédiatement :

(3.62) $$\alpha = 0,5 \times 10^{-1} \qquad \text{et} \qquad \theta = 0,314$$

et

$$\|\lambda_1\| \sim 1 - 0,0044 .$$

L'amortissement sera donc de $0,44$ % . Quant au déphasage, il est donné par

(3.63) $$\text{Arg } \lambda \sim \text{Atg} \frac{- 2\alpha\theta}{1 - \alpha\theta^2} .$$

Pour $\alpha = 0,5 \times 10^{-1}$ et $\theta = 0,314$, le déphasage vaut

(3.63') $$\text{Arg } \lambda \sim 1,8^\circ .$$

2.5.2.- Comportement des deuxième et troisième modes physiques

Pour la simplicité du raisonnement, nous supposons que les équations de mouvement sont faiblement non linéaires. Dans ces conditions, nous définissons β par :

$$\beta^2 = N_3 N_8 \frac{\tau^2}{\Delta s^2} .$$

Le développement asymptotique de λ_2 et λ_3 se calcule aisément :

$$\lambda_{\frac{2}{3}} \sim 1 - \frac{1}{2}[\alpha\theta_1^2 + \delta\theta_2^2 + \beta^2(\theta_1^2 + \theta_2^2)] - i(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)$$
$$\pm i\beta \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\,[1 - \frac{1}{2}(\alpha\theta_1^2 + \delta\theta_2^2) - \frac{3}{4}\beta^2(\theta_1^2 + \theta_2^2) - i(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)]$$

deuxième mode physique λ_2

Le module et l'argument de λ_2 sont les suivants :

$$\|\lambda_2\| \sim 1 - \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha^2)\theta_1^2 + (\delta - \delta^2)\theta_2^2 - 2\alpha\delta\theta_1\theta_2 + \beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\,(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)] \qquad (3.64)$$

$$\text{Arg } \lambda_2 \sim \text{Atg}\,[\beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} - (\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)]$$

cas particuliers

1) Si $\alpha = \delta = 0$,

$$\|\lambda_2\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{Arg } \lambda_2 \sim \text{Atg}\,\beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\ .$$

Il n'y a pas de déformation en amplitude.

2) Si $\alpha = \delta$ et $\theta_1 = \theta_2$,

$$\|\lambda_2\| \sim 1 - \alpha\theta^2\,[(1 - 2\alpha) + \beta\sqrt{2}] \qquad (3.65)$$

et

$$\text{Arg } \lambda_2 \sim \text{Atg}\,\theta\,[\beta\sqrt{2} - 2\alpha]\ . \qquad (3.66)$$

Comme α est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$ pour des raisons de stabilité, l'onde correspondant au deuxième mode physique sera amortie. Pour $\alpha = 5 \times 10^{-2}$, $\beta = 0,5$ et $\theta = 0,314$,

$$\|\lambda_2\| \sim 0,992$$

et

$$\text{Arg } \lambda_2 \sim 10,8\ °.$$

Troisième mode physique

Le module et l'argument de λ_3 valent respectivement :

$$\|\lambda_3\| \sim 1 - \frac{1}{2}\left[(\alpha - \alpha^2)\theta_1^2 + (\delta - \delta^2)\theta_2^2 - 2\alpha\delta\theta_1\theta_2 - \beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\,(\alpha\theta_1 + \delta\theta_2)\right] \tag{3.67}$$

$$\text{Arg } \lambda_3 \sim \text{Atg}\left[-\left(\beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} + \alpha\theta_1 + \delta\theta_2\right)\right]$$

Cas particuliers

1) $\alpha = \delta = 0$.

$$\|\lambda_3\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{Arg } \lambda_3 \sim \text{Atg}\left[-\beta\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}\right]$$

Il n'y a pas de déformation en amplitude.

2) $\alpha = \delta$ et $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

$$\|\lambda_3\| \sim 1 - \alpha\theta^2\left[(1 - 2\alpha) - \beta\sqrt{2}\right] \tag{3.68}$$

et

$$\text{Arg } \lambda_3 \sim \text{Atg}\left[-\theta(\beta\sqrt{2} + \alpha)\right] \tag{3.69}$$

Pour les petites valeurs de β , il est évident que l'onde correspondant à λ_3 est amortie. Nous pouvons aisément montrer que c'est le cas pour tout α et β vérifiant la condition de stabilité (3.55). Dans le cas le plus défavorable, on a

$$2\beta^2 = 1 - 4\alpha \tag{3.70}$$

avec $\alpha \leq \frac{1}{4}$.

En remplacant (3.70) dans (3.68), on trouve :

$$\|\lambda_3\| \sim 1 - \alpha\theta^2\left[(1 - 2\alpha) - \sqrt{1 - 4\alpha}\right] \leq 1 \quad .$$

Pour $\alpha = 5 \times 10^{-2}$, $\beta = 0{,}5$ et $\theta = 0{,}314$, on a un amortissement de 0,1 % et un déphasage de 13,4 ° .

2.5.3.- Conclusions

L'étude du comportement des modes physiques a donc permis de montrer que

a) en l'absence du terme d'advection, l'onde calculée ne subit qu'un déphasage. Comme θ est petit pour les modes corrects, nous avons

$$\text{Arg } \lambda \sim 0\left(\sqrt{N_3 N_8}\ \frac{\tau}{\Delta x}\ \frac{2\pi\ \Delta x}{\lambda}\right) \tag{3.67}$$

ou, en repassant aux grandeurs dimensionnelles,

$$\text{Arg } \lambda \sim 0\left(\tau\ \sqrt{gh}\ \frac{2\pi}{\lambda}\right) . \tag{3.68}$$

Pour réduire cette erreur, on ne peut jouer que sur le choix du pas temporel (le choix spatial n'est pas arbitraire car $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\ \Delta x$ doit être petit pour avoir des modes corrects).

b) en présence du terme d'advection, l'onde calculée est d'une part amortie et d'autre part déphasée par rapport à l'onde réelle.

L'amortissement de l'onde calculée restera suffisamment faible si α et θ^2 sont inférieures à 10^{-1} . Le déphasage, quant à lui, n'est pas négligeable. Si une erreur de $10\ °$ sur une période est admissible, on a

$$\theta = 2\pi\ \frac{\Delta x}{\lambda} \sim 0{,}23$$

en prenant

$$\beta = 0{,}5 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 0{,}05 .$$

Pour avoir un déphasage inférieur à $10\ °$, il faut prendre plus de 28 pas spatiaux pour couvrir la longueur d'onde.

La condition de stabilité (3.55) permet de déterminer le rapport $\frac{\tau}{\Delta x}$ (en variables adimensionnelles) et nous pouvons calculer le pas spatial lorsque nous nous fixons une erreur admissible pour le déphasage.

2.6.- Conditions aux limites

Il existe deux types de frontières, la frontière fermée (côte) et la fontière ouverte ou fluide qui est une ligne de séparation entre deux régions fluides (par exemple entre la mer du Nord et l'océan Atlantique).

2.6.1.- Frontière fermée

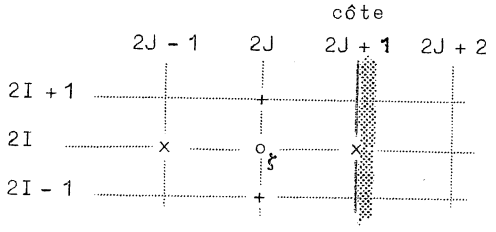
L'épaisseur de la couche limite $(\frac{a}{u_c})$ à la côte est beaucoup plus petite que le pas spatial choisi principalement en fonction de critères purement techniques (occupation mémoire, temps de calcul). Pour ces raisons, la condition aux limites s'exprime par l'absence de flux d'eau à travers cette frontière :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0 \qquad (3.71)$$

où n est la normale à la côte.

Il suffit donc d'imposer une vitesse normale à la côte nulle. Pour pouvoir résoudre les équations *aux différences*, il faut aussi introduire des conditions aux limites additionnelles. Les termes d'advection ne peuvent en effet se calculer sans faire une hypothèse sur la valeur du gradient de vitesse ou de l'élévation ζ près de la côte.

Pour une frontière méridienne



La condition à la limite s'exprime par

$$\bar{u}_1)^n_{2I,2J+1} = 0 \qquad \forall n \quad . \qquad (3.72)$$

Pour une côte à droite, les conditions aux limites additionnelles sont les suivantes :

si $\overline{u}_1 < 0$,

$$N_2\ \overline{u}_1\ \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1}\Big)^n_{2I+1,2J} = 0$$

(3.73)

$$N_2\ \overline{u}_1\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J} = 0$$

si $\overline{u}_1 > 0$, pas de conditions additionnelles.

Pour une côte à gauche,

si $\overline{u}_1 > 0$,

$$N_2\ \overline{u}_1\ \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1}\Big)^n_{2I+1,2J} = 0$$

$$N_2\ \overline{u}_1\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n_{2I,2J} = 0$$

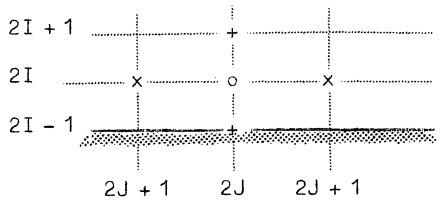
si $\overline{u}_1 < 0$, pas de condition additionnelle.

L'hypothèse du gradient nul à la frontière ne perturbe que légèrement la solution. En effet, au-delà de la couche limite, les gradients horizontaux sont faibles et le courant normal à la côte soit en $(2I+1, 2J)$, soit en $(2I, 2J)$ est plus petit que le courant parallèle à celle-ci. On a donc :

$$N_2\ \overline{u}_1)_{\text{large}} \gg N_2\ \overline{u}_1)_{\text{côte méridienne}}$$

Comme le terme d'advection était déjà petit au large, il le sera *a fortiori* près de la côte. L'erreur introduite par ces conditions additionnelles est donc du même ordre de grandeur que les erreurs de troncature.

Pour une côte zonale



La condition à la limite s'exprime par

$$\bar{u}_2)^n_{2I-1,2J} = 0 \qquad \forall n \quad . \tag{3.74}$$

Pour une côte "sud", les conditions additionnelles s'écrivent de la manière suivante :

si $\bar{u}_2 > 0$,

$$N_2 \, \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\Big)^n_{2I,2J-1} = 0 \qquad \forall n$$

$$n_2 \, \bar{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\Big)^n_{2I,2J} = 0 \qquad \forall n \ , \tag{3.75}$$

si $\bar{u}_2 < 0$, pas de condition additionnelle.

Pour la côte "nord",

si $\bar{u}_2 < 0$

$$N_2 \, \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\Big)^n_{2I,2J-1} = 0 \qquad \forall n$$

$$N_2 \, \bar{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\Big)^n_{2I,2J} = 0 \qquad \forall n \ , \tag{3.75}$$

si $\bar{u}_2 > 0$, pas de condition additionnelle.

2.6.2.- Frontière ouverte

Le long d'une telle frontière, il faut imposer soit $\bar{u}_n$ soit ζ ou une relation entre ces grandeurs. Habituellement, on préfère rechercher l'élévation du niveau libre plutôt que le courant normal à cette frontière. En effet dans les détroits comme le Pas de Calais, il est quasi-impossible de mouiller des courantomètres en raison d'un intense trafic maritime.

L'élévation de la surface libre doit être donnée à tout instant le long de cette frontière. On a

$$\zeta = g(s,t) \tag{3.76}$$

où g est une fonction donnée, t la variable temporelle et s la coordonnée curviligne de la frontière.

En raison de la structure décentrée de la grille et des termes d'advection, il faut introduire des conditions additionnelles qui perturbent légèrement la solution.

Lorsque l'anisotrope des courants est importante (c'est-à-dire si $u_{c_1} \gg u_{c_2}$), nous devons modifier l'équation de mouvement (3.15) de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - N_1^{(1)} \bar{u}_2 + N_2^{(1)} \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + N_2^{(2)} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = - N_3^{(1)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9^{(1)} \bar{u}_1 \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - N_1^{(2)} \bar{u}_1 + N_2^{(1)} \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + N_2^{(2)} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = - N_3^{(2)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - N_9^{(1)} \bar{u}_2 \tag{3.78}$$

avec

$$N_1^{(1)} = \frac{u_{c_2}}{u_{c_1}} ft \qquad N_1^{(2)} = \frac{u_{c_1}}{u_{c_2}} ft_c$$

$$N_2^{(1)} = \frac{u_{c_1} t_c}{\ell_{1_u}} \qquad N_2^{(2)} = \frac{u_{c_2} t_c}{\ell_{2_u}}$$

$$N_3^{(1)} = \frac{g \zeta_c t_c}{u_{c_1} \ell_{1_\zeta}} \qquad N_3^{(2)} = \frac{g \zeta_c t_c}{u_{c_2} \ell_{2_\zeta}}$$

$$N_9^{(1)} \sim N_7 \frac{\| \bar{u}_0 \|}{h_0 (1 + \frac{\zeta_c}{h_c} \zeta_0)}$$

Pour la frontière nord de la mer du Nord

La partie nord de la mer du Nord est caractérisée par une profondeur supérieure à 100 mètres et par des roses de marée légèrement asymétriques :

$$u_{c_{est}} = u_{c_1} = 0{,}15 \text{ m/s} \qquad \text{et} \qquad u_{c_{nord}} = u_{c_2} = 0{,}30 \text{ m/s} .$$

La longueur caractéristique de variation horizontale des courants et de l'élévation est voisine de la largeur du bassin. On a donc

$$\ell_{1_\zeta} = \ell_{2_\zeta} = \ell_{1_u} = \ell_{2_u} = 4 \times 10^5 \text{ m} .$$

L'élévation caractéristique de la surface libre est, selon les observations, proche du mètre. En remplaçant ces grandeurs dans les expressions des nombres sans dimension données en (3.79), on obtient :

$$N_1^{(1)} \sim 10^1 \; ; \; N_2^{(1)} \sim 2 \times 10^{-2} \; ; \; N_2^{(2)} \sim 5 \times 10^{-2} \; ; \; N_3^{(1)} \sim 10 \; ; \; N_9^{(1)} \sim 3 \times 10^{-1}$$

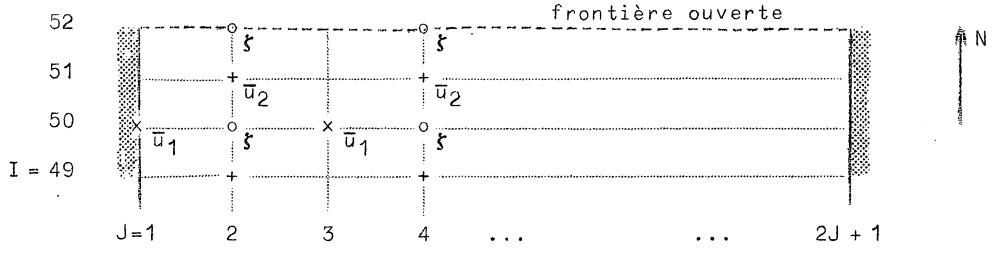
$$N_2^{(1)} \sim 3 \quad ; \; N_2^{(1)} \sim 2 \times 10^{-2} \; ; \; N_2^{(2)} \sim 5 \times 10^{-2} \; ; \; N_3^{(1)} \sim 5 \; ; \; N_9^{(1)} \sim 3 \times 10^{-1} \; .$$

Les équations (3.77) et (3.78) se simplifient si nous admettons une erreur de l'ordre de 1 % . Elles deviennent :

$$(3.80) \qquad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - N_1^{(1)} \bar{u}_2 = - N_3^{(1)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9^{(1)} \bar{u}_1$$

$$(3.81) \qquad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - N_1^{(2)} \bar{u}_1 + N_2^{(2)} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = - N_3^{(2)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - N_9^{(1)} \bar{u}_2$$

La nature décentrée de la grille spatiale pose des problèmes quant à la détermination de $N_1^{(2)} \bar{u}_1$ et de $N_2^{(2)} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}$. Au voisinage de la frontière nord, la grille a la forme suivante :



La relation

$$(3.82) \qquad \bar{u}_1)_{51,2J} = \frac{\bar{u}_1)_{50,2J+1} + \bar{u}_1)_{50,2J-1}}{2} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\Big)_{51,2J}$$

donne l'estimation de $\bar{u}_1$ aux noeuds de $\bar{u}_2$.

En adoptant un pas spatial de 20 km , l'erreur de discrétisation vaut donc 2,5 %, soit $7{,}5 \times 10^{-3}$ m/s .

La condition aux limites additionnelle s'exprime par :

$\bar{u}_2 < 0$,

$$N_2 \, \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0$$

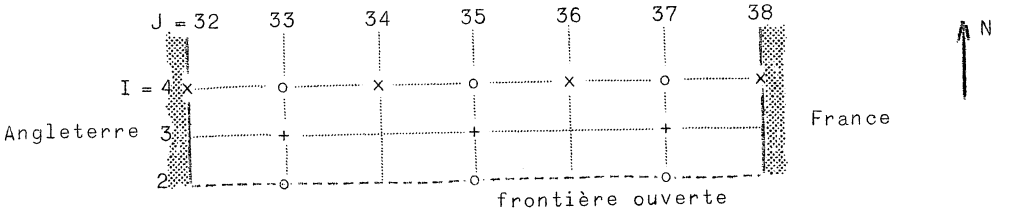
$\bar{u}_2 > 0$, pas de condition additionnelle.

Les erreurs de discrétisation étant inférieures à 3 % ne perturberont que légèrement la solution. Notons cependant que ces erreurs sont indétectables avec les courantomètres actuels car leur précision est de l'ordre de 2 cm/s dans des conditions idéales (ligne de mouillage rigide, etc.).

Pour la frontière sud de la mer du Nord

Le Pas de Calais est une frontière ouverte physique et géographique de la mer du Nord. Les observations océanographiques [*e.g.* Defant (1961)] montrent qu'il n'y a pas de point amphidromique dans le Pas de Calais : le courant de marée a perdu la plus grande partie de son caractère rotatif. Lors d'une tempête, les "filets" fluides sont également quasi parallèles [Weeminck (1958), Groen et Groves (1966)].

Dans la discrétisation du bassin de la mer du Nord, on assimile la région du Pas de Calais à un canal dont l'axe possède la direction nord-sud. En orientant l'axe e_2 suivant cette direction, la grille numérique a la forme suivante au voisinage du Pas de Calais :



A partir des observations [Defant (1961), Van Cauwenberghe (1973)] nous pouvons aisément déterminer les grandeurs caractéristiques suivantes :

(3.84)

$$h_c = 30 \text{ m} \qquad \zeta_c = 2 \text{ m}$$

$$u_{c_1} = 0{,}1 \text{ m/s} \qquad u_{c_2} = 1 \text{ m/s}$$

(3.84)
$$\ell_{1_\zeta} = \ell_{2_\zeta} = 3 \times 10^5 \text{ m}$$
$$\ell_{1_u} = 3 \times 10^4 \text{ m} \qquad \ell_{2_u} = 3 \times 10^5 \text{ m}$$

En rempla ant (3.84) dans (3.79) on obtient :

(3.85)
$$N_1^{(1)} \sim 5 \times 10^1 \; ; \; N_2^{(1)} \sim N_2^{(2)} \sim 10^{-1} \; ; \; N_3^{(1)} \sim 3 \times 10^1 \; ; \; N_9^{(1)} \sim 3$$
$$N_1^{(2)} \sim 5 \; ; \; N_2^{(1)} \sim N_2^{(2)} \sim 10^{-1} \; ; \; N_3^{(2)} \sim 3 \; ; \; N_9^{(1)} \sim 3$$

En admettant une erreur de 1 % comme admissible, les équations (3.77) et (3.78) se simplifient :

(3.86)
$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - N_2^{(1)} \bar{u}_2 = - N_3^{(1)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9 \bar{u}_1$$

(3.87)
$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + N_1^{(2)} \bar{u}_1 + N_2^{(1)} \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + N_2^{(2)} \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = -N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - N_9 \bar{u}_2$$

La discrétisation spatiale et temporelle de (3.86) ne pose aucun problème. En raison du décentrement de la grille spatiale, le terme de Coriolis $N_1^{(2)} \bar{u}_1$ se calcule de la manière suivante :

$$N_1^{(2)} \bar{u}_1)_{3,2J} = N_1^{(2)} \left(\frac{\bar{u}_{1\,4,2J+1} + \bar{u}_{1\,4,2J-1}}{2} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right)_{3,2J}$$

L'erreur de discrétisation vaut 3 % (ou 3×10^{-2} m/s) en prenant un pas spatial de 2×10^4 m .

Une condition limite additionnelle est nécessaire pour le calcul du terme d'advection $\bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}$. En utilisant

si $\bar{u}_2 > 0$,

$$N_2 \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0$$

si $\bar{u}_2 < 0$, pas de condition additionnelle,

nous introduisons une erreur de 3 % .

2.6.3.- Conclusions

Dans ce paragraphe traitant des conditions aux limites, nous avons montré que :

1) des conditions additionnelles sont nécessaires pour le calcul de certains termes d'advection le long des frontières,

2) les erreurs provoquées par la discrétisation des conditions aux limites (physiques et additionnelles) et du terme de Coriolis sont inférieures à 3 % .

Pour ces raisons, les modèles de marée et de tempête seront donc affectés d'erreurs de l'ordre de 3 % près des côtes et des frontières ouvertes.

2.7.- Etude critique de quelques algorithmes classiques de résolution

L'étude des marées et des tempêtes à l'aide de modèles numériques n'est pas nouvelle. Différentes techniques plus ou moins avancées furent utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité et la précision des algorithmes adoptés par Lauwerier et Damsté (1963), Leenderste (1967), Brettschneider (1967), Heaps (1969) et Koop (1974). Le comportement des modes physiques et le critère de stabilité permettent de discuter les avantages et inconvenients des diverses méthodes.

2.7.1.- Méthode de Lauwerier et Damsté

Lauwerier et Damsté ont développé un modèle mathématique pour l'étude des tempêtes en mer du Nord. Sous forme adimensionnelle, les équations aux dérivées partielles régissant leur modèle sont les suivantes :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_8 \, \nabla . \vec{u} = 0 \qquad (3.90)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + N_1 \, e_3 \wedge \vec{u} = - N_3 \, \nabla \zeta - N_9 \, \vec{u} \qquad (3.91)$$

La discrétisation temporelle de Lauwerier et Damsté donne :

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\tau} = - N_8 (\nabla . \vec{u})^n \qquad (3.92)$$

$$(3.92) \qquad \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n}}{\tau} = -N_1(e_3 \wedge \bar{u})^n - N_3(\nabla\zeta)^n - N_9\,\bar{u}^n$$

L'intérêt de cet exemple est de montrer que la discrétisation temporelle (3.92) conduit à un algorithme numérique instable, en l'absence d'un paramètre de friction. Les modes de Fourier correspondant à ζ , $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ sont décrits par la relation (3.38).

La grille spatiale utilisée est décrite ci-dessous :

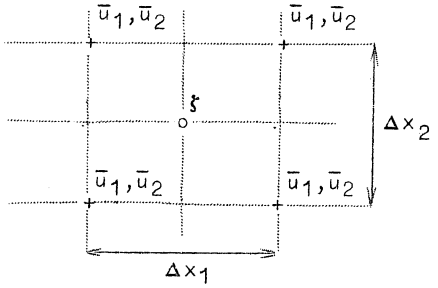


fig. 2.

Pour faciliter les calculs, nous supposons $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$.

Afin d'étudier la stabilité de cet algorithme, nous supprimons le terme de Coriolis dans (3.92); la matrice d'amplification s'écrit alors

$$(3.93) \qquad G \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & C \\ 0 & A & D \\ E & F & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$A = 1 - N_9\,\tau$$

$$C = -2i\,\frac{\tau}{\Delta x}\,N_3\,\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}$$

$$(3.94) \qquad D = -2i\,\frac{\tau}{\Delta x}\,N_3\,\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$E = -2i\,\frac{\tau}{\Delta x}\,N_8\,\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}$$

$$F = -2i\,\frac{\tau}{\Delta x}\,N_8\,\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\ .$$

L'équation caractéristique correspondant à la matrice d'amplification G est la suivante :

$$(3.95) \qquad (A - \lambda)[(A - \lambda)(1 - \lambda) - (FD + CE)] = 0$$

Pour avoir un algorithme stable, il faut

$$(3.34) \qquad \lambda_i \leq 1 + 0(\tau) \ .$$

La première valeur propre $\lambda = 1 - N_9 \tau$ vérifie toujours la condition de stabilité (3.34).

Les deuxième et troisième valeurs propres sont solutions de

$$(3.96) \qquad \lambda^2 - \lambda(1 + A) + (A - FD - CE) = 0 \ .$$

Elles se calculent aisément :

$$(3.97) \qquad \lambda_{\substack{2\\3}} = 1 - N_9 \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{N_9^2 \tau^2}{4} - \delta^2}$$

avec

$$\delta^2 = \frac{4\tau^2}{\Delta x^2} N_3 N_8 \left(\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} + \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta_1}{2}\right)$$

A la limite du raffinement du maillage, le schéma de Lauwerier et Damsté (1963) est instable car

$$\| \lambda_{\substack{2\\3}} \| \sim 1 + \varepsilon + 0(\tau) > 1 + 0(\tau)$$

pour τ et Δx tendant vers zéro.

Pour un pas spatial *fixé*, les valeurs propres λ_2 et λ_3 restent dans le cercle de rayon unité si le pas temporel vérifie l'inégalité :

$$(3.98) \qquad \tau \leq \frac{N_9 \ \Delta x^2}{2 \ N_3 N_8} \ .$$

En variables dimensionnelles, la relation (3.98) donne

$$(3.99) \qquad \tau \leq \frac{D \ u_c}{4 \ h_c^2 \ g} \Delta x^2 \ .$$

En l'absence de friction, le schéma est inconditionnellement instable. Il ne s'agit pas d'une instabilité physique mais d'une

instabilité numérique. L'algorithme de Lauwerier et Damsté est "malsain" car l'équation des ondes ne peut se résoudre sans introduire un terme additionnel de dissipation.

A la limite du raffinement du maillage, on pourrait montrer que l'algorithme (3.92) conduit toujours à des instabilités et ceci quelle que soit la méthode de discrétisation des dérivées spatiales. L'algorithme (3.92) est donc un algorithme mal conditionné.

2.7.2.- Méthode de Heaps

Pour étudier les tempêtes sur le plateau continental européen, Heaps développa un algorithme numérique.
Modifions légèrement les équations de Heaps (1969) pour les mettre sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - N_1 \bar{u}_2 = - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9 \bar{u}_1$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + N_2 \bar{u}_1 = - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - N_9 \bar{u}_2 \qquad (3.100)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_8 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

La discrétisation temporelle de Heaps

$$\frac{\bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_1^n}{\tau} = + N_1 \bar{u}_2)^n - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\Big)^n - N_9 \bar{u}_1)^n$$

$$\frac{\bar{u}_2^{n+1} - \bar{u}_2^n}{\tau} = - N_1 \bar{u}_1)^n - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\Big)^n - N_9 \bar{u}_2)^n \qquad (3.101)$$

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\tau} = - N_8 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}\right)^{n+1}$$

est celle développée par Hansen (1966) et Brettschneider (1967).

La grille spatiale et la discrétisation spatiale de Heaps sont identiques à celles de Lauwerier et Damsté (1963) (fig. 2).

Pour l'étude de la stabilité numérique et du comportement des modes physiques, il suffit d'étudier le système ci-dessous :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \qquad (3.102)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_8 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) = 0$$

Les équations aux différences correspondant au système (3.102) sont données par

$$\frac{\bar{u}_{1\,2I+1,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{1\,2I+1,2J+1}^{n}}{\tau} = - N_3 \frac{1}{2} \frac{\zeta^n_{2I+2,2J+2} - \zeta^n_{2I+2,2J} + \zeta^n_{2I,2J+2} - \zeta^n_{2I,2J}}{\Delta x} + O(\tau , \Delta x^2) \qquad (3.103)$$

$$\frac{\bar{u}_{2\,2I+1,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{2\,2I+1,2J+1}^{n}}{\tau} = - N_3 \frac{1}{2} \frac{\zeta^n_{2I+2,2J+2} - \zeta^n_{2I,2J+2} + \zeta^n_{2I+2,2J} - \zeta^n_{2I,2J}}{\Delta x} + O(\tau , \Delta x^2) \qquad (3.104)$$

$$\frac{\zeta^{n+1}_{2I,2J} - \zeta^{n}_{2I,2J}}{\tau} = - \frac{1}{2} N_8 \left\{ \frac{\bar{u}_{1\,2I+1,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{1\,2I+1,2J-1}^{n+1} + \bar{u}_{1\,2I-1,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{1\,2I-1,2J-1}^{n+1}}{\Delta x} \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{u}_{2\,2I+1,2J+1}^{n+1} - \bar{u}_{2\,2I-1,2J+1}^{n+1} + \bar{u}_{2\,2I+1,2J-1}^{n+1} - \bar{u}_{2\,2I-1,2J-1}^{n+1}}{\Delta x} \right\} + O(\tau , \Delta x^2) \qquad (3.105)$$

On suppose pour la simplicité des calculs $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$.

En introduisant les modes de Fourier (3.38) dans (3.103) à (3.105), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & B \\ C & D & (1 + CA + BD) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ Z \end{pmatrix}^{n}$$

avec

$$A = - 2i\, N_3 \frac{\tau}{\Delta x} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}$$

$$B = - 2i\, N_3 \frac{\tau}{\Delta x} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}$$

(3.107)

$$C = - 2i\, N_8 \frac{\tau}{\Delta x} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}$$

$$D = - 2i\, N_8 \frac{\tau}{\Delta x} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1}{2}$$

Pour avoir un algorithme stable au sens de Von Neumann, il faut que les valeurs propres de la matrice d'amplification vérifient l'inégalité (3.35). L'équation caractéristique correspondant à la matrice d'amplification du schéma de Heaps est la suivante :

$$(1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\lambda(1 + \frac{A^2 + B^2}{2}) + 1] = 0 \,. \qquad (3.108)$$

Recherche de la condition de stabilité

Le système d'équations aux dérivées partielles ne contient que des dérivées d'ordre un : pour cette raison, la condition de stabilité (3.34) se simplifie pour donner :

$$\lambda_i \leq 1 \qquad \forall i \qquad (3.109)$$

La première valeur propre λ_1 vérifie toujours (3.109). Les deuxième et troisième valeurs propres seront dans le cercle de rayon unité si

$$N_3 N_8 \frac{\tau^2}{\Delta x^2} (\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2} + \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \cos^2 \frac{\theta_1}{2}) \leq 1 \qquad (3.110)$$

Comme l'inégalité (3.110) doit être vérifiée pour tout θ_1 et tout θ_2, il faut que

$$N_3 N_8 \frac{\tau^2}{\Delta x^2} \leq 1 \qquad (3.111)$$

ou en variables dimensionelles :

$$gh \frac{\tau^2}{\Delta x^2} < 1 \ . \qquad (3.112)$$

La condition de stabilité (3.112) est moins restrictive que (3.55) ou (3.56). Le modèle de Heaps est donc intéressant quant au choix du pas temporel. Pour N_3 , N_8 et Δx fixé

$$\tau_{c_{Heaps}} = 1{,}41\ \tau_{c_{Fischer}} \sim 1{,}42\ \tau_{c_{Ronday}} \qquad (3.113)$$

où τ_c est le pas temporel critique.

D'un point de vue théorique, le calcul d'une marée serait, pour une même précision, plus rapide avec la méthode de Heaps qu'avec la nôtre car la condition de stabilité (3.111) est moins restrictive que (3.55). D'un point de vue pratique, l'avantage d'un pas de temps plus important est contrebalancé par une programmation plus lente et plus lourde en raison de l'utilisation de la grille donnée à la figure 2.

En effet pour un point frontière, l'algorithme numérique de résolution doit être adapté à la forme de la côte. Heaps a dû utiliser vingt algorithmes différents pour tenir compte de la géométrie irrégulière de la mer du Nord.

Etude des modes corrects ou modes physiques

Le mode physique correspondant à la première valeur propre n'est ni amorti ni déphasé.

Pour les deuxième et troisième modes physiques, nous obtenons facilement :

$$\begin{aligned} &\|\lambda_{2_3}\| = 1 \\ &\text{Arg } \lambda_{2_3} \sim \text{Atg } \theta\beta\ \sqrt{2} \sim \sqrt{2}\ \theta\beta \ . \end{aligned} \qquad (3.114)$$

Il n'y a donc aucune déformation en amplitude et le déphasage est proportionnel au pas temporel.

Du point de vue du comportement des modes physiques, le schéma de Heaps et celui développé dans ce travail sont identiques.

2.7.3.- Méthode de Leendertse

Cette méthode fut développée pour étudier les marées dans l'estuaire de l'Escaut. Leendertse (1967) appliqua également son modèle à la partie sud de la mer du Nord.

Les équations régissant le modèle sont non-linéaires et quasi-identiques à celles développées dans ce travail. Pour la simplicité du raisonnement, nous analysons la stabilité et le comportement des modes physiques pour un cas linéarisé.

L'algorithme de résolution de Leendertse est un algorithme basé sur la méthode des directions alternées. La grille spatiale est la même que celle utilisée dans ce présent travail : il s'agit donc d'une grille pour laquelle les variables $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ et ζ sont calculées à des noeuds différents. L'équation caractéristique de la matrice d'amplification du schéma de Leendertse (1967), p. 74, s'écrit sous forme adimensionnelle

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 + 2\lambda(1 - \frac{2}{\kappa}) + 1] = 0 \qquad (3.115)$$

avec

$$\kappa = 1 + N_3 N_8 \, \delta$$

$$\delta = \sin^2 \frac{\theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\theta_2}{2} + N_3 N_8 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \times \sin^2 \frac{\theta_2}{2}$$

Recherche de la condition de stabilité

La première valeur propre λ_1 est égale à l'unité quel que soit le choix des paramètres. Les deuxième et troisième valeurs propres sont solutions de

$$\lambda^2 + 2\lambda \left(1 - \frac{2}{1 + N_3 N_8 \, \delta}\right) + 1 = 0 \; . \qquad (3.116)$$

Les racines λ_2 et λ_3 sont toujours dans le cercle de rayon unité quel que soit $(N_3 N_8)$ car $\delta \geq 0$. Le schéma de Leendertse est donc inconditionnellement stable. Il s'agit d'un grand avantage quand le pas spatial doit être très petit (cas des estuaires).

Comportement des modes physiques

Le mode physique correspondant à la première valeur propre ne subit aucun amortissement et aucun déphasage. Pour les deuxième et troisième valeurs propres, on a

$$\|\lambda_{\frac{2}{3}}\| = 1 \qquad (3.117)$$

$$\text{Arg } \lambda_{\frac{2}{3}} \sim \pm \text{Atg } 2 \frac{\sqrt{\kappa - 1}}{\kappa - 2} \qquad (3.118)$$

Deux cas peuvent se présenter :

1) $N_3 N_8 \ \delta \sim 0(1)$

Il s'agit du cas d'un pas temporel petit, voisin du pas temporel d'un schéma explicite. Nous obtenons facilement

$$\text{Arg } \lambda_{\frac{2}{3}} \sim \mp \text{Atg } \sqrt{2}\ \theta\beta \sim \mp \sqrt{2}\ \theta\beta \ . \qquad (3.119)$$

Pour les modes physiques, le déphasage est aussi proportionnel au pas temporel. Sous ce rapport, il n'y a aucun avantage à utiliser un schéma basé sur un algorithme semi-implicite.

2) $N_3 N_8 \ \delta > 1$

Un tel cas se présenterait si on utilisait un pas temporel très grand.

Exemple

Si $N_3 N_8 \ \delta = 2$, on obtient

$$\text{Arg } \lambda \sim \text{Atg } 2\sqrt{2} \sim 70^\circ \ .$$

Le déphasage est énorme et la solution numérique ne représente plus la solution vraie.

La lourdeur de cet algorithme n'est contrebalancée par aucun gain de précision. La méthode de Leendertse rend cependant de grands services dans certains cas particuliers : modèles d'estuaires par exemple. Dans ce cas, un algorithme explicite donnerait un pas temporel d'intégration trop petit.

2.7.4.- Modèle de Brettschneider-Koop

Le modèle de Koop (1974) est une généralisation du modèle de Brettschneider (1967) et de Hansen (1966). La grille spatiale de ces deux auteurs est identique à celle utilisée dans ce travail. Dans le cas non-linéaire, l'algorithme de résolution de Koop n'est stable que si on introduit une viscosité additionnelle très importante.

Le but de cet exercice est de montrer que la viscosité artificielle est introduite pour annihiler les instabilités résultant d'une mauvaise discrétisation du terme non-linéaire d'advection. Pour la simplicité du raisonnement, supposons le cas de la propagation d'une onde de marée dans un canal étroit et peu profond. Les équations régissant ce mouvement sont données par :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + N_2\, \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9\, \bar{u}_1 + N_6 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}$$

(3.120)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_8 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + N_2\, \bar{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0 \ .$$

L'étude de la stabilité et du comportement des modes physiques se fait toujours sur un système d'équations quasi-linéarisées. Le système (3.120) devient

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + N_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = - N_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - N_9\, \bar{u}_1 + N_6 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1}$$

(3.121)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + N_8 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + N_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = 0 \ .$$

Pour l'étude de la stabilité, il suffit de conserver les termes différentiels de (3.121). La condition nécessaire de stabilité est dans ce cas donnée par (3.35). Brettschneider et Koop discrétisent le système différentiel (3.121) de la manière suivante :

$$\frac{\bar{u}_{2I+1}^{n+1} - \bar{u}_{2I+1}^{n-1}}{\tau} = - N_2 \frac{\bar{u}_{2I+3}^{n-1} - \bar{u}_{2I-1}^{n-1}}{2\,\Delta x} - N_3 \frac{\zeta_{2I+2}^{n} - \zeta_{2I}^{n}}{\Delta x}$$

(3.121)

$$+ N_6 \frac{\bar{u}_{2I+3}^{n-1} + \bar{u}_{2I-1}^{n-1} - 2\,\bar{u}_{2I+1}^{n}}{\Delta x^2} + O(\tau\ , \Delta x^2)$$

$$\frac{\zeta_{2I}^{n+2} - \zeta_{2I}^{n}}{\tau} = - N_8 \frac{\bar{u}_{2I+1}^{n+1} - \bar{u}_{2I-1}^{n+1}}{\Delta x} - N_2 \frac{\zeta_{2I+2}^{n} - \zeta_{2I-2}^{n}}{2\,\Delta x} + O(\tau, \Delta x^2)$$

En introduisant les modes de Fourier (3.38) dans (3.121), on obtient

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= A\, U^{n-1} + B\, Z^{n} \\ Z^{n+2} &= C\, U^{n+1} + D\, Z^{n} \end{aligned} \qquad (3.122)$$

avec

$$A = 1 - i\, N_2 \frac{\tau}{\Delta x} \sin\theta + \frac{2\, N_6\, \tau}{\Delta x^2} (\cos\theta - 1)$$

$$B = - 2i\, N_3 \frac{\tau}{\Delta x} \sin\frac{\theta}{2} \qquad (3.123)$$

$$C = - 2i\, N_8 \frac{\tau}{\Delta x} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$D = 1 - i\, N_2 \frac{\tau}{\Delta x} \sin\theta$$

La matrice d'amplification correspondant à (3.121) est donnée par

$$G \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ AC & BC + D \end{pmatrix} \qquad (3.124)$$

et l'équation caractéristique par

$$\lambda^2 - \lambda(A + BC + D) + AD = 0 \,. \qquad (3.125)$$

Le but de cette analyse est de démontrer que la discrétisation du terme d'advection selon une méthode centrée dans l'espace mais décentrée dans le temps est une source d'instabilités. En l'absence de viscosité suffisante, le schéma numérique devient instable ou explosif. Nous n'allons pas rechercher une condition nécessaire de stabilité pour l'algorithme de Brettschneider-Koop mais plutôt une condition suffisante d'instabilité.

Pour avoir une instabilité au sens de Von Neumann, il suffit que la norme du produit des valeurs propres de la matrice d'amplification soit supérieure à l'unité. Dans ce particulier, il faut :

(3.126) $\|AD\| > 1$

ou encore

$$\|AD\|^2 > 1 .$$

En remplaçant A et D par leurs expressions (3.123), nous obtenons

(3.127) $$\|AD\|^2 = 1 + \{(1 + \alpha^2)(\delta^2 + \alpha^2 - 2\delta) + \alpha^2\}$$

avec

(3.128)
$$\alpha = N_2 \frac{\tau}{\Delta x} \sin \theta$$

$$\delta = 4 N_6 \frac{\tau}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Pour qu'il y ait instabilité, il suffit que

(3.129) $$(1 + \alpha^2)(\delta^2 + \alpha^2 - 2\delta) + \alpha^2 > 0 .$$

En l'absence de toute viscosité, c'est-à-dire pour $\delta = 0$, l'inégalité (3.129) est toujours vérifiée et l'algorithme de résolution est instable. Il est donc dangereux d'utiliser une telle méthode de discrétisation car le terme d'advection est source d'instabilités. On pourrait montrer que, pour une certaine valeur du coefficient de viscosité, les valeurs propres rentrent dans le cercle unitaire. Koop (1974) a obtenu un schéma stable en adoptant une viscosité numérique de 2×10^4 m^2/s .

2.7.5.- Conclusions

L'analyse des principaux algorithmes classiques de résolution nous permet de tirer les conclusions suivantes :

i) l'algorithme de Lauwerier et Damsté est un algorithme instable en l'absence de friction;

ii) l'algorithme de Koop-Brettschneider est stable lorsque le coefficient de viscosité est suffisant pour annihiler les sources d'instabilités provoquées par la mauvaise discrétisation du terme d'advection;

iii) l'intérêt d'un algorithme implicite ou semi-implicite est fortement réduit lorsqu'on désire limiter la déformation en amplitude et en phase de l'onde. Pour les modes physiques, nous avons montré que les

déformations en phase sont proportionnelles au pas temporel d'intégration quel que soit l'algorithme stable utilisé;

iv) la condition de stabilité de l'algorithme de Heaps est légèrement moins restrictive que la nôtre dans le cas linéaire, mais l'imposition des conditions aux limites est plus difficile avec la méthode de Heaps. De plus, Heaps néglige les termes d'advection qui ne sont pas négligeables dans les régions caractérisées par une faible profondeur.

Pour ces raisons, l'algorithme développé dans ce travail et qui est une extension de celui de Hansen (1966), nous semble le plus adapté à l'étude des marées et des tempêtes dans une mer continentale peu profonde.

3.- Méthode numérique de résolution pour la circulation résiduelle

Au chapitre II, nous avons établi l'équation régissant la circulation résiduelle dans une mer continentale. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x_1} - \frac{2}{h}\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{h}{K}\beta - \frac{f}{K}\frac{\partial h}{\partial x_2}\right\} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x_2} - \frac{2}{h}\frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{f}{K}\frac{\partial h}{\partial x_1}\right\}$$

$$= K^{-1}\left\{\Theta_1\frac{\partial h}{\partial x_2} - \Theta_2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right\} + h\,K^{-1}\left\{\frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_2}\right\} \qquad (3.130)$$

où h est la profondeur en l'absence de tout mouvement, f la force de Coriolis, β la dérivée de f suivant la latitude et K le coefficient de friction qui varie de point en point.

Comme Θ est la somme de la tension moyenne de vent et de la tension de marée (*cf.* chapitre II, relation 2.85), le deuxième membre de l'équation (3.130) représente l'ensemble des forces extérieures.

L'équation (3.130) qui régit la circulation résiduelle est résolue numériquement car la variabilité des coefficients et la forme du bassin empêchent toute résolution analytique. Nous avons utilisé l'algorithme de Liebmann avec sur-relaxation [*e.g.* Thompson (1961)]. La discrétisation de l'équation différentielle (3.130) donne

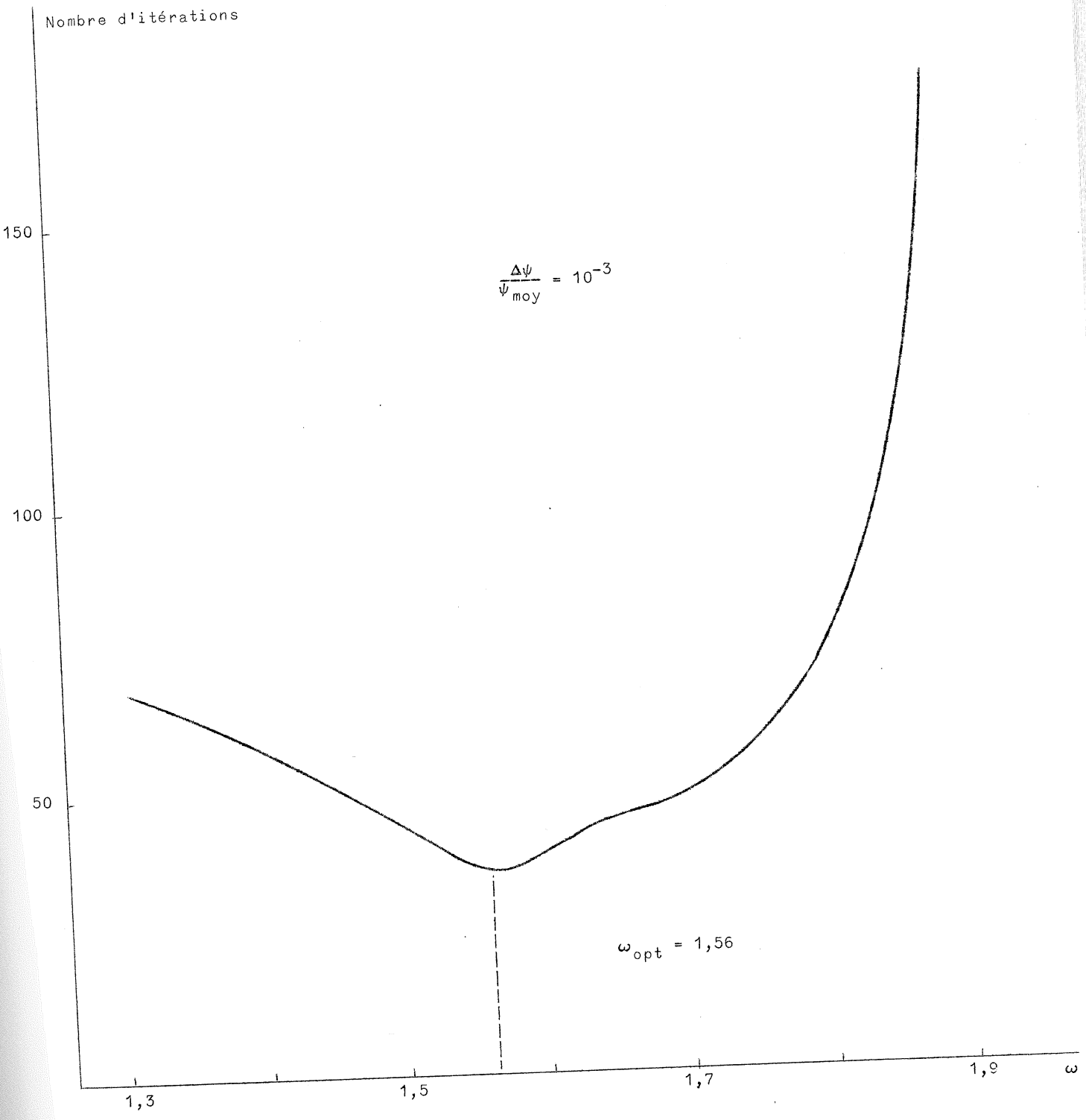

Nombre d'itérations
150
100
50
$\frac{\Delta\psi}{\psi_{moy}} = 10^{-3}$
$\omega_{opt} = 1,56$
1,3
1,5
1,7
1,9
ω

fig. 3.

$$\psi_{I,J}^{\ell+1} = \psi_{I,J}^{\ell} + \frac{\omega}{A} \{B_{I,J} \psi_{I,J+1}^{\ell} + C_{I,J} \psi_{I,J-1}^{\ell+1} + D_{I,J} \psi_{I+1,J}^{\ell} + E_{I,J} \psi_{I-1,J}^{\ell+1} - A \psi_{I,J}^{\ell} - F_{I,J} \} \tag{3.131}$$

où ω représente le coefficient de relaxation, ℓ l'indice de l'itération, I l'indice des lignes et J l'indice des colonnes.

Les termes A, $B_{I,J}$, $C_{I,J}$, $D_{I,J}$, $E_{I,J}$ et $F_{I,J}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}
A &= 2 \{(\frac{1}{\Delta x_1})^2 + (\frac{1}{\Delta x_2})^2\} \\
B_{I,J} &= \{(\frac{1}{\Delta x_1})^2 - \frac{1}{2 \Delta x_1}[\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x_1} - \frac{h}{\kappa} \beta]\}_{I,J} \\
C_{I,J} &= \{(\frac{1}{\Delta x_1})^2 + \frac{1}{2 \Delta x_1}[\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x_1} - \frac{h}{\kappa} \beta]\}_{I,J} \\
D_{I,J} &= \{(\frac{1}{\Delta x_2})^2 - \frac{1}{2 \Delta x_2}[\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x_2}]\}_{I,J} \\
E_{I,J} &= \{(\frac{1}{\Delta x_2})^2 + \frac{1}{2 \Delta x_2}[\frac{2}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{f}{K} \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x_2}]\}_{I,J} \\
F_{I,J} &= \{\frac{h}{K}[\frac{\partial \Theta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_2}] + \frac{1}{K}[\Theta_1 \frac{\partial h}{\partial x_2} - \Theta_2 \frac{\partial h}{\partial x_1}]\}_{I,J}
\end{aligned} \tag{3.132}$$

L'erreur de discrétisation pour l'équation (3.131) est en Δx^2. Le choix du paramètre de relaxation pose un problème car la théorie développée dans le cas très simple d'une équation de Laplace ne peut s'appliquer pour des raisons évidentes : l'équation (3.130) contient des dérivées premières, les coefficients ne sont pas constants et les conditions aux limites sont mixtes (parfois Dirichlet, parfois Neumann). L'étude empirique de la vitesse de convergence de l'algorithme utilisé pour le bassin couvrant la partie sud de la mer du Nord donne :

$$\omega_{opt} = 1{,}56$$

et la figure 3 montre la vitesse de convergence en fonction du coefficient de sur-relaxation.

Chapitre IV

La mer du Nord :
une mer continentale entourée de pays industrialisés,
soumise à de fortes marées et à de violentes tempêtes

Au chapitre II, nous avons développé des modèles mathématiques pour l'étude des marées, des tempêtes et de la circulation résiduelle dans des mers continentales soumises à de fortes marées. Pour des raisons évidentes, nous appliquerons nos modèles à la mer du Nord. Avant d'entrer dans le détail des circulations hydrodynamiques, nous décrirons brièvement les caractéristiques géographiques et hydrodynamiques de la mer du Nord.

1.- Caractéristiques géographiques de la mer du Nord

La mer du Nord est une mer du nord-ouest de l'Europe, formée par l'Atlantique, elle communique avec la Manche et la mer Baltique. Sa limite nord est approximativement le 61ème parallèle allant des Iles Shetland à la côte norvégienne; sa limite sud est la ligne traversant le Pas de Calais entre Foreland et le cap Gris-Nez. Dans sa partie est, il faut définir une ligne de séparation entre la mer du Nord et la mer Baltique. Pour l'étude des marées et des tempêtes, nous choisirons le 56ème parallèle entre Hälsingborg (Suède) et Kaloe (Danemark) : le Skagerrak et le Kattegat feront donc partie de notre étude. Pour la

circulation résiduelle, en raison de la stratification de la colonne d'eau dans le Skagerrak et le Kattegat, nous prendrons comme limite est la ligne méridienne allant du cap Skagen (Danemark) à la côte norvégienne. La superficie du bassin de la mer du Nord (à l'exclusion du Skagerrak et du Kattegat) est approximativement $5,8 \times 10^5$ km^2 .

Le bassin de la mer du Nord est caractérisé dans son ensemble par un très large plateau continental dont la profondeur dépasse rarement 100 mètres . Les bancs de sable sont nombreux dans sa partie sud et le long des côtes anglaises, françaises, belges, néerlandaises et allemandes. La profondeur est de l'ordre de 20 mètres et se réduit encore au voisinage des côtes et des estuaires. Le long de la Norvège, le plateau continental semble s'être effondré et on observe un chenal large d'environ cent kilomètres, caractérisé par une profondeur allant de 300 à 500 mètres . Cette région profonde se prolonge dans le Skagerrak et s'arrête dans le Kattegat.

La mer du Nord est une mer bien connue pour ses fortes marées et ses violentes tempêtes qui submergent et parfois détruisent les digues protectrices (par exemple la marée-tempête de février 1953 fit de nombreuses victimes aux Pays-Bas). Dans la partie sud (Southern Bight), la navigation est souvent rendue difficile par les fortes marées qui empêchent le passage des bâteaux de gros tonnage durant la période de marée basse. Un vent soufflant de la côte réduit encore la profondeur utile : à certains moments, l'accès de plusieurs ports importants est soit dangereux, soit impossible. Les courants de flot ou de jusant sont aussi très intenses le long des côtes du sud de la mer du Nord. Les chenaux d'accès de certains ports sont inutilisables lorsque le courant perpendiculaire à ces chenaux est trop violent. Le modèle mathématique établi dans ce travail permettra de calculer la profondeur réelle et les courants, à tout instant et en de très nombreux endroits, à partir des conditions météorologiques.

La mer du Nord est entourée par de nombreux pays industrialisés qui produisent des quantités énormes de matières polluantes et qui "éliminent" ces produits, soit par des déversements massifs en mer, soit

par des rejets dans les rivières. Cet apport de matières polluantes risque de briser le fragile équilibre écologique. Un trafic maritime intense dans le sud de la mer du Nord comporte des risques non négligeables de collision ou de naufrage. Les plateformes de recherche et d'exploitation pétrolières sont soumises à des sollicitations hydrodynamiques énormes (vagues de 30 mètres , etc.), des ruptures de canalisation peuvent provoquer des déversements massifs de pétrole brut. Les conséquences de tels accidents pourraient être désastreuses pour l'écologie et l'économie des pays riverains. Le modèle hydrodynamique établi dans notre travail permet de déterminer les courants qui causent aussi bien le transport que la diffusion des polluants : un modèle de dispersion ne peut donc fonctionner sans la connaissance de ces paramètres.

2.- Caractéristiques hydrodynamiques de la mer du Nord

Pour mieux comprendre la dynamique des masses d'eau, il nous semble utile de connaître l'origine des marées et des tempêtes dans la mer du Nord et d'expliquer l'amplification des ondes longues (marées et tempêtes) dans ce bassin. Des modèles hydrodynamiques simples permettent d'élucider ces questions.

2.1.- Oscillations libres en mer du Nord

L'étude des oscillations libres permet d'expliquer l'amplification des marées et des tempêtes en mer du Nord. Son bassin peut être assimilé, en première approximation, à un grand golfe ouvert à sa limite nord. Déterminons les périodes propres avec :

a) un modèle unidimensionnel pour lequel la largeur et la profondeur du bassin sont constantes;

b) un modèle unidimensionnel pour lequel la section droite du bassin varie de point en point;

c) un modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur.

a) Modèle unidimensionnel pour lequel la section droite est constante

La période des oscillations libres dans une baie est donnée par la formule classique de Merian (1828) :

$$T_n = \frac{4L}{(2n + 1)\sqrt{gh}} \qquad (4.1)$$

où $n = 0,1,2,3,\ldots$, L représente la longueur de la baie et h sa profondeur moyenne.

En première approximation, la mer du Nord peut être assimilée à un bassin rectangulaire, ouvert en sa partie supérieure; ses caractéristiques géométriques sont définies par

$$L = 10^6 \text{ m} \qquad \text{et} \qquad h = 80 \text{ m} .$$

En introduisant ces grandeurs dans (4.1), on obtient les périodes propres suivantes :

$$T_0 = 39,8 \text{ h} \qquad T_1 = 13,3 \text{ h} \qquad T_2 = 7,96 \text{ h} .$$

b) Modèle unidimensionnel pour lequel la section droite est variable

La mer du Nord est divisée en 42 tronçons (fig. 1); les variations spatiales de la largeur et de la superficie de ces sections sont données à la figure 2.

La mer du Nord est assimilée, en première approximation, à un vaste golfe en communication avec l'Atlantique par sa frontière nord; on pourrait facilement montrer que l'ouverture du Pas de Calais ne perturbe que légèrement les périodes propres du bassin.

L'intégration des équations (2.34) et (2.74) sur la largeur est immédiate lorsqu'on néglige les forces extérieures, les termes non linéaires et les termes de dissipation. Les équations de ce modèle unidimensionnel sont données par

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - g A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4.3)$$

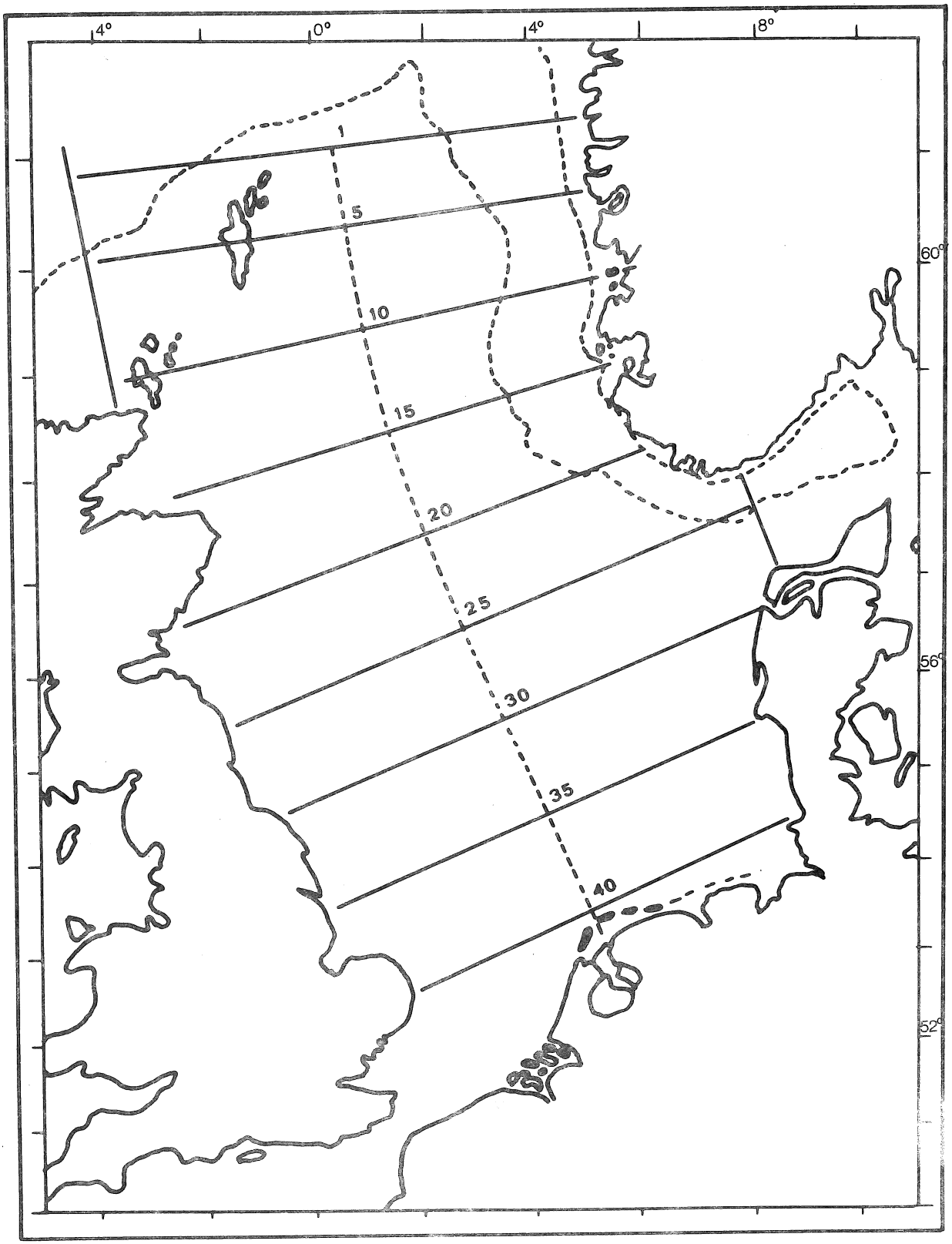


fig. 1.

Grille numérique pour le modèle unidimensionnel

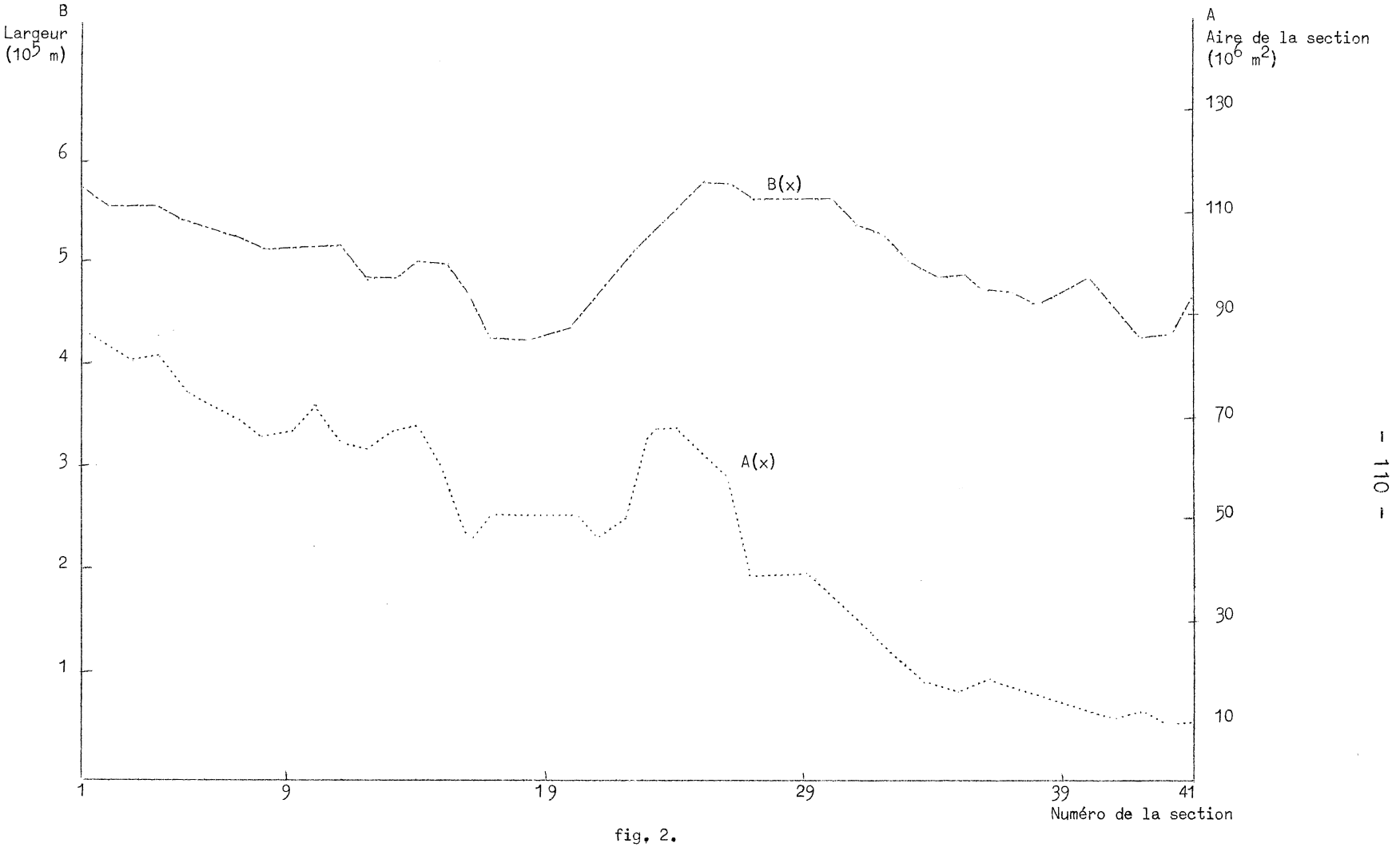


fig. 2.
Variations spatiales de la largeur B et de l'aire A de la section droite dans le modèle unidimensionnel

où x est la coordonnée curviligne le long de l'axe principal (fig. 1), t le temps et g la gravité. Les grandeurs Q, ζ, A et B ont les significations suivantes : $Q = Q(x,t)$ le transport volumique à travers une section droite, $\zeta = \zeta(x,t)$ l'élévation de la surface libre au-dessus du niveau non perturbé, $A = A(x)$ l'aire de la section droite (fig. 2), $B = B(x)$ la largeur horizontale de la section droite (fig. 2).

Dans les équations (4.2) et (4.3), les termes de Coriolis et de friction sont négligés. Nous examinerons dans la suite l'influence de ces termes sur les périodes des oscillations propres.

Recherchons des solutions du type :

$$Q(x,t) = Q(x) \sin \sigma t \tag{4.4}$$

$$\zeta(x,t) = Z(x) \cos \sigma t \; . \tag{4.5}$$

La substitution de (4.4) et (4.5) dans les équations (4.2) et (4.3) donne :

$$\sigma Q = - gA \frac{dZ}{dx} \tag{4.6}$$

et

$$\sigma Z = \frac{1}{B} \frac{dQ}{dx} \; . \tag{4.7}$$

Les équations différentielles (4.6) et (4.7) sont résolues par la méthode des différences finies en choisissant un pas spatial de 22 500 m. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$Z = 0$ à la frontière nord de la mer du Nord, soit au rebord du plateau continental;

Q est nul à l'extrémité sud soit la côte néerlando-allemande.

Les fréquences correspondant aux modes normaux ou propres sont présentées au tableau 1.

Nous constatons, en comparant les résultats du tableau 1, que les modes 1,2,3,... sont peu sensibles aux variations de la section droite. Le mode fondamental est fortement influencé par la variation de la profondeur [la largeur du bassin reste quasi constante (fig. 2)]. On observe une diminution de 20 % par rapport à la formule de Merian.

Tableau 1

Mode	Période propre calculée avec une section droite variable	Rapport $\frac{T_n}{T_o}$	Période propre calculée avec une section droite constante (formule de Mérian)	Rapport $\frac{T_n}{T_o}$
0	T_o = 31,45 heures	1	T_o = 39,8 heures	1
1	T_1 = 13,3 heures	$\frac{1}{2,37}$	T_1 = 13,3 heures	$\frac{1}{3}$
2	T_2 = 7,70 heures	$\frac{1}{4,10}$	T_2 = 7,96 heures	$\frac{1}{5}$
3	T_3 = 5,90 heures	$\frac{1}{5,35}$	T_3 = 5,70 heures	$\frac{1}{7}$

Influence de la rotation de la terre sur les modes propres

Van Dantzig et Lauwerier (1960) ont étudié l'influence de la rotation de la terre sur les périodes propres d'un "golfe". Si la vitesse de rotation du bassin est petite et si la largeur du golfe vaut la moitié de sa longueur, Van Dantzig et Lauwerier ont montré que la fréquence propre du mode le plus lent est donnée par :

$$\sigma \sim \sigma_0 + 0{,}504 \frac{f^2 L}{\pi c} + O(f^4) \qquad (4.8)$$

où σ_0 est la fréquence du mode le plus lent pour un bassin non tournant, c la vitesse de phase, L la longueur du "golfe" et f la fréquence d'inertie ou de Coriolis.

Pour la mer du Nord, nous avons calculé le mode propre le plus lent en l'absence de toute rotation; la fréquence propre correspondante vaut

$$\sigma_0 = 0{,}56 \times 10^{-4} \ s^{-1} .$$

En introduisant σ_0 et les valeurs des paramètres L , f et c dans la relation (4.8), nous obtenons :

$$\sigma \sim 0{,}9 \times 10^{-4} \ s^{-1} .$$

Notons que la formule (4.8) ne donne qu'une estimation de la fréquence

propre car l'hypothèse de Van Dantzig et Lauwerier ($\sigma_0 \gg f$) n'est pas entièrement vérifiée.

La rotation de la terre a donc pour effet d'augmenter la fréquence des oscillations propres. L'influence de la rotation est d'autant moins sensible que la fréquence σ_0 est grande.

Influence de la friction sur les modes propres

Rao (1968) a étudié l'influence de la friction sur les oscillations propres dans la Bay of Fundy. Il a montré que l'augmentation de la période du mode propre le plus lent y était inférieure au pour-cent. La formule développée par Rao est la suivante :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 - \frac{k^2 U^2}{h^2}} \qquad (4.9)$$

où σ_0 est la fréquence du mode propre le plus lent en l'absence de friction et de rotation, k représente le coefficient de friction sur le fond, U la vitesse horizontale du courant de marée et h la profondeur. En introduisant les valeurs caractéristiques des grandeurs k, U et h observées en mer du Nord, on obtient :

$$\sigma \sim 0{,}546 \times 10^{-4}\ s^{-1} .$$

La fréquence du mode le plus lent est donc réduite de $0{,}14 \times 10^{-5}\ s^{-1}$ soit de 2,5 % . La friction sur le fond modifie donc peu la période ou la fréquence des modes propres les plus lents.

Pour une étude détaillée des oscillations libres dans un bassin dont les dimensions sont comparables à celles de la mer du Nord, il faut passer à un modèle bidimensionnel qui fait intervenir non seulement la topographie horizontale mais aussi la rotation de la terre.

c) Le modèle bidimensionnel intégré sur la profondeur

Au paragraphe précédent, nous avons montré que la rotation de la terre et la géométrie du bassin influencent fortement les modes propres les plus lents, qui sont les plus faciles à exciter.

Krauss (1974) a étudié les oscillations libres dans la mer Baltique à l'aide de modèles hydrodynamiques bidimensionnels. Il a montré que cette méthode conduisait à de bons résultats. Les périodes propres calculées avec le modèle bidimensionnel diffèrent sensiblement de celles déduites des modèles unidimensionnels.

Pour cette première étude, nous négligeons les termes non linéaires d'advection. Dans ces conditions, les équations (2.35) et (2.75) régissant un modèle hydrodynamique bidimensionnel sont les suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - f\,\bar{u}_2 = - g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{C_d\ W_1\ \|W\|}{h}\,\frac{\rho_a}{\rho}\,(1 + m) - \frac{\tau_{b_1}}{h} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + f\,\bar{u}_1 = - g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{C_d\ W_2\ \|W\|}{h}\,\frac{\rho_a}{\rho}\,(1 + m) - \frac{\tau_{b_2}}{h} \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial\, H\bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\, H\bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \tag{4.12}$$

Pour faciliter l'analyse des modes propres, nous utiliserons une loi linéaire de friction soit

$$\tau_{b_1} = r\,\bar{u}_1\,h \qquad \text{et} \qquad \tau_{b_2} = r\,\bar{u}_2\,h \tag{4.13}$$

où r est un coefficient de friction qui dépend de l'intensité des courants de marée [selon Vangriesheim (1974), le temps d'amortissement des courants induits par le vent dans la mer du Nord est plus petit qu'en Atlantique en raison des forts courants de marée]. Le coefficient r adopté dans ce travail est calculé en supposant un courant de marée de 0,5 m/s, une profondeur de 80 mètres et un coefficient de friction k de 2×10^{-3}. Le coefficient de friction r vaut donc :

$$r \sim 1{,}2 \times 10^{-5}\ s^{-1}\ .$$

Le système d'équations (4.10) à (4.12) est résolu en utilisant la méthode aux différences finies exposée au chapitre III. En adoptant un pas spatial de 75 km (fig. 3) et une profondeur limite de 500 m, le critère de stabilité (3.51) donne :

$$\Delta t < 715\ s\ .$$

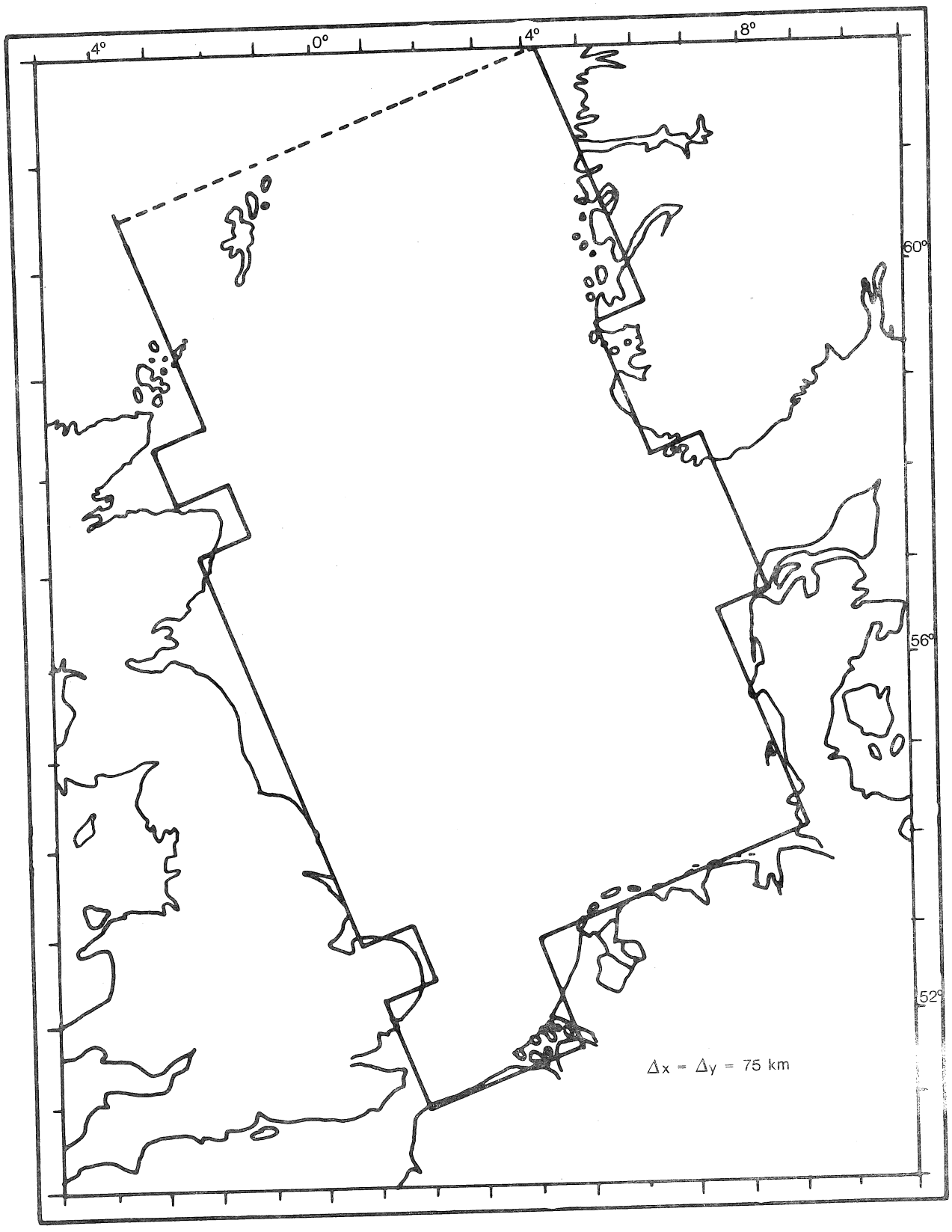


fig. 3.

Grille numérique pour le calcul des oscillations libres

Le pas temporel choisi est le suivant :

$$\Delta t = 600 \text{ s} .$$

Les conditions aux limites sont simples :

- vitesse normale à la côte, nulle;
- élévation de la surface libre, nulle, le long de la frontière nord du modèle.

Pour déterminer les oscillations libres de la mer du Nord, nous avons fait souffler un vent uniforme de 20 m/s pendant une période de 10 heures ; ensuite la masse d'eau, libre de toute force extérieure, oscillera avec les périodes propres du bassin. Le calcul est poursuivi pendant deux cents heures. Les élévations en un certain nombre de points choisis au hasard (25 points) sont stockées sur une bande magnétique. Les valeurs de ζ , ainsi obtenues, sont multipliées par $e^{\frac{1}{2}rt}$ pour éliminer l'amortissement en amplitude. En chaque point, l'analyse de Fourier donne l'amplitude et la phase des modes propres. Les fréquences des oscillations contenant le plus d'énergie sont données au tableau 2.

Tableau 2

Période (heures)	Probabilité de présence du mode propre considéré
38,3	0,36
19,16	0,64
14,4	1,00
8,8	0,68
7,2	0,32
6,7	0,28
6,4	0,24
5,5	0,64

L'examen de ce tableau montre que la période 14,4 h est toujours présente. Cette période correspond à la période d'inertie ou de Coriolis.

Chapitre V

Applications des modèles hydrodynamiques non stationnaires à l'étude des marées et des tempêtes en mer du Nord

Les modèles hydrodynamiques établis au chapitre II devront être testés et les résultats des simulations numériques (élévations de la surface libre et courants) comparés aux observations de marée et de tempête.

Comme les marées jouent un rôle prépondérant dans la dynamique des masses d'eau en mer du Nord, nous consacrerons tout d'abord notre étude à la simulation numérique de la marée partielle la plus intense : la marée semi-diurne lunaire. Le but que nous nous sommes fixé dans ce travail n'est pas de retrouver ou de reproduire toutes les caractéristiques de toutes les marées partielles mais plutôt de développer un modèle qui permettra de les retrouver. On se limite donc à l'étude de la marée semi-diurne lunaire.

La violence des tempêtes en mer du Nord est connue depuis des siècles; nous montrerons dans la troisième partie de ce chapitre que le modèle hydrodynamique permet de simuler correctement les élévations de la surface libre, induites par la tempête de novembre 1973.

1.- Modèle hydrodynamique développé pour l'analyse des marées et des tempêtes en mer du Nord

Les équations générals (2.35) et (2.75) régissant le mouvement des ondes longues, peuvent se simplifier légèrement dans le cas de la mer du Nord.

En effet, au chapitre III, dans le paragraphe traitant de l'analyse des ordres de grandeur, nous avons montré que les termes de viscosité turbulente et de cisaillement étaient négligeables, pour autant qu'on ne s'intéresse pas aux phénomènes caractérisés par de très petites échelles (de l'ordre de 10^2 à 10^3 m). En annulant ces termes, les équations (2.35) et (2.75) perdent leur caractère parabolique-elliptique et deviennent hyperboliques.

En nous basant sur l'analyse des ordres de grandeur des termes de l'équation (2.75) et sur les résultats du modèle unidimensionnel développé au chapitre précédent, nous pouvons négliger les forces astronomiques de marée. L'erreur ainsi introduite est de l'ordre de 2 cm .

Une telle erreur est-elle détectable ?

Les marégraphes côtiers classiques ont une précision de 10^{-3} à 10^{-2}, suivant la qualité des appareils utilisés et l'amplitude de la marée. Les mesures de courant sont par contre beaucoup plus imprécises car les courantographes[1] utilisés par les services hydrographiques sont tous basés sur un principe mécanique. Le seuil de réponse est de 1 cm/s avec les meilleurs appareils et de 2 à 3 cm/s avec des instruments moins sensibles. Les courantographes devraient être fixés rigidement sur un support reposant sur le fond. Malheureusement, pour des raisons techniques et économiques, ce n'est généralement pas le cas (on installe depuis peu des courantographes sur les plateformes de forage pétrolier ou encore sur des "piquets" — sorte de pieu enfoncé dans le sol — dans les régions côtières). Les courantographes sont généralement fixés sur une ligne de mouillage maintenue verticale par un flotteur sub-surface (fig. 1). La mobilité du câble est la cause d'une erreur dans la mesure du courant. Selon les experts, elle peut aller jusqu'à plusieurs centimètres par seconde pour l'instrument le

1. Si on se réfère à la littérature, on peut utiliser aussi bien le vocable courantographe que le vocable courantomètre.

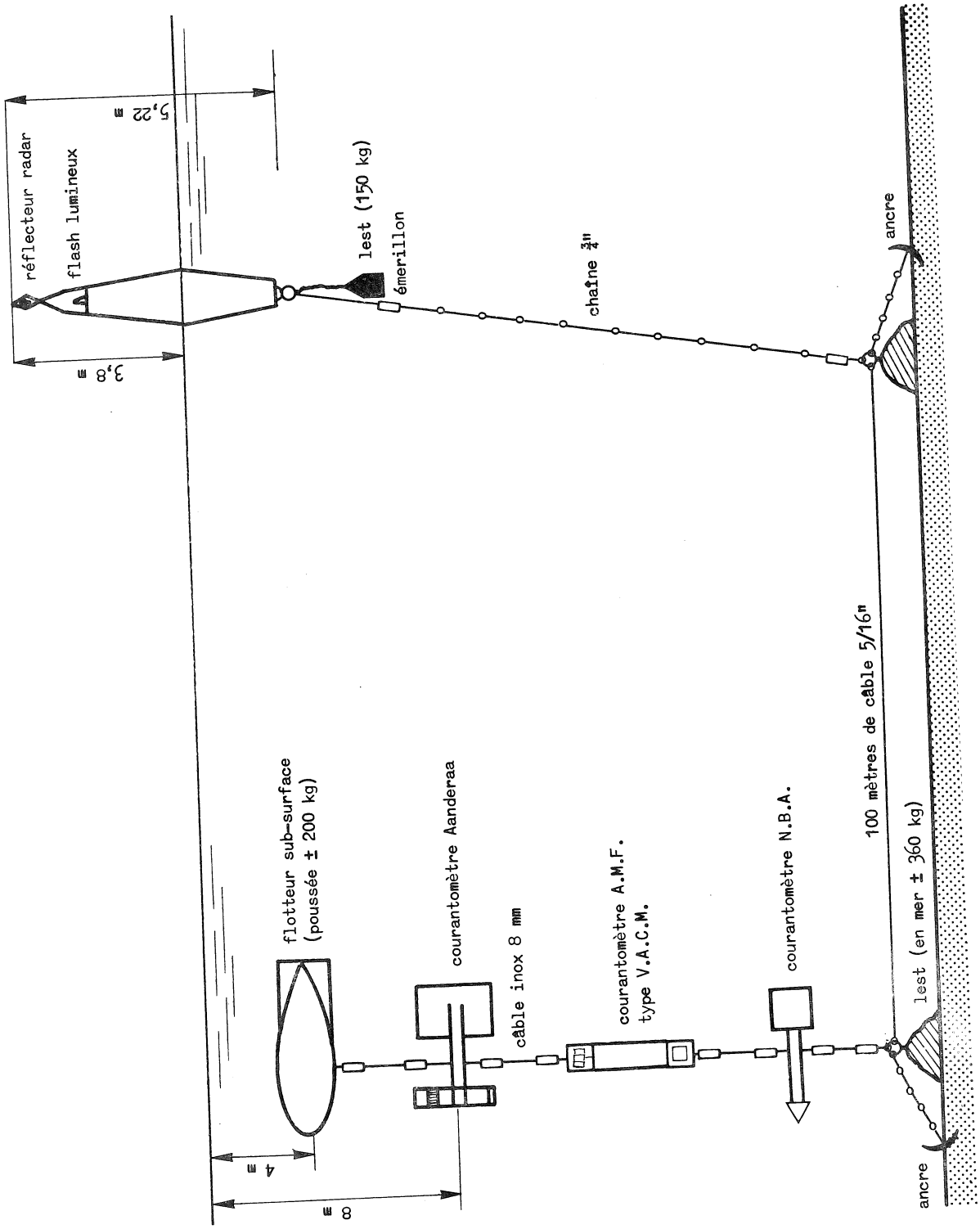


fig. 1.
Schéma classique de mouillage des courantographes

plus proche de la naviface. Pour ces raisons, les mesures fournies par les appareils sont affectées d'erreurs de l'ordre de quelques pour cent. L'erreur commise en négligeant les forces astronomiques de marée est à la limite de précision des instruments.

En supprimant le terme de viscosité et les forces astronomiques de marée dans les équations de mouvement (2.35) et (2.75), nous obtenons :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}.\nabla H + H\,\nabla.\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}.\nabla\bar{\mathbf{u}} + f\,\mathbf{e}_3 \wedge \bar{\mathbf{u}} = -\nabla\left(g\zeta + \frac{p_a}{\rho}\right) + \frac{C_{10}\,\mathbf{W}\,\|\mathbf{W}\|}{H} - \frac{D}{H}\,\bar{\mathbf{u}}\,\|\bar{\mathbf{u}}\| \tag{5.2}$$

avec $H = h + \zeta$ la profondeur instantanée et $C_{10} = \frac{\rho_a}{\rho}(1 + m)C_d$

1.1.- Choix du pas spatial et du pas temporel d'intégration

Le choix du pas spatial dépend de plusieurs facteurs. Lorsqu'on désire une grande précision dans les résultats, il faut que le modèle reproduise avec une grande fidélité la géométrie des côtes et du fond. Il faut donc choisir un pas spatial d'intégration petit. Les équations (5.1) et (5.2) ne peuvent se résoudre analytiquement pour des raisons évidentes (non linéarité des équations, variabilité des coefficients, géométrie irrégulière du bassin). Les scientifiques qui doivent résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles ont très souvent des moyens limités : les ordinateurs dont ils disposent ont une "capacité mémoire" limitée et les crédits de recherches sont aussi limités. Un compromis entre la précision et le coût de calcul doit être trouvé.

Dans l'analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations de mouvement (*cf.* chapitre III), nous avons montré que le terme de Coriolis est un des termes les plus importants : il convient donc de le calculer avec une précision suffisante. Comme la mer du Nord s'étend du 51ème au 61ème parallèle, le facteur de Coriolis f donné par (2.28) varie entre $1{,}14 \times 10^{-4}$ et $1{,}28 \times 10^{-4}\ s^{-1}$. Cette variation n'étant pas négligeable, nous introduisons dans notre

modèle un terme de Coriolis dépendant de la latitude. Le système de coordonnées le plus approprié à notre étude sera le système de coordonnées sphériques.

Les cartes marines sont en général basées sur le principe de la projection de Mercator où une même distance entre deux points dépend de la latitude de ces points (l'utilisation des cartes de Mercator est cependant limitée aux latitudes moyennes; aux latitudes élévées, des projections stéréographiques sont plus appropriées). Pour résoudre numériquement les équations (5.1) et (5.2), nous utiliserons une grille à mailles rectangulaires dans le système de projection de Mercator (fig. 2). Le pas spatial optimal — compromis entre la précision désirée et la limitation de notre budget — est le suivant :

$$\Delta\lambda = 20\ '$$

$$\Delta\phi = 20\ '$$

où λ représente la longitude et ϕ la latitude.

Le pas spatial nord-sud, variable dans le système de projection de Mercator (fig. 2), est constant; le pas spatial est-ouest, fixe dans le système de projection de Mercator (fig.2), diminue quand la latitude augmente. Le pas spatial le plus petit se situe à la latitude du 61ème parallèle, il vaut approximativement :

$$\Delta x_\lambda \sim 18 \text{ km} ,$$

x_λ représente la coordonnée est-ouest.

Le pas temporel ne peut être choisi arbitrairement. La précision et la stabilité de l'algorithme de résolution (voir chapitre III) nous obligent à prendre un pas spatial petit, vérifiant l'inégalité (3.56) suivante :

$$(5.3) \qquad 4\left(\frac{u_c\,\Delta t}{\Delta x}\right) + 2\left[\left(1 + \frac{\zeta_c}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{gh}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right]^2 \leq 1 .$$

Pour un pas spatial déterminé, le pas temporel satisfaisant (5.3) décroît avec la profondeur h, la vitesse du courant u_c et l'élévation de la surface libre ζ_c. Pour h, u_c et ζ_c fixés, le pas

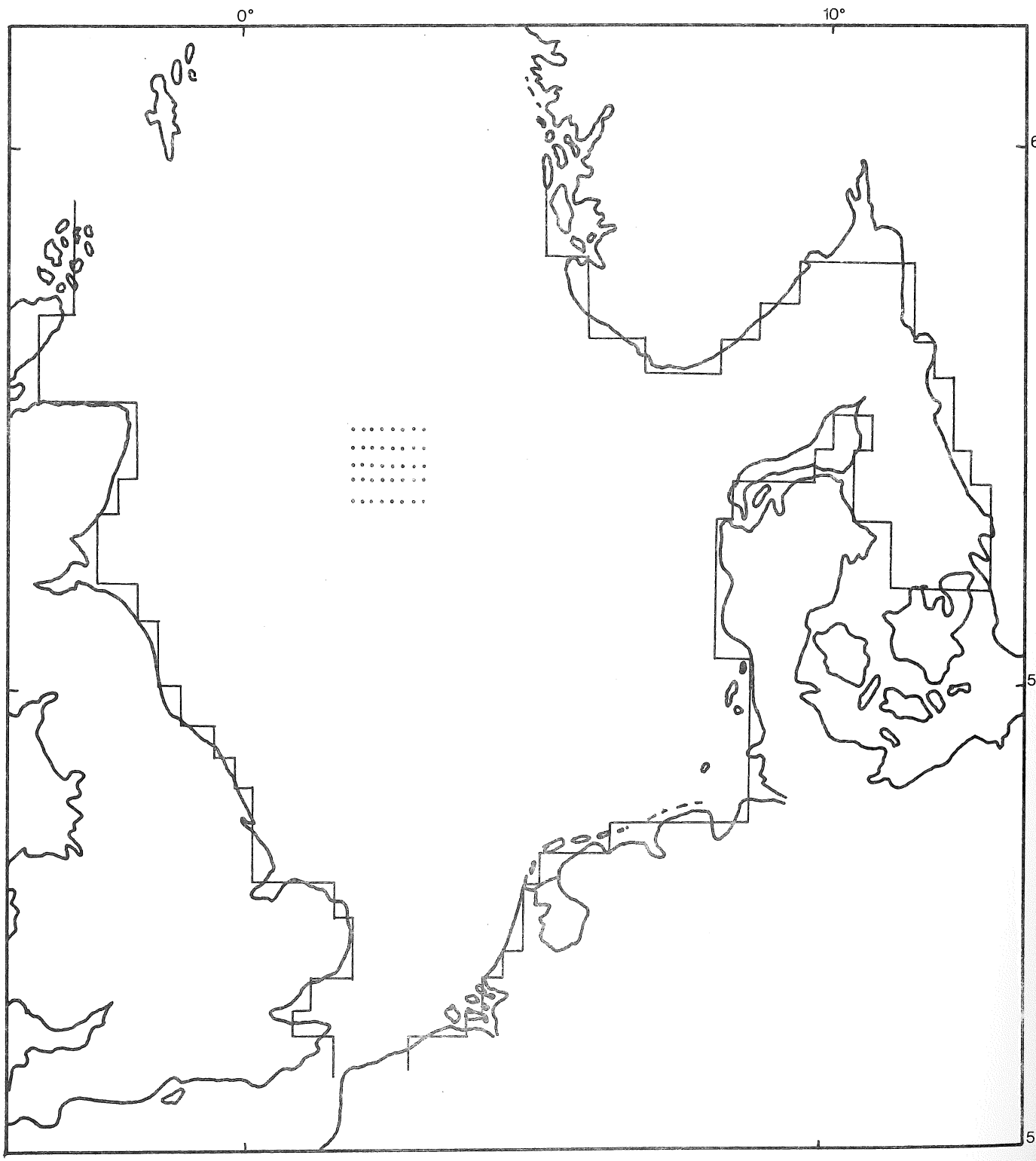


fig. 2.
Grille numérique utilisée pour la simulation de la marée

temporel décroît avec le pas spatial. Etudions brièvement la variabilité spatiale du pas temporel critique dans la mer du Nord.

a) Dans les eaux peu profondes

Les courants sont intenses et l'amplitude de la marée est une fraction non négligeable de la profondeur. En remplaçant les grandeurs caractéristiques :

$u_c = 2$ m/s ; $\zeta_c = 1$ m ; $h = 10$ m ; $\Delta x_\lambda = 23$ km pour $\phi = 52° 30'$

dans (5.3), on obtient :

$$3{,}5 \times 10^{-4} \Delta t + 4{,}5 \times 10^{-7} \Delta t^2 \leq 1 .$$

Le pas temporel critique est le suivant :

$$\Delta t_{\text{critique}} \sim 1150 \text{ s} .$$

b) Dans les eaux profondes

Les courants et les élévations de la surface libre sont généralement faibles. On a

$u_c = 0{,}4$ m/s ; $\zeta_c = 0{,}5$ m ; $h = 300$ m ; $\Delta x_\lambda = 18$ km pour $\phi = 60° 30'$.

Le pas temporel critique est solution de

$$8{,}9 \times 10^{-5} \Delta t + 1{,}82 \times 10^{-5} \Delta t^2 = 1 .$$

On trouve aisément

$$\Delta t_{\text{critique}} = 232 \text{ s} .$$

Comme notre algorithme numérique doit être stable pour tous les points de notre grille numérique, il doit l'être dans les conditions les plus restrictives, c'est-à-dire pour le plus petit pas spatial, pour les plus grandes profondeurs et pour les courants intenses.

Nous éliminons tout d'abord les quelques rares points où la profondeur est supérieure à 400 m : à ces endroits la profondeur est supposée égale à 400 m . En admettant les bornes supérieures et inférieures suivantes :

$\Delta x_\lambda = 18$ km ; $u_c = 1$ m/s ; $\zeta_c = 1$ m et $h = 400$ m ,

et en introduisant ces grandeurs dans (5.3), nous obtenons :

(5.4) $$\Delta t_{critique} \sim 194 \text{ s} .$$

Le pas temporel ainsi calculé vérifie la condition nécessaire de stabilité de Von Neumann (voir chapitre III) dans le cas d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires à coefficients constants. L'expérience numérique montre que le pas temporel doit être réduit pour tenir compte des non linéarités et des variations parfois brutales des coefficients des équations aux dérivées partielles. Personnellement, nous avons réduit le pas spatial temporel de 20 % . Pour des raisons de commodité, nous avons choisi un sous-multiple de la période de la marée semi-diurne lunaire. On a donc

(5.5) $$\Delta t = 123{,}43 \text{ s} .$$

1.2.- Les équations du modèle hydrodynamique en coordonnées sphériques

Dans le système des coordonnées sphériques, les équations (5.1) et (5.2) deviennent :

(5.6) $$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{M^2}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{u_\lambda H}{M}\right) + \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{u_\phi H}{M}\right)\right\} = 0$$

(5.7) $$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \phi} - N\, u_\lambda\, u_\phi\right\} - 2\Omega N\, u_\phi = -\frac{M}{a}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{g\zeta + \frac{p_a}{\rho}\right\} + \frac{C_{10}}{H} W_\lambda \|W\| - \frac{D}{H} u_\lambda \|\bar{u}\|$$

(5.8) $$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\phi}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + N\, u_\lambda^2\right\} + 2\Omega N\, u_\lambda = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{g\zeta + \frac{p_a}{\rho}\right\} + \frac{C_{10}}{H} W_\phi \|W\| - \frac{D}{H} u_\phi \|\bar{u}\|$$

où $$M = \frac{1}{\cos \phi} \quad , \quad N = \sin \phi \quad , \quad C_{10} = \frac{\rho_a}{\rho}(1+m)C_d$$

λ et ϕ représentent respectivement la longitude et la latitude; u_λ

et u_ϕ sont les deux composantes de la vitesse moyenne sur la profondeur suivant les axes λ et ϕ .

Les équations (5.6), (5.7) et (5.8) sont résolues en adoptant la grille numérique définie précédemment. Pour la simulation de la marée[1], les limites géographiques du modèle sont les suivantes :

- le Pas de Calais,
- le 56ème parallèle allant des côtes danoises aux côtes suédoises,
- le parallèle passant par Fair Isle pour le modèle de marée,
- le 61ème parallèle qui longe le rebord du plateau continental pour le modèle des tempêtes.

La grille numérique couvrant la mer du Nord, le Skagerrak et le Kattegat a les dimensions (53×99) . Comme les variables u_λ , u_ϕ et ζ sont calculées en des noeuds différents (voir fig. 1), l'occupation optimale de la mémoire de l'ordinateur consisterait à prendre trois matrices de (26×49) pour représenter u_λ , u_ϕ et ζ . Pour faciliter la programmation du problème, nous préférons utiliser une matrice de (53×99) contenant aussi bien u_λ , u_ϕ et ζ : suivant la parité des indices, on obtient, soit un point u_λ , soit un point u_ϕ , soit encore un point ζ . L'occupation de la mémoire n'est évidemment pas optimale, mais comme on ne change pas de "classe" dans le système de gestion de l'ordinateur IBM 370/158 de l'université de Liège, il n'en résulte aucune dépense supplémentaire.

1.3.- Conditions aux limites

Les équations (5.6), (5.7) et (5.8) étant hyperboliques, il suffit d'avoir une seule condition aux limites, soit sur la vitesse, soit sur l'élévation. Selon la nature physique de la frontière du bassin, nous devons imposer des conditions différentes.

---

1. Pour la simulation de la tempête, nous utiliserons une autre grille numérique. Ses limites géographiques seront discutées au paragraphe 3.

a) Le long des côtes

Nous supposons un flux d'eau normal à la côte nul. Cette condition s'exprime mathématiquement par :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (5.9)$$

où n désigne le vecteur normal unitaire pointant à l'extérieur du modèle. Pour une côte méridienne, nous imposons

$$u_\lambda = 0 \qquad (5.10)$$

et, pour une côte zonale,

$$u_\phi = 0 \ . \qquad (5.11)$$

b) Le long des frontières à la mer ouverte[1]

Nous pouvons imposer, soit le niveau perturbé ζ, soit le courant moyen sur la profondeur $\overline{u}$, soit encore une relation entre ces variables. Le choix de la condition aux limites sera discuté en détail dans la suite de ce chapitre.

2.- Simulation de la marée semi-diurne lunaire

Defant (1961) a introduit le *Form Zahl* facteur qui permet de décrire la courbe marégraphique journalière. Il est défini par

$$F = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2}$$

où M_2 et S_2 représentent respectivement l'amplitude de la marée semi-diurne lunaire et solaire; O_1 est l'amplitude de la composante diurne principale lunaire et K_1 la composante diurne luni-solaire déclinationnelle. Les périodes de ces diverses marées partielles sont

1. Dans la littérature anglo-saxonne, on désigne de telles frontières par l'expression open sea boundaries.

les suivantes (*cf. Tables des constantes harmoniques de Monaco*) :

T_{M_2} = 12 h 25 min $\qquad$ T_{O_1} = 25 h 49 min

T_{S_2} = 12 h $\qquad$ T_{K_1} = 23 h 56 min .

Si on se réfère aux observations (*Tables des constantes harmoniques de Monaco*), le *Form-Zahl* facteur est partout inférieur à 0,25 [à l'exception de deux stations, Lowestoft (0,34) et Fair Isle (0,28)]. Selon la classification de Defant, la mer du Nord est caractérisée par un régime semi-diurne. A partir des observations, nous pouvons encore calculer la contribution de la marée partielle semi-diurne lunaire dans l'amplitude de la marée observée aux vives eaux ; elle est la suivante :

- dans le nord de la mer du Nord (76 ± 7 %) ,
- dans le sud de la mer du Nord (78 ± 4 %) .

Pour ces raisons, l'analyse des caractéristiques de la marée M_2 fournira des renseignements très utiles sur les phénomènes associés à la propagation de la marée totale.

2.1.- Equations du modèle de marée

Pour l'étude de la marée semi-diurne lunaire, nous annulerons les termes d'origine météorologique dans les équations (5.7) et (5.8). Dans ces conditions, le modèle de marée est régi par le système d'équations

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{M^2}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{u_\lambda H}{M}\right) + \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{u_\phi H}{M}\right)\right\} = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \phi} - N\, u_\lambda u_\phi\right\} - 2\Omega\, N\, u_\phi = -\frac{M}{a}\, g\, \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{D}{H}\, u_\lambda \|\vec{u}\| \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\phi}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + N\, u_\lambda^2\right\} + 2\Omega\, N\, u_\lambda = -\frac{g}{a}\, \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - \frac{D}{H}\, u_\phi \|\vec{u}\| \; . \tag{5.13}$$

2.2.- Conditions aux limites

a) Le long des côtes

Les conditions aux limites sont pour :

- une côte méridienne

(5.10) $u_\lambda = 0$

- une côte zonale

(5.11) $u_\phi = 0$.

b) Le long des frontières à la mer ouverte

Nous devons imposer soit l'élévation, soit la vitesse, soit encore une relation entre ces deux grandeurs. Ces informations sont données par l'observation ou par les résultats de simulations numériques provenant d'un autre modèle, caractérisé par une grille à plus larges mailles. Pour la détermination des marées dans le Southern Bight, les conditions aux limites du modèle à petites mailles (voir section 5 du chapitre VI) sont données par les résultats de simulation d'un modèle mathématique couvrant l'ensemble de la mer du Nord.

La frontière sud : le Pas de Calais

L'intense trafic maritime dans le Pas de Calais rend le mouillage de courantomètres difficile et l'expérience nous apprend que la probabilité de récupérer les enregistrements et les courantomètres est très faible. On pourrait songer à mettre le courantomètre près du banc de sable Varne, malheureusement les mesures faites à cet endroit ne sont pas significatives étant donné la grande sensibilité des courants vis-à-vis des variations de profondeur. Pour ces raisons, nous ne choisirons pas la vitesse moyenne sur la profondeur comme condition limite.

L'élévation périodique de la surface libre est mesurée avec précision le long des côtes de la Manche. L'amplitude et la phase de la marée partielle semi-diurne lunaire à Douvres et Calais sont données dans les *Tables de constantes harmoniques*. Comme l'observation

[Van Cauwenberghe (1973)] montre que les lignes cotidales et d'égale amplitude de la marée verticale sont peu sensibles aux variations de la profondeur dans cette région; la variation de l'élévation de la surface libre entre les deux stations côtières sera régulière. Nous utilisons l'élévation comme condition limite; une interpolation linéaire entre les valeurs côtières donnera l'élévation le long de cette frontière.

La frontière nord : l'ouverture atlantique

La bathymétrie le long du 60ème parallèle est caractérisée par un large plateau avec une profondeur de 180 m et par un canal profond (400 m) près de la côte norvégienne. Le long de cette frontière, l'amplitude et la phase de la marée partielle M_2 ne sont connues que pour deux stations côtières : Fair Isle et Bergen {le *Liverpool Tidal Institute* [Cartwright (1976)] teste des marégraphes pélagiques le long du rebord du plateau continental mais les résultats ne sont pas encore disponibles}.

Taylor (1922) et Godin (1966) ont étudié la propagation d'ondes de marée dans des baies rectangulaires, de profondeur constante et soumises à la rotation de la terre. Leurs études ont permis de montrer que les marées ont les mêmes caractéristiques de propagation que les ondes de Kelvin loin de la zone de réflexion.

Nous ferons l'hypothèse selon laquelle le comportement de la marée est semblable à celui des ondes de Kelvin dans la partie nord de la mer du Nord.

Calcul de la phase

Le bassin de la mer du Nord est assimilé à une grande baie rectangulaire et la direction de la propagation de l'onde de marée supposée parallèle à la côte anglaise. Le modèle théorique de Taylor montre que la variation de la phase est de l'ordre de 40° le long d'une ligne perpendiculaire à la côte de la Grande Bretagne passant approximativement par Fair Isle. Nous supposerons, dans notre travail, une variation linéaire

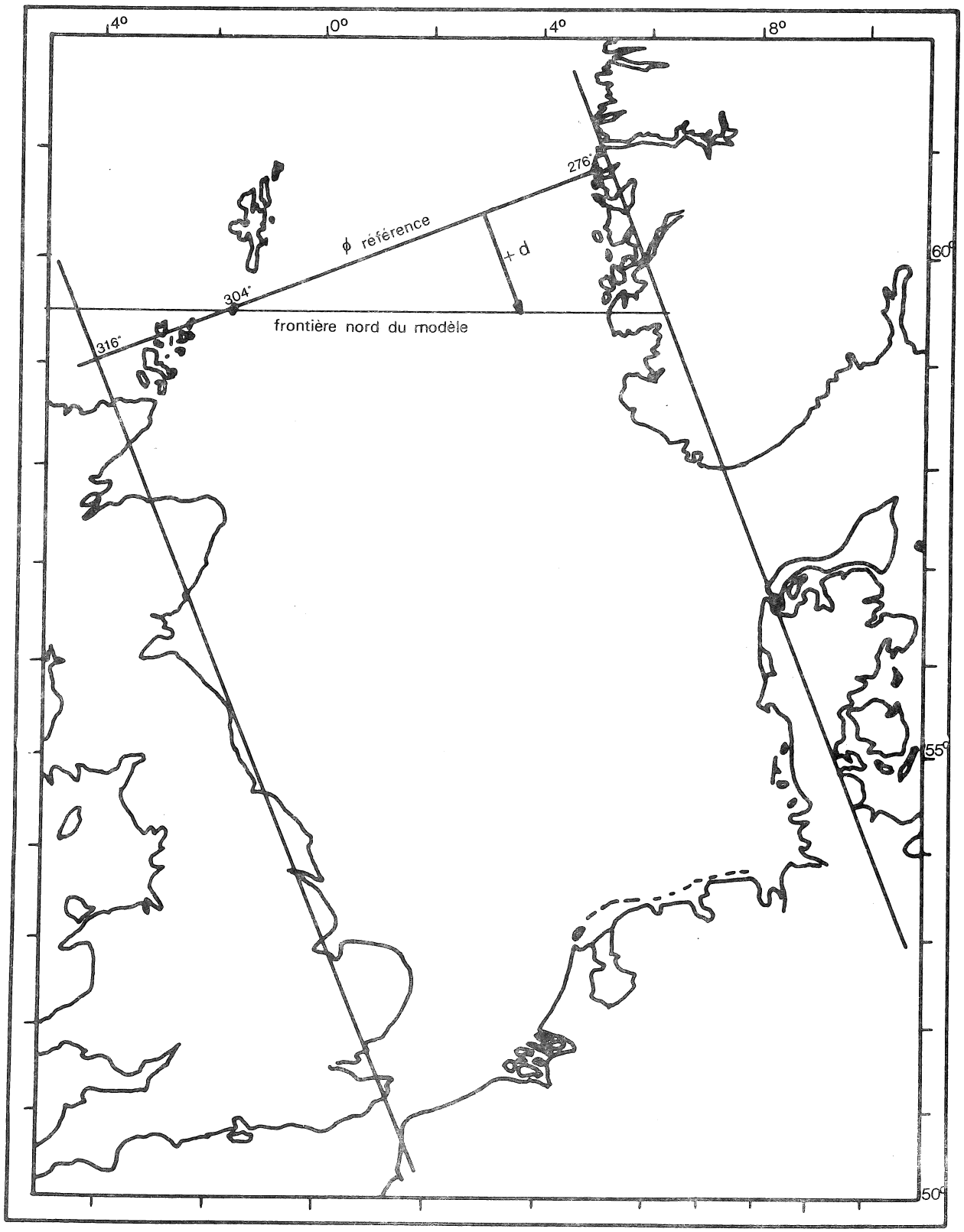


fig. 3.
Détermination de la phase de la marée à l'ouverture de la mer du Nord.

de la phase de la marée le long de cette ligne (fig. 3). Pour calculer la phase le long de la frontière de notre modèle, nous utiliserons la relation suivante (fig. 4) :

$$\varphi(\ell) = \varphi_{réf}(\ell) \pm \frac{d}{\sqrt{gh}} \frac{360}{T} \quad \text{(en degrés)} \tag{5.14}$$

où T est la période de la marée considérée; dans notre cas, $T = T_{M_2}$; d est la distance entre la frontière libre et la ligne de référence perpendiculaire à la côte, $+ d$ si la ligne caractérisant la frontière nord est en dessous de la ligne de référence, $- d$ si la ligne caractérisant la frontière nord est au-dessus de la ligne de référence; $\varphi_{réf}(\ell)$ représente la phase de la marée le long de la ligne de référence.

La relation (5.14) donne la distribution de la phase de la marée depuis les Iles Orkney jusqu'à la cassure du plateau continental. Soit $\varphi_{C.N.}$ la phase calculée par (5.14) à la limite ouest du canal norvégien. La phase à la côte est estimée en utilisant une relation linéaire entre les phases de la marée aux stations Bergen et Stavanger. Une interpolation linéaire entre $\varphi_{C.N.}$ et $\varphi_{côte}$ donne la distribution de la phase à travers le canal norvégien.

Calcul de l'amplitude

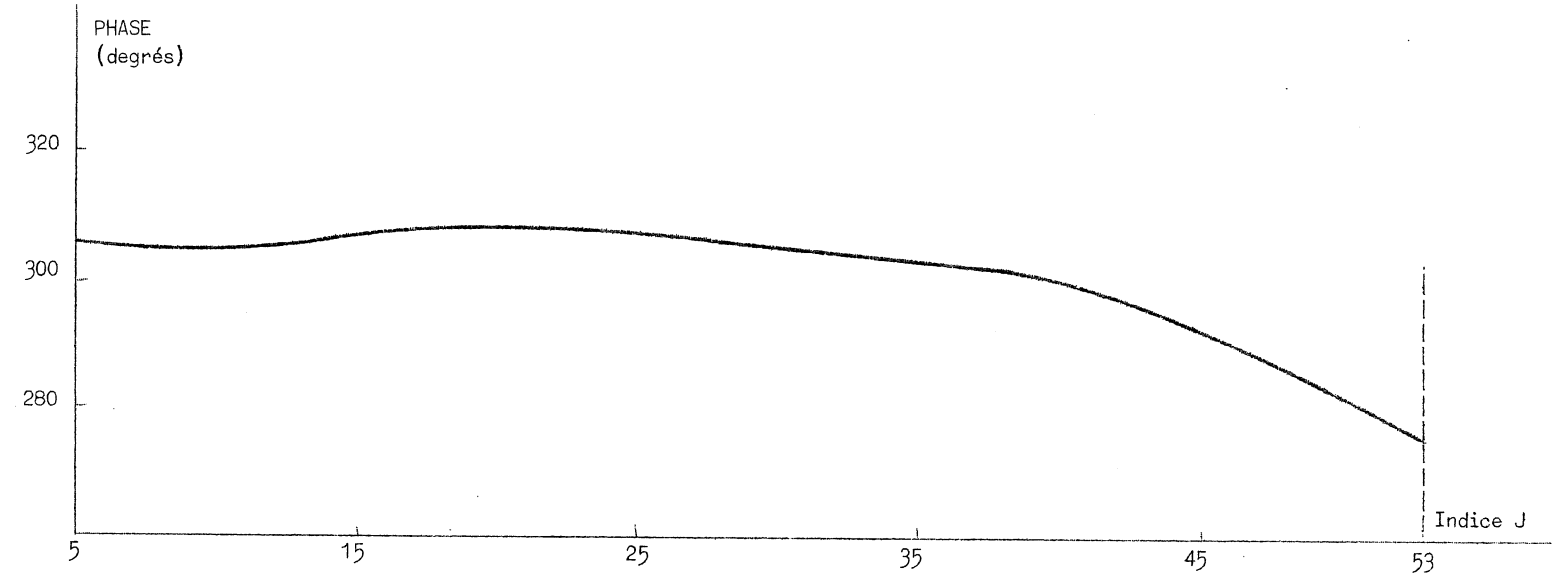
Comme la marée a le caractère d'une onde de Kelvin, on doit avoir une variation du type exponentiel pour l'amplitude au voisinage des côtes. Le minimum de l'amplitude se situerait sur la ligne médiane de la baie si la profondeur était constante.

La variation de l'amplitude d'une onde de Kelvin est donnée par

$$\exp\left(-\frac{fy}{\sqrt{gh}}\right)$$

où y est la distance du point considéré à la côte.

Sur le plateau continental, près du 60ème parallèle, la profondeur moyenne est de l'ordre de 180 m tandis que dans le canal norvégien, elle est voisine de 400 m . Les observations (*cf. Tables des*



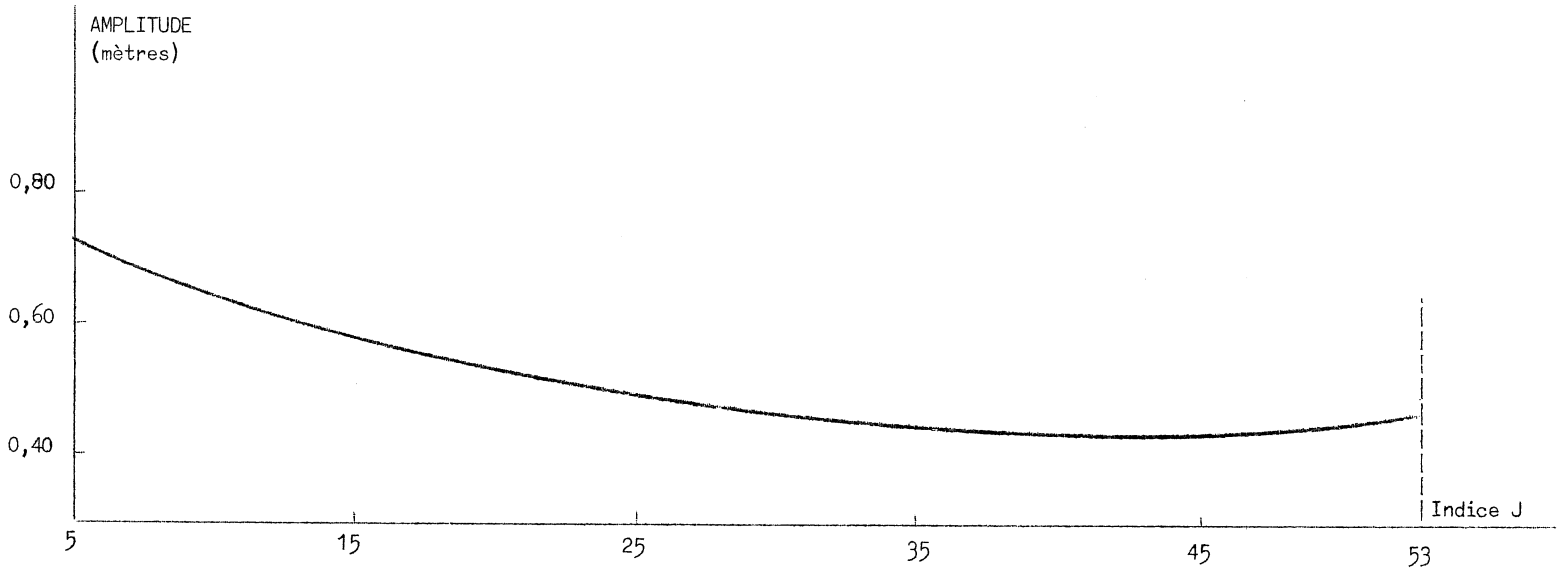


fig. 4.
Distribution de l'amplitude et de la phase de la marée le long de la frontière nord de la mer du Nord

constantes harmoniques) donnent l'amplitude de la marée semi-diurne lunaire :

- à Fair Isle : $A = 0{,}63$ m
- à la côte norvégienne : $A = 0{,}44$ m .

La variation de l'amplitude le long de la frontière ouverte nord est donnée par

$$A(\ell) = A_1 \exp(-\frac{f\ell}{\sqrt{gh}}) + A_2 \exp(-\frac{f(L-\ell)}{\sqrt{gh}}) \tag{5.15}$$

où L représente la longueur de la frontière nord du modèle et ℓ la coordonnée du point sur cette frontière. La détermination des constantes A_1 et A_2 est immédiate lorsqu'on donne deux valeurs de A :

- à Fair Isle : $y = \frac{17}{92}\ell$; $A = 0{,}63$ m
- à la côte norvégienne : $y = \ell$; $A = 0{,}44$ m .

En portant ces valeurs dans (5.15), nous obtenons :

$$A_1 = 0{,}66 \text{ m} \qquad \text{et} \qquad A_2 = 0{,}34 \text{ m} .$$

Le profil transversal de l'amplitude (fig. 4) sera donc donné par

$$A(\ell) = 0{,}66 \exp(-\frac{f\ell}{\sqrt{gh}}) + 0{,}34 \exp(-\frac{f(L-\ell)}{\sqrt{gh}}) . \tag{5.16}$$

2.3.- Conditions initiales

En vertu des propriétés des équations aux dérivées partielles hyperboliques, nous pouvons supposer que le régime oscillatoire établi est indépendant des conditions initiales. Les conditions initiales les plus simples sont données par :

$$\zeta = 0 \qquad \text{et} \qquad u_\lambda \text{ et } u_\phi = 0 .$$

Nous supposerons donc les deux composantes de la vitesse moyenne sur la profondeur et l'élévation de la surface nulles à tous les noeuds de la grille numérique à l'instant initial.

2.4.- Discussion des résultats

Avant d'analyser les résultats de la simulation numérique de la marée semi-diurne lunaire, il convient de déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un système en régime. Les figures 5 et 6 montrent l'influence du nombre d'itérations sur l'élévation de la surface libre en deux points choisis l'un près (fig. 5), l'autre éloigné (fig. 6) des forces excitatrices. On remarque sur ces diagrammes que le système est en régime après trois périodes de marée — c'est-à-dire 1080 itérations — même pour des points situés loin des frontières ouvertes et dans des régions peu profondes. Pour l'étude de la marée semi-diurne lunaire, nous pouvons donc limiter le nombre d'itérations à 1440 (ou 1800 pour plus de sécurité).

2.4.1.- Calcul de l'énergie cinétique et potentielle

Pour vérifier la stabilité de l'algorithme numérique de résolution, il convient d'étudier l'évolution temporelle de l'énergie totale de l'eau contenue dans la mer du Nord.

On définit l'énergie potentielle par

$$E_{pot} = \frac{\rho}{2} \iint_S g\zeta^2 \, d\Omega \quad , \tag{5.17}$$

l'énergie cinétique par

$$E_{cin} = \frac{\rho}{2} \iint_S (u_\lambda^2 + u_\phi^2) \, d\Omega \tag{5.18}$$

et l'énergie totale par

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} \quad . \tag{5.19}$$

L'énergie totale et l'énergie potentielle (fig. 7) oscillent avec une période de 6 h 12 min .

L'élévation de la surface libre est donnée par :

$$\zeta_{I,J} = A_{I,J} + B_{I,J} \cos \sigma t \tag{5.20}$$

où $A_{I,J}$ est l'élévation résiduelle et $B_{I,J}$, l'amplitude du mouvement

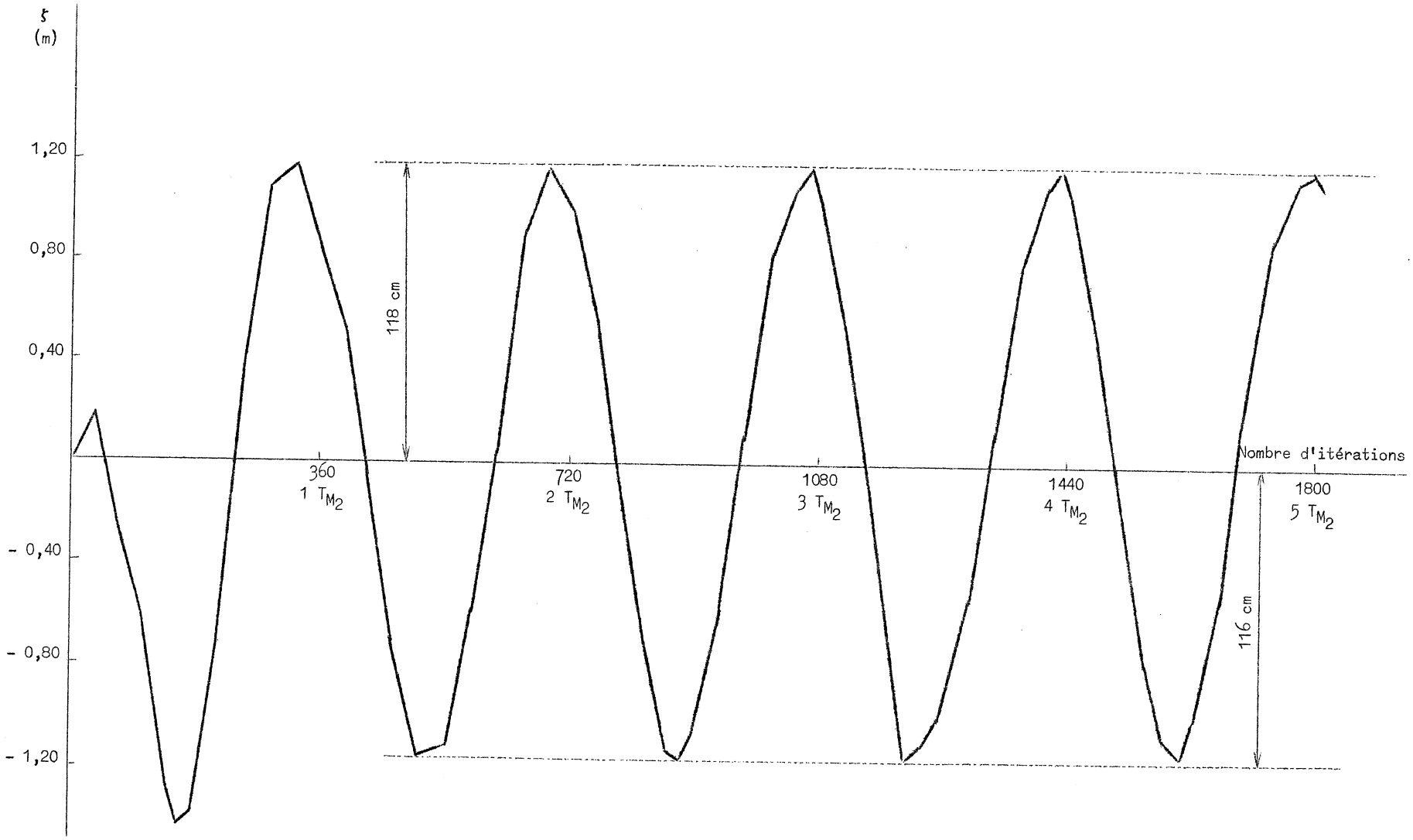


fig. 5.
Elévation de la surface en un point situé près d'une frontière ouverte

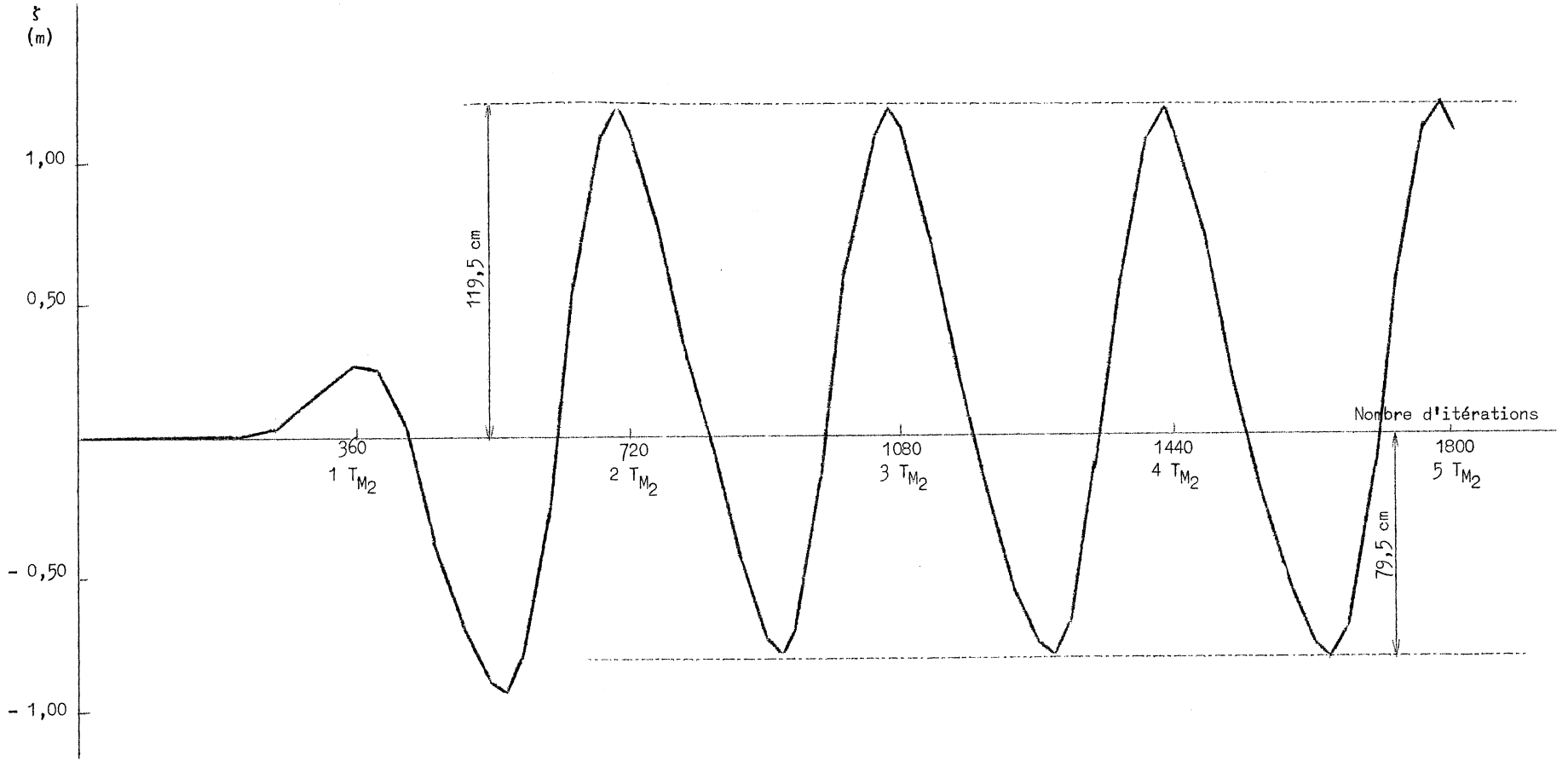


fig. 6.

Elévation de la surface en un point situé loin d'une frontière ouverte

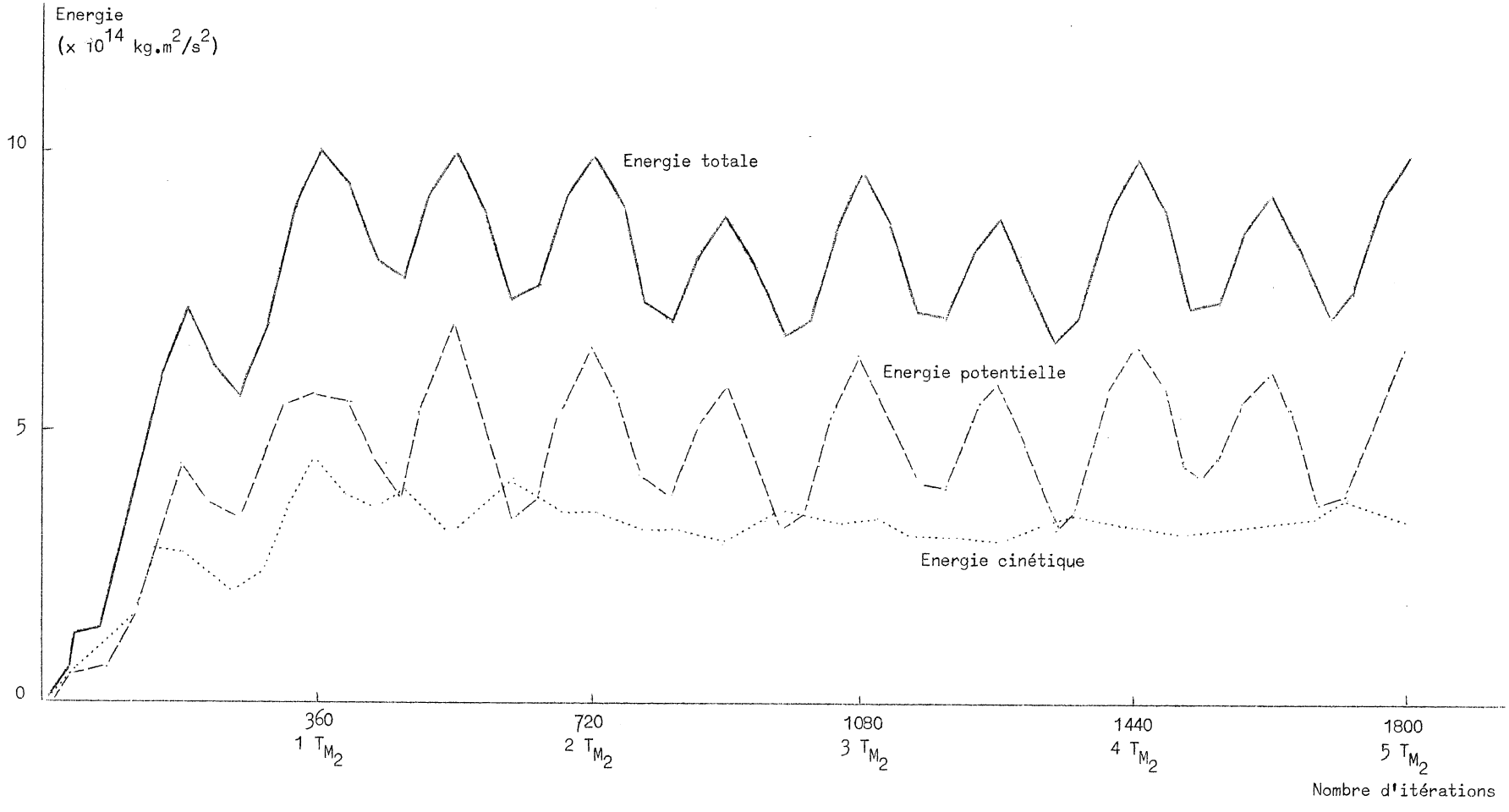


fig. 7.

Variations temporelles de l'énergie potentielle, cinétique et totale de l'eau contenue dans le bassin de la mer du Nord

oscillant au point I,J . σ représente la fréquence de la marée. En vertu de (5.17), l'énergie potentielle est proportionnelle à

$$\zeta^2_{I,J} = A^2_{I,J} + \frac{B^2_{I,J}}{2} + 2\, A_{I,J}\, B_{I,J} \cos \sigma t + \frac{B^2_{I,J}}{2} \cos 2\sigma t \quad . \tag{5.21}$$

L'observation et le calcul montrent que la partie résiduelle de l'élévation ζ est beaucoup plus petite que la partie oscillante. Pour cette raison, le relation (5.21) se simplifie de la manière suivante :

$$\zeta^2 \sim \frac{1}{2} B^2_{I,J} + \frac{1}{2} B^2_{I,J} \cos 2\sigma t \tag{5.22}$$

car $A_{I,J} \ll B_{I,J}$.

Les fortes oscillations dans l'énergie potentielle (fig. 7) s'expliquent aisément à partir de la relation (5.22).

La théorie des marées, à une dimension, dans un bassin non tournant et sans friction montre qu'il y a équipartition de l'énergie entre la partie potentielle et la partie cinétique. Dans un modèle bidimensionnel de marée, les courants n'oscillent plus mais effectuent une rotation de 360 degrés sur un intervalle de temps correspondant à la période de la marée. Les deux composantes du courant peuvent se mettre sous la forme :

$$u_\lambda = E + D \cos \sigma t \tag{5.23}$$

$$u_\phi = F + G \sin \sigma t \quad . \tag{5.24}$$

L'énergie cinétique est proportionnelle à

$$E_{cin} \div E^2 + F^2 + \frac{D^2}{2} + \frac{G^2}{2} + ED \cos \sigma t + FG \sin \sigma t + (\frac{D^2}{2} - \frac{G^2}{2}) \cos 2\sigma t \tag{5.25}$$

L'observation et le calcul montrent que le courant permanent est beaucoup plus petit que le courant périodique et que G et D sont du même ordre de grandeur loin des côtes. La relation (5.25) devient donc

(5.26) $$E_{cin} \div C_1 + C_2 \sin(\sigma t + \varepsilon) + C_3 \cos 2\sigma t$$

avec $C_1 \gg C_2$ et $C_1 \gg C_3$.

En vertu de (5.26), la variation temporelle de l'énergie cinétique sera relativement faible. Le calcul exact (fig. 7) avalise notre raisonnement.

La figure 7 nous montre également que l'algorithme numérique est stable et que le système est en régime après la troisième période de marée.

2.4.2.- Comparaisons des résultats de la simulation numérique aux observations

Pour tester la qualité du modèle mathématique, nous comparons les résultats de la simulation numérique, c'est-à-dire les élévations de la surface et les courants aux observations.

1) Comparaison entre les élévations calculées et observées

Dans toute cette discussion, nous nous basons sur les informations fournies par le *Bureau Hydrographique International de Monaco* : il s'agit des constantes harmoniques de marée. Le calcul de l'amplitude et de la phase de la marée aux stations côtières demande quelques explications complémentaires.

Le modèle hydrodynamique établi dans notre travail est basé sur un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'élévation calculée contient donc la composante semi-diurne lunaire, ses harmoniques (M_4 , M_6 , M_8) et une composante continue. Pour comparer les marées M_2 calculées et observées, il faut d'abord procéder à une analyse harmonique de l'élévation donnée par le modèle.

Lorsque la station marégraphique ne se situe pas en un noeud du réseau maillé, on utilise une interpolation linéaire, à défaut de mieux, pour calculer l'amplitude de la marée M_2 . Lorsqu'un port se situe au fond d'un chenal (ou d'une baie) comme Bergen et Emden, nous supposons l'amplitude au fond du chenal égale à celle que l'on obtiendrait à la côte en l'absence de tout chenal. Si on désire plus

oscillant au point I,J . σ représente la fréquence de la marée. En vertu de (5.17), l'énergie potentielle est proportionnelle à

$$\zeta^2_{I,J} = A^2_{I,J} + \frac{B^2_{I,J}}{2} + 2\, A_{I,J}\, B_{I,J} \cos \sigma t + \frac{B^2_{I,J}}{2} \cos 2\sigma t \quad . \tag{5.21}$$

L'observation et le calcul montrent que la partie résiduelle de l'élévation ζ est beaucoup plus petite que la partie oscillante. Pour cette raison, le relation (5.21) se simplifie de la manière suivante :

$$\zeta^2 \sim \frac{1}{2} B^2_{I,J} + \frac{1}{2} B^2_{I,J} \cos 2\sigma t \tag{5.22}$$

car $A_{I,J} \ll B_{I,J}$.

Les fortes oscillations dans l'énergie potentielle (fig. 7) s'expliquent aisément à partir de la relation (5.22).

La théorie des marées, à une dimension, dans un bassin non tournant et sans friction montre qu'il y a équipartition de l'énergie entre la partie potentielle et la partie cinétique. Dans un modèle bidimensionnel de marée, les courants n'oscillent plus mais effectuent une rotation de 360 degrés sur un intervalle de temps correspondant à la période de la marée. Les deux composantes du courant peuvent se mettre sous la forme :

$$u_\lambda = E + D \cos \sigma t \tag{5.23}$$

$$u_\phi = F + G \sin \sigma t \quad . \tag{5.24}$$

L'énergie cinétique est proportionnelle à

$$E_{cin} \div E^2 + F^2 + \frac{D^2}{2} + \frac{G^2}{2} + ED \cos \sigma t + FG \sin \sigma t + (\frac{D^2}{2} - \frac{G^2}{2}) \cos 2\sigma t \tag{5.25}$$

L'observation et le calcul montrent que le courant permanent est beaucoup plus petit que le courant périodique et que G et D sont du même ordre de grandeur loin des côtes. La relation (5.25) devient donc

(5.26) $$E_{cin} \div C_1 + C_2 \sin(\sigma t + \varepsilon) + C_3 \cos 2\sigma t$$

avec $C_1 \gg C_2$ et $C_1 \gg C_3$.

En vertu de (5.26), la variation temporelle de l'énergie cinétique sera relativement faible. Le calcul exact (fig. 7) avalise notre raisonnement.

La figure 7 nous montre également que l'algorithme numérique est stable et que le système est en régime après la troisième période de marée.

2.4.2.- Comparaisons des résultats de la simulation numérique aux observations

Pour tester la qualité du modèle mathématique, nous comparons les résultats de la simulation numérique, c'est-à-dire les élévations de la surface et les courants aux observations.

1) Comparaison entre les élévations calculées et observées

Dans toute cette discussion, nous nous basons sur les informations fournies par le *Bureau Hydrographique International de Monaco* : il s'agit des constantes harmoniques de marée. Le calcul de l'amplitude et de la phase de la marée aux stations côtières demande quelques explications complémentaires.

Le modèle hydrodynamique établi dans notre travail est basé sur un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'élévation calculée contient donc la composante semi-diurne lunaire, ses harmoniques (M_4 , M_6 , M_8) et une composante continue. Pour comparer les marées M_2 calculées et observées, il faut d'abord procéder à une analyse harmonique de l'élévation donnée par le modèle.

Lorsque la station marégraphique ne se situe pas en un noeud du réseau maillé, on utilise une interpolation linéaire, à défaut de mieux, pour calculer l'amplitude de la marée M_2 . Lorsqu'un port se situe au fond d'un chenal (ou d'une baie) comme Bergen et Emden, nous supposons l'amplitude au fond du chenal égale à celle que l'on obtiendrait à la côte en l'absence de tout chenal. Si on désire plus

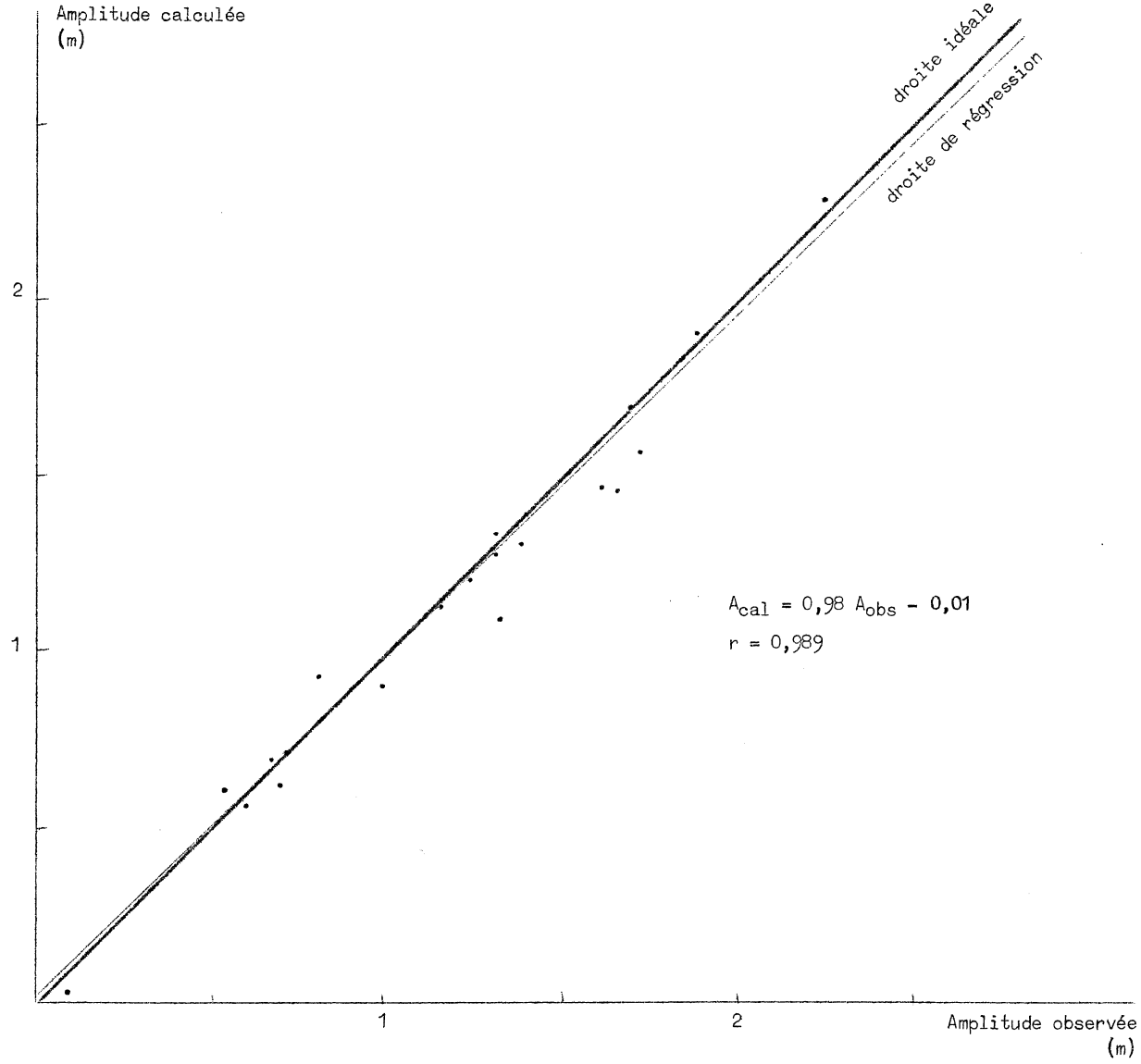


fig. 8a.
Comparaison des amplitudes calculées et observées

de précision concernant la marée dans le chenal ou estuaire, il faut non seulement tenir compte de la géométrie du bassin mais aussi de la stratification de la colonne d'eau.

Pour la phase, nous avons agi différemment. L'interpolation linéaire est toujours d'application pour les stations marégraphiques situées le long des côtes; pour celles situées au fond d'estuaires ou

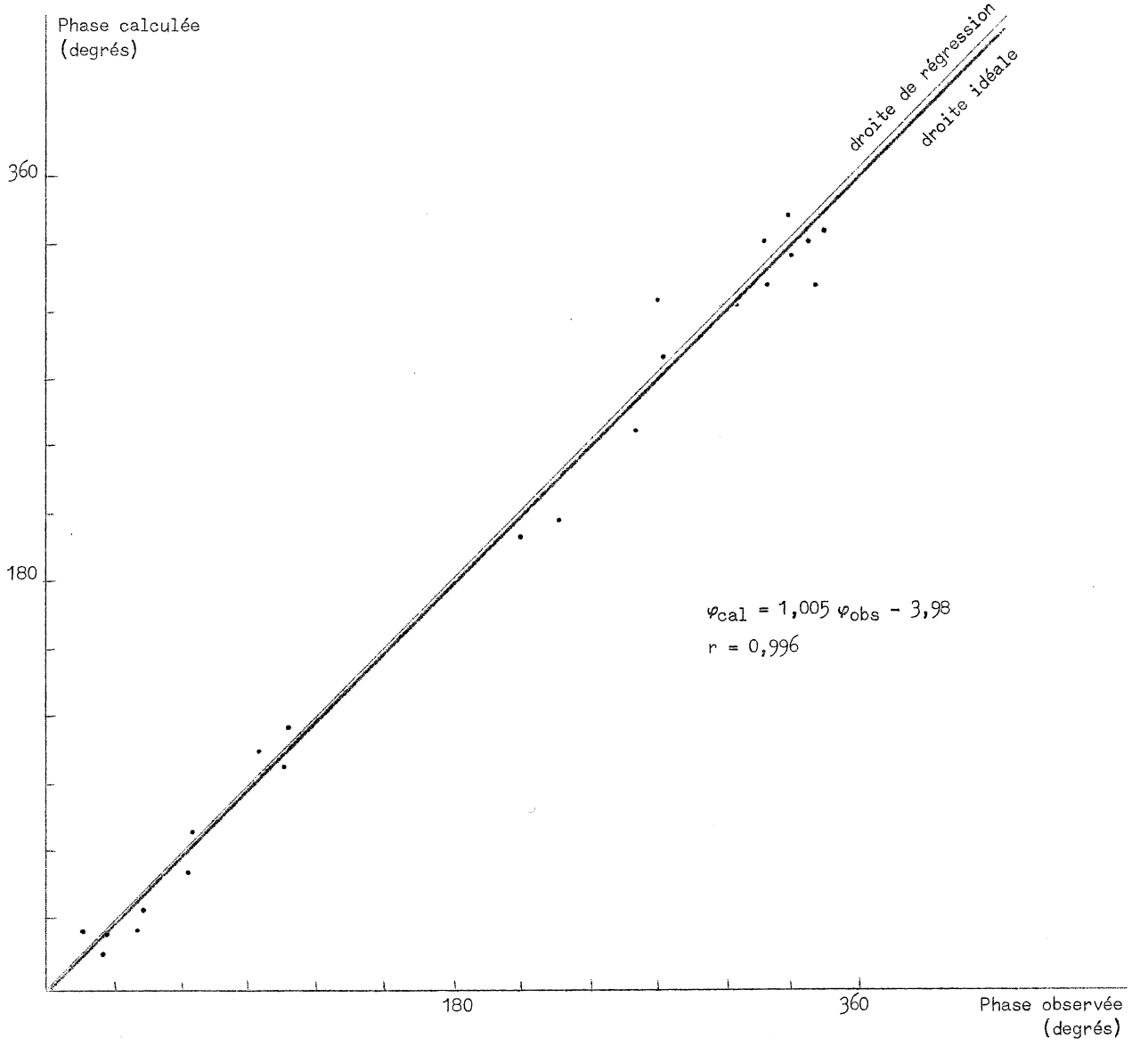


fig. 8b.
Comparaison des phases calculées et observées

chenaux, nous estimons le retard de phase en supposant que l'onde de marée progresse à la vitesse $0,8\ \sqrt{gh}$. La vitesse de propagation est plus petite que la vitesse de phase pour tenir compte de la friction sur le fond.

Les corrélations entre les résultats observés et calculés, tant pour l'amplitude que pour la phase de l'élévation, sont données à la

Tableau 1

Comparaison des phases et des amplitudes calculées et observées

Localité	Latitude	Longitude	Amplitude A (m)		Phase X_{GR} (degrés)	
			observée	calculée	observée	calculée
Nieuport	51°09' N	2°44' E	1,88	1,91	0	0
Zeebrugge	51°21' N	3°12' E	1,69	1,70	15	25
Vlissingen	51°27' N	3°24' E	1,72	1,57	41	34
Hoek van Holland	51°59' N	4°07' E	0,80	0,93	64	68
Ijmuiden	52°28' N	4°35' E	0,68	0,70	106	115
Den Helder	52°58' N	4°45' E	0,53	0,61	159	160
Vlieland	53°18' N	5°03' E	0,69	0,63	226	209
Emden	53°21' N	7°12' E	1,31	1,10	339	312
Cuxhaven	53°52' N	8°43' E	1,23	1,21	341	335
Helgoland	54°11' N	7°53' E	0,99	0,91	316	333
Esljerg	55°29' N	8°27' E	0,60	0,56	39	23
Mandal	58°00' N	7°34' E	0,08	0,03	94	107
Stavanger	58°59' N	5°44' E	0,15	0,18	271	280
Fair Isle	59°33' N	1°38' O	0,63	0,63	304	304
Wick	58°26' N	3°05' O	1,11	1,09	320	314
Invergordon	57°41' N	4°10' O	1,38	1,32	336	330
Aberdeen	57°09' N	2°05' O	1,31	1,34	25	14
Berwick	55°46' N	2°00' O	1,61	1,47	61	51
Whitby	54°29' N	0°37' O	1,65	1,48	103	98
Lowestoft	52°29' N	1°46' E	0,70	0,71	259	248
Harwich	51°57' N	1°17' E	1,30	1,28	326	344
Dover	51°07' N	1°19' E	2,23	2,29	330	325

figure 8 et au tableau 1. La plupart des points se situent très près de la droite idéale à 45° . Certains points s'en éloignent quelque peu : ils correspondent à des stations localisées, soit le long de la côte anglaise, soit au fond de chenaux (Emden). Si on désire connaître avec précision les marées pour des ports situés au fond d'estuaires ou de chenaux, il faut développer un modèle local caractérisé par une grille à fines mailles. Le long des côtes anglaises et écossaises, la topographie du fond est très irrégulière : on a un seuil profond de

50 brasses situé à quelques kilomètres du seuil de 20 brasses. Dans ces régions, les écarts entre les amplitudes calculées et observées peuvent s'expliquer par le manque de résolution de la grille numérique. En général, l'accord entre l'observation et les résultats de la simulation numérique est très satisfaisant.

2) Les lignes d'égale phase et d'égale amplitude

Depuis de nombreuses années, les hydrodynamiciens et les ingénieurs hydrographes sont intéressés par la distribution spatiale de la phase et de l'amplitude des principales marées partielles. Les premières cartes établies par les hydrographes [*e.g.* Proudman et Doodson (1924)] ne donnaient que deux points amphidromiques, l'un situé dans le German Bight, l'autre dans la partie sud de la mer du Nord entre les côtes de l'East Anglia et des Pays-Bas. En se basant sur un modèle hydrodynamique simple et sur les observations, Proudman et Doodson (1924) ont déterminé les lignes d'égale phase et d'égale amplitude pour la marée semi-diurne lunaire et mis en évidence un troisième point amphidromique au sud-ouest de la côte norvégienne (fig. 9). La position exacte de ce point est encore mal connue en raison de la variation très rapide des lignes d'égale phase dans cette région et du choix subjectif de la loi d'interpolation adoptée.

Les résultats de la simulation numérique sont soumis à une analyse harmonique pour en extraire la composante semi-diurne lunaire. La figure 10 donne les lignes d'égale amplitude et d'égale phase calculées avec le modèle mathématique : les phases sont exprimées en degrés (30° représentent une heure lunaire) et les amplitudes en centimètres.

La comparaison des figures 9 et 10 permet de vérifier l'accord plus que satisfaisant entre les lignes cotidales et d'égale amplitude calculées par le modèle et celles déduites de l'observation. Le déplacement vers le sud-est du point amphidromique localisé près de la côte norvégienne résulte d'erreurs expérimentales : difficulté de déduire des observations le point amphidromique le long de la côte norvégienne, discrétisation trop grossière des côtes et du fond. Au voisinage du

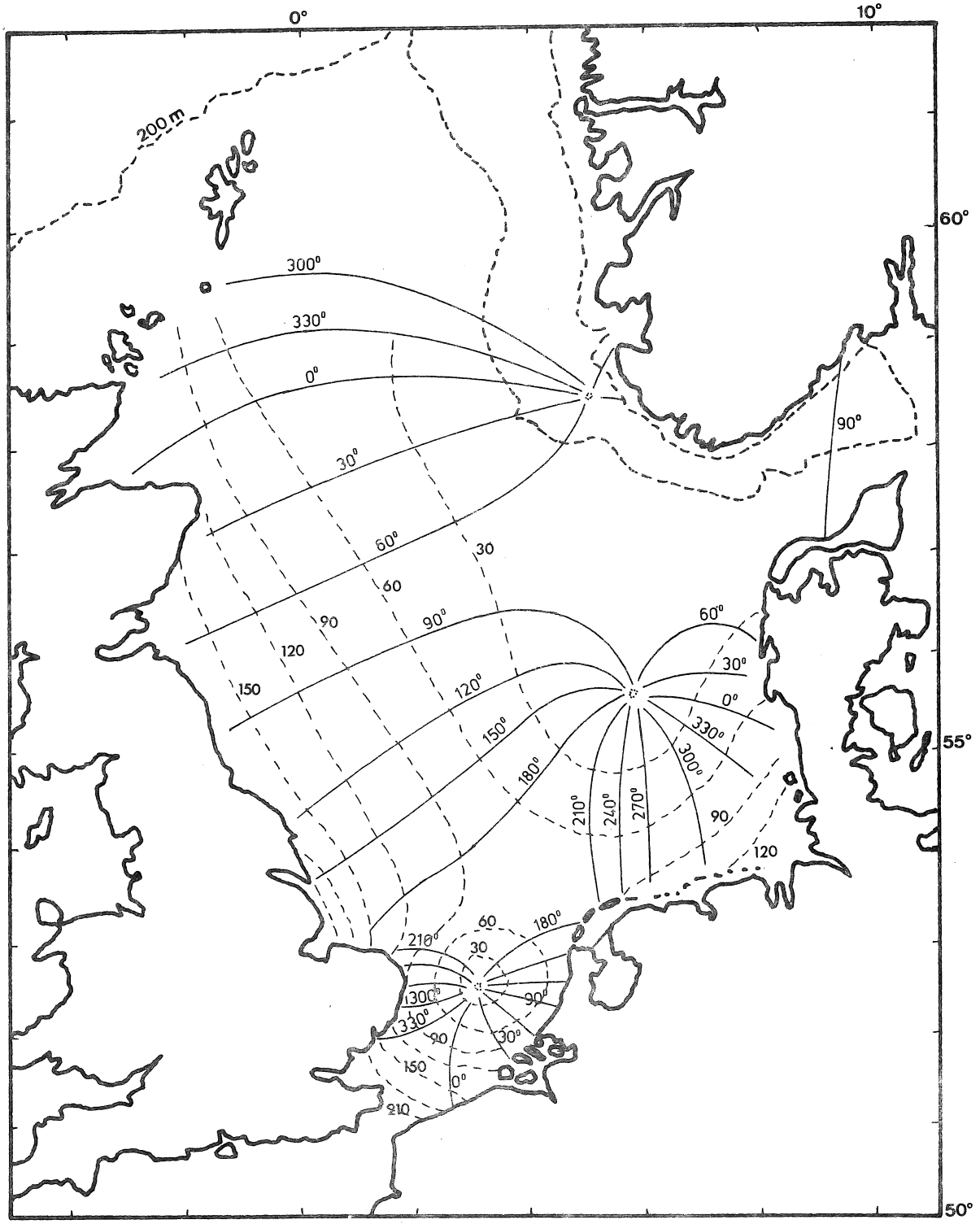


fig. 9.

Lignes d'égale phase et d'égale amplitude observées [figure tirée de Proudman et Doodson (1924)]. Les amplitudes sont exprimées en centimètres et les phases en degrés.

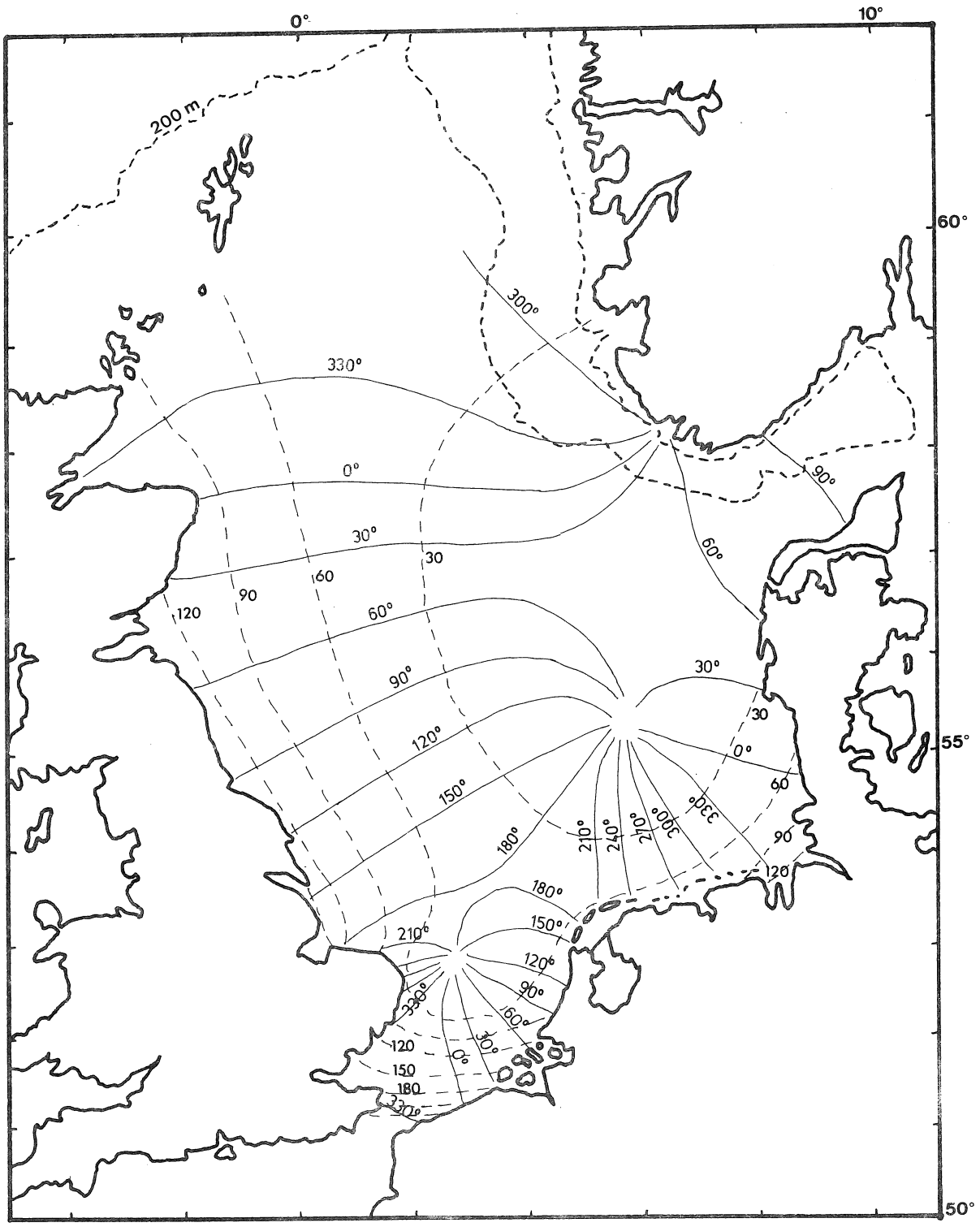


fig. 10.

Lignes d'égale phase et d'égale amplitude calculées par le modèle.
Les amplitudes sont exprimées en centimètres et les phases en degrés.

Danemark et de la côte sud de la Norvège, il est difficile d'estimer le passage de l'isocourbe de phase $\varphi = 60°$ car cette région est caractérisée par des phases variant entre 55 et 65 degrés : on a donc fait passer l'isocourbe $\varphi = 60°$ au mieux. La concentration des lignes cotidales le long de la côte de l'East Anglia (fig. 9) rend difficile et imprécis le calcul de la phase de la marée à cet endroit. Pour une étude détaillée de la marée le long de cette côte, il est indispensable d'utiliser un autre modèle hydrodynamique basé sur les mêmes équations mais caractérisé par une grille numérique à mailles très fines (chapitre VI, section 5).

2.4.3.- Les courants de marée

Les mesures courantométriques sont peu nombreuses car elles nécessitent une infrastructure très lourde : courantomètres enregistreurs, bouées de surface et sub-surface (fig. 1) et la mobilisation d'un bateau et de son équipage. La durée des enregistrements est limitée par la capacité des batteries et l'analyse des données réduite à la détermination des principales harmoniques. La précision des mesures est fonction de l'appareil et du mouillage utilisé. Dans les meilleures conditions, nous pouvons estimer l'erreur de mesure à 10 % . Lorsque l'intensité du courant est de l'ordre de 5×10^{-2} à 10^{-1} m/s , l'erreur de mesure est beaucoup plus importante en raison du seuil de réponse des marégraphes et des oscillations de la ligne de mouillage. Les données courantométriques que nous possédons proviennent de l'*Atlas des courants* de l'*Institut hydrographique de Hambourg* (fig. 11) et des cartes de l'Amirauté britannique. Ces informations n'étant pas très récentes, nous pouvons estimer les erreurs de mesure à 20 % pour des courants caractérisés par une amplitude supérieure à 30 cm/s . Lorsque la vitesse du courant est plus faible, l'intervalle d'erreur doit encore augmenter.

Les figures 12 à 15 donnent respectivement les courants à $t_{Greenwich} = 0$; $t_G = \frac{T}{4}$; $t_G = \frac{T}{2}$ et $t_G = \frac{3T}{4}$. On remarque immédiatement une intensité élevée des courants dans la partie sud de la mer du Nord

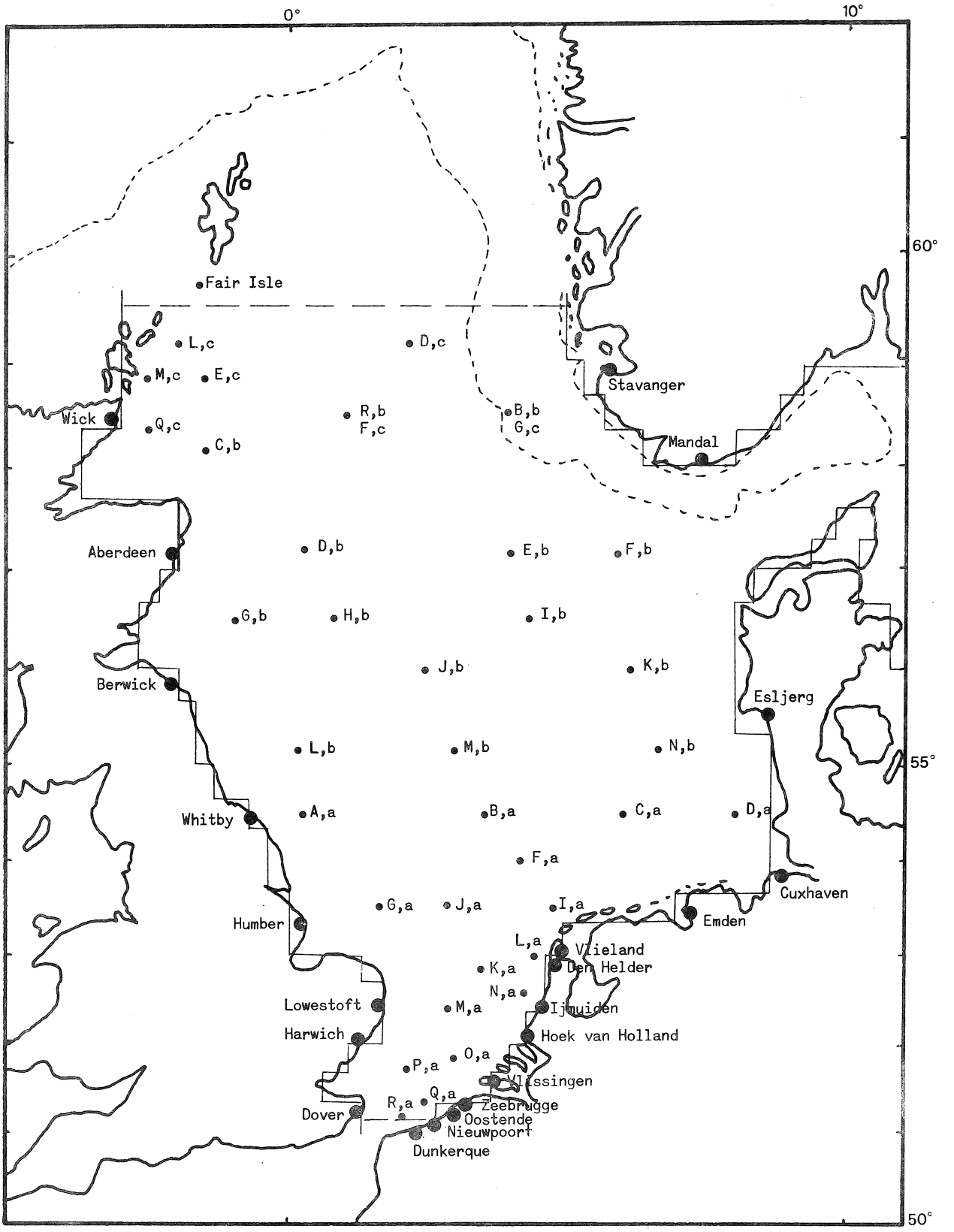


fig. 11.

Stations d'observation et de marée

Danemark et de la côte sud de la Norvège, il est difficile d'estimer le passage de l'isocourbe de phase $\varphi = 60°$ car cette région est caractérisée par des phases variant entre 55 et 65 degrés : on a donc fait passer l'isocourbe $\varphi = 60°$ au mieux. La concentration des lignes cotidales le long de la côte de l'East Anglia (fig. 9) rend difficile et imprécis le calcul de la phase de la marée à cet endroit. Pour une étude détaillée de la marée le long de cette côte, il est indispensable d'utiliser un autre modèle hydrodynamique basé sur les mêmes équations mais caractérisé par une grille numérique à mailles très fines (chapitre VI, section 5).

2.4.3.- Les courants de marée

Les mesures courantométriques sont peu nombreuses car elles nécessitent une infrastructure très lourde : courantomètres enregistreurs, bouées de surface et sub-surface (fig. 1) et la mobilisation d'un bateau et de son équipage. La durée des enregistrements est limitée par la capacité des batteries et l'analyse des données réduite à la détermination des principales harmoniques. La précision des mesures est fonction de l'appareil et du mouillage utilisé. Dans les meilleures conditions, nous pouvons estimer l'erreur de mesure à 10 % . Lorsque l'intensité du courant est de l'ordre de 5×10^{-2} à 10^{-1} m/s , l'erreur de mesure est beaucoup plus importante en raison du seuil de réponse des marégraphes et des oscillations de la ligne de mouillage. Les données courantométriques que nous possédons proviennent de l'*Atlas des courants* de l'*Institut hydrographique de Hambourg* (fig. 11) et des cartes de l'Amirauté britannique. Ces informations n'étant pas très récentes, nous pouvons estimer les erreurs de mesure à 20 % pour des courants caractérisés par une amplitude supérieure à 30 cm/s . Lorsque la vitesse du courant est plus faible, l'intervalle d'erreur doit encore augmenter.

Les figures 12 à 15 donnent respectivement les courants à $t_{Greenwich} = 0$; $t_G = \frac{T}{4}$; $t_G = \frac{T}{2}$ et $t_G = \frac{3T}{4}$. On remarque immédiatement une intensité élevée des courants dans la partie sud de la mer du Nord

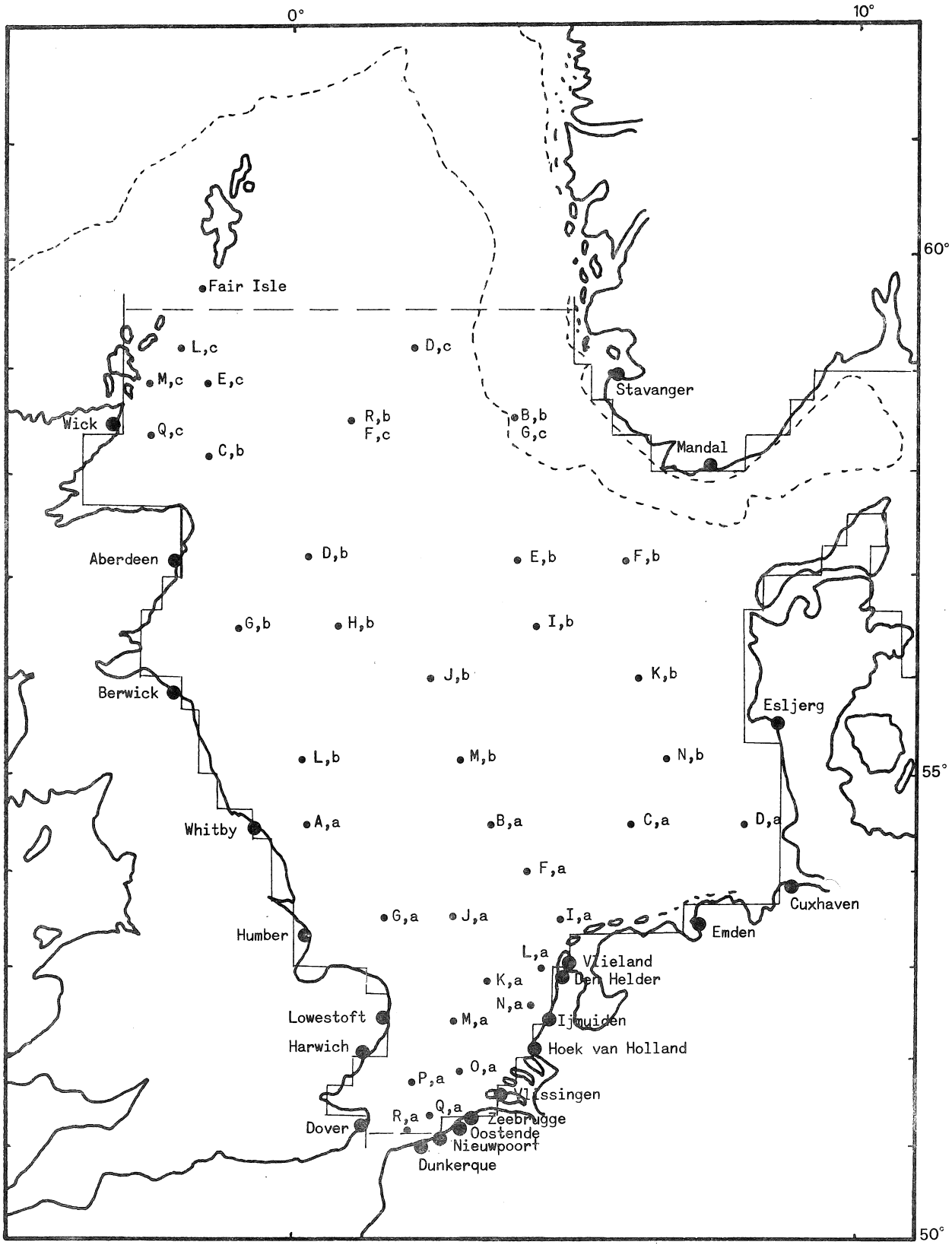


fig. 11.

Stations d'observation et de marée

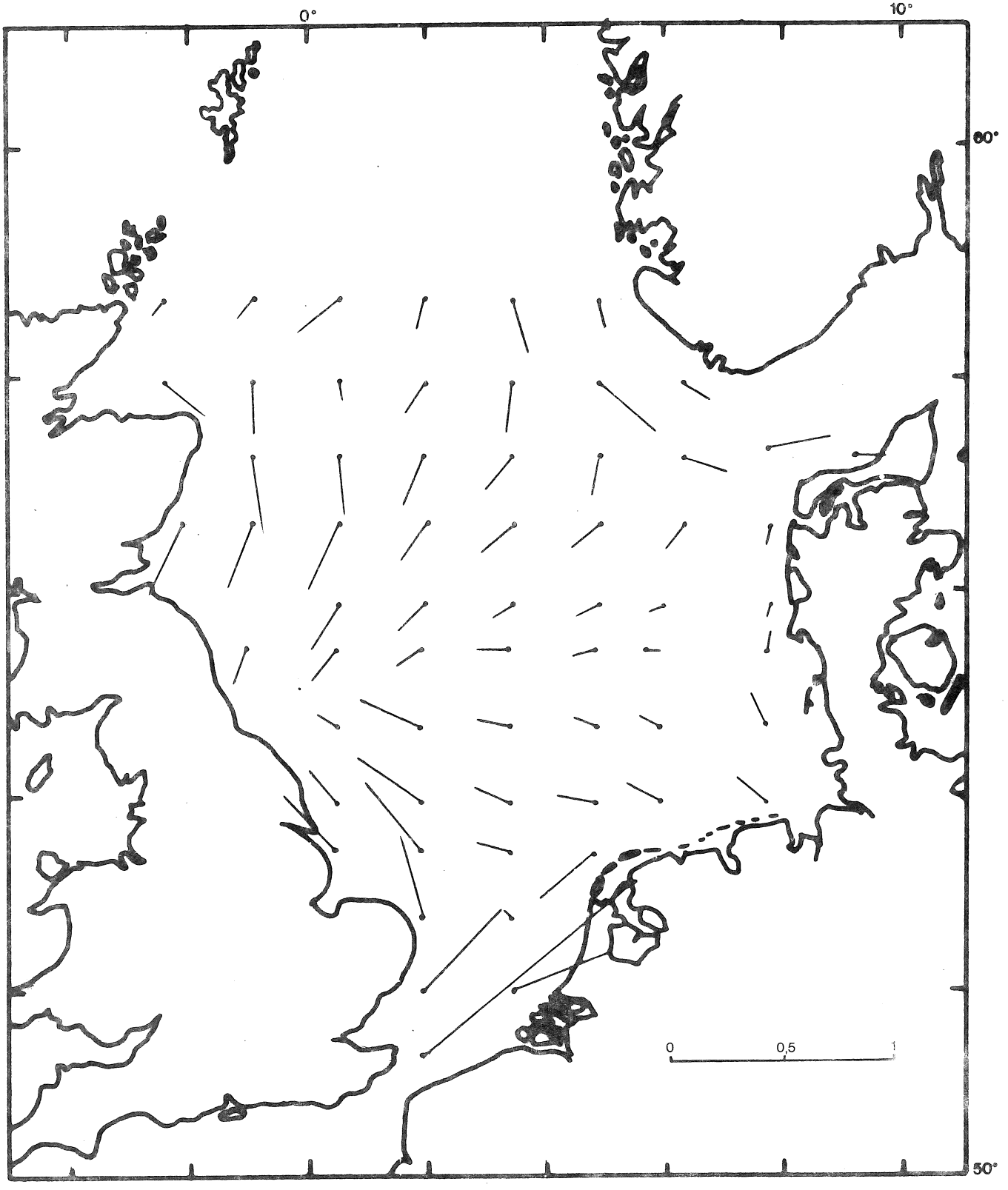


fig. 12.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = 0$. Les vitesses sont exprimées en m/s .

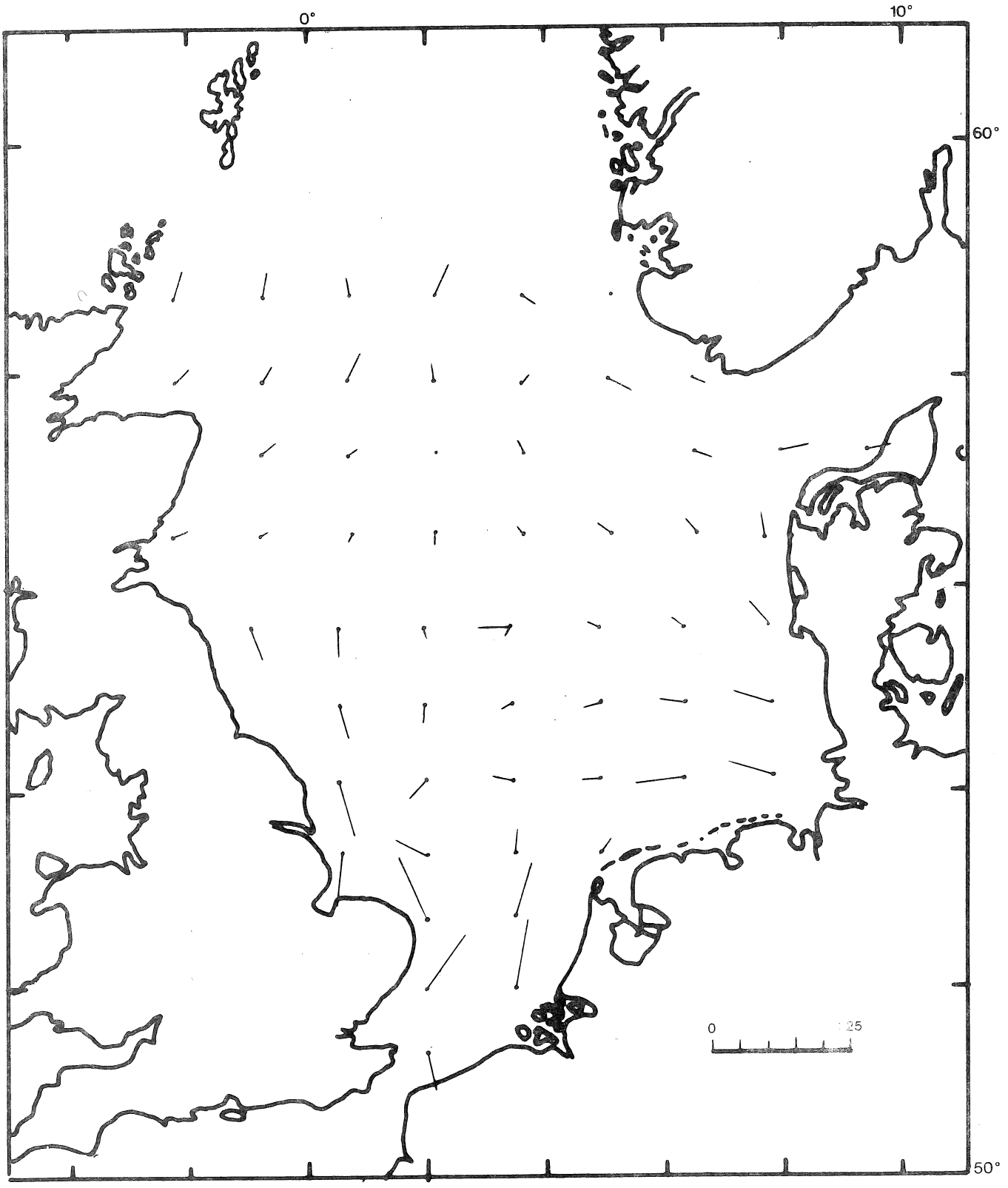


fig. 13.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{T}{4}$. Les vitesses sont exprimées en m/s .

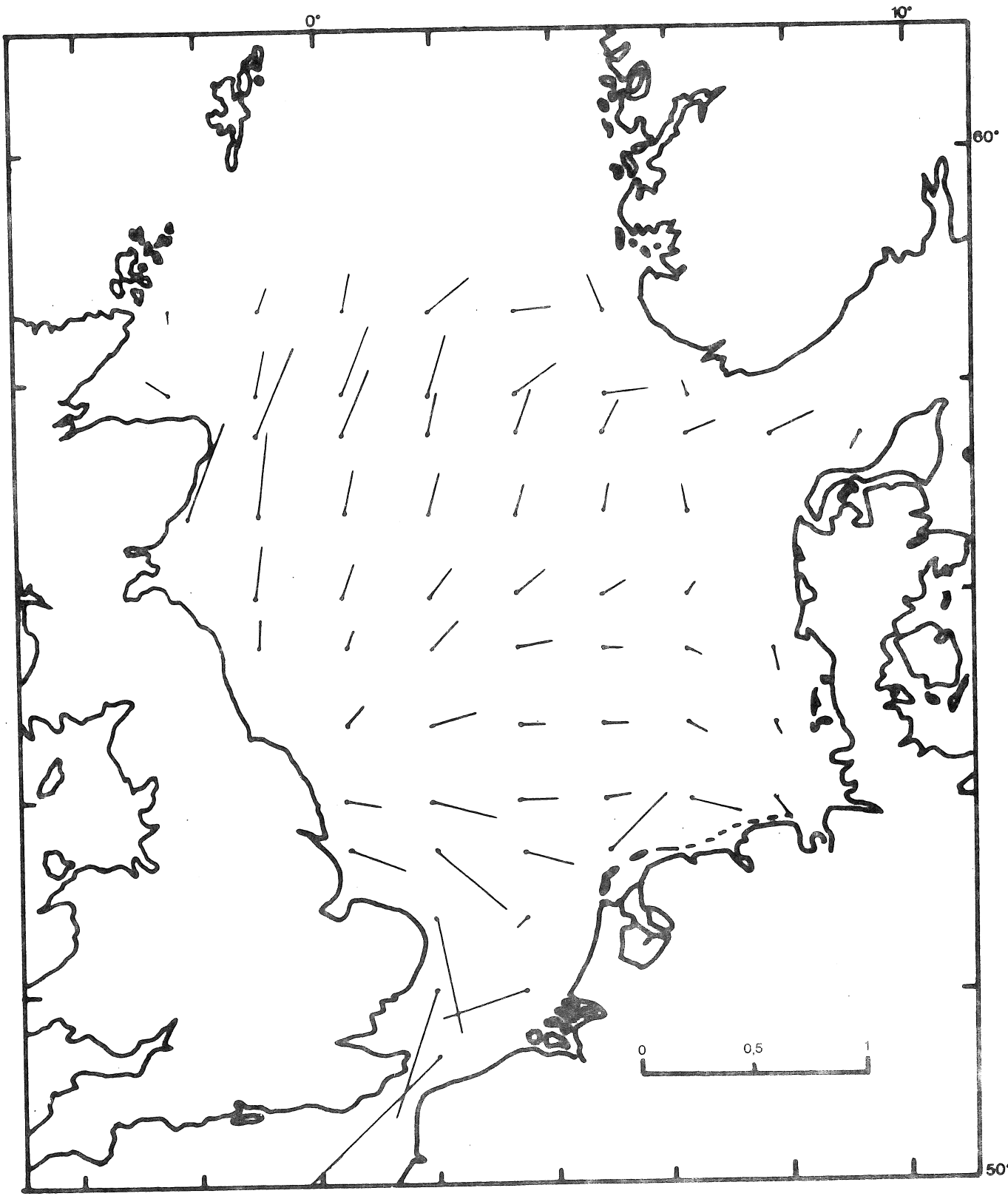


fig. 14.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{T}{2}$. Les vitesses sont exprimées en m/s .

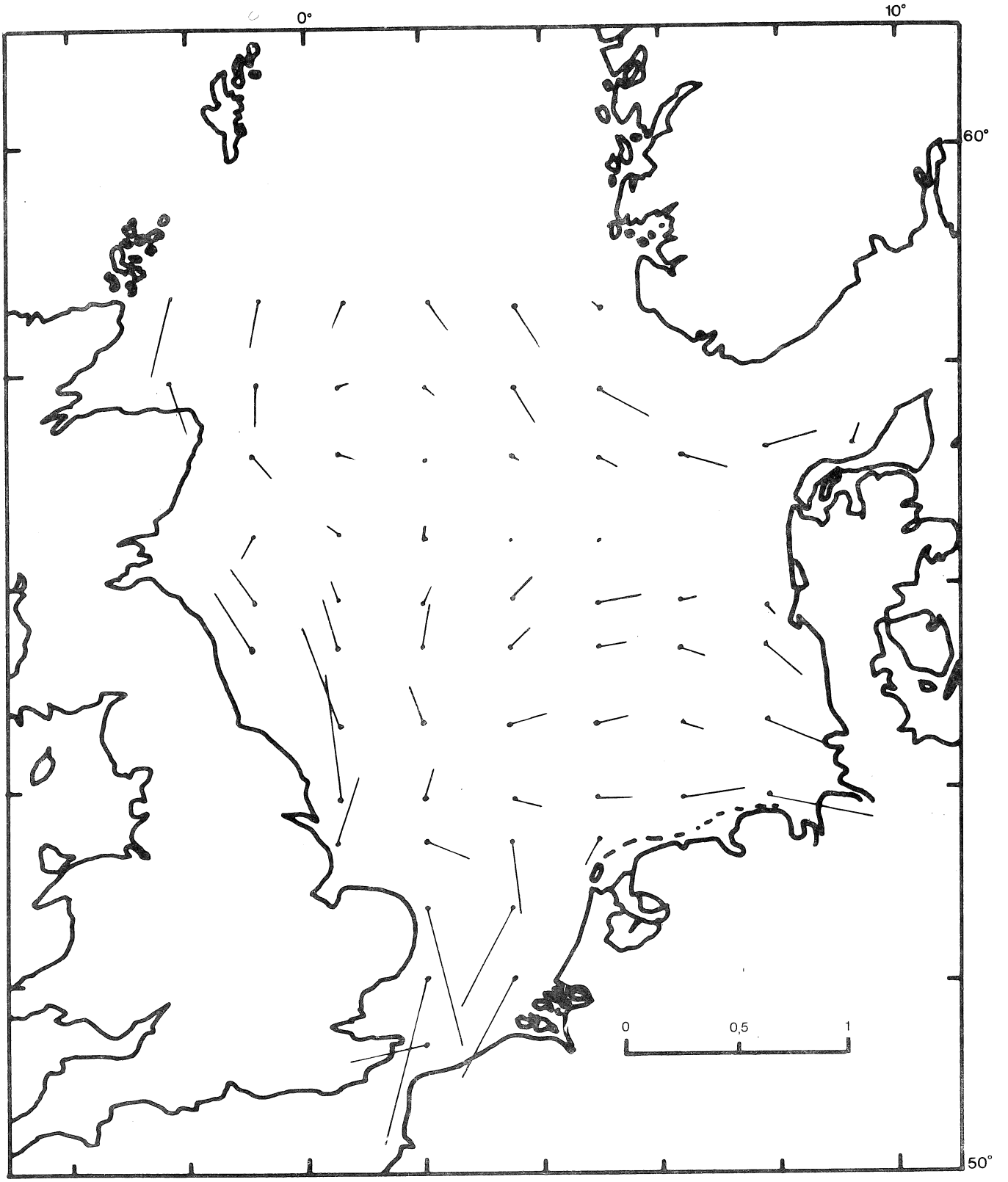


fig. 15.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{3}{4} T$. Les vitesses sont exprimées en m/s .

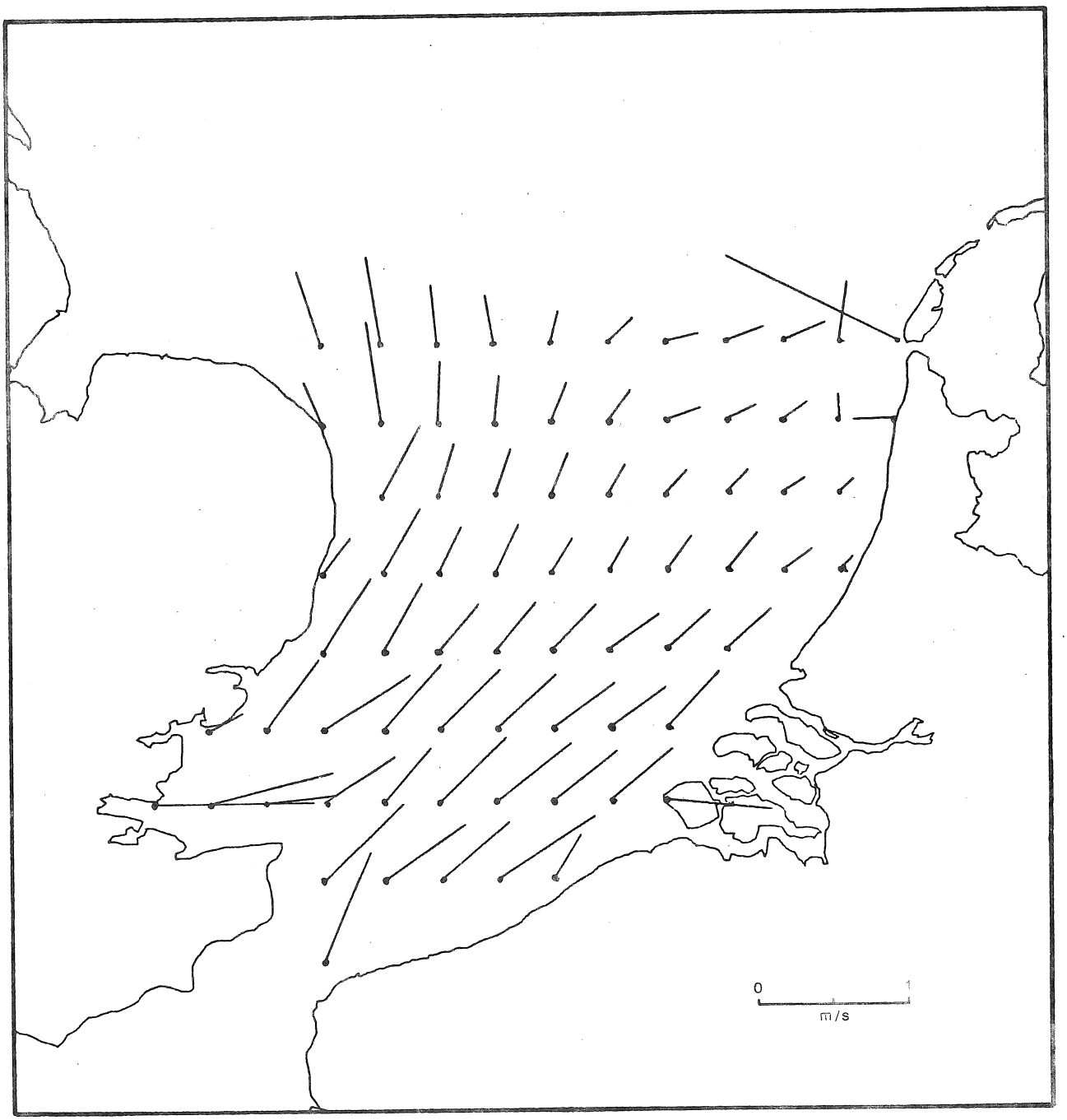


fig. 16.
Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = 0$ dans le Southern Bight

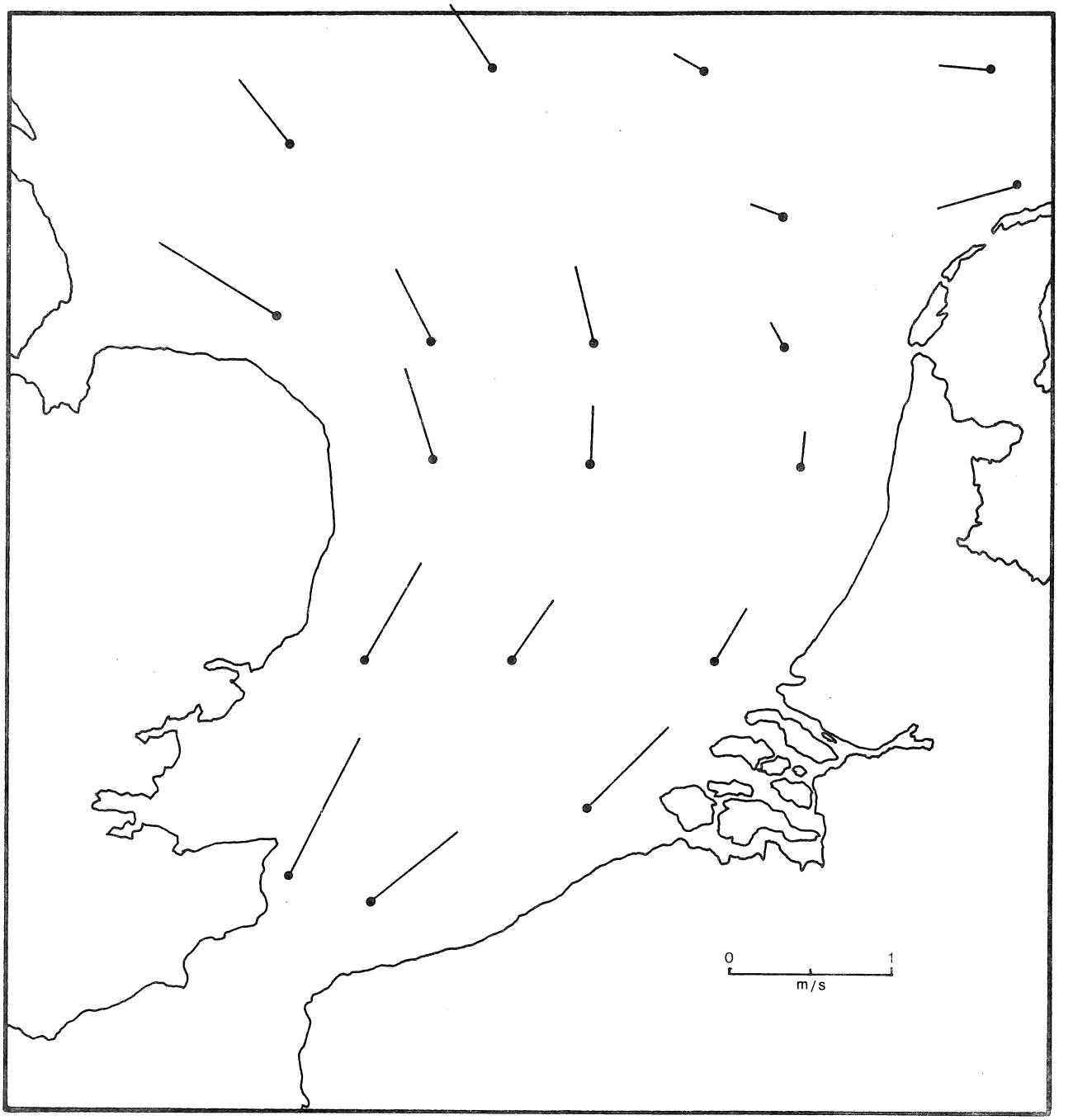


fig. 17.
Champ de vitesse observé à $t_{GR} = 0$ dans le Southern Bight

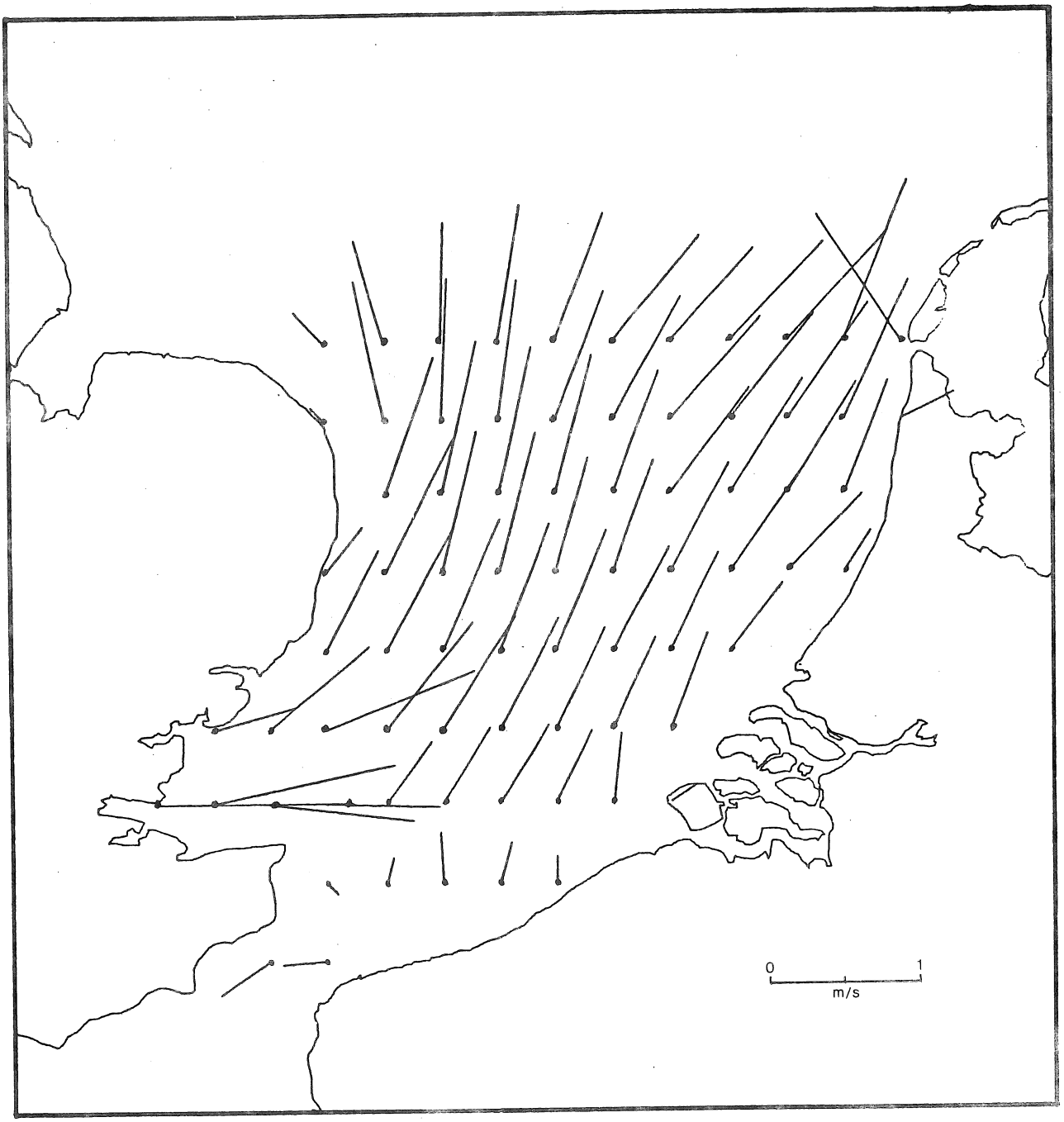


fig. 18.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{T}{4}$ dans le Southern Bight

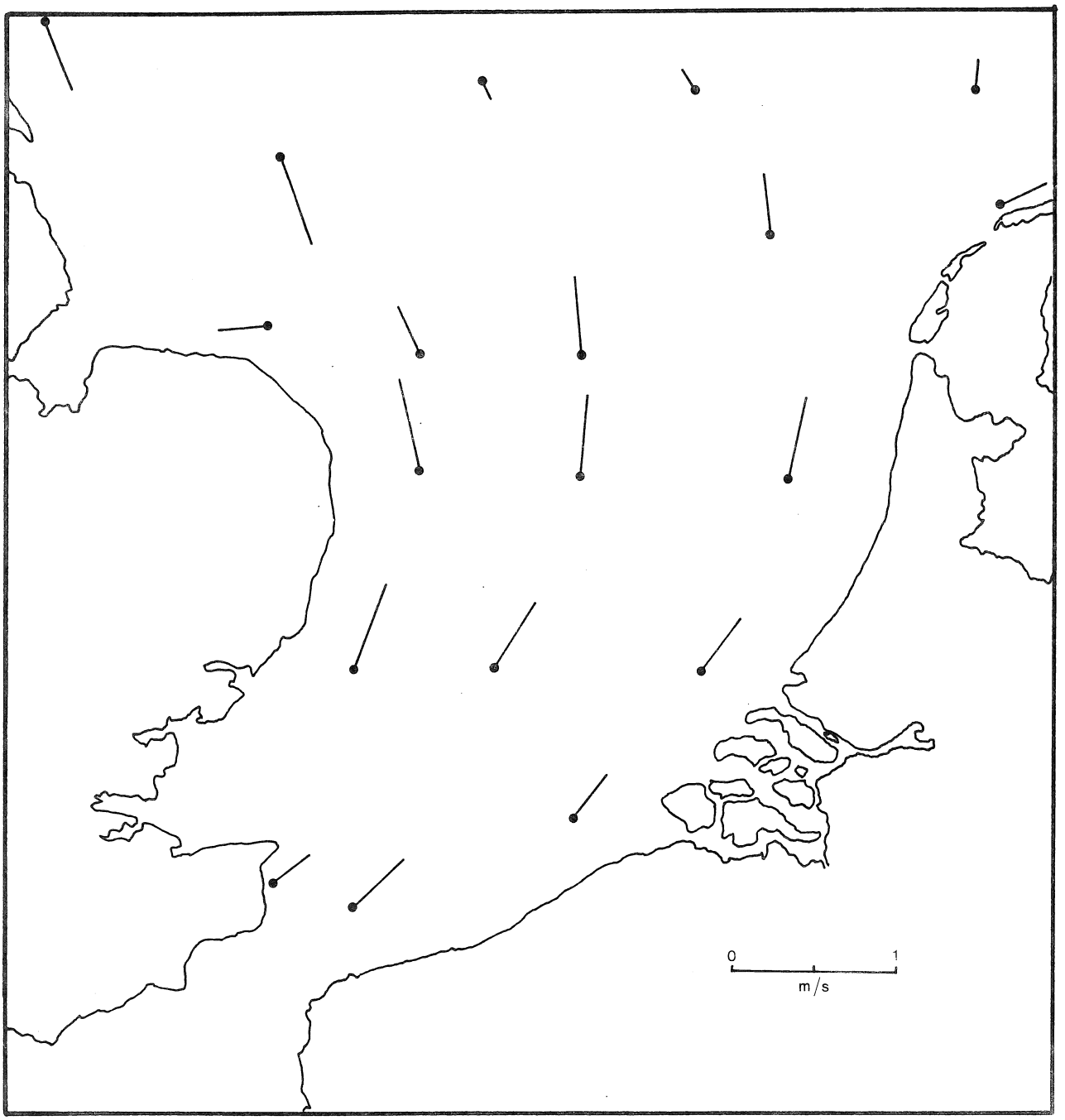


fig. 19.

Champ de vitesse observé à $t_{GR} = \frac{T}{4}$ dans le Southern Bight

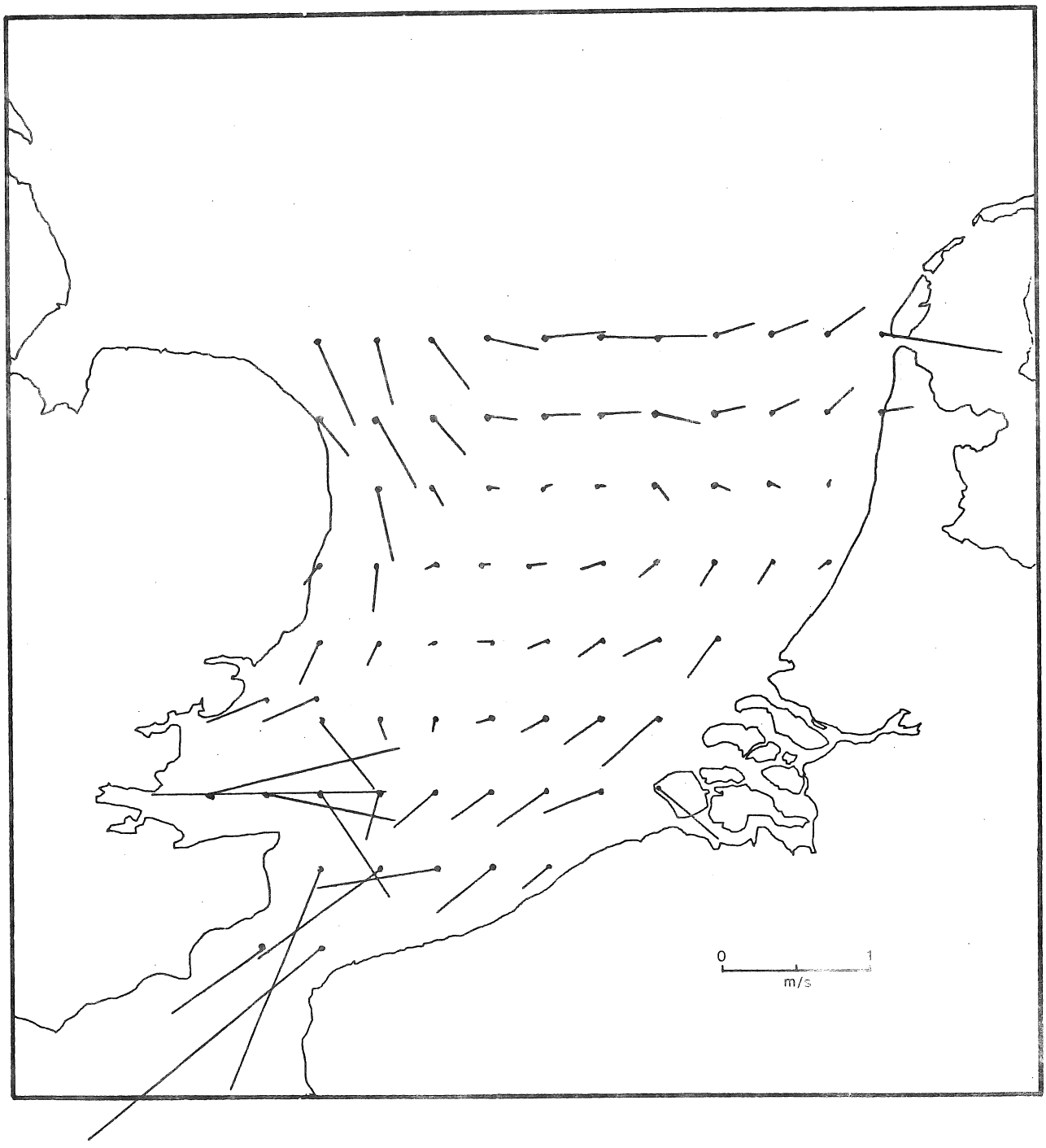


fig. 20.

Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight

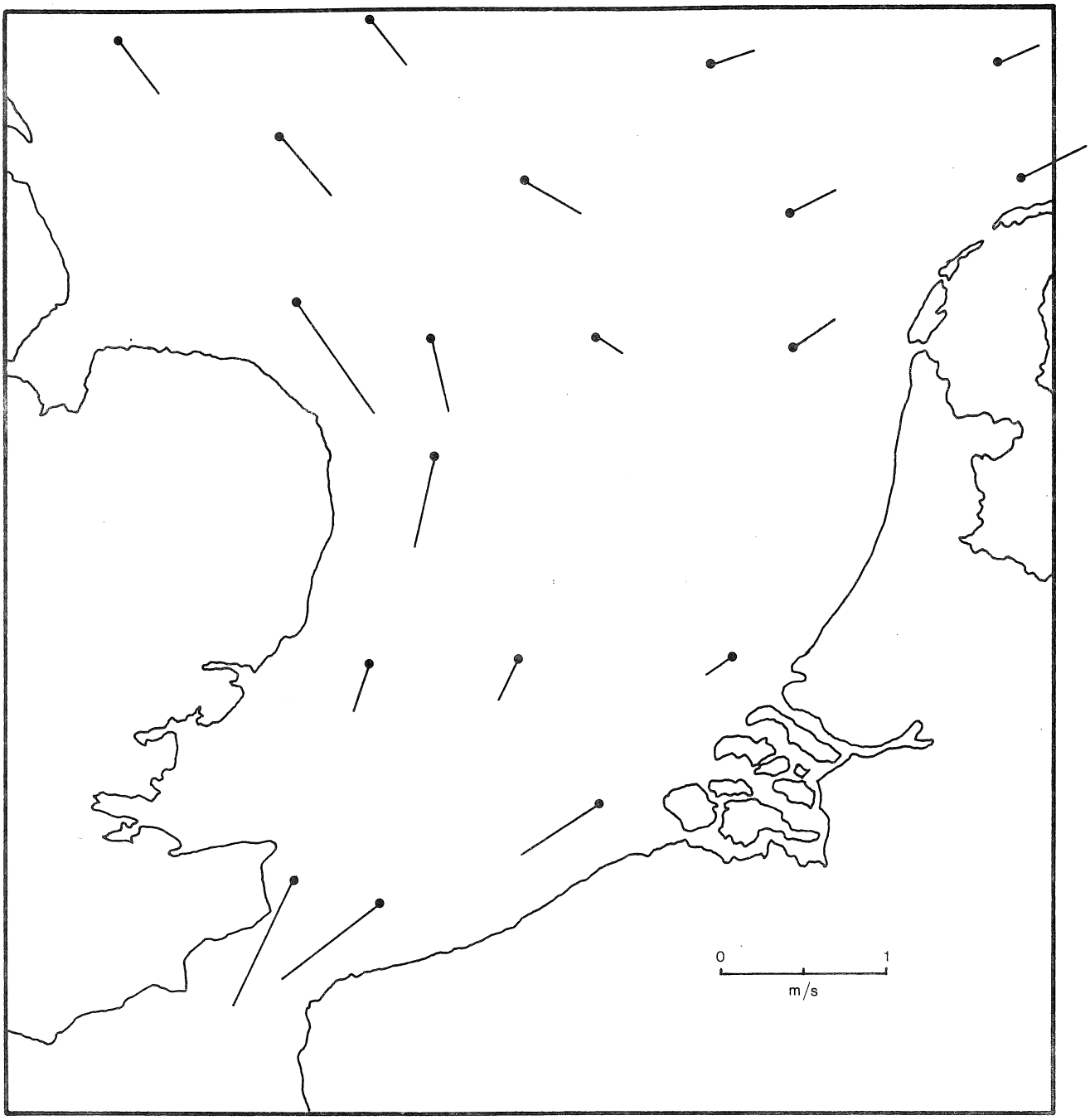


fig. 21.

Champ de vitesse observé à $t_{GR} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight

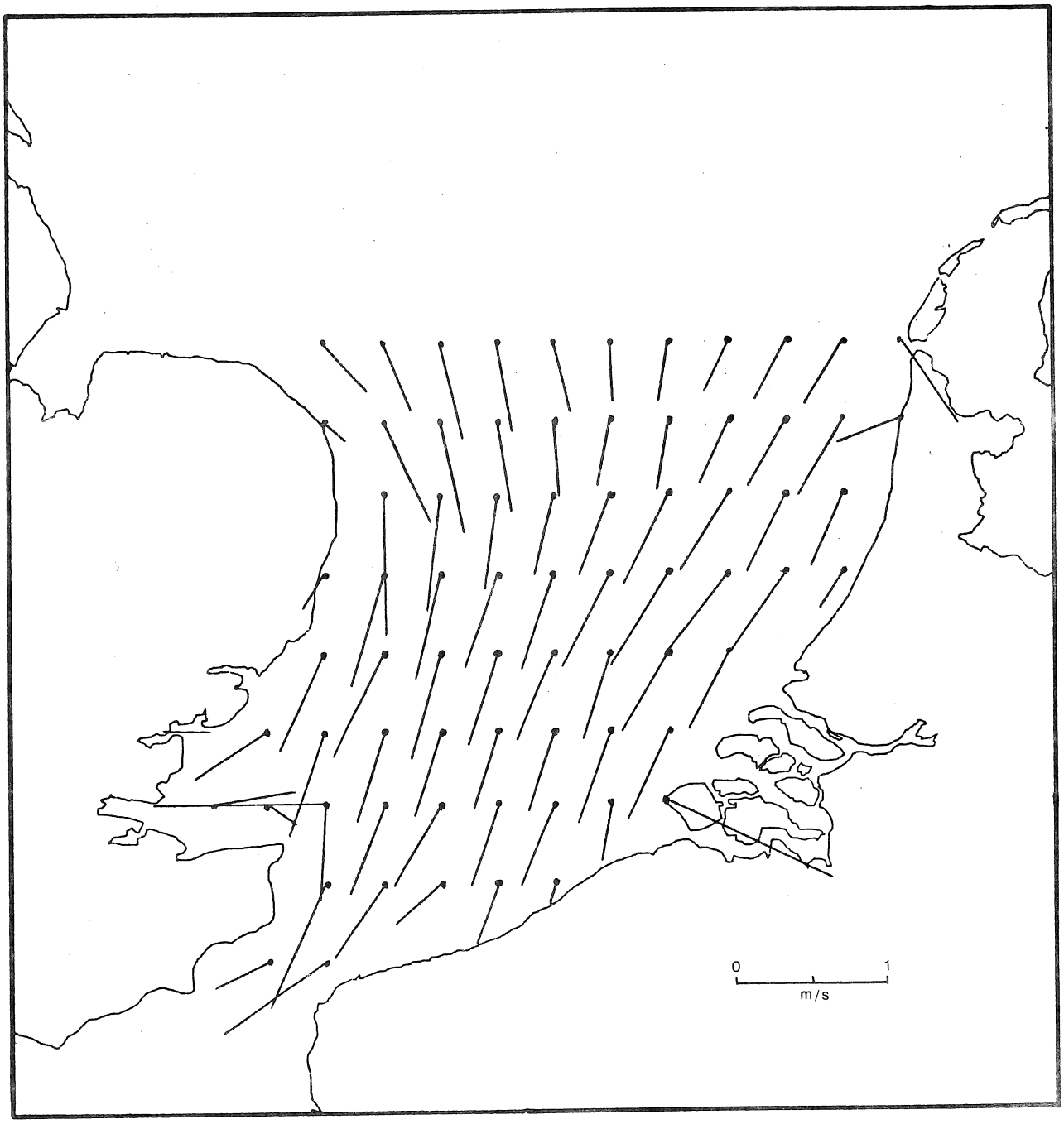


fig. 22.
Champ de vitesse calculé à $t_{GR} = \frac{3}{4} T$ dans le Southern Bight

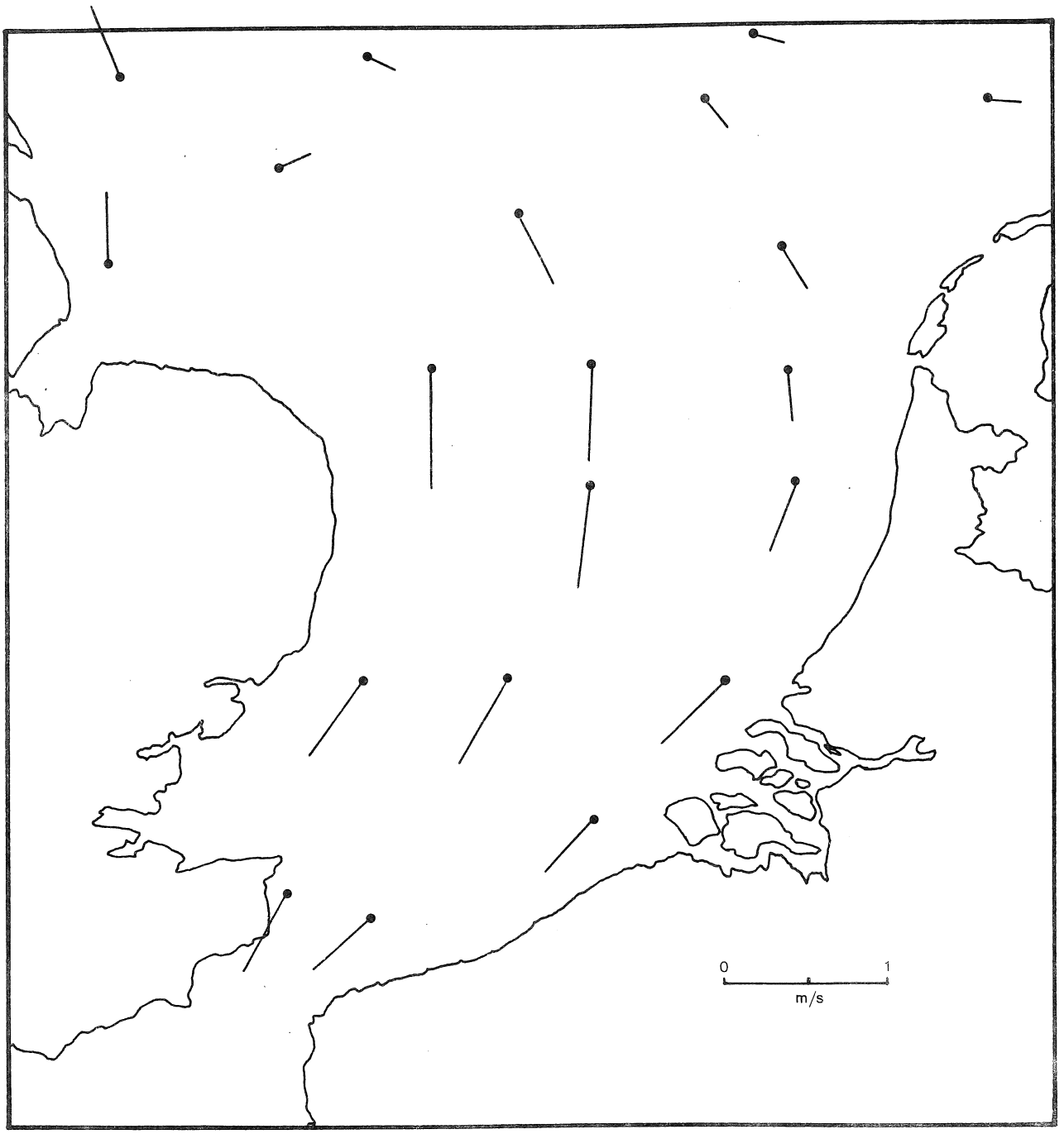


fig. 23.

Champ de vitesse observé à $t_{GR} = \frac{3}{4}$ T dans le Southern Bight

et le long des côtes des Iles Britanniques. Dans ces régions, l'amplitude de la marée verticale est également très importante (fig. 10). Dans la partie centrale et nord de la mer du Nord, les courants observés et calculés sont faibles, en raison de la grande grandeur du bassin à cet endroit et de l'amplitude relativement réduite de l'élévation de la surface libre par rapport à cette profondeur. Les figures 16 à 23 donnent la direction et l'amplitude des courants observés et calculés dans le Southern Bight. Les différences entre le calcul et l'observation sont faibles. Elles apparaissent surtout au moment du renversement du courant : un léger déphasage suffit alors pour modifier sensiblement la distribution des courants en raison d'une forte anisotropie des ellipses de marée au voisinage des côtes.

L'analyse des figures 24, 25 et 26 permet également de conclure à un accord satisfaisant entre le calcul et l'observation. Les atlas des courants ne donnant que les courants des mortes et des vives eaux, nous avons dû estimer le courant résultant de la marée semi-diurne lunaire en nous basant sur la moyenne des courants de mortes et de vives eaux. Une partie importante des erreurs pourrait provenir de cette estimation trop grossière. Les figures 24, 25 et 26 montrent également le sens de rotation du vecteur courant en un certain nombre de points de mesure. En nous basant sur un grand nombre d'observations et de résultats de simulation, nous pouvons dire qu'il n'y a pas de sens préférentiel de rotation du vecteur courant bien que la théorie des marées [*e.g.* Defant (1961)] indique que la rotation du vecteur courant se fait vers la droite dans l'hémisphère nord pour un bassin de dimensions infinies. Dans une mer de dimensions réduites et presque entièrement fermée, comme la mer du Nord, il est pratiquement impossible de déterminer *a priori* le sens de parcours de l'ellipse en raison des réflexions multiples de l'onde de marée et de la friction sur le fond.

En nous basant sur l'accord satisfaisant entre le calcul et l'observation, nous pouvons dire que l'amplitude et la phase des courants calculés avec le modèle mathématique sont affectées d'une erreur inférieure à 20 % . Ces erreurs résultent d'une discrétisation encore

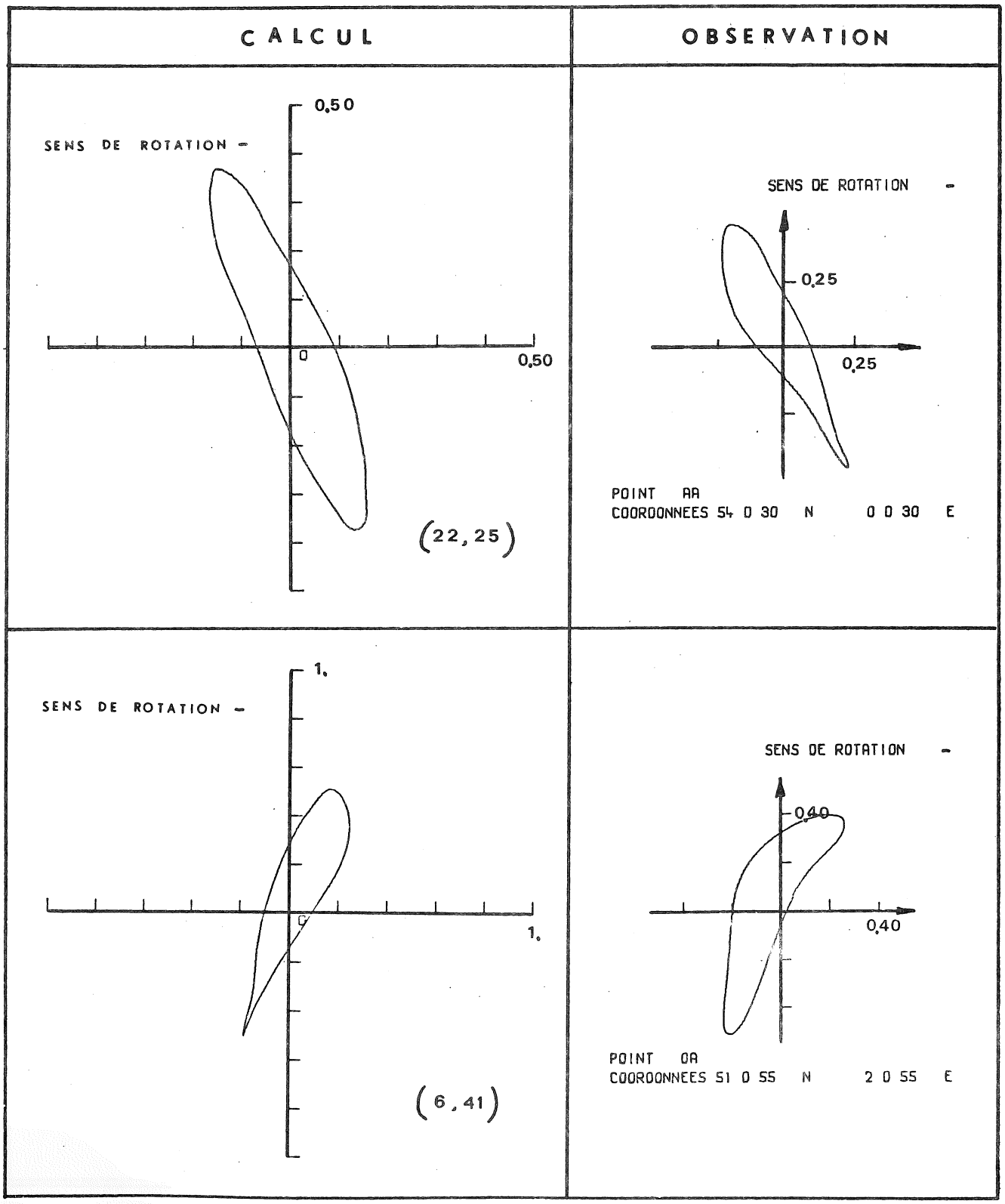


fig. 24.

Ellipses de marée calculées et observées. Les vitesses sont exprimées en cm/s .

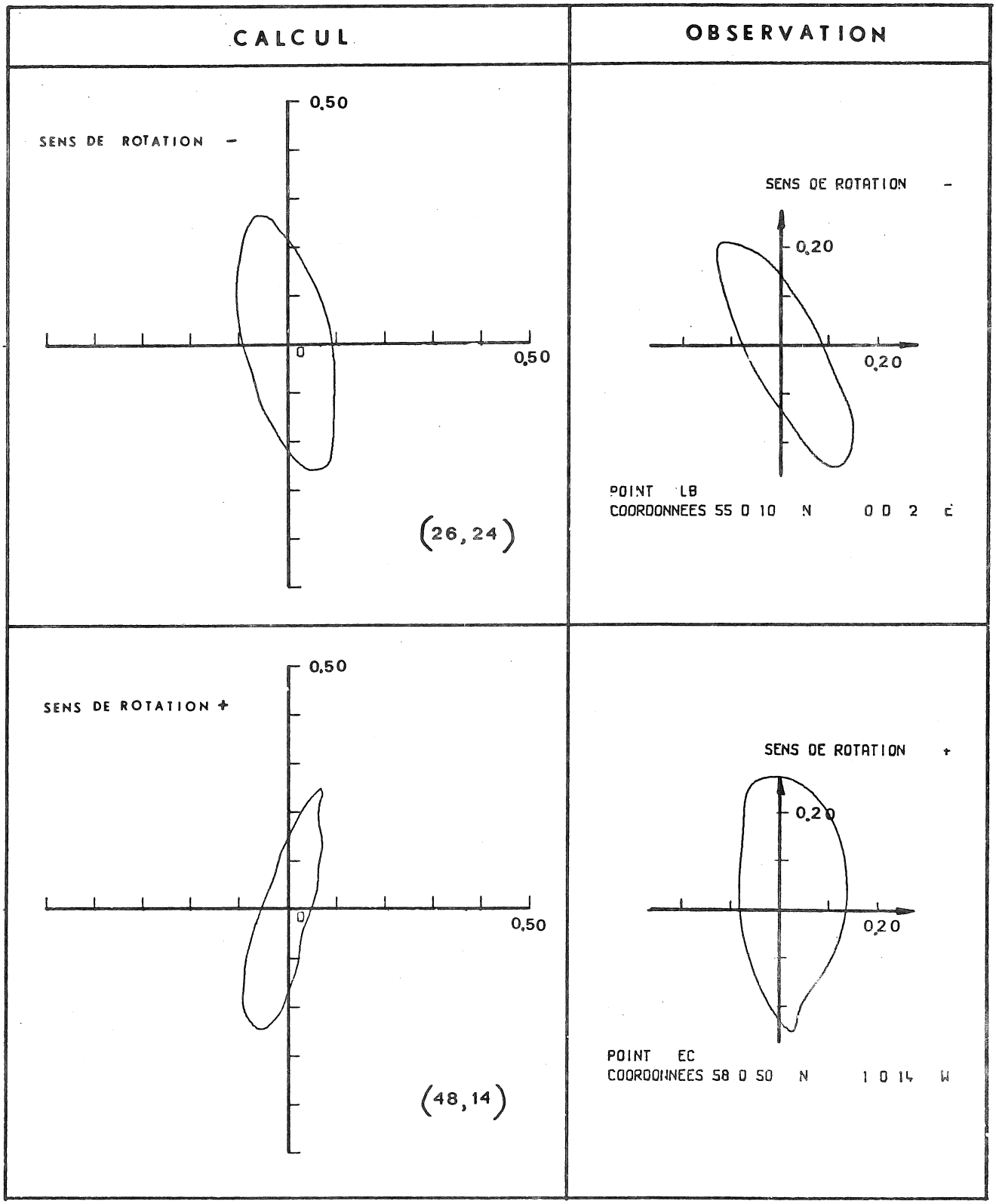


fig. 25.
Ellipses de marée calculées et observées. Les vitesses sont exprimées en cm/s .

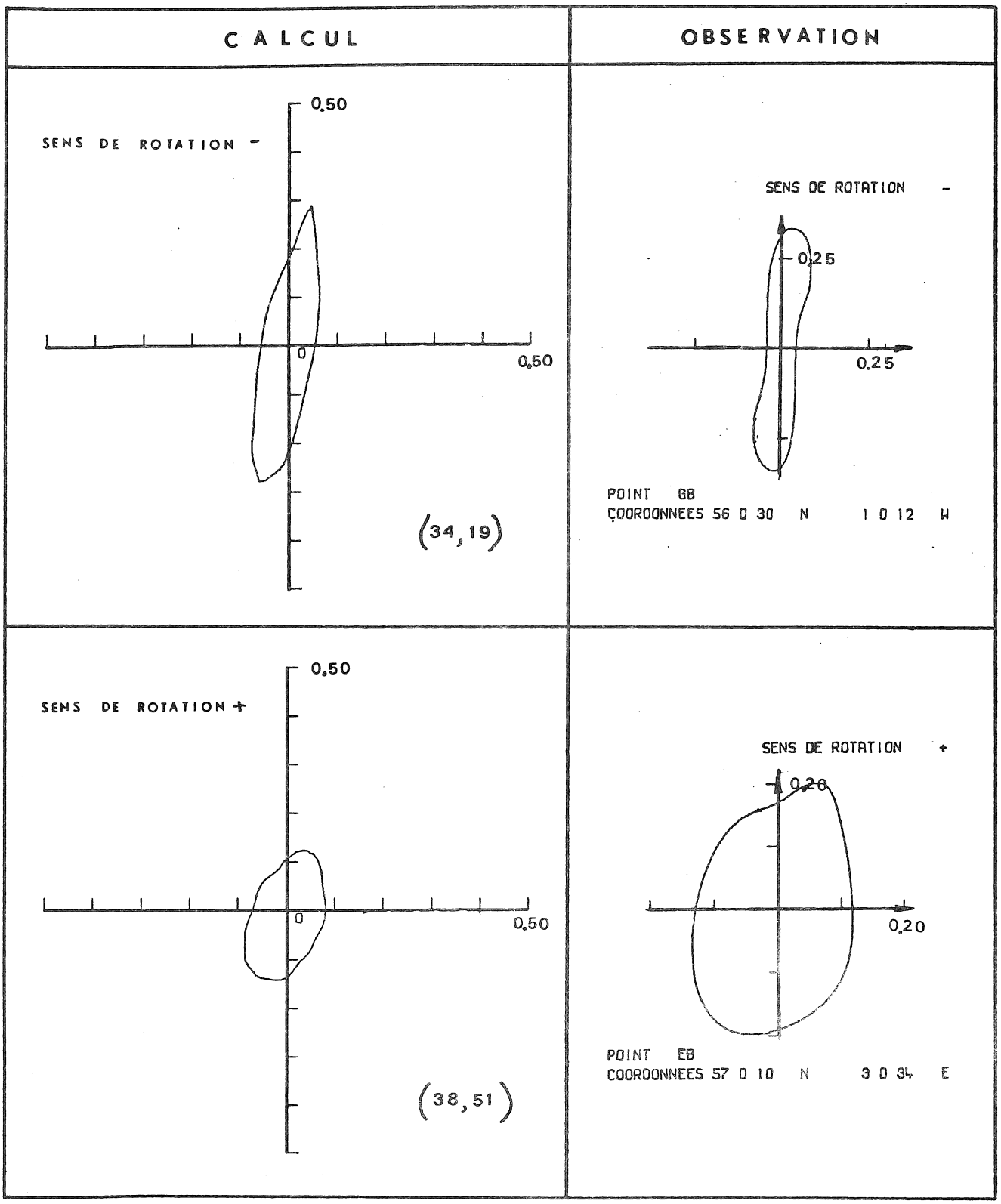


fig. 26.

Ellipses de marée calculées et observées. Les vitesses sont exprimées en cm/s .

trop grossière du milieu, d'incertitudes sur la valeur du coefficient de friction et du manque d'informations sur les conditions aux limites à la mer ouverte.

2.4.4.- Importance des termes non-linéaires

Les termes non-linéaires des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement compliquent fortement la résolution des équations. Si ces équations étaient linéaires, on aurait pu calculer directement l'amplitude et la phase des marées partielles en appliquant une transformée de Fourier et en résolvant ensuite l'équation elliptique du mouvement par les méthodes classiques [Lorentz (1926), Hansen (1949)]. L'analyse des ordres de grandeur des différents termes des équations de mouvement (chapitre III, § 2.1) montre que les termes non-linéaires d'advection et de friction ne sont pas négligeables dans la partie sud de la mer du Nord et dans le German Bight. Les figures 27 à 31 mettent en évidence l'importance des termes non-linéaires dans ces régions : la présence d'une élévation résiduelle et de plusieurs harmoniques est évidente aux stations marégraphiques situées dans des eaux peu profondes. Les figures 29 et 30 montrent que la durée du gagnant n'est pas égale à celle du perdant et que les vitesses de montée sont plus grandes que celles de descente. Nous retrouvons les caractéristiques de la courbe marégraphique dans un estuaire peu profond soumis à la marée.

Les termes d'advection des équations de mouvement (5.6), (5.12) et (5.13) induisent des harmoniques. Pour la marée M_2, ils engendrent les termes M_4, M_6, M_8 et une élévation résiduelle [Kreiss (1957), Le Provost (1974)]. Dans le cas général, nous pourrions montrer que les différentes marées partielles interagissent entre elles et produisent les marées $2MS_2$, $2MN_2$, etc.

Les termes de friction, soit

$$(5.27) \qquad F_\lambda = \frac{D}{h+\zeta} \|\bar{u}\| \bar{u}_\lambda \qquad \text{et} \qquad F_\phi = \frac{D}{h+\zeta} \|\bar{u}\| \bar{u}_\phi ,$$

engendrent de nombreuses harmoniques. Le Provost (1974) a étudié en détail la décomposition spectrale des termes de friction. Lorsqu'on

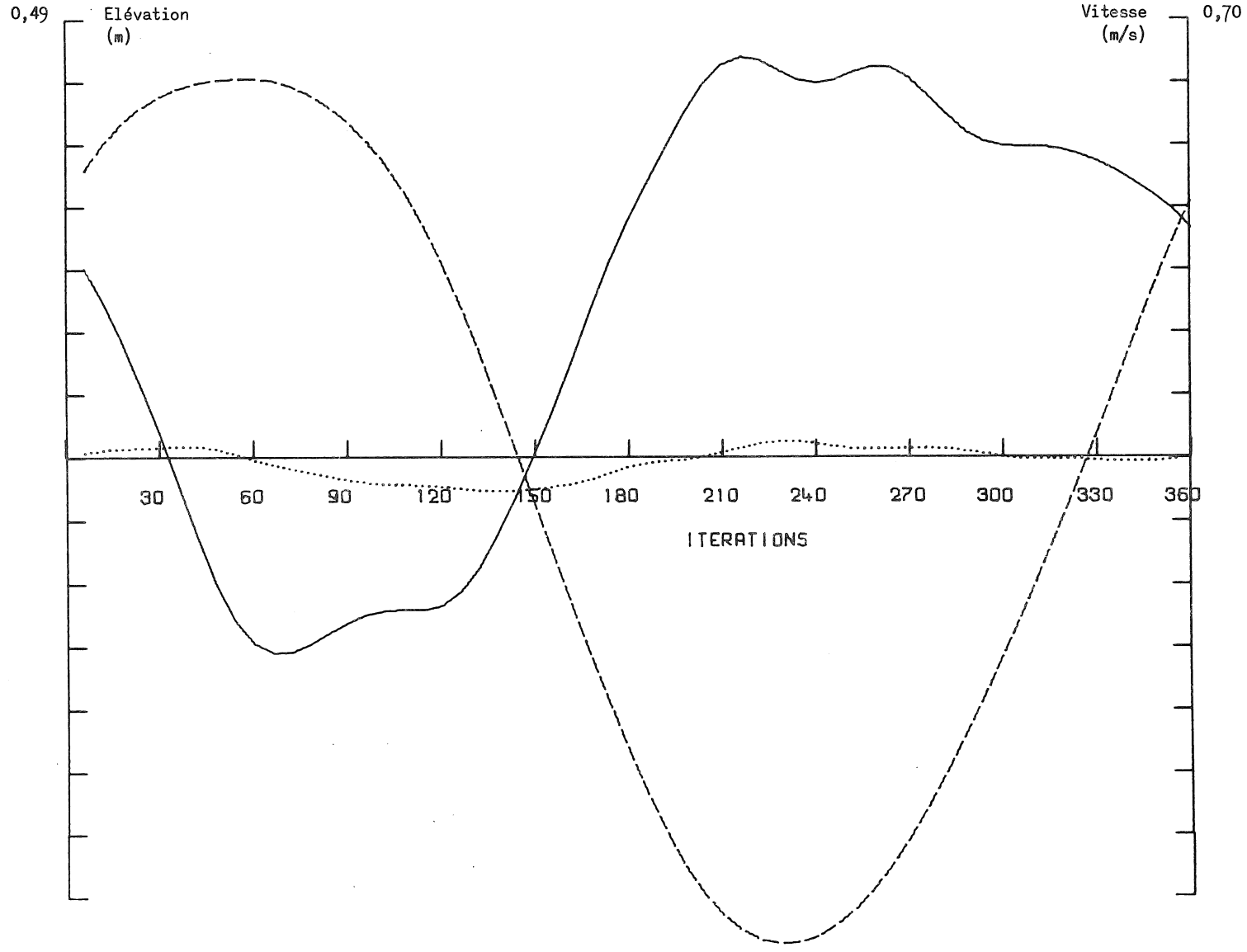


fig. 27.

Variations temporelles de u_λ , u_ϕ et ζ au point (10,34).
La profondeur à cet endroit est de 12 mètres.

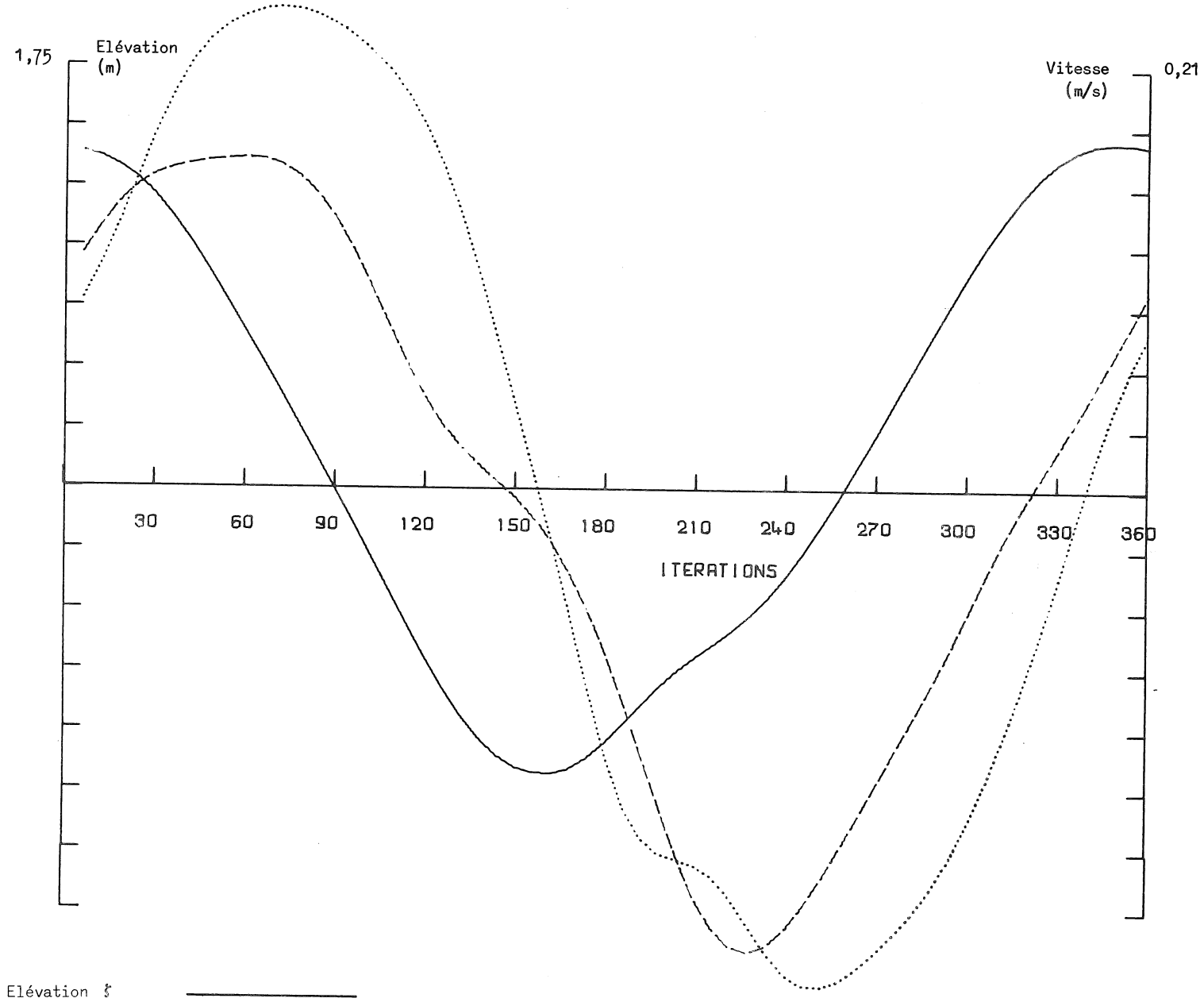
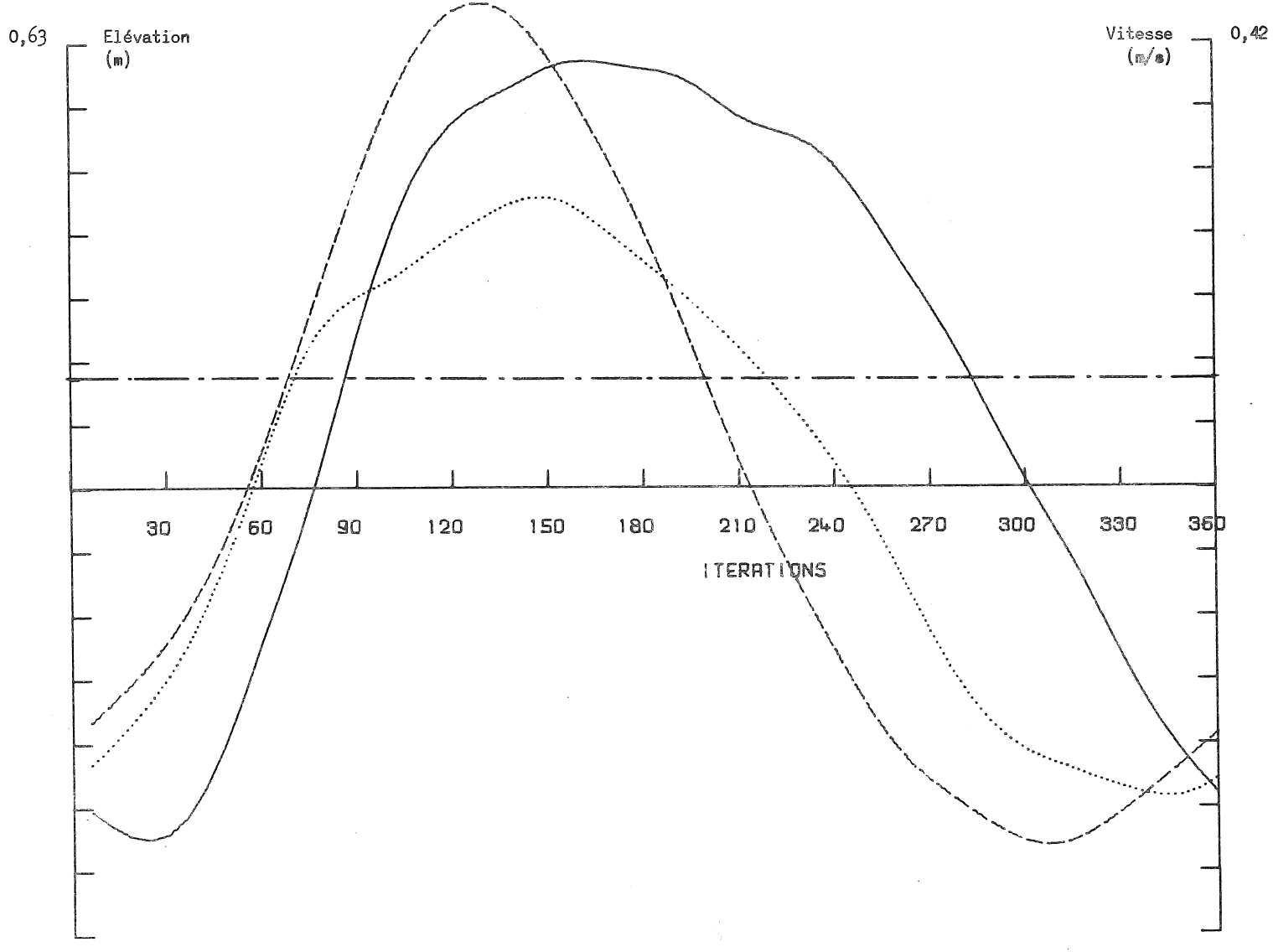


fig. 28.
Variations temporelles de u_λ, u_ϕ et ζ au point (6,30).
La profondeur à cet endroit est de 14 mètres.



Elévation ζ ——————

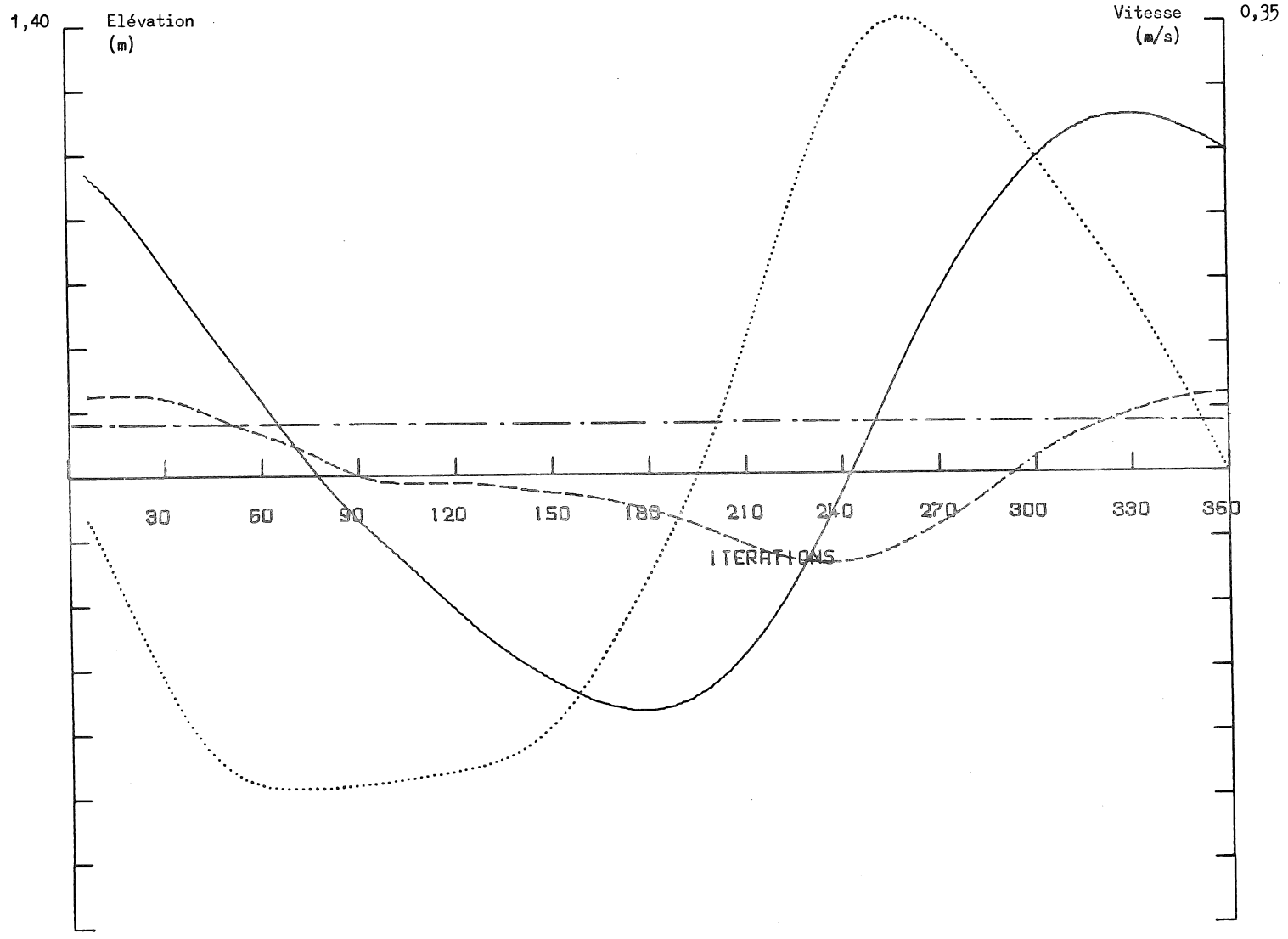
Composante u_λ ....

Composante u_ϕ - - - - - - - - - - - -

Elévation résiduelle —·—·—·—·—·—·—

fig. 29.

Variations temporelles de u_λ, u_ϕ et ζ au point (14,50).
La profondeur à cet endroit est de 17 mètres.



Elévation ζ ——————

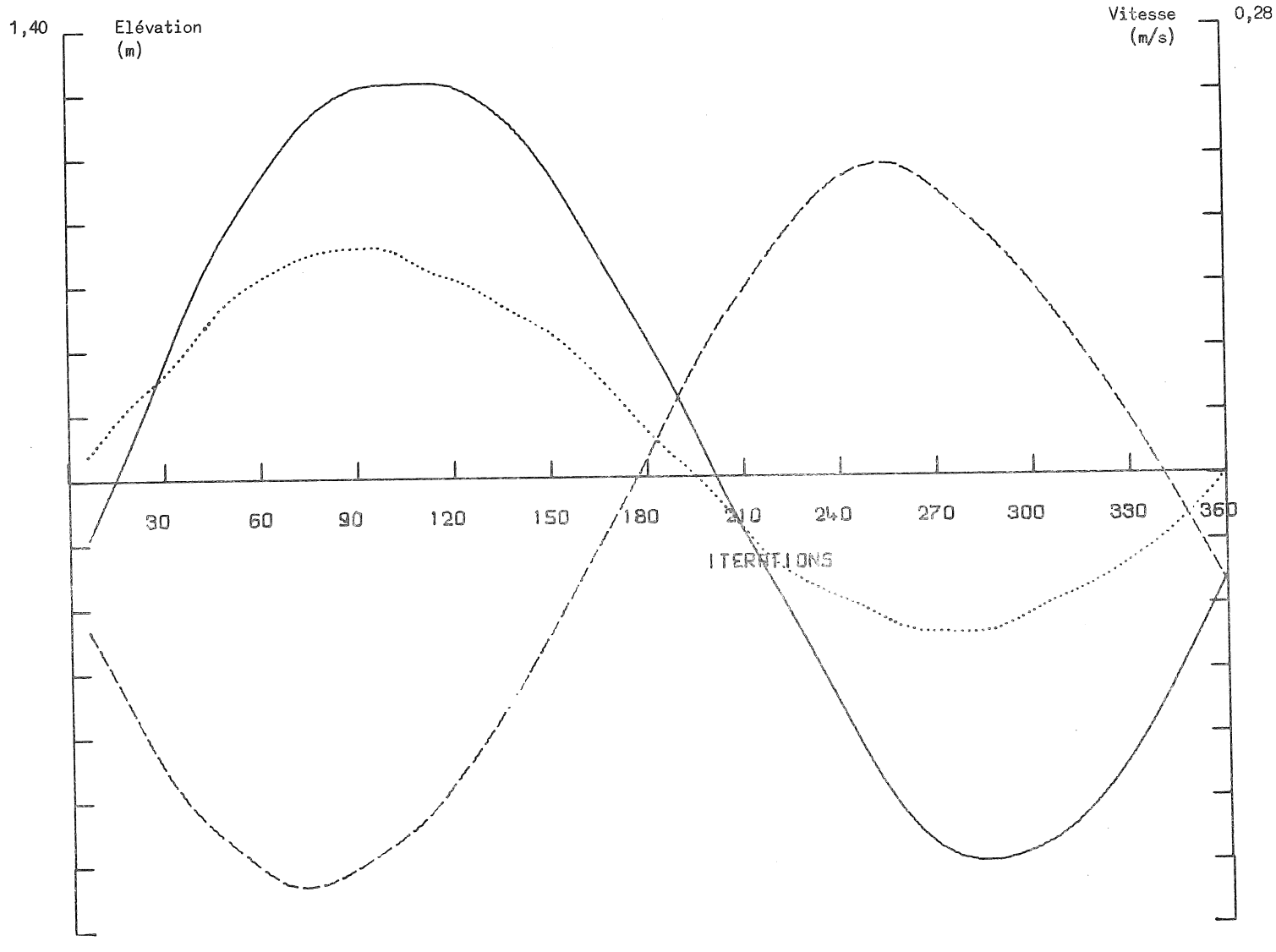
Composante u_λ ....

Composante u_ϕ - - - - - - - - - - - -

Elévation résiduelle —·—·—·—·—·—

fig. 30.

Variations temporelles de u_λ, u_ϕ et ζ au point (18,72).
La profondeur à cet endroit est de 11 mètres.



Elévation ζ ——————

Composante u_λ ....

Composante u_ϕ - - - - - - - - - - -

fig. 31.

Variations temporelles de u_λ, u_ϕ et ζ au point (22,20).
La profondeur à cet endroit est de 46 mètres.

simule numériquement la marée partielle M_2 , Le Provost a montré que les termes de friction n'engendrent que les composantes M_2 , M_6 , M_{10} , M_{14} , ... à l'exclusion de toutes les autres. Dans le cas général, le terme de friction engendre également d'autres composantes. Signalons les ondes $2MS_2$, $2MN_2$, $4MS_6$, ... qui traduisent l'influence de la composante dominante sur l'amortissement des autres ondes.

L'analyse harmonique de la marée calculée permet d'étudier l'influence des termes non-linéaires sur la courbe marégraphique. Au tableau 2, nous donnons les résultats de l'analyse harmonique en quelques points caractéristiques.

Tableau 2

Importance des termes non-linéaires dans les régions de faible profondeur

Point	Profondeur (m)	Composante permanente (cm)	M_2 (cm)	M_4 (cm)	M_6 (cm)
36,38	77	10	25	2	0
36,20	70	11	74	1	1
18,38	31	12	62	3	1
4,42	19	12	141	7	1
10,48	9	13	60	17	3
20,74	17	18	92	9	2
48,38	124	4	39	0	0
			$\frac{M_2}{M_2} \times 100$	$\frac{M_4}{M_2} \times 100$	$\frac{M_6}{M_2} \times 100$
36,38	77		100	8	0
36,20	70		100	1,3	1,3
18,38	31		100	4,8	1,6
4,42	19		100	5	0,7
10,48	9		100	28,2	5
20,74	17		100	9,7	2,2
48,38	124		100	0	0

- Au point (48,38) situé dans une région profonde (h = 124 m), nous obtenons une courbe marégraphique quasi-sinusoïdale de période T_{M_2} : les termes non-linéaires sont donc négligeables. Ces conclusions sont donc en parfait accord avec celles de l'analyse des ordres de grandeur des termes des équations de mouvement (chapitre III).

- Aux points (36,38), (36,20) et (18,38) situés dans des régions caractérisées par des profondeurs moyennes, les composantes M_4 et M_6 sont faibles et du même ordre de grandeur avec cependant $M_4 > M_6$. Les termes de friction et d'advection influencent donc de la même manière l'élévation de la surface.

- Aux points (4,42), (10,48) et (20,74) situés dans des régions peu profondes (h < 20 m), nous remarquons que la composante M_4 est beaucoup plus intense que la composante M_6. Les termes non-linéaires d'advection sont donc importants dans les régions peu profondes.

Ces exemples montrent qu'un modèle linéaire [*e.g.* Lorentz (1926), Hansen (1949)] ne peut reproduire toutes les caractéristiques de la courbe marégraphique. Pour simuler correctement la marée, il faut donc tenir compte des termes non-linéaires de friction et d'advection.

2.4.5.- Vitesse de propagation et caractère de l'onde de marée

Le caractère de l'onde de marée peut être déterminé en comparant la vitesse de propagation de l'onde réelle à la vitesse de phase d'une onde longue.

La vitesse de propagation d'une onde longue unidimensionnelle dans un bassin infini sans dissipation est la suivante [*e.g.* Lamb (1962)] :

$$C = \sqrt{gh} \qquad (5.28)$$

où h représente la profondeur et g l'accélération de la pesanteur.

Nous recherchons la vitesse de propagation de l'onde de marée le long des côtes de la mer du Nord en nous basant sur les lignes cotidales calculées (fig. 10) et observées (fig. 9).

L'analyse du tableau 3 permet de tirer les conclusions ci-après.

Tableau 3

	Vitesse de phase d'une onde progressive unidirectionnelle $C = \sqrt{gh}$ (m/s)	Vitesse de propagation calculée à partir des lignes cotidales	
		calculée C_1 (m/s)	observée C_2 (m/s)
Côte belgo-néerlandaise	14,4	10,9	9,9
German Bight	14,0	26,7	23,5
Côte norvégienne (Mandal-Stavanger)	33,0	12,3	11,1
Côte écossaise (Wick-Aberdeen)	25,3	24,9	22,1
Côte anglaise (Berwick-Whitby)	26,2	24,3	24,0
Côte de l'East Anglia	10,1	5,8	6,6

- Dans la partie sud de la mer du Nord, c'est-à-dire le long des côtes belgo-néerlandaises et des côtes de l'East Anglia, les vitesses de propagation observées et calculées sont semblables mais plus faibles que la vitesse de phase, en raison du freinage de l'onde par friction dans les eaux peu profondes. Dans ces régions, la marée possède donc le caractère d'une onde progressive ralentie par la friction sur le fond.

- Le long des côtes anglaises et écossaises, la marée est une onde progressive caractérisée par une vitesse de propagation légèrement inférieure à la vitesse de phase $C = \sqrt{gh}$. Les termes de friction sont donc peu importants lorsque la profondeur est supérieure à 50 mètres.

- La vitesse de propagation de l'onde de marée est beaucoup plus élevée que la vitesse de phase dans le German Bight : la marée résulte de deux ondes progressives, l'une provenant de l'ouverture nord de la mer du Nord, l'autre du Pas de Calais. Une légère différence entre les directions de propagation de ces deux ondes peut provoquer des ondes secondaires se propageant à grande vitesse. De plus, le critère utilisé pour la détermination du caractère de l'onde n'est pas applicable en toute rigueur, en raison de la faible excentricité de l'ellipse de marée dans le German Bight.

- Comme le point amphidromique est situé très près de la côte norvégienne, il serait illusoire de vouloir déterminer le caractère de l'onde de marée en comparant la vitesse de propagation à la vitesse de phase.

Le long des côtes de la mer du Nord, la marée se comporte généralement comme une onde longue progressive se propageant à une vitesse inférieure à sa vitesse de phase. La vitesse de propagation est d'autant plus faible que la profondeur est réduite.

3.- Simulation de la tempête du 17 au 20 novembre 1973

Des recherches récentes [Heaps (1969), Duun-Christensen (1971), (1975), Flather et Davies (1975)] ont montré que des modèles mathématiques pouvaient rendre de très grands services pour la prédiction des tempêtes si les forces extérieures (vents et pression atmosphérique) étaient données par des modèles atmosphériques.

Depuis quelques années, les instituts météorologiques de plusieurs pays utilisent de manière opérationnelle des modèles numériques de l'atmosphère pour analyser les observations et pour prédire certains paramètres, comme la pression atmosphérique au niveau de la mer. Cette grandeur est la donnée la plus importante pour la simulation des tempêtes. Quand une dépression atmosphérique se déplace sur la mer, la surface libre de l'eau se soulève. Lorsque la dépression quitte cette région, la pression atmosphérique augmente et le niveau de l'eau diminue. Approximativement, un changement d'un millibar pour la pression atmosphérique provoque un changement d'un centimètre pour le niveau d'eau. On a la loi hydrostatique suivante :

$$\Delta\zeta = \kappa\,(\overline{p}_a - p_a) \tag{5.28}$$

où p_a est la pression atmosphérique à l'instant t, $\overline{p}_a$ une pression atmosphérique moyenne de référence et $\kappa = \frac{1}{\rho g}$. ρ représente la masse spécifique de l'eau et g la gravité.

Comme le mouvement de la dépression est généralement lent en mer du Nord (ce n'est pas le cas pour les cyclones tropicaux), la dénivellation d'eau peut être attribuée aux effets produits par les vents induits par la dépression, plutôt qu'aux changements de la pression atmosphérique associés à cette dépression. Il faut donc déterminer les gradients horizontaux de pression et les vents à la surface de la mer à partir du champ de la pression atmosphérique.

Nous appliquerons le modèle développé au chapitre II pour calculer la tempête du 17 au 20 novembre 1973.

3.1.- Equations du modèle de tempête

En raison de la non-linéarité des équations de mouvement (5.6) à (5.8), il semble impossible d'étudier correctement les tempêtes sans faire intervenir les marées. Différents auteurs [Heaps (1969), Flather et Davies (1975)] ont simulé les tempêtes sans tenir compte explicitement des marées. Weenink (1958) a remplacé le terme quadratique de friction par un terme linéaire où les effets des courants de marée sont repris dans un nouveau coefficient de friction. Avec un terme quadratique de friction, il est difficile de tenir compte de l'influence des courants de marée. La meilleure solution est de calculer la tempête et la marée simultanément [Duun-Christensen (1971), (1975)]. Banks (1974) a montré que les interactions -- marée-tempête — ne sont pas négligeables dans les régions peu profondes. Les modèles de Heaps (1969), Flather et Davies (1975) donnent cependant de bons résultats quand la profondeur du bassin dépasse 30 mètres . Les équations régissant les tempêtes sont donc données par les relations (5.6) à (5.8). Elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{M^2}{a}\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{u_\lambda H}{M}\right) + \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{u_\phi H}{M}\right)\right\} = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \phi} - N\, u_\lambda u_\phi\right\} - 2\Omega N\, u_\phi$$

$$= -\frac{M}{a}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{g\zeta + \frac{p_a}{\rho}\right\} + \frac{\rho_a C_d}{\rho H}(1+m) W_\lambda \|\mathbf{W}\| - \frac{D}{H} u_\lambda \|\bar{\mathbf{u}}\| \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{M}{a}\left\{u_\lambda \frac{\partial u_\phi}{\partial \lambda} + \frac{u_\phi}{M}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + N\, u_\lambda^2\right\} + 2\Omega\, N\, u_\lambda$$

(5.8)

$$= -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}\left\{g\zeta + \frac{p_a}{\rho}\right\} + \frac{\rho_a}{\rho}(1+m)\frac{C_d}{H} W_\phi \|W\| - \frac{D}{H} u_\phi \|u\|$$

où $M = \frac{1}{\cos \phi}$ et $N = \sin \phi$; λ et ϕ représentent respectivement la longitude et la latitude; u_λ et u_ϕ sont les deux composantes de la vitesse moyenne sur la profondeur suivant les axes λ et ϕ .

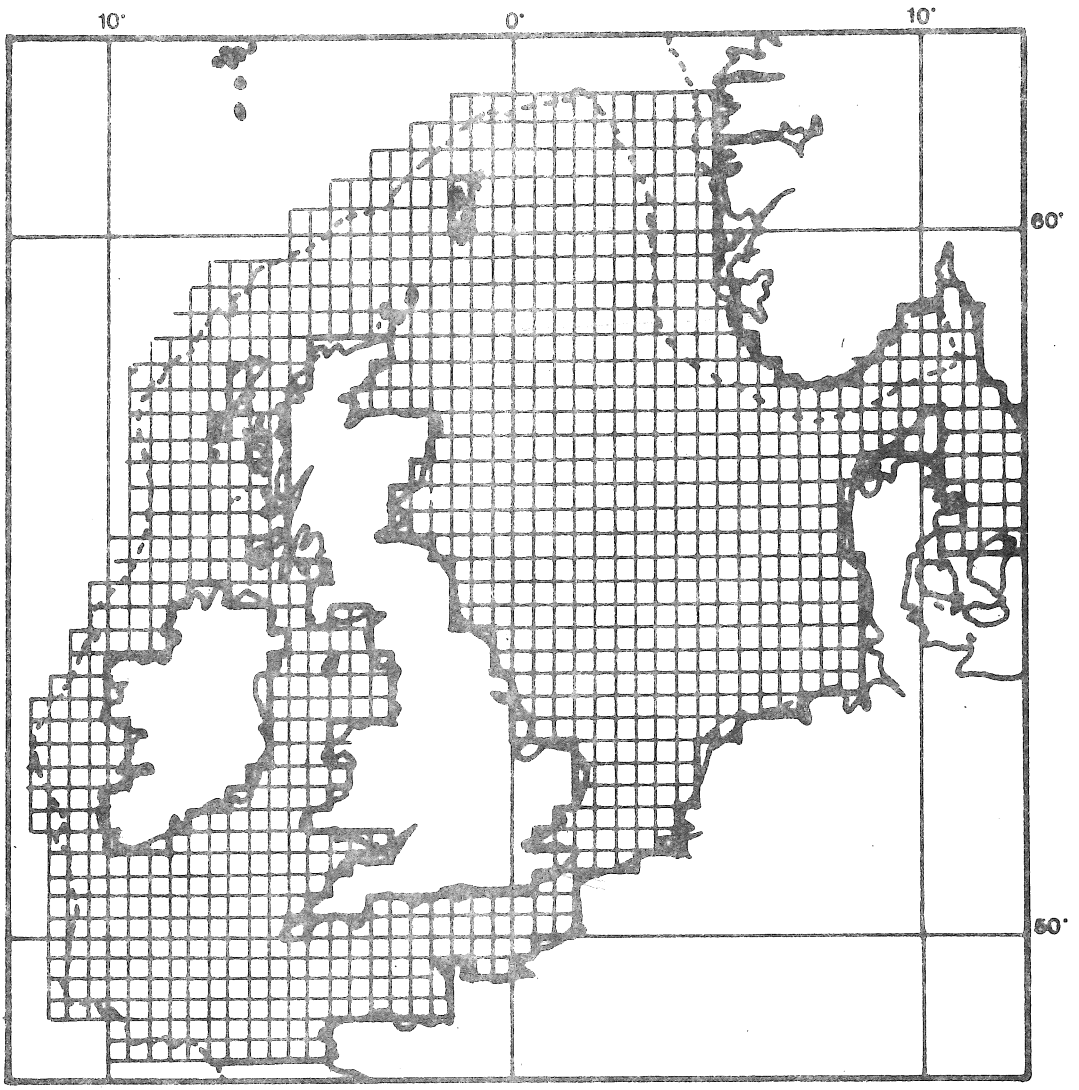


fig. 32.
Grille numérique utilisée pour la simulation de la marée-tempête

Au chapitre IV, nous avons montré que les tempêtes sont généralement engendrées par une forte dépression située près de l'Ecosse. Comme il est très difficile de connaître l'élévation de la surface de l'eau le long d'une ligne intérieure au bassin de la mer du Nord, nous utiliserons un modèle caractérisé par une grille couvrant tout le plateau continental (fig. 32).

3.2.- Les conditions initiales et les conditions aux limites

L'analyse des ordres de grandeur (*cf.* Chapitre III) montre que les termes dissipatifs sont très importants lorsque la profondeur est inférieure à 30 mètres. Comme les perturbations sont rapidement amorties, nous pouvons supposer que l'influence des conditions initiales devient négligeable, en comparaison des effets produits par les forces extérieures d'origine météorologique, après un jour ou deux. Si nous commençons le calcul deux jours avant la tempête, nous pouvons donc utiliser les conditions initiales suivantes :

$$u_\lambda = u_\phi = \zeta = 0 \quad \text{en} \quad t = 0 \tag{5.29}$$

en tous les noeuds du réseau maillé.

Pour résoudre les équations aux dérivées partielles (5.6) à (5.8), nous devons imposer une condition sur $\bar{\mathbf{u}}$ ou sur ζ le long des frontières du domaine. Le long d'une côte, la composante normale de la vitesse $\bar{\mathbf{u}}$ doit s'annuler : on a donc :

$$u_n = u_\lambda \sin\beta + u_\phi \cos\beta \tag{5.30}$$

où β représente l'angle formé par la normale extérieure à la côte et la direction nord.

Le long des frontières à la mer ouverte, nous devons connaître $\zeta = \zeta(\lambda,\phi,t)$ ou encore une relation entre ζ et $\bar{\mathbf{u}}$.

Groen et Groves (1966) et Heaps (1969) proposent une condition du type

$$\zeta = \hat{\zeta}(\lambda,\phi,t) \tag{5.31}$$

où $\hat{\zeta}$ représente la perturbation qui pénètre dans la mer du Nord. Dans

son modèle, Heaps (1969) suppose que la tempête est induite en grande partie sur le plateau continental. Il fait donc l'hypothèse de travail :

$$\zeta = \hat{\zeta}(\lambda,\phi,t) = 0 \qquad (5.32)$$

pour tout t, le long du rebord du plateau continental.

Reid et Bodine (1968) ont démontré que des conditions du type (5.31) ou (5.32) ne parvenaient pas à transférer correctement l'énergie du modèle à l'océan. Flather et Davies (1975) ont utilisé la condition de radiation :

$$h\, u_n = \sqrt{gh}\,(\zeta - 2\,\hat{\zeta}) \qquad (5.33)$$

où ζ est l'élévation totale à la frontière et $\hat{\zeta}$ l'élévation associée à la tempête engendrée à l'extérieur du modèle, h représente la profondeur et u_n la composante de la vitesse normale à cette frontière. Dans notre étude, nous estimons $\hat{\zeta}$ à partir des données météorologiques (*cf.* §3.3 de ce chapitre).

Flather et Davies (1975) ont étudié l'influence des conditions (5.31) et (5.33) sur la dynamique des tempêtes et ont montré que la condition (5.33) donnait de meilleurs résultats dans la région proche de la frontière à la mer ouverte. La solution B, représentant l'élévation calculée avec (5.31), contient de nombreuses oscillations (fig. 33). Selon Flather et Davies, le bruit de fond peut être associé à la réflexion des perturbations le long de cette frontière. L'absence d'oscillations dans la solution A serait due à la radiation d'énergie qui est permise avec la condition (5.33). Lorsqu'on s'éloigne du rebord du plateau continental, les oscillations parasites s'amortissent rapidement en raison de la viscosité numérique introduite par la discrétisation des termes d'advection et de Coriolis. Dans la partie inférieure de la mer du Nord, les différences calculées entre les solutions A et B deviennent négligeables.

Comme le but de notre étude est d'établir un modèle qui allie la rapidité du calcul à la précision des résultats et que notre zone d'intérêt se situe dans le centre et dans le sud de la mer du Nord, nous préférons utiliser la condition (5.31).

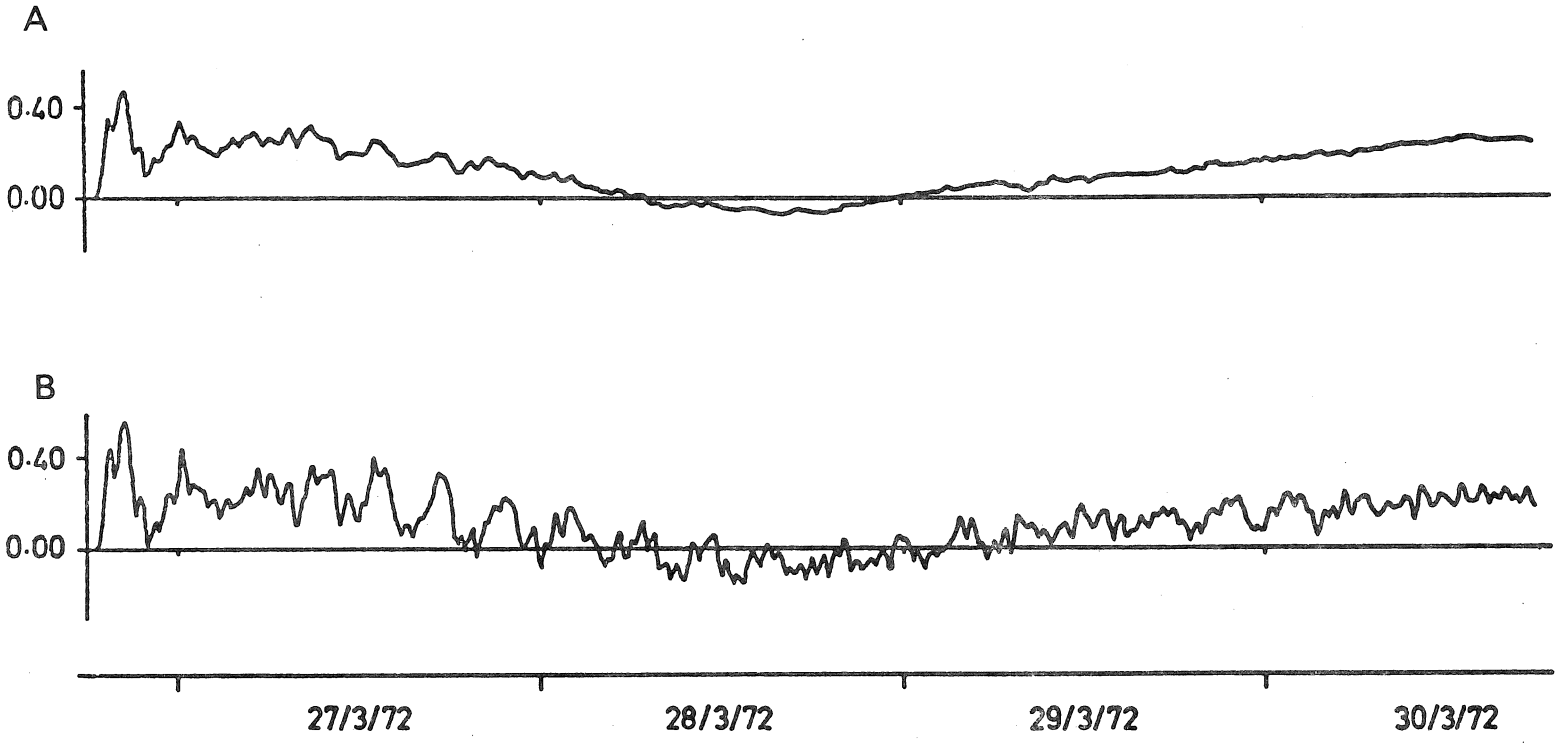


fig. 33.
Influence des conditions à la mer ouverte à Stornoway [d'après Flather et Davies (1975)].

3.3.- Les données météorologiques

Dans différents instituts météorologiques (Bracknel, Grande Bretagne; Copenhague, Danemark; De Bilt, Pays-Bas; Uccle, Belgique; etc.), il existe des modèles atmosphériques qui prédisent l'évolution de certains paramètres, comme la pression atmosphérique au niveau de la mer. A partir de cette grandeur, on peut calculer aisément le vent géostrophique W_g :

$$W_{g_\lambda} = -\frac{1}{a}\,\frac{\partial p_a}{\partial \phi}\,\frac{RT}{f p_a}$$

(5.34)

$$W_{g_\phi} = \frac{1}{a\cos\phi}\,\frac{\partial p_a}{\partial \lambda}\,\frac{RT}{f p_a}$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température de l'air, p_a la pression atmosphérique et f le paramètre de Coriolis.

Il existe différentes relations empiriques pour relier le vent géostrophique au vent réel existant à 10 mètres de la surface. Duun-Christensen (1975) propose :

$$W_{10} = a_2 \sqrt{a_1 W_g + b_1} + b_2 \qquad (5.35)$$

où

$$a_1 = 0{,}54 - 0{,}012\ (T_{air} - T_{eau\ de\ la\ mer})$$

$$a_2 = 6{,}82\ (m/s)^{\frac{1}{2}}$$

(5.36)

$$b_1 = 1{,}68 - 0{,}105\ (T_{air} - T_{eau\ de\ la\ mer})\ (m/s)$$

$$b_2 = -\ 11\ m/s$$

Pour les périodes caractérisées par des vents violents, c'est-à-dire durant les tempêtes, nous devons utiliser la contrainte de friction à la surface donnée par la relation (2.64) :

$$C_d = (2{,}4 \pm 0{,}5) \times 10^{-3} \qquad (2.64)$$

L'*Institut météorologique néerlandais (K.N.M.I.)* nous a transmis les données météorologiques (τ_s , W_{10} , ΔT , p_a) toutes les trois heures aux noeuds d'un réseau maillé (fig. 34) pour la période allant du 17 novembre au 20 novembre 1973. Comme les grilles numériques

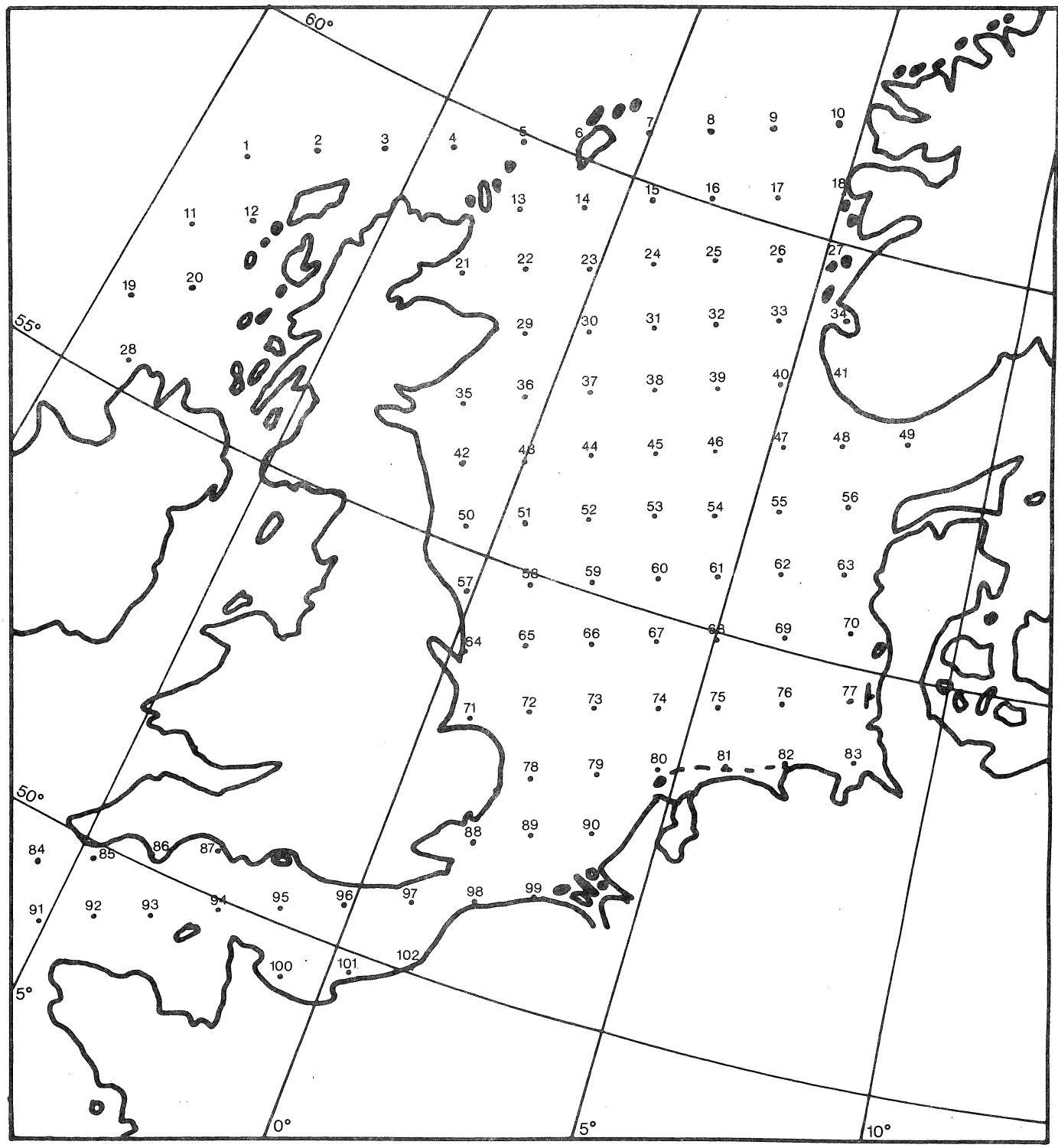


fig. 34.
Grille numérique du modèle atmosphérique du K.N.M.I.

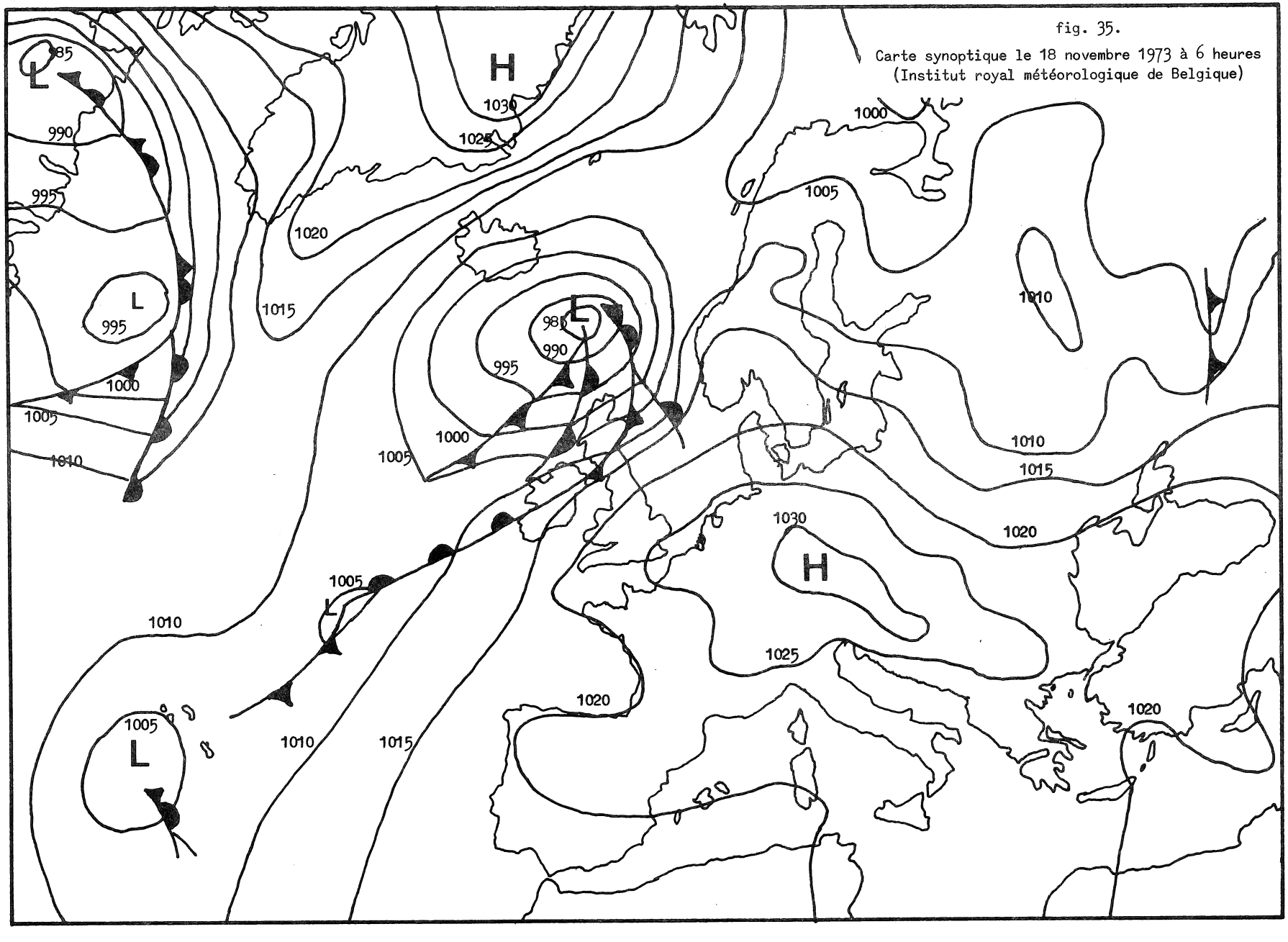


fig. 35.

Carte synoptique le 18 novembre 1973 à 6 heures
(Institut royal météorologique de Belgique)

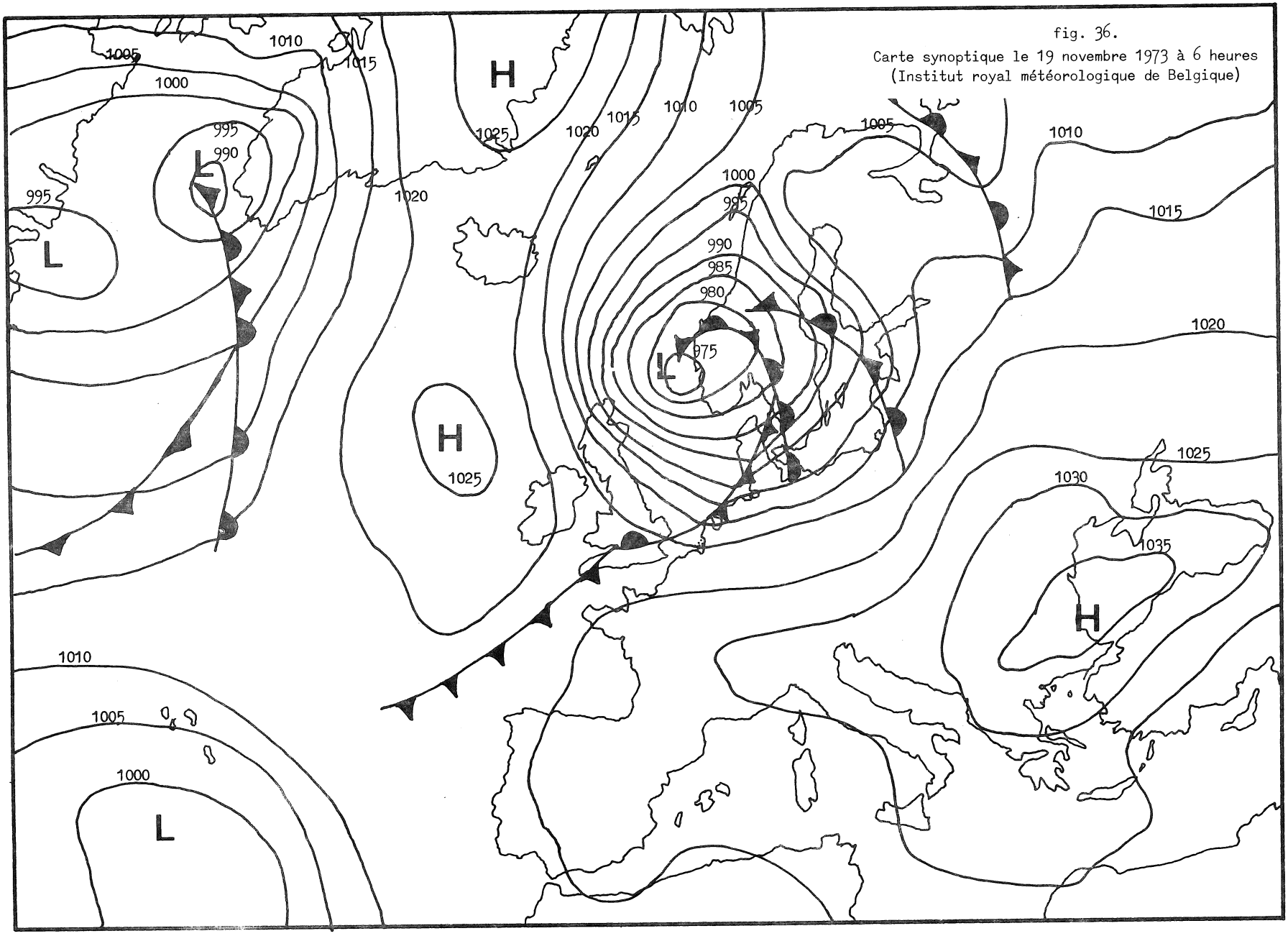


fig. 36.
Carte synoptique le 19 novembre 1973 à 6 heures
(Institut royal météorologique de Belgique)

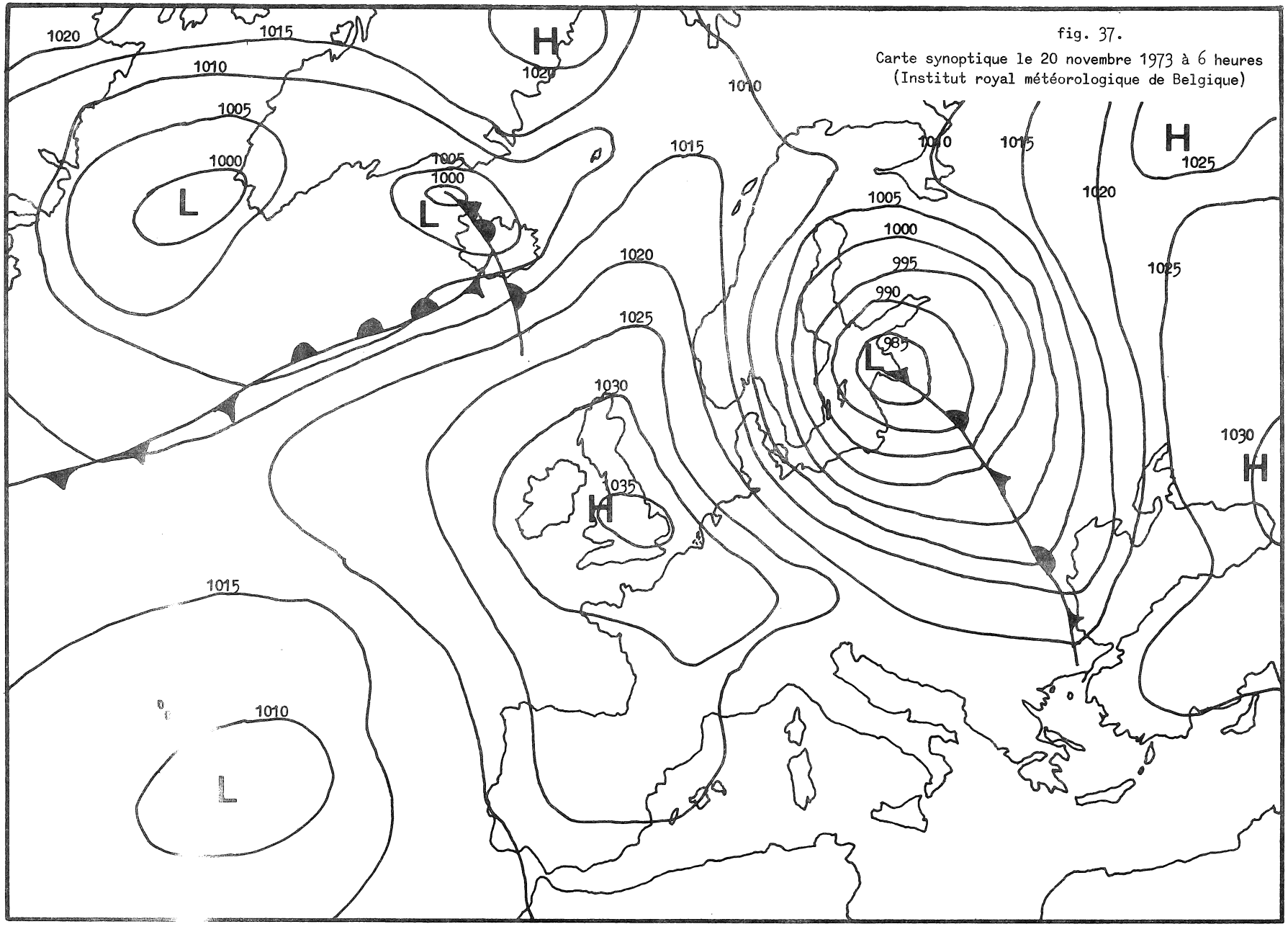


fig. 37.

Carte synoptique le 20 novembre 1973 à 6 heures
(Institut royal météorologique de Belgique)

"marines" et "atmosphériques" ne sont pas identiques, nous avons calculé les grandeurs τ_s et p_a aux noeuds de notre réseau maillé (fig. 32), en nous basant sur des interpolations linéaires. Pour la mer d'Irlande et pour la région proche du rebord ouest du plateau continental, la contrainte de cisaillement τ_s et la pression atmosphérique p_a sont déterminées à partir des relations (5.34) à (5.36) en nous basant sur les cartes synoptiques (fig. 35 à 37) publiées par l'*Institut Royal Météorologique de Belgique*.

L'ensemble de ces informations nous a permis de calculer la distribution spatiale des forces extérieures, c'est-à-dire τ_s et ∇p_a. Le long de la frontière à la mer ouverte, nous supposons que l'élévation $\hat{\zeta}$ (associée à la tempête engendrée à l'extérieur du modèle) suit la loi hydrostatique

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{\rho g} (\overline{p}_a - p_a) \tag{5.37}$$

avec $\overline{p}_a$ pris égal à 1012 mb .

Nous vérifierons *a posteriori* la validité de cette hypothèse simplificatrice.

3.4.- Analyse des résultats

Pour la description et pour l'analyse des résultats de la simulation numérique, nous distinguons deux modèles de tempête :
le modèle A ne faisant pas intervenir le couplage entre les marées et les tempêtes; l'élévation calculée avec ce modèle résulte des seules forces d'origine météorologique; on a donc :

$$\zeta = \zeta_T(\lambda,\phi,t) \; ; \tag{5.38}$$

le modèle B tenant compte de l'interaction entre les marées et les tempêtes, l'élévation calculée se compose de trois termes :

$$\zeta = \zeta_T + \zeta_M + \zeta_I = \zeta_M + \zeta_{T+I} \tag{5.39}$$

où ζ_T représente l'élévation produite par les forces de vent, ζ_M l'élévation de marée et ζ_I l'élévation résultant de l'interaction

marée-tempête. Pour déterminer les effets dûs aux agents météorologiques, nous définissons ζ_{T+I} comme étant la différence entre le niveau vrai et le niveau non-perturbé de marée. De cette définition, il résulte :

$$\zeta_{T+I} = \zeta - \zeta_M \quad . \tag{5.40}$$

Afin de vérifier les capacités offertes par les modèles mathématiques, nous simulerons la tempête du 17 au 20 novembre 1973.

Les cartes synoptiques (fig. 35 à 37) montrent les conditions météorologiques lors de cette tempête. Durant la période allant du 18 novembre à 06 h G.M.T. au 19 novembre à 06 h G.M.T., une dépression atmosphérique est passée de l'Atlantique à la Scandinavie. Son centre s'est approximativement déplacé d'ouest en est, le long du 60ème parallèle, et les vents associés à cette dépression ont soufflé du nord-ouest.

Comme le coeur de la dépression est situé à l'extérieur du plateau continental et que l'intensité des vents est quasi uniforme sur la plus grande partie de la mer du Nord, nous avons une tempête mi-interne, mi-externe.

Les figures 38 et 39 donnent respectivement les élévations calculées avec le modèle A (ζ_T) et avec le modèle B (ζ_{T+I}) .

a) Le long des côtes de la Grande Bretagne (de Lerwick à Lowestoft), on assiste tout d'abord à une diminution, ensuite à une augmentation du niveau de la mer. Les figures 38 et 39 montrent que les perturbations se déplacent le long de ces côtes à une vitesse proche de celle d'une onde progressive. Comme les vitesses de propagation de la tempête varient entre 17,5 m/s et 24,4 m/s , nous pouvons dire que la propagation de cette tempête est semblable à celle de la marée semi-diurne (*cf.* chapitre V, § 2.4.5).

b) Pour les ports continentaux, la variation temporelle de l'élévation est différente : l'élévation maximale se produit approximativement au même moment (Hoek van Holland, Den Helder, Helgoland). L'onde de tempête a perdu une grande partie de son caractère progressif : elle produit une élévation générale du niveau au même instant. La rotation du niveau d'eau (voir entre Helgoland et Esbjerg) résulte de la force

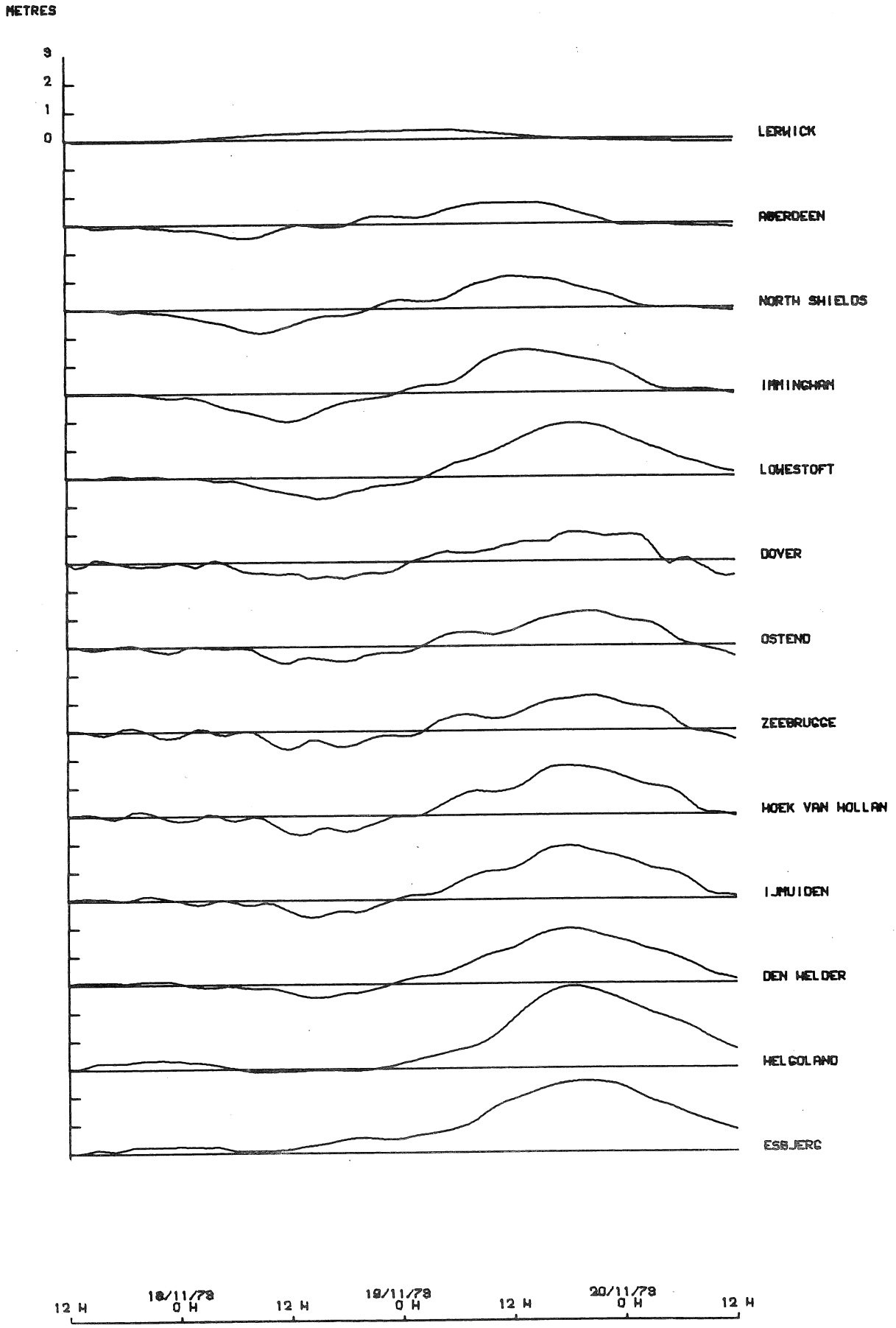


fig. 38.

Elévation ζ_T calculée avec le modèle A

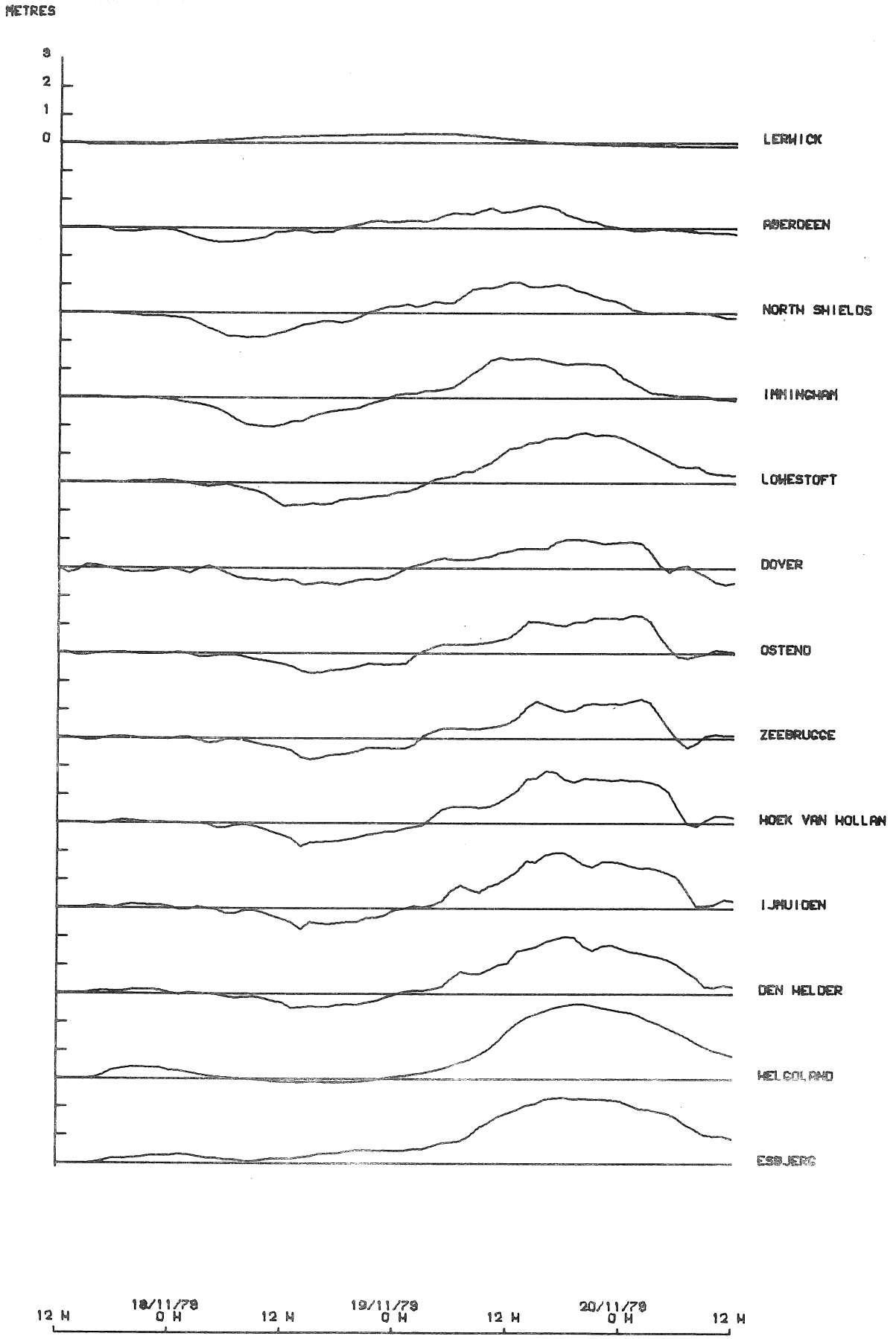


fig. 39.

Elévation ζ_{T+I} calculée avec le modèle B.

de Coriolis et la diminution en amplitude est une conséquence de la dissipation d'énergie par friction dans les eaux peu profondes.

Pour mettre en valeur les avantages du modèle B, nous comparons les solutions ζ_T et ζ_{T+I} aux observations. Les figures 40 et 41 montrent que les modèles A et B reproduisent correctement les dénivellations observées. A Esbjerg, les modèles donnent des résultats moins satisfaisants : les écarts entre les élévations calculées et observées sont importants. Pour estimer la dénivellation à Esbjerg, nous nous sommes basés sur un noeud du réseau situé à quelque 20 kilomètres de ce port. Comme la pente de la surface est forte dans le German Bight et que la friction joue un rôle très important dans ces régions peu profondes, nous pouvons comprendre une partie des écarts entre l'observation et le calcul. Les dénivellations maximales calculées (ζ_T) sont généralement plus grandes que celles déduites des mesures (ζ_0). Ces écarts peuvent s'expliquer aisément si on se rappelle que le terme de friction sur le fond est quadratique en la vitesse : on a en effet :

$$\tau_{f_{T+M}} > \tau_{f_T} + \tau_{f_M} .$$

$\tau_{f_{T+M}}$ représente la contrainte de cisaillement sur le fond en présence d'une onde de marée et de tempête, τ_{f_T} la contrainte de cisaillement en présence d'une onde de tempête et τ_{f_M} celle qui correspond à l'onde de marée.

Etudions maintenant plus en détail l'influence de l'interaction marée-tempête. En comparant ζ_T et ζ_{T+I} sur la figure 42, nous remarquons une légère amélioration des résultats calculés après l'introduction de l'interaction marée-tempête. L'analyse des figures 42 et 43 permet de tirer quatre conclusions importantes :

a) ζ_{T+I} croît et décroît plus rapidement que ζ_T ;

b) les tempêtes négatives sont mieux reproduites avec le modèle B (Lowestoft, Oostende);

c) l'élévation maximale est généralement plus faible avec le modèle B (Esbjerg);

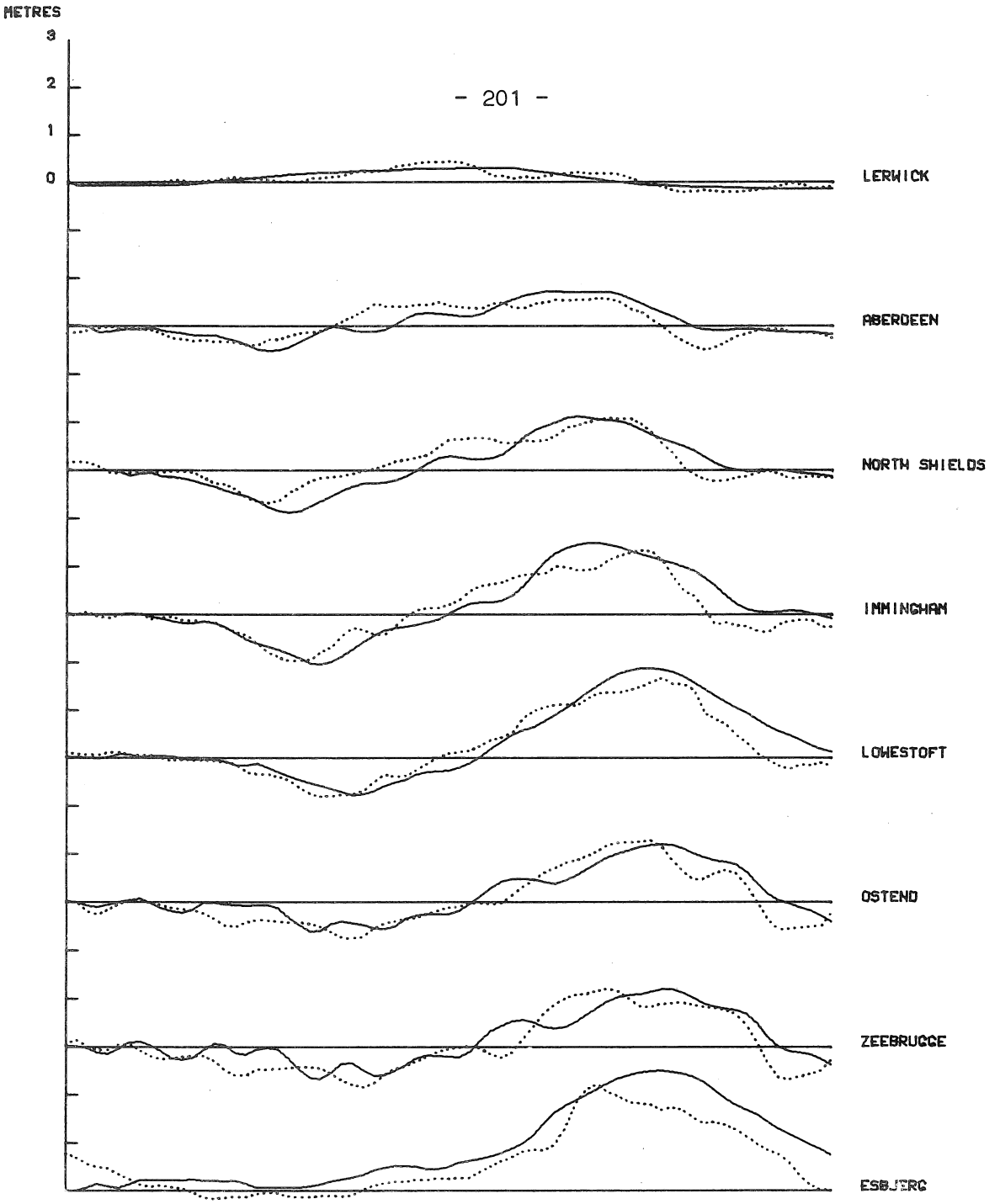

METRES
3
2
1
0
LERWICK
ABERDEEN
NORTH SHIELDS
IMMINGHAM
LOWESTOFT
OSTEND
ZEEBRUGGE
ESBJERG
Elévation calculée avec le modèle A
Elévation observée
18/11/79
19/11/79
20/11/79
12 H
0 H
12 H
0 H
12 H
0 H
12 H

fig. 40.

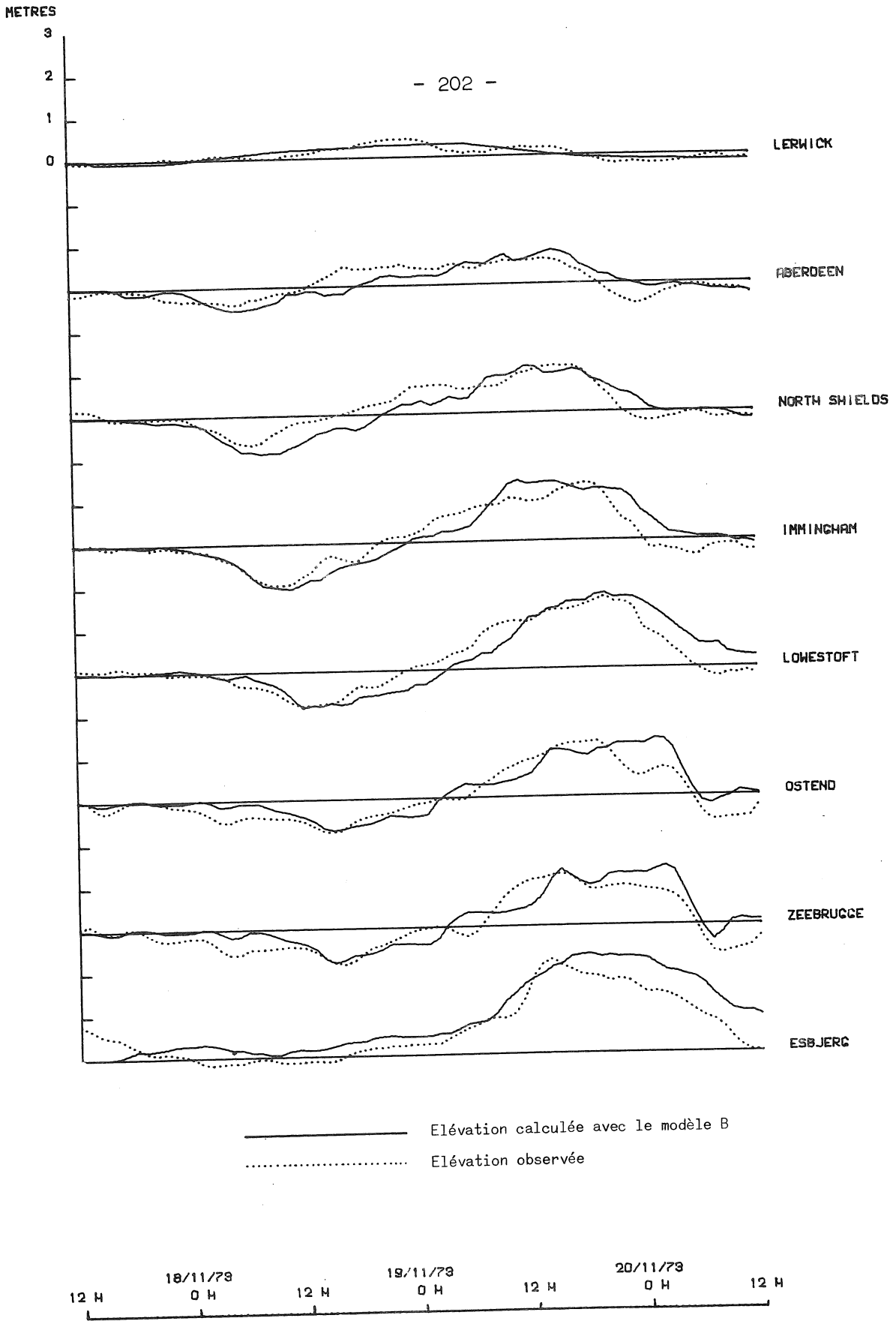

METRES
3
2
1
0
LERWICK
ABERDEEN
NORTH SHIELDS
IMMINGHAM
LOWESTOFT
OSTEND
ZEEBRUGGE
ESBJERG
Elévation calculée avec le modèle B
Elévation observée
12 H
18/11/73
0 H
12 H
19/11/73
0 H
12 H
20/11/73
0 H
12 H

fig. 41.

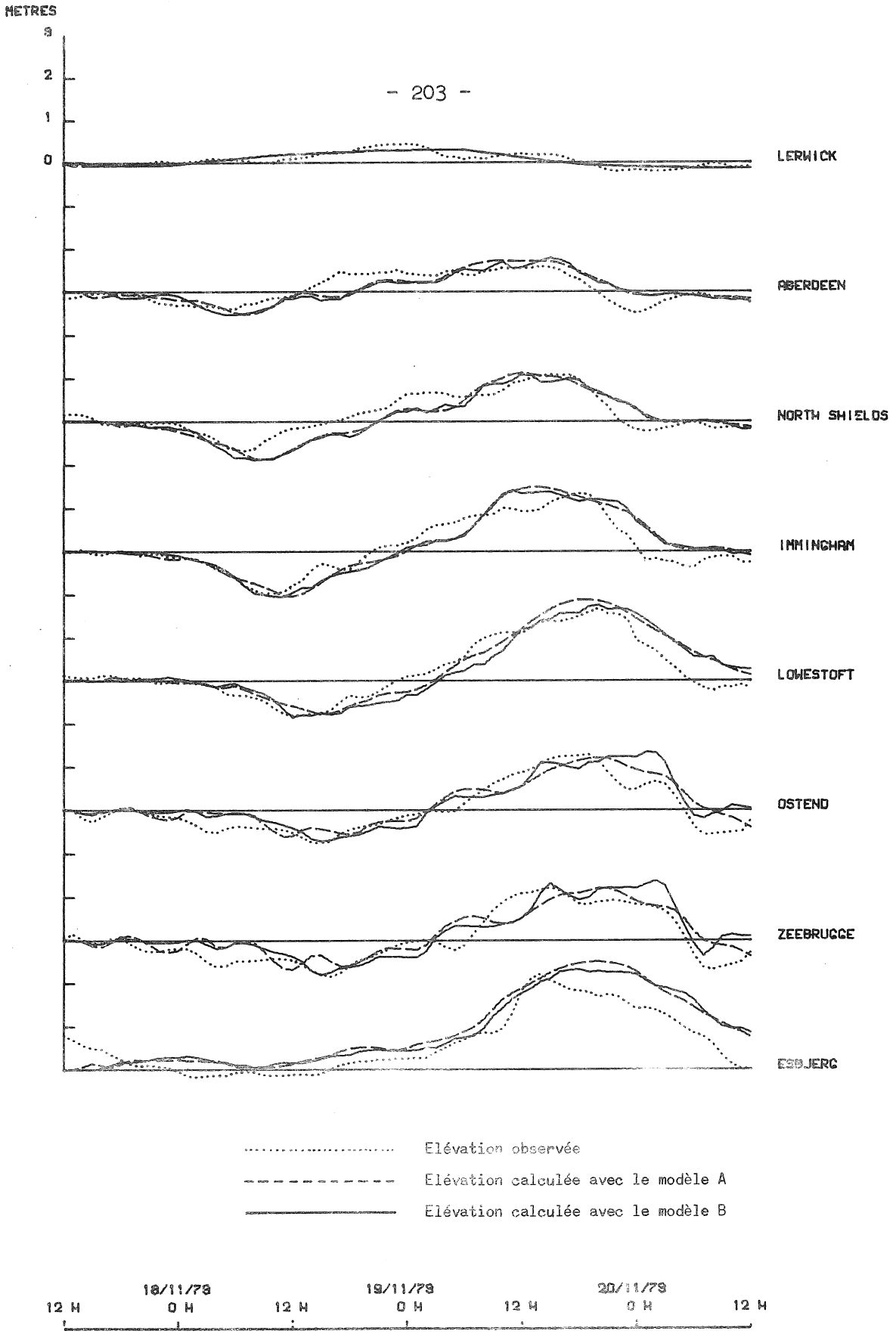

METRES
3
2
1
0
LERWICK
ABERDEEN
NORTH SHIELDS
IMMINGHAM
LOWESTOFT
OSTEND
ZEEBRUGGE
ESBJERG
Elévation observée
Elévation calculée avec le modèle A
Elévation calculée avec le modèle B
18/11/79
19/11/79
20/11/79
12 H
0 H
12 H
0 H
12 H
0 H
12 H

fig. 42.

d) la présence d'un double pic est mise en évidence par le modèle B lorsque le premier maximum apparaît un peu avant la marée haute (Ijmuiden ou Den Helder).

Les quatre caractéristiques révélées par le modèle B se retrouvent également dans les dénivellations observées. Sur les figures 42 et 43, nous remarquons que l'élévation maximale se produit le plus souvent à marée basse ou à marée montante. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de Rossiter (1961) : le maximum de la dénivellation qui se produit à marée haute ou à marée descendante diminue en amplitude, mais le maximum de ζ qui se produit à marée basse ou à marée montante augmente en amplitude. Lorsque le maximum de la dénivellation se produit un peu avant la marée haute, on observe deux pics (fig. 43), l'un avant, l'autre après la marée haute. Proudman (1955) a démontré, dans le cas unidimensionnel, le rôle important joué par la friction dans l'apparition de ce double pic.

Quelles sont les causes des écarts entre le calcul et l'observation ?

La friction sur le fond joue un rôle important dans la dynamique des ondes longues : les incertitudes concernant le coefficient de friction (*cf.* chapitre II) sont causes d'écarts entre les dénivellations calculées et observées.

Au chapitre II, nous avons montré que le coefficient de friction à la surface de la mer dépendait de nombreux paramètres (état de la mer, stabilité de la colonne d'air, etc.). Le coefficient C_d utilisé pour le calcul de la contrainte de cisaillement à la surface est affecté d'une erreur importante [selon Roll (1965), elle peut varier entre 15 et 20 %]. La détermination du vent à la surface introduit également des erreurs dans le calcul de τ_s . Pour ces diverses raisons, la contrainte τ_s est donc entachée d'une erreur voisine de 20 % . Il serait donc illusoire de vouloir obtenir des résultats avec une précision supérieure à 20 % .

Une autre source d'erreurs doit provenir de la condition à la limite le long du rebord du plateau continental. La condition (5.31)

est une condition hydrostatique; en effet, par la loi (5.37), la mer réagit hydrostatiquement à l'action de la pression atmosphérique. Bien que la condition (5.33) admette une "fuite" d'énergie vers l'océan, elle ne fournit aucune information dynamique sur l'entrée ou sur la sortie d'eau pour une tempête externe à la mer du Nord. Pour obtenir de meilleurs résultats, il faudrait disposer d'une série de marégraphes pélagiques qui transmettraient les données de pression, soit par câbles téléphoniques, soit par radio.

La précision des résultats de la simulation dépend donc de la qualité des conditions aux limites et des paramètres intervenant dans le calcul des contraintes de friction à la surface et au fond.

Comme le modèle B reproduit non seulement les tendances de la variation temporelle de la dénivellation de la surface de la mer mais aussi plusieurs de ses caractéristiques "fines", nous pouvons conclure à un accord satisfaisant entre l'observation et les résultats de la simulation numérique faisant intervenir le couplage entre les marées et les tempêtes.

Chapitre VI

La circulation résiduelle en mer du Nord

1.- Introduction

Au chapitre précédent, nous avons montré qu'un modèle mathématique permettait de calculer les marées et les tempêtes dans une mer continentale. Ces phénomènes sont très importants car ils conditionnent aussi bien la dispersion et la dérive des polluants à court terme que le dimensionnement des digues.

Il existe aussi d'autres phénomènes importants, pour lesquels le temps caractéristique est supérieur à la période d'une marée ou d'une tempête. On peut citer la dérive à long terme du plancton et des polluants, la sédimentation et la variation temporelle des masses d'eau. La détermination du courant résiduel ou "moyen" est donc capitale pour l'étude de ces mouvements lents.

La circulation résiduelle en mer du Nord fut l'objet de nombreuses études expérimentales. Citons d'abord le travail fameux de Böhnecke (1922) où le champ des courants résiduels est déduit de la distribution de salinité. Il montre que l'eau de l'Atlantique pénètre :

- par le nord de l'Ecosse et descend vers le sud le long de la côte anglaise aussi loin que Norfolk;
- par le Pas de Calais; cette eau s'écoule dans la partie sud de la mer du Nord et dans le German Bight.

Böhnecke observe la présence de trois gyres : au voisinage du Dogger Bank, dans le German Bight et dans la partie centrale de la mer du Nord. Les circulations d'été et d'hiver se différencient par les

dimensions et par les localisations de ces gyres. Des études plus récentes ont confirmé les résultats de Böhnecke.

L'étude expérimentale de la circulation résiduelle est difficile car elle nécessite des séries de mesures longues et nombreuses. Ces mesures étant très coûteuses, il convient de les réduire au minimum : un modèle mathématique adapté pour l'étude des courants résiduels donnerait la distribution spatiale de ces courants si on lui fournissait des données aux limites du modèle. Les expériences de Carruthers (1935), Wyrtki (1954), Kalle (1949), Cartwright (1961), Laevastu (1963), Otto (1970), (1975) ont permis d'estimer les flux d'eau aux différentes frontières de la mer du Nord. Le modèle mathématique établi au chapitre II, nourri de ces informations, donnera la distribution observée du champ de courant. Nous montrerons également que des modèles simples, ne faisant pas intervenir le couplage entre les circulations transitoires (marées et tempêtes) et les circulations résiduelles, ne peuvent pas mettre en évidence tous les gyres observés.

2.- Caractéristiques spatio-temporelles des masses d'eau en mer du Nord

Depuis les travaux de Böhnecke (1922), nous savons que l'eau de l'Atlantique, caractérisée par une salinité élevée, pénètre dans la mer du Nord par le Pas de Calais et par l'ouverture nord située entre l'Ecosse et les Iles Shetland et que les eaux peu salées de la mer Baltique entrent dans la mer du Nord par le Skagerrak. Les fleuves et les nappes aquifères produisent des eaux côtières caractérisées par une salinité faible (de l'ordre de 30 ‰). En accord avec les données de Böhnecke, nous trouvons trois masses d'eau primaire :

- des eaux très salées (S > 35 ‰) de l'Atlantique nord pénétrant par le nord de la mer du Nord,
- des eaux très salées (S > 35 ‰) de l'Atlantique nord pénétrant par le Pas de Calais,
- des eaux peu salées (S < 32 ‰) de la mer Baltique passant par le Skagerrak.

Selon la classification de Laevastu (1963) (fig. 1), cinq masses d'eaux secondaires dérivent de celles-ci :

- eau côtière d'Ecosse,
- eau côtière d'Angleterre,
- eau côtière du continent,
- eau du nord de la mer du Nord,
- eau du centre de la mer du Nord.

La distribution verticale des masses d'eaux primaires et secondaires est généralement uniforme en mer du Nord [Lee (1970)]. On observe cependant des stratifications permanentes dans le Skagerrak et le long des côtes norvégiennes où la profondeur est supérieure à 200 mètres . A ces endroits, on trouve une eau caractéristique de la mer Baltique dans la couche de surface et, dans celle du fond, une eau d'origine nord-atlantique. Durant les mois d'été, une faible stratification thermique est présente dans les régions situées au nord du 54 °N parallèle. Selon Vangriesheim (1974), cette stratification est rompue dans les zones de forts courants de marée.

Le *Conseil international pour l'Exploration des mers* publie mensuellement les cartes de température et de salinité tant en surface qu'au fond (fig. 2 et 3). Les variations temporelles de la température et de la salinité ont fait l'objet de nombreuses recherches [Tomczak et Goedecke (1962), Schott (1966), Tomczak (1967) et Lee (1968), pour ne citer que des ouvrages récents]. Il existe des variations saisonnières de l'ordre de 4 °C et de 0,2 ‰ mais les fluctuations annuelles de température et de salinité sont beaucoup plus faibles. On assiste, dans la partie sud de la mer du Nord, à une légère récession de l'influence de l'eau nord-Atlantique provenant de la Manche depuis 1955 [Hill (1974)]. Dickson (1971) a associé ces variations à long terme à un champ anormal de pression atmosphérique moyenne.

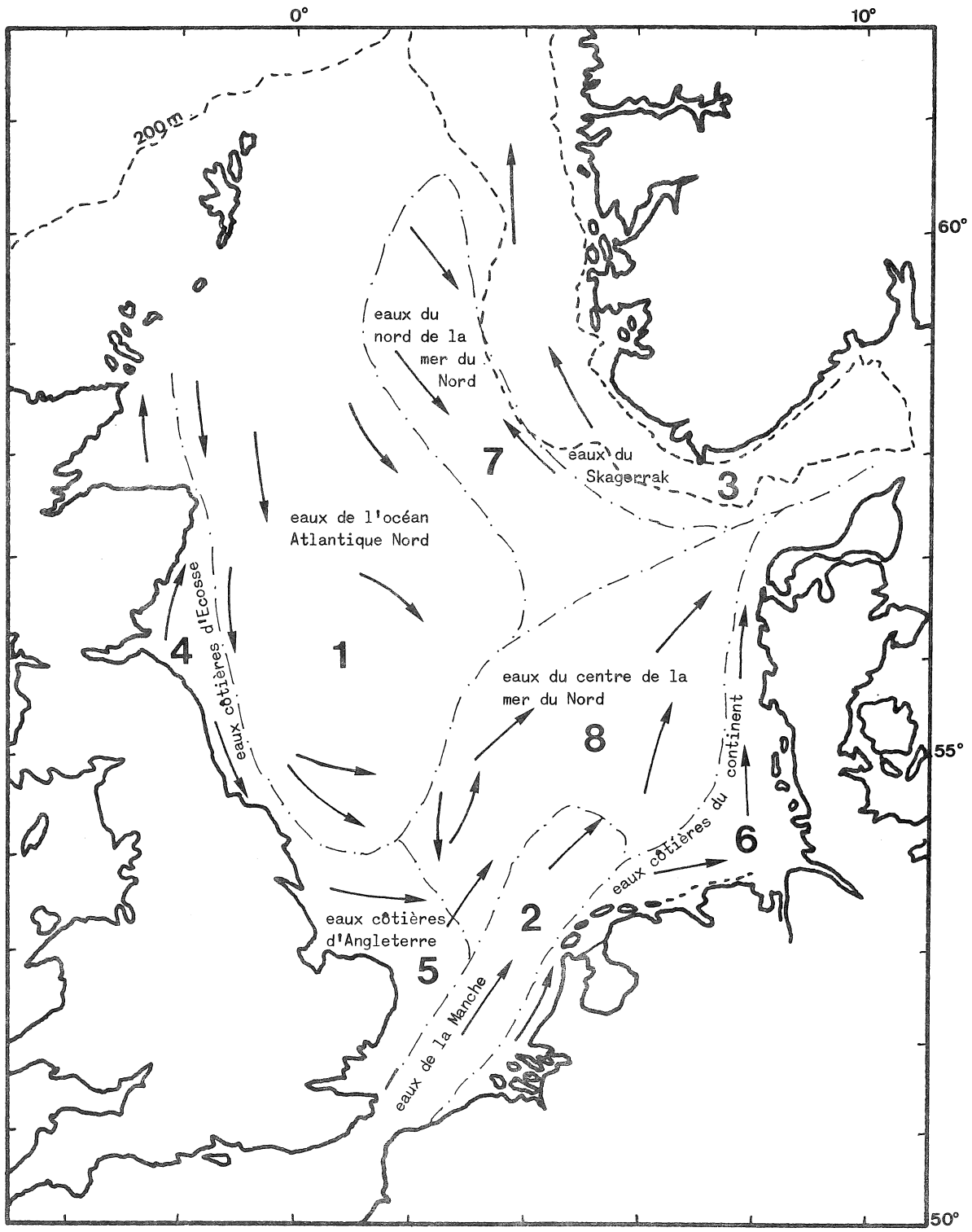


fig. 1.

Les masses d'eau en mer du Nord en hiver d'après Laevastu (1963).

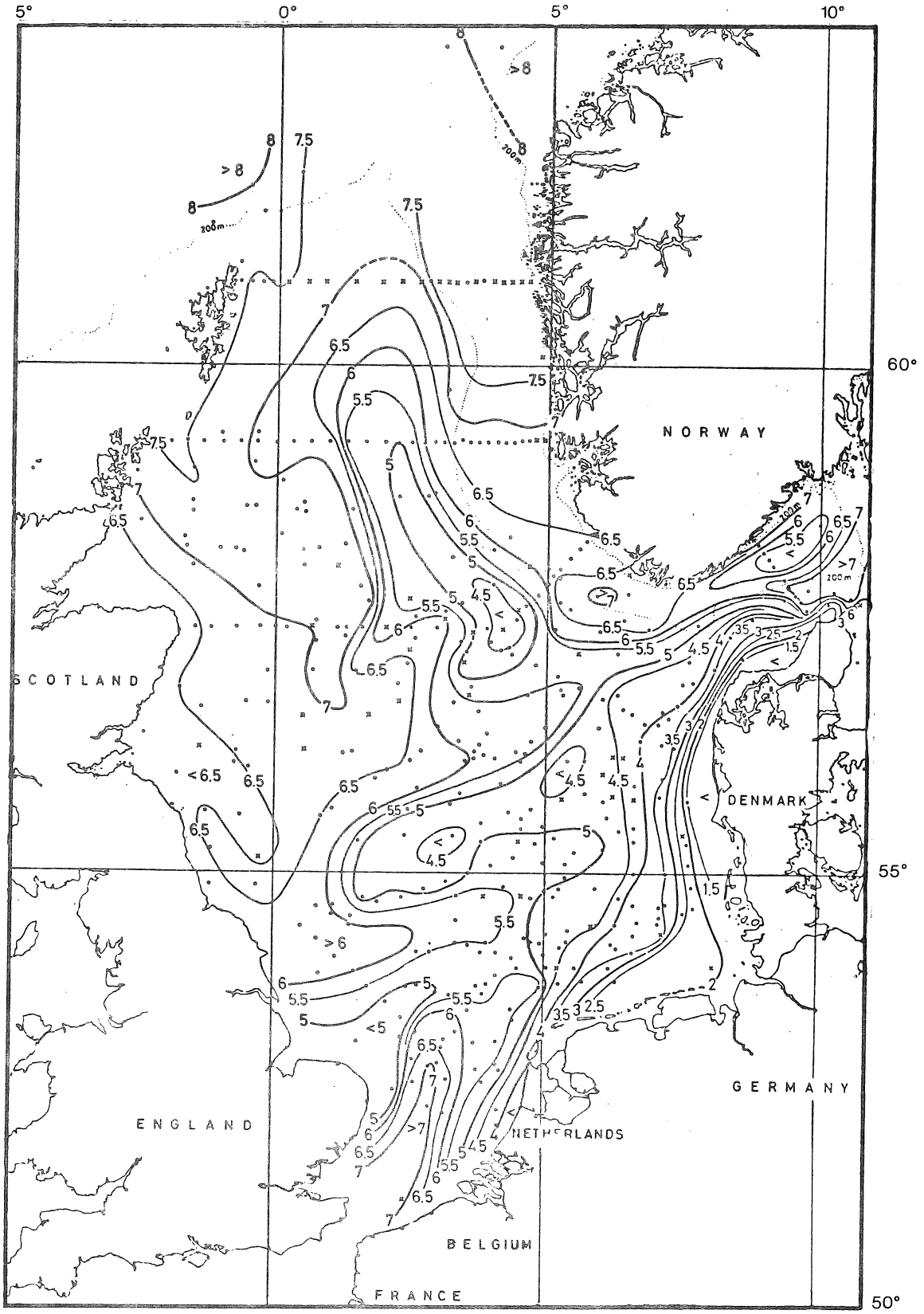


fig. 2.

Température au fond (°C). I.C.E.S., Service hydrographique, février 1972.

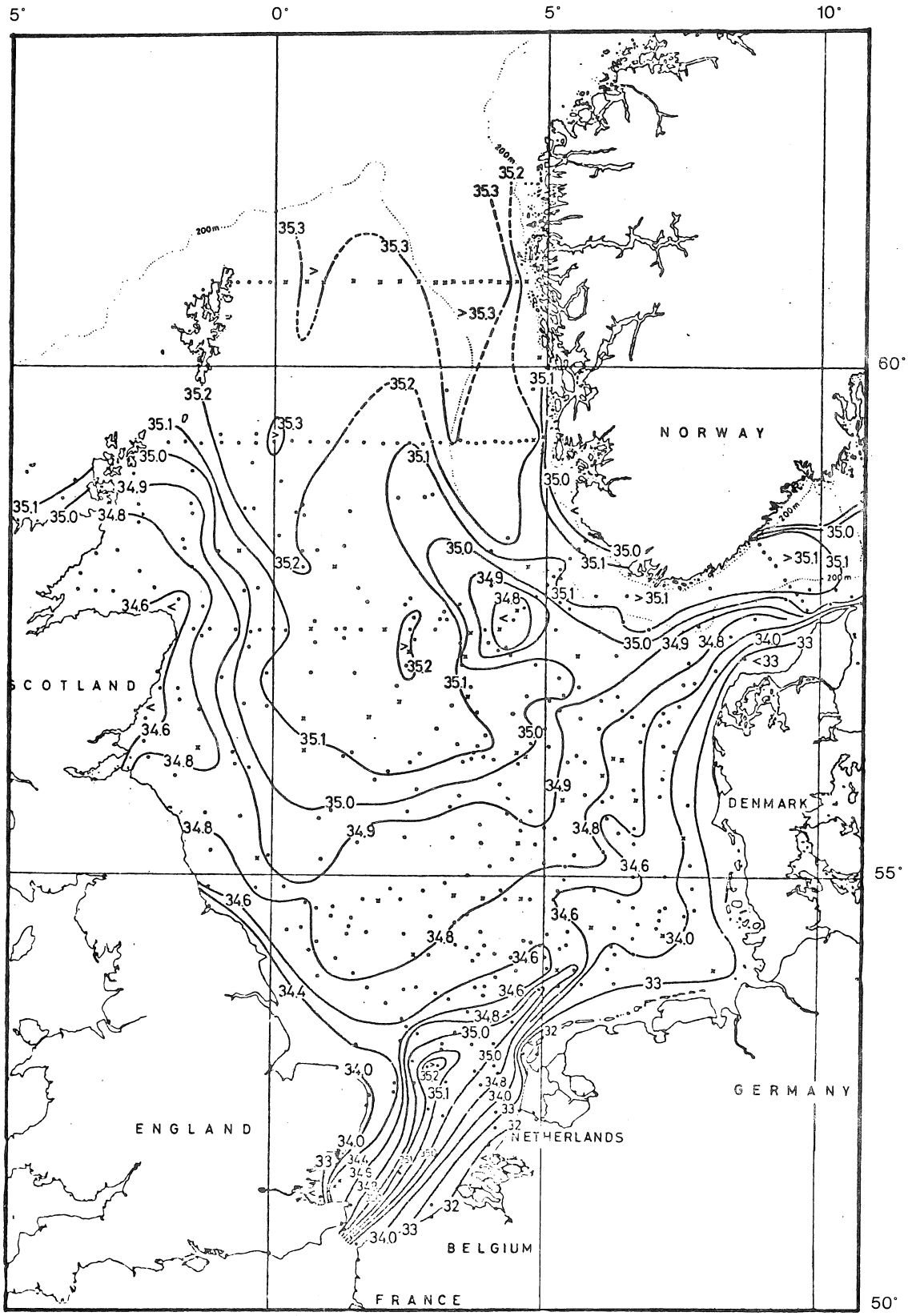


fig. 3.

Salinité au fond (pour mille). I.C.E.S., Service hydrographique, février 1972.

3.- Formulation mathématique de la circulation résiduelle en mer du Nord

Avant d'écrire les équations régissant la circulation résiduelle, il convient de rappeler la définition du courant résiduel. Le courant résiduel (*cf.* chapitre II) est le courant intégré sur un intervalle de temps choisi suffisamment long pour couvrir plusieurs périodes de marée et pour éliminer ainsi la plupart des contributions aléatoires.

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier la circulation résiduelle, caractérisée par une échelle de temps de l'ordre d'une année. Comme les inhomogénéités horizontales et verticales de la température et de la salinité sont faibles sur cet intervalle de temps, nous ferons l'hypothèse de travail suivante :

(6.1) ρ = constante .

Puisque la densité de l'eau est constante et que la profondeur du bassin de la mer du Nord est inférieure à 200 mètres (sauf dans le canal norvégien), nous supposerons les mouvements verticaux inexistants. Dans ces conditions, le modèle de circulation résiduelle établi au chapitre II peut s'appliquer à la mer du Nord.

Au chapitre V, nous avons montré que les élévations résiduelles de marée sont de l'ordre de 10^{-1} m dans les régions très peu profondes. On pourrait également montrer que les élévations de la surface libre, résultant d'une contrainte de vent moyenne sur une période d'un an, sont aussi de l'ordre de 10^{-1} m . Pour ces raisons, nous pouvons négliger ζ_0 devant h dans les équations régissant la circulation résiduelle.

En négligeant ζ_0 devant h dans les équations (2.82) et (2.83), nous obtenons :

(6.2) $$\nabla . U_0 = 0$$

(6.3) $$f\, e_3 \wedge U_0 = - h\, \nabla\left[\frac{(p_a)_0}{\rho} + g\zeta_0\right] - Kh^{-1} U_0 + C_{10}(W \| W \|)_0 + \tau_{t_0}$$

où τ_{t_0} représente la contrainte de marée définie au chapitre II.

Lorsqu'on calcule le spectre énergétique du courant ou de l'élévation (fig. 2, chapitre II), on remarque immédiatement le rôle

prépondérant joué par la marée semi-diurne. Nous estimerons la contrainte de marée τ_{t_o} en nous basant sur la marée semi-diurne moyenne.

L'équation (6.2) permet d'introduire une fonction de courant ψ, définie par

$$U_{0_\lambda} = -\frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \tag{6.4}$$

$$U_{0_\phi} = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} . \tag{6.5}$$

En divisant (6.3) par h et en prenant le rotationnel pour éliminer l'élévation de la surface libre, nous obtenons en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} K\Delta^2\psi + \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left[\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial K}{\partial \lambda} - \frac{2K}{h}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \lambda} + h\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{f}{a}\frac{\partial h}{\partial \phi}\right] \\ + \frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial K}{\partial \phi} - \frac{2K}{h}\frac{1}{a}\frac{\partial h}{\partial \phi} + \frac{f}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right] \\ = h(\nabla \wedge \tau_\Sigma)_z + \left[\tau_{\Sigma_\lambda}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(h\cos\phi) - \tau_{\Sigma_\phi}\frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

où $$\tau_\Sigma = C_{10}\,(W\,\|W\|)_0 + \tau_{t_o}$$

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (6.6), il faut connaître la distribution spatiale de la force extérieure τ_Σ et les conditions aux limites.

3.1.- Les conditions aux limites

L'équation (6.6) étant elliptique, il suffit de connaître ψ ou $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ le long des frontières du bassin. Le long des côtes, nous avons un flux normal à la côte nul. Cette condition s'exprime mathématiquement par :

$$\psi = \text{constante} . \tag{6.7}$$

La mer du Nord étant en communication avec l'Atlantique nord, la Manche et le Skagerrak, nous devons connaître la distribution spatiale de ψ ou de $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ le long des lignes de séparation mer-mer et mer-océan. Dans

la littérature anglo-saxone, on désigne de telles frontières par *open sea boundaries*. Nous traduisons cette expression par frontières à la mer ouverte.

3.1.1.- Estimation des flux aux frontières à la mer ouverte

La détermination des courants résiduels par la méthode courantométrique n'est possible que dans les régions caractérisées par un courant résiduel intense. De plus, elle nécessite l'emploi prolongé d'un matériel très coûteux. Dans les zones où la vitesse du courant est faible (de l'ordre du centimètre par seconde), les résultats des mesures courantométriques sont entachés d'erreurs considérables. Certains auteurs, dont Böhnecke (1922), ont préféré utiliser les courbes d'égale salinité pour estimer les flux aux frontières à la mer ouverte.

Sans chiffrer les apports d'eau du nord-Atlantique, Böhnecke en a cependant recherché les zones d'influence et leurs variabilités saisonnières (fig. 4). En se basant sur les recherches de Böhnecke (1922) et de Tait (1930), (1931), (1937), Kalle (1949) et Laevastu (1963) ont calculé le flux d'eau entrant dans la mer du nord par sa frontière nord (fig. 5). Ils ont obtenu la valeur annuelle suivante :

$$Q_{\text{Nord-Atlantique}} = 23\,000 \text{ km}^3/\text{an} .$$

Il existe évidemment des fluctuations saisonnières mais il est très difficile de les chiffrer.

Les mesures de courant au travers du Pas de Calais sont peu nombreuses en raison de la difficulté de mouiller des appareils de mesure dans les deux chenaux situés de part et d'autre du banc de sable central signalé par le bateau phare *Varne*. Les mesures de Van Veen (1938) et Carruthers (1935) ont donné des valeurs inférieures à celle de Cartwright (1961), soit

$$Q_{\text{Pas de Calais}} = 7\,400 \text{ km}^3/\text{an} .$$

Cette valeur est maintenant acceptée par plusieurs auteurs [*e.g.* Otto (1970)]. Il y a cependant des critiques à émettre car Cartwright s'est

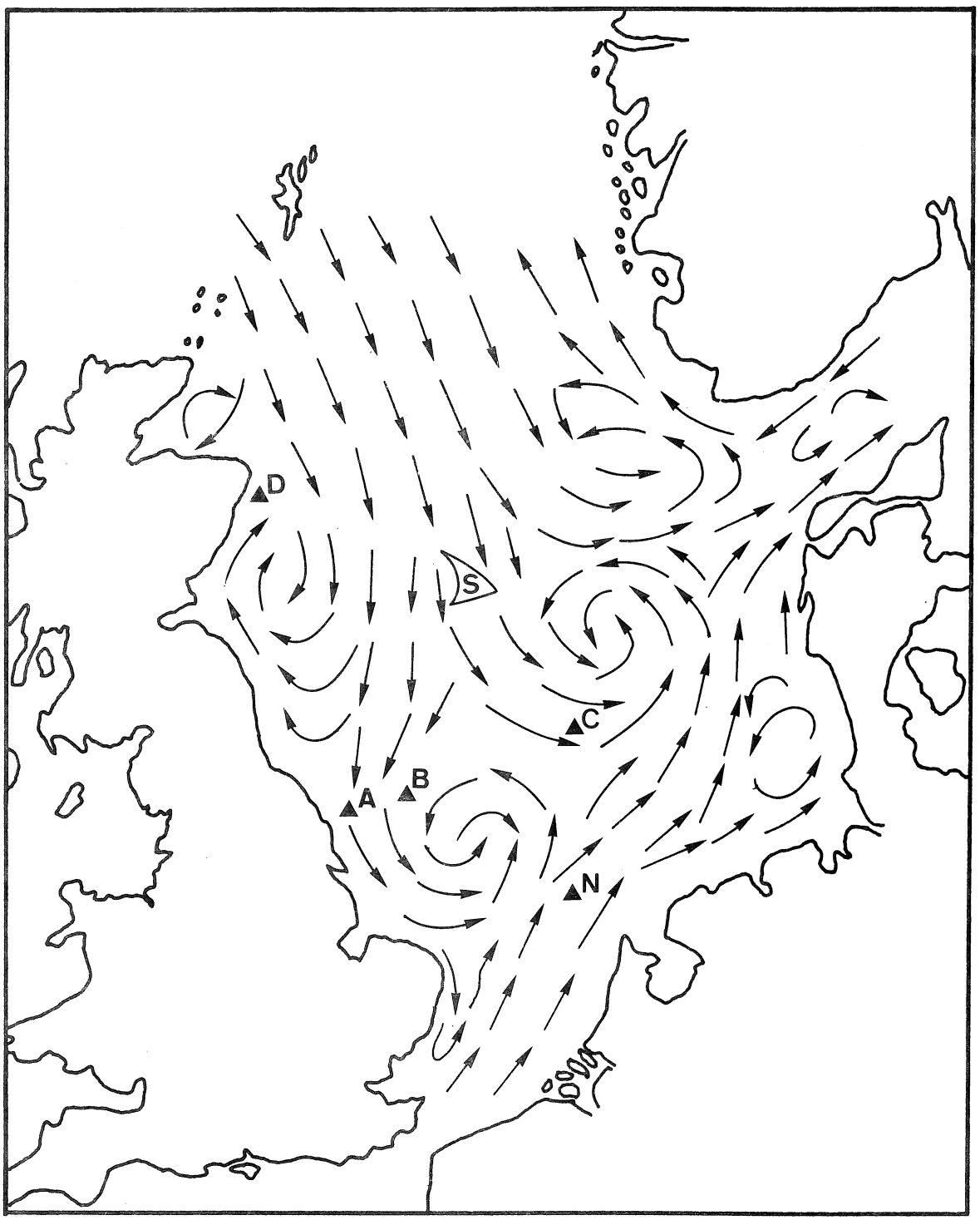


fig. 4a.

Les courants résiduels de surface en février d'après Böhnecke (1922). Position des stations I.C.E.S. et STAFLO. [Figure tirée de Hill (1974).]

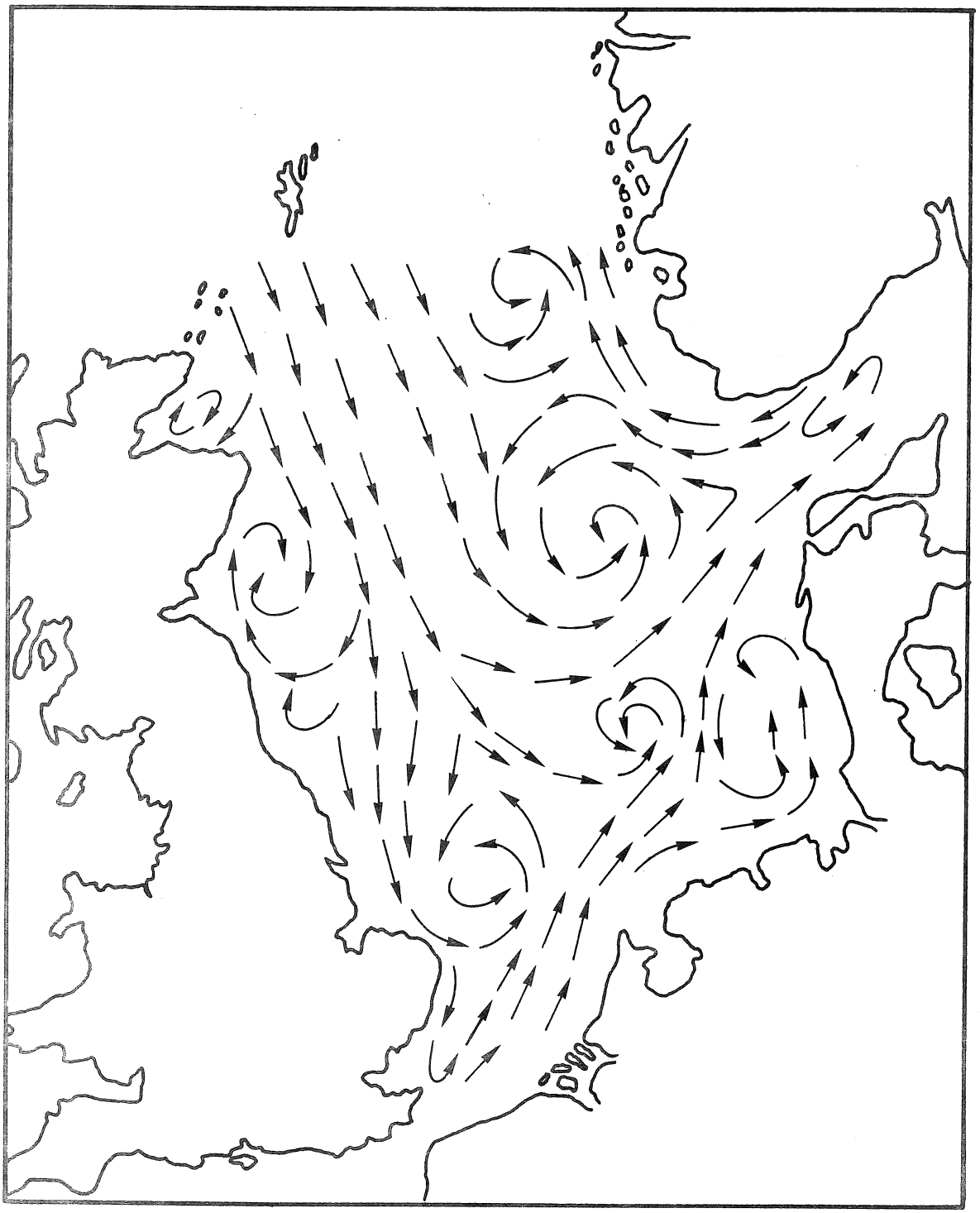


fig. 4b.

Les courants résiduels de surface en août d'après Böhnecke (1922).
[Figure tirée de Hill (1974).]

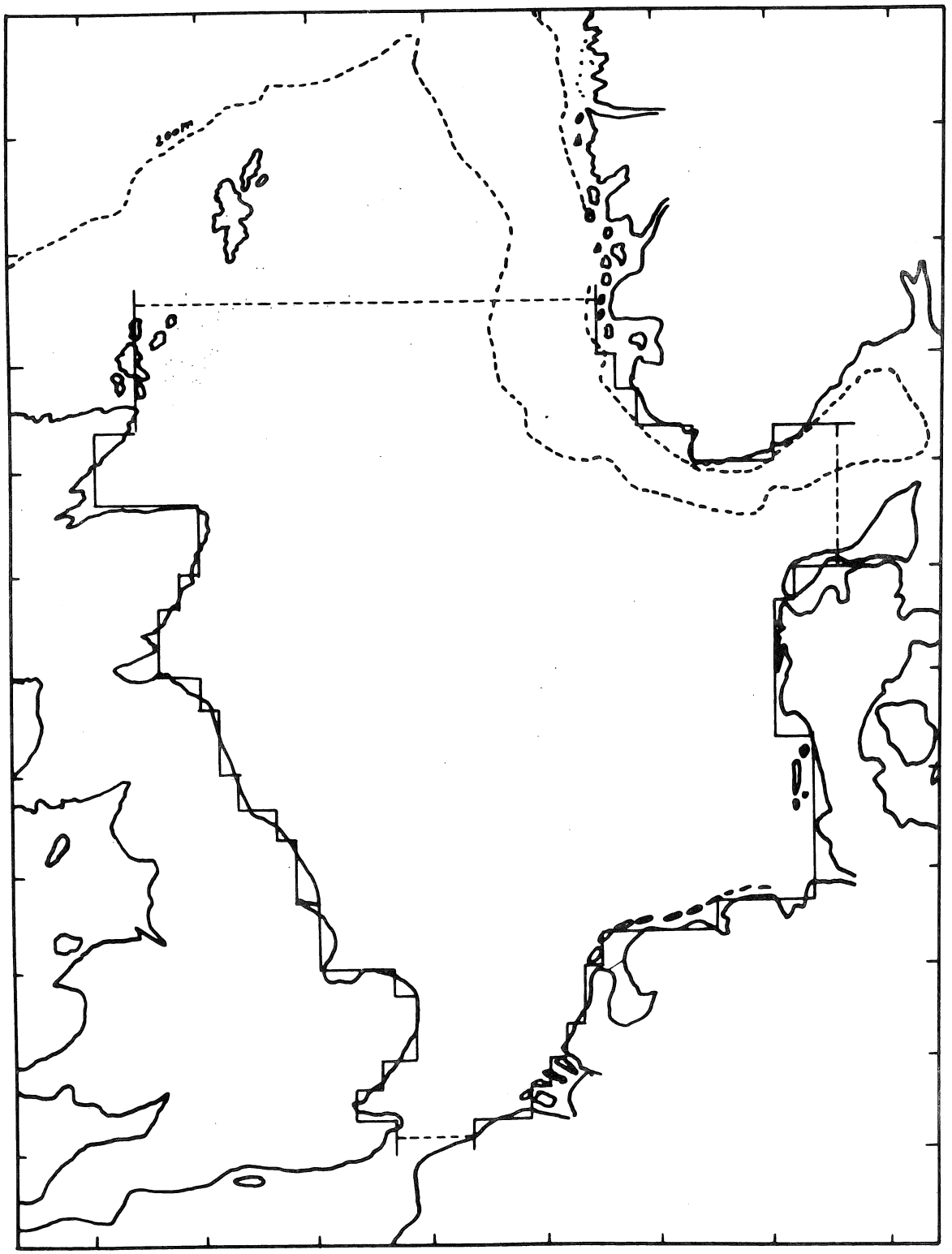


fig. 5.
Grille numérique utilisée pour le calcul de la circulation résiduelle.

basé sur une distribution uniforme du courant résiduel à travers le Pas de Calais. Bowden (1956), Prandle et Harrison (1975) ont établi une relation entre le flux d'eau passant par le Pas de Calais et la différence de potentiel existant entre les bornes d'un câble téléphonique passant à travers le Pas de Calais. Les transports d'eau induits par la marée et les tempêtes sont calculés correctement avec cette méthode. La détermination du transport résiduel est encore à l'état expérimental en raison des bruits de fond et de la faiblesse des signaux électriques transmis. Pour ces raisons, nous supposerons le débit de Cartwright comme étant la meilleure estimation du flux résiduel d'eau passant à travers le Pas de Calais.

Svansson (1968) et Tomczak (1968), à partir des observations courantométriques de l'expédition "I.C.E.S. Skagerrak", ont montré que la balance des eaux est très compliquée dans la région du Skagerrak. Sur un court intervalle de temps, 1926 à 1930, Wyrtki (1941) a montré que la quantité d'eau pénétrant dans la mer du Nord était de 545 km^3/an . En se basant sur une série temporelle plus longue, Brogmus (1952) donne un débit moyen moins élevé, soit 479 km^3/an . Comme les résultats de l'expérience "I.C.E.S. Skagerrak" confirment les estimations de Brogmus, nous supposerons que 479 km^3 d'eau de la mer Baltique pénètrent chaque année dans la mer du Nord par le Skagerrak.

Les fleuves fournissent également un apport d'eau. Selon MacCave (1974), les débits annuels sont les suivants :

- fleuves anglais : 49 km^3/an ,
- fleuves du continent : 130 km^3/an ,
- fleuves du sud-ouest de la Norvège : 66 km^3/an ,

soit un total de 245 km^3/an .

La différence entre la quantité d'eau apportée par la pluie et celle qui s'évapore est environ 190 km^3/an [MacCave (1974)]. L'impossibilité de connaître la distribution spatiale de cette différence et le peu d'importance de cet apport dans le bilan total des eaux nous obligent à faire l'hypothèse simplificatrice d'un apport nul d'eau par voie atmosphérique.

En utilisant les estimations décrites ci-dessus, il entre chaque année $31.124\ km^3$ d'eau dans la mer du Nord. Comme les variations annuelles de température et de salinité sont peu importantes, nous pouvons supposer que le régime des courants résiduels est stationnaire. Dans ces conditions, $31.124\ km^3$ d'eau quittent chaque année la mer du Nord.

3.1.2.- Distribution de la fonction de courant ψ à travers les frontières à la mer ouverte

La faible largeur du Pas de Calais permet de supposer que le courant a partout la même direction et le même sens. En raison du manque d'informations précises concernant la distribution spatiale de l'amplitude du courant, nous ferons l'hypothèse simplificatrice d'une distribution uniforme du débit d'eau à travers le Pas de Calais. La fonction de courant ψ, définie par les relations (6.4) et (6.5), variera donc linéairement le long de la frontière sud de la mer du Nord.

Lors de l'expédition "I.C.E.S. Skagerrak", les mesures courantométriques ont montré que le courant est quasi-parallèle à l'axe du Skagerrak et qu'il est dirigé vers l'est le long de la côte du Jutland et vers l'ouest le long de la côte norvégienne. Comme il est difficile de connaître la distribution spatiale de ψ le long de la frontière est du modèle mathématique (fig. 5), nous imposons une condition sur la dérivée, soit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \qquad (6.8)$$

n désigne la normale extérieure à la frontière. Dans notre modèle (fig. 5), la frontière est coïncide avec un méridien. Dans ces conditions, la relation (6.8) devient :

$$\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = U_{0_\phi} = 0 \qquad (6.9)$$

sur la frontière est du modèle.

La condition (6.9) signifie que la composante du transport perpendiculaire à l'axe du Skagerrak est nulle; cette hypothèse de travail est vérifiée par les observations et, en particulier, par celles de l'expédition "I.C.E.S. Skagerrak".

Les mesures de température et de salinité, publiées mensuellement par l'I.C.E.S. (*e.g.* fig. 2 et 3), montrent que l'eau quittant la mer du nord se situe dans la partie est de la frontière nord (fig. 5). A partir de ces informations, nous diviserons cette frontière en deux parties, le 3ème méridien est étant la limite entre ces deux zones. La grande largeur de l'ouverture nord de la mer du Nord ne nous permet pas de faire l'hypothèse d'un courant parallèle à la côte norvégienne; nous supposerons pour cette raison une distribution uniforme du débit dans chacune des deux zones : un flux uniforme entrant dans la partie ouest de cette frontière et un flux uniforme sortant dans la partie est. La fonction de courant ψ, définie par (6.4) et (6.5), variera donc linéairement dans chaque portion de la frontière. La propagation des fluctuations spatiales des courants résiduels, caractérisées par des petites échelles est fortement réduite en raison du caractère elliptique de l'équation (6.6). Dès lors, les erreurs introduites par deux distributions uniformes du flux le long de la frontière nord s'amortiront très rapidement lorsqu'on s'éloigne de cette frontière.

3.2.- Contrainte du vent en surface

Pour l'étude de la circulation résiduelle, il faut connaître la distribution spatiale de la contrainte moyenne du vent. En raison même de la forme quadratique de cette contrainte, on réalise immédiatement que la contrainte moyenne du vent est beaucoup plus grande que la contrainte de cisaillement d'un vent moyen. Au tableau 1, nous montrons, à titre d'exemple, la différence fondamentale existant entre la moyenne vectorielle du vent et la moyenne de l'amplitude du vent dans le sud de la mer du Nord. En effectuant la moyenne sur les différentes stations météorologiques (fig. 6), nous obtenons :

Tableau 1

Vent moyen et amplitude moyenne du vent (m/s) dans le sud de la mer du Nord entre le 1er janvier 1973 et le 31 décembre 1973

Station	W_λ moyen	W_ϕ moyen	$\|\|W\|\|$ moyen	Nombre d'observations	Pression atmosphérique moyenne	Nombre d'observations
3399	- 0,73	- 1,41	7,77	1852	1015,2	1820
3497	- 0,73	- 0,50	6,12	2142	1015,6	2142
3498	- 0,11	- 1,45	7,41	451	1024,3	2
3499	0,02	- 1,60	7,94	1470	1012,0	2
3599	- 0,25	- 1,13	7,85	1445	1012,4	5
3696	- 0,41	- 0,61	5,60	2012	1015,9	2012
3699	- 0,64	- 1,92	8,48	1773	1015,8	1729
3797	- 0,61	- 0,74	5,54	2013	1016,5	2018
3799	- 0,65	- 1,62	7,72	721	1015,1	2
3885	- 0,74	- 1,66	9,16	908	1016,0	893
3888	- 0,75	- 1,11	6,84	2224	1016,3	2224
3898	- 0,50	- 1,54	8,01	1859	1016,1	1823
EHUB	- 0,43	- 1,42	4,97	1760	1014,1	1369
6220	- 0,46	- 1,70	7,11	2103	1015,5	2103
6235	- 0,43	- 0,92	5,96	2098	1015,1	2098
6245	- 0,35	- 2,57	8,58	855	1014,2	855
6300	- 0,39	- 1,70	7,26	2035	1015,9	2035
6310	- 0,73	- 1,46	5,99	2040	1016,0	2040
EHRD	- 0,87	- 1,38	5,67	1013	-	0
EBFN	- 0,04	- 0,80	4,63	1630	1015,8	1417
6404	- 0,27	- 2,25	9,30	1298	1015,0	1298
6407	- 0,18	- 0,98	5,75	2026	1015,9	2026
6408	0,05	- 1,11	5,60	2089	1016,6	2089
7002	- 0,69	- 1,06	5,96	1663	1015,9	1663
7009	4,36	1,59	4,63	1	1000,0	1
7010	- 0,15	1,46	7,05	439	1015,7	439

$$W_0 = \sqrt{\left(\frac{\Sigma\, W_\lambda}{N}\right)^2 + \left(\frac{\Sigma\, W_\phi}{N}\right)^2} \sim 1{,}44 \text{ m/s}$$

et

$$\|W\|_0 = \frac{1}{N}\ \Sigma\ \|W\|_{\text{moyen}} \sim 6{,}86 \text{ m/s}$$

où N est le nombre de stations météorologiques.

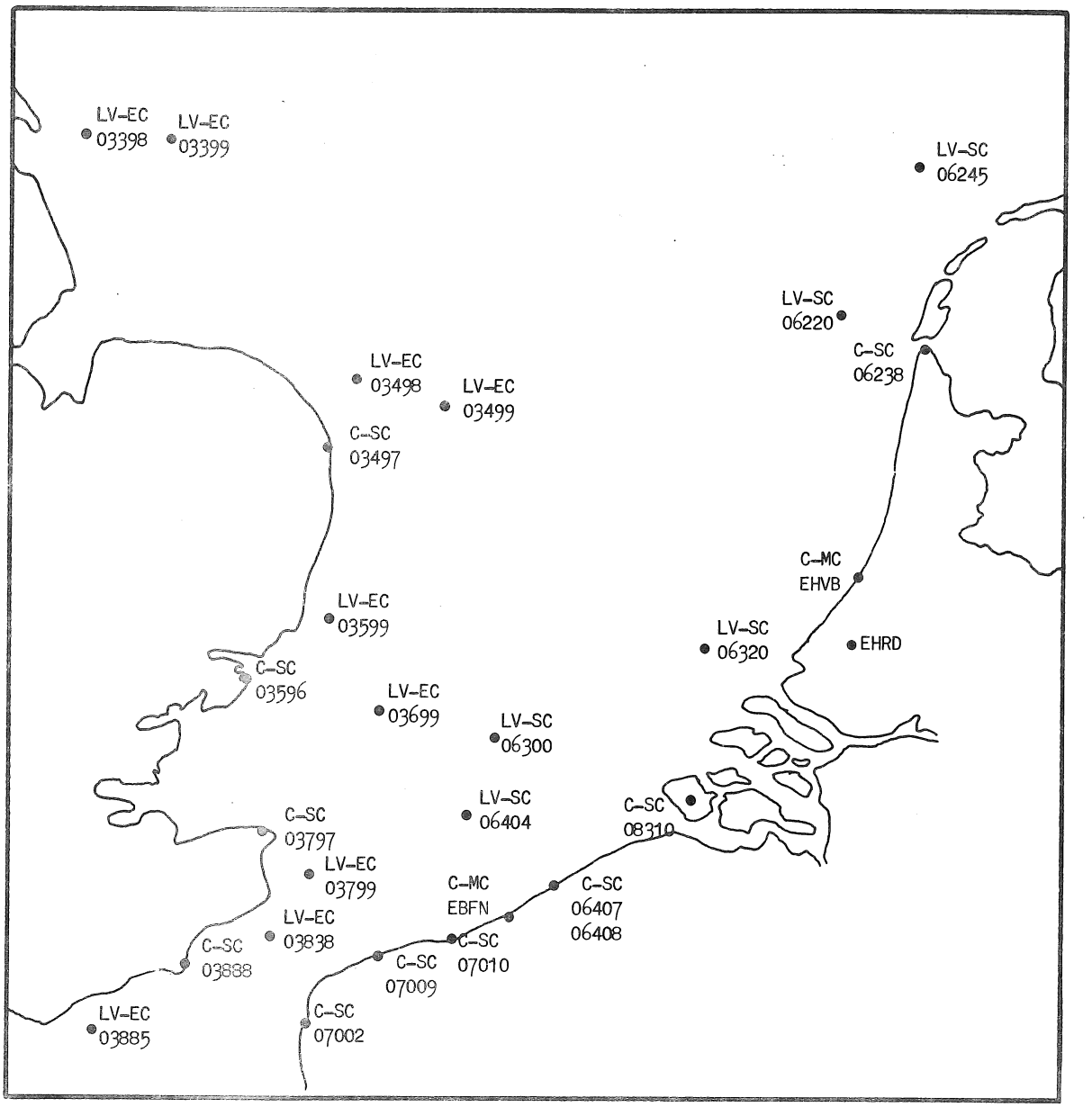


fig. 6.

Position des stations météorologiques dans le sud de la mer du Nord

Pour le calcul de la contrainte moyenne du vent, soit :

$$\tau_{s_o} = C_{10} \, (W \, \|W\|)_0 \, , \qquad (6.10)$$

nous nous sommes basés sur les données de vent transmises par les

stations côtières, par les bateaux-phares et les bateaux d'observations météorologiques. La densité des mesures étant plus élevée dans la partie sud de la mer du Nord, le calcul de τ_{s_o} sera plus précis dans cette région que dans la partie nord.

3.3.- La contrainte de "marée"

L'analyse des spectres de puissance (*e.g.* fig. 2, chapitre II) montre que la marée semi-diurne est le mouvement le plus énergétique dans la mer du Nord. Comme ce phénomène périodique est présent toute l'année, nous pouvons, en première approximation, négliger la contribution des tempêtes dans le calcul de la moyenne de la contrainte de "marée" (si on calculait la moyenne temporelle de τ_t sur un intervalle de temps beaucoup plus court, la contribution des tempêtes serait non-négligeable durant les mois d'hiver).

Comme la contrainte de marée résulte de processus non-linéaires d'advection, de pression et de friction, la contrainte τ_t sera plus élevée aux vives eaux qu'aux mortes eaux. Supposons que le courant périodique de marée puisse s'écrire, en première approximation, de la manière suivante :

$$\bar{u} = \bar{u}_1 [\cos \omega t + \nu \cos (1 - s) \omega t] \qquad (6.11)$$

où ω est la pulsation du courant semi-diurne lunaire et $(1 - s)\omega$ celle du courant semi-diurne solaire; $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_1 \nu$ sont respectivement les amplitudes du courant lunaire et solaire avec $\nu = 0{,}34$ [Jeffreys (1970)]. Pour un courant périodique donné par la relation (6.11), on démontre aisément que

$$\langle \tau_{t_{M_2+S_2}} \rangle \sim 1{,}3 \langle \tau_{t_{M_2}} \rangle \qquad (6.12)$$

où $\langle\ \rangle$ désigne une moyenne temporelle sur un intervalle de temps égal à un mois lunaire.

Comme nous avons calculé explicitement la marée semi-diurne lunaire au chapitre V, nous connaissons directement la contrainte

$\langle \tau_{t_{M_2}} \rangle$. En vertu de la relation (6.12) et des hypothèses simplificatrices décrites dans ce paragraphe, nous avons

(6.13) $$\tau_{t_o} = 1{,}3 \langle \tau_{t_{M_2}} \rangle$$

τ_{t_o} représente la moyenne annuelle de la contrainte de "marée".

4.- Applications du modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord

L'équation (6.6) régissant la circulation résiduelle est résolue en tenant compte des conditions aux limites et des contraintes de vent et de "marée" déduites des observations. La résolution de cette équation est basée sur l'algorithme numérique de résolution décrit au chapitre III.

4.1.- Comparons tout d'abord les résultats du modèle (6.6) aux observations de Böhnecke et Laevastu (fig. 1)

Nous remarquons immédiatement que les grandes tendances de la circulation résiduelle sont correctement reproduites. La figure 7 montre en effet la distribution spatiale des eaux primaires :

- eaux primaires de l'Atlantique nord

L'aire comprise entre les lignes de courant $\psi = 0$ et $\psi = -2{,}5 \times 10^4$ m^3/s, qui s'étend de la frontière nord jusqu'au 54ème parallèle, correspond approximativement à la langue d'eau Atlantique [région (1) de Laevastu].

- eaux primaires du Skagerrak

La région (3) de Laevastu apparaît clairement sur la figure 7; elle correspond à l'aire comprise entre la ligne de courant $\psi = -10^5$ m^3/s et la côte norvégienne. La concentration des lignes de courant (de $\psi = -15$ à 27×10^4 m^3/s) s'explique par la grande profondeur du canal norvégien.

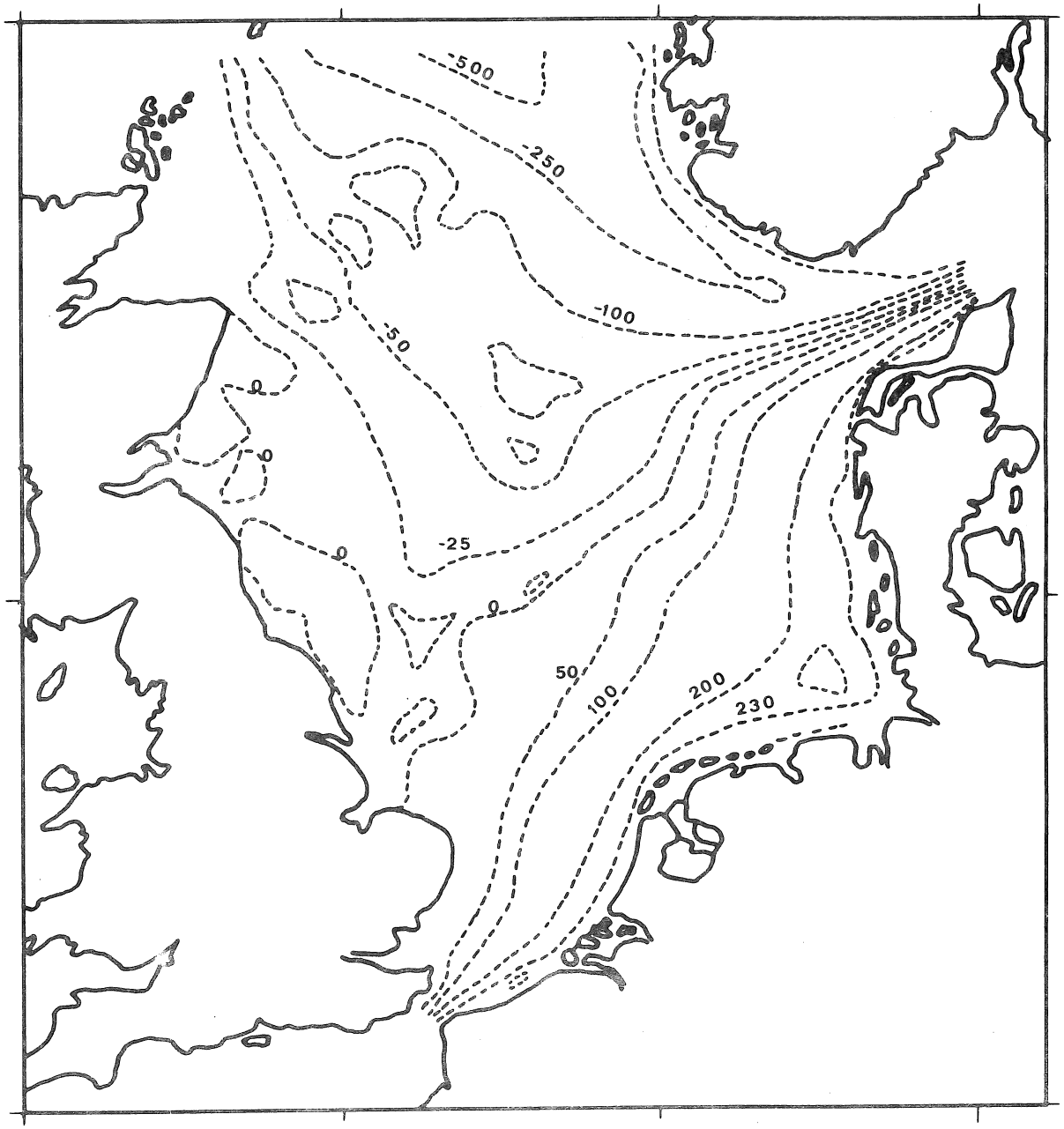


fig. 7.

Circulation résiduelle calculée avec le modèle mathématique. Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

- eaux primaires de la Manche

La ligne $\psi = 0$ peut être considérée comme une frontière fluide entre les eaux venant du nord de l'Atlantique nord et celles qui proviennent du Pas de Calais. La zone comprise entre $\psi = 10^5$ m^3/s et $\psi = 2 \times 10^5$ m^3/s, qui s'étend depuis l'ouverture sud de la mer du Nord jusqu'au 54ème parallèle, correspond à la zone (2) de Laevastu.

La région intérieure de la mer du Nord contient un mélange de ces trois eaux primaires dans un rapport qui dépend de la proximité et de l'intensité des différentes sources d'eaux primaires.

Le long des côtes des Iles Britanniques et du continent, nous observons des eaux côtières qui correspondent aux zones (4), (5) et (6) de Laevastu. Notre modèle, tout comme les observations de Böhnecke et Laevastu, donne un courant dirigé vers le nord le long de la côte écossaise au voisinage du 57ème parallèle. Le long des côtes anglaises, le sens des courants résiduels est assez variable tandis que le long des côtes continentales, le courant résiduel a partout une direction nord ou est (sauf en un "point" situé devant la côte belge).

Le modèle mathématique fait apparaître plusieurs circulations locales. Les gyres observés au voisinage du Dogger Bank, dans le German Bight et dans la partie centrale du bassin (aux environs de 57 °N, 4 °E) sont reproduits avec notre modèle.

4.2.- Comparaison des courants résiduels calculés avec le modèle aux mesures courantométriques

Il nous semble important de faire remarquer que les mesures courantométriques, effectuées par les instituts océanographiques et hydrographiques anglais, allemands, néerlandais et belges, sont basées sur des périodes d'observations relativement courtes (1 à 2 mois). Notre modèle donne, par contre, les courants résiduels ou moyens sur un intervalle de temps correspondant à une année. En raison de la discrétisation de l'espace (méthode aux différences finies), le courant calculé représente la moyenne spatiale du courant réel sur une surface égale à l'aire d'un maille numérique élémentaire.

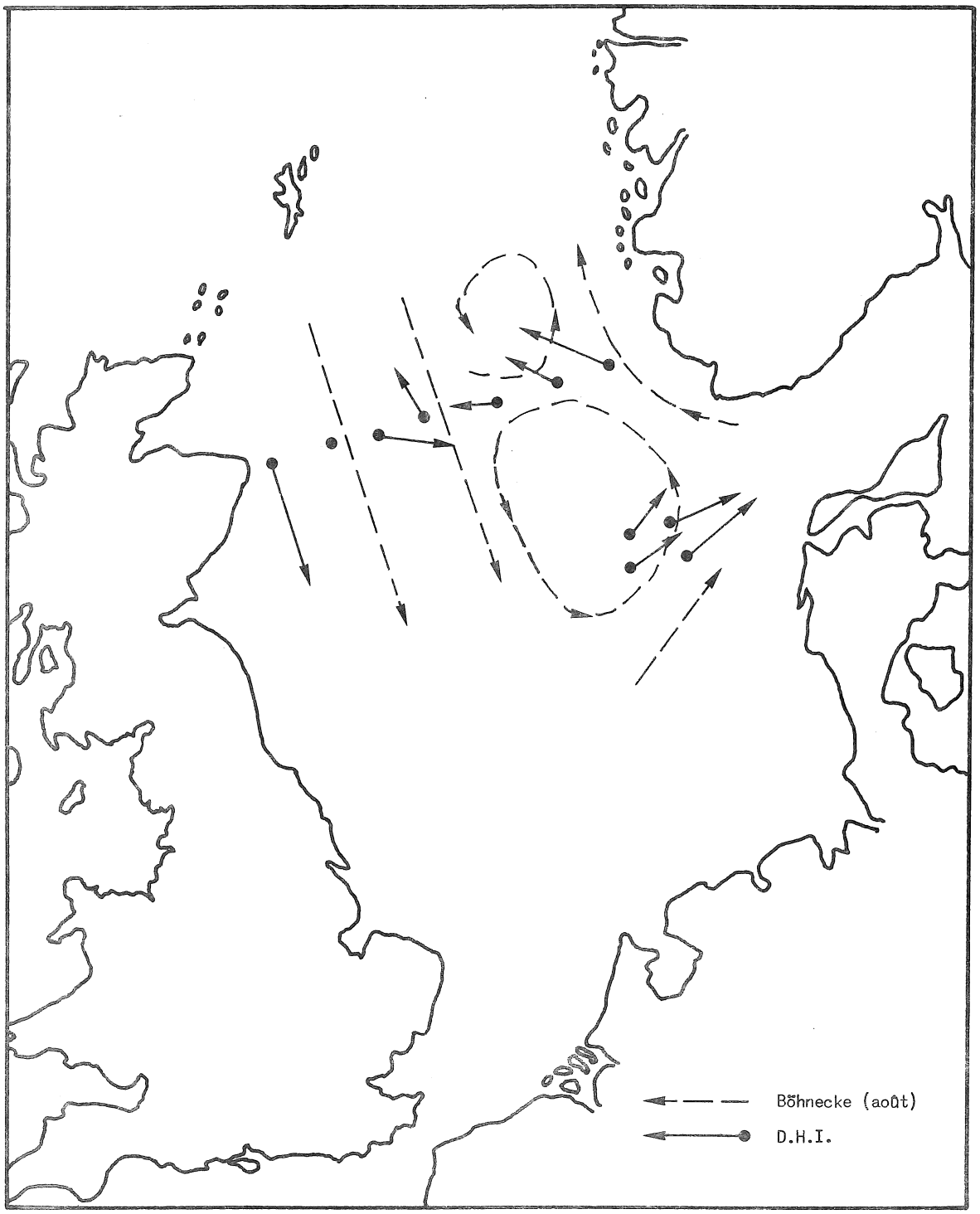


fig. 8a.

Courants résiduels proches de la surface observés par le D.H.I. en mai 1962 (canal nord) et en septembre 1962 (Skagerrak). [Figure tirée de Hill (1974).]

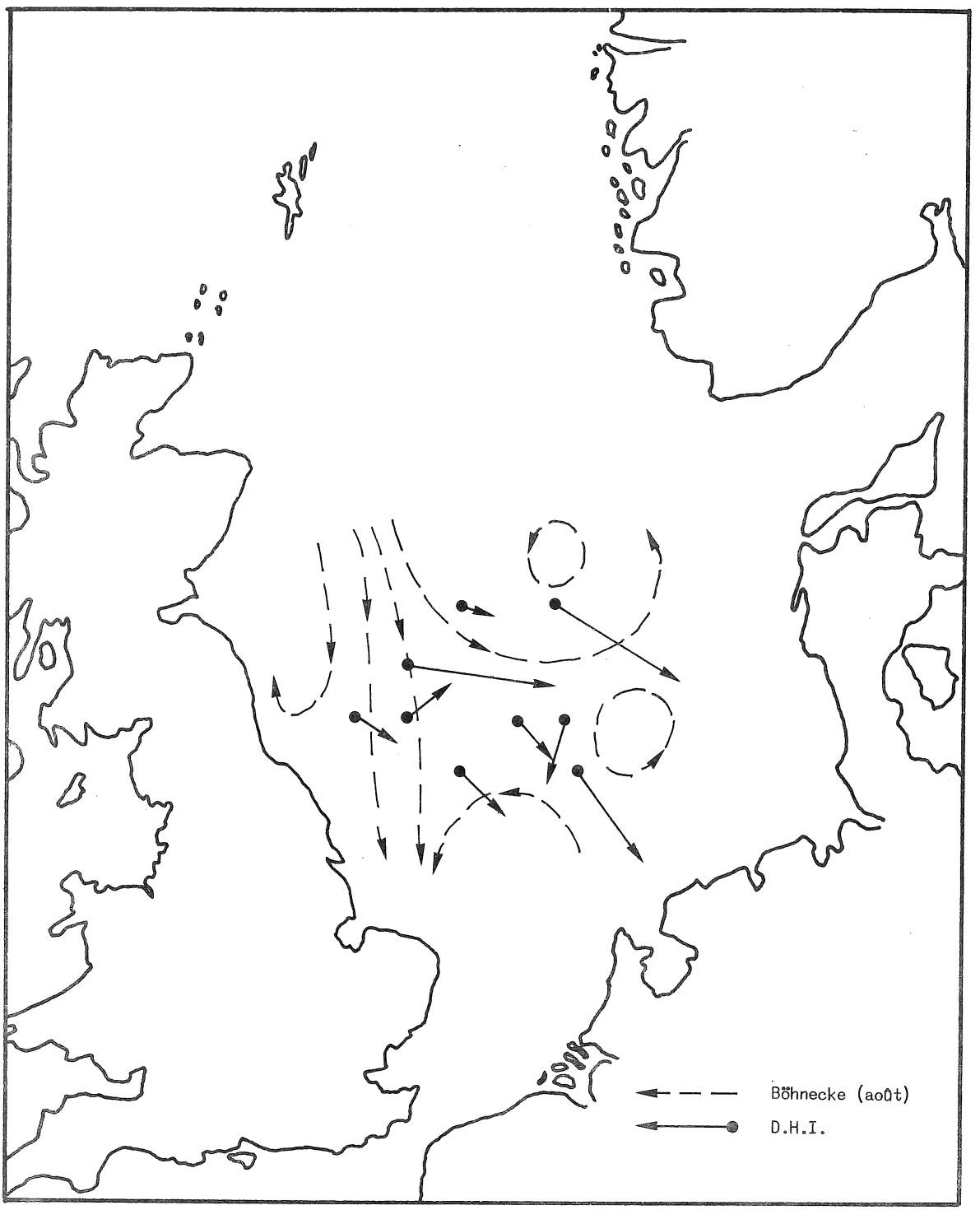


fig. 8b.

Courants résiduels proches de la surface observés par le D.H.I. en août 1961.
[Figure tirée de Hill (1974).]

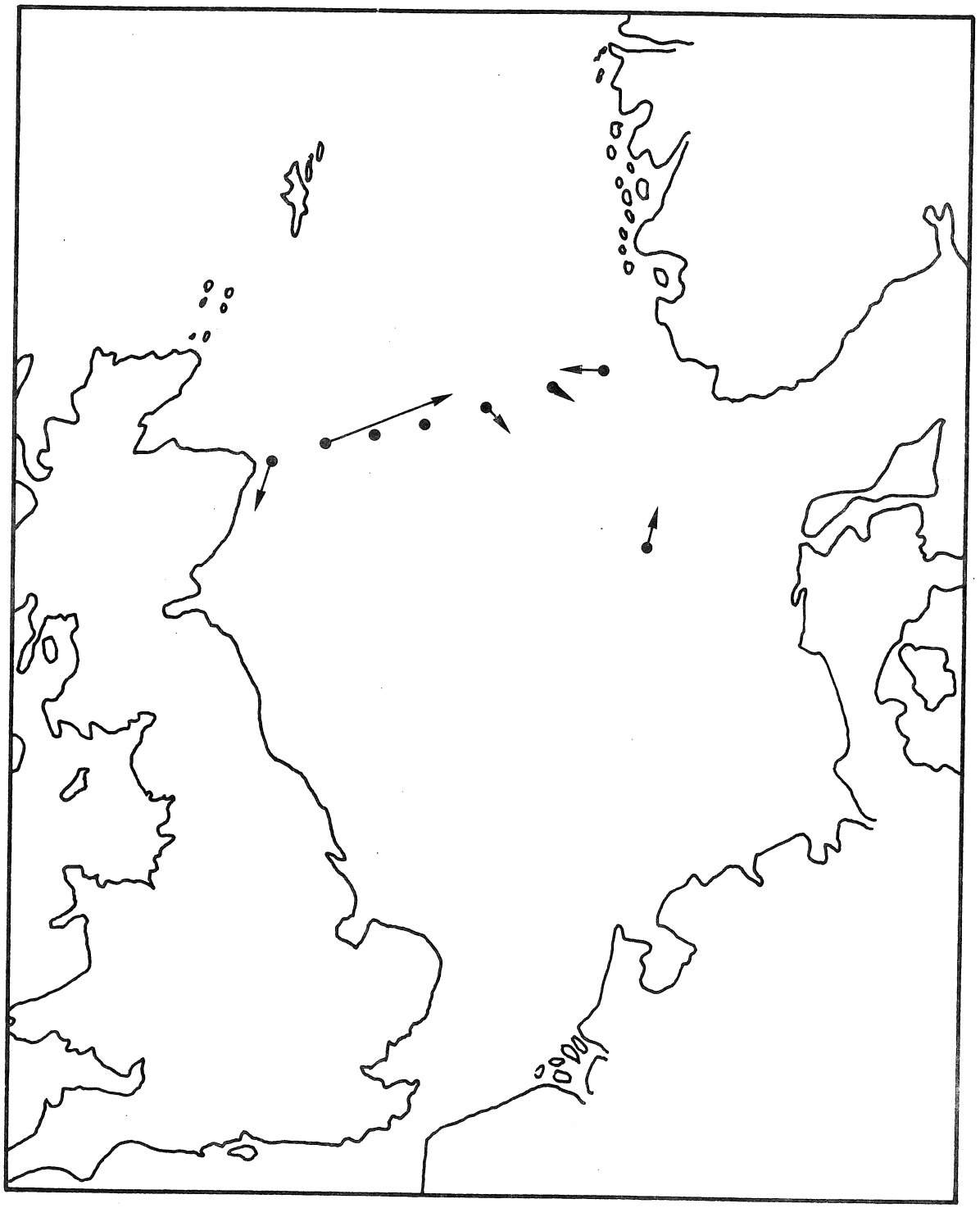


fig. 9.

Courants résiduels à mi-profondeur observés par le D.H.I. en mai 1962 (canal nord) et en septembre 1962 (Skagerrak). [Figure tirée de Hill (1974).]

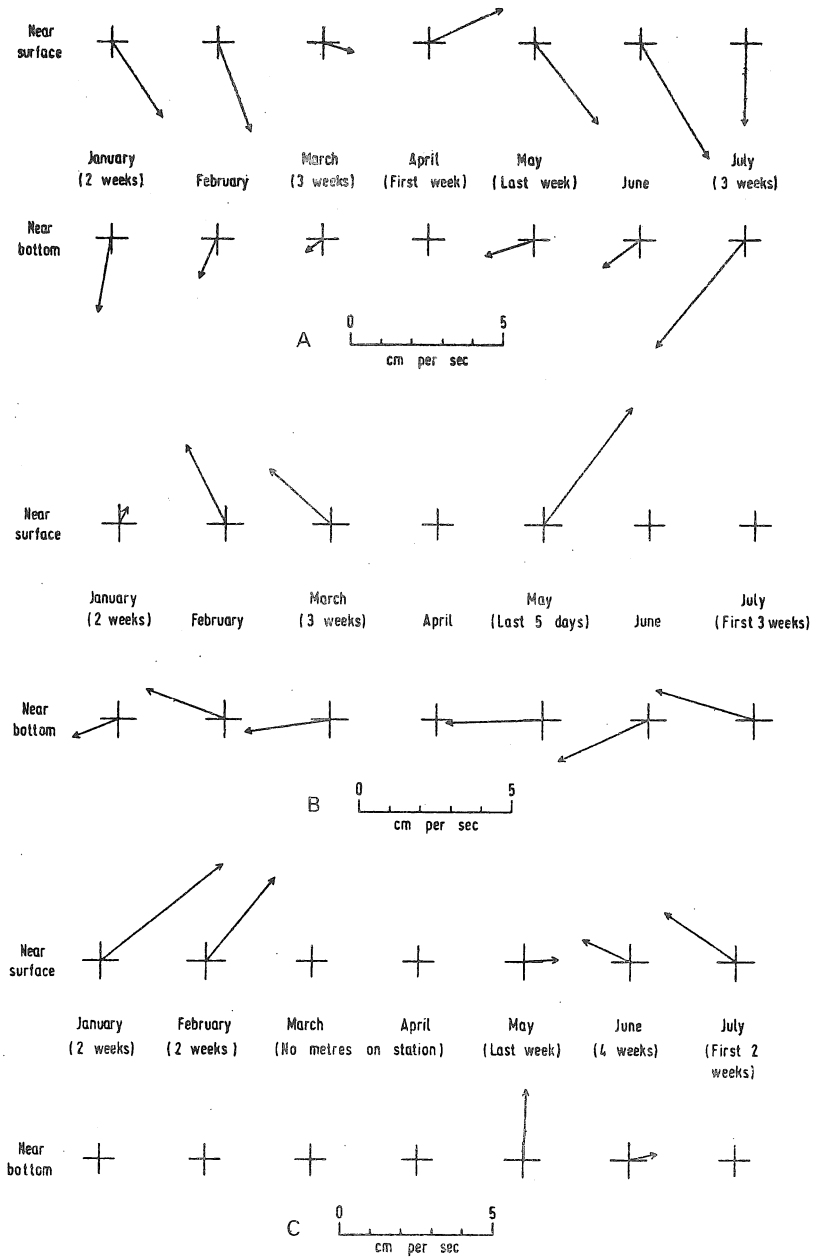


fig. 10.

Les courants résiduels aux stations I.C.E.S. 1971. Les positions des stations A,B,C sont indiquées à la figure 4. [Figure tirée de Hill (1974).]

Selon Carruthers (1926), (1928), (1935) et Carruthers, Lawford et Veley (1950), le courant résiduel est animé d'une vitesse variant de 10^{-2} m/s à 2×10^{-1} m/s dans les régions voisines d'un bateau-phare. Au Pas de Calais, on observe cependant des vitesses atteignant 3×10^{-1} m/s .

Les expéditions menées par le *Deutsches Hydrographisches Institut*, par l'*Amirauté britannique* et le *Laboratoire des Pêcheries de Lowestoft* (Grande Bretagne) (fig. 8 à 10) confirment les résultats de notre modèle et les grandes tendances de la circulation observée par Böhnecke. A partir de mesures courantométriques, Lee (1970) et Hill (1974) sont arrivés aux conclusions suivantes : la position et la grandeur des tourbillons dépendent de la force des vents dominants et des flux d'eau aux frontières de la mer du Nord. D'une saison à une autre, certains gyres peuvent apparaître, disparaître ou se déplacer suivant les conditions météorologiques, mais d'une année à une autre, on observe peu de changements.

La direction des courants aux stations A , B , C lors de l'expérience *I.C.E.S.* (1971) (fig. 4 et 10) est voisine de celle donnée par le modèle mathématique. L'amplitude du courant en A , B et C est de l'ordre de (3 à 4) $\times 10^{-2}$ m/s . Le mouillage courantométrique (Station D sur la figure 4) effectué par le *Marine Laboratory* d'Aberdeen donne un courant dirigé vers le nord [Hill (1974)]. La direction et le sens de ce courant sont en contradiction avec les prédictions de Böhnecke; notre modèle donne un courant dirigé vers le N-N-E en accord avec les observations du *Marine Laboratory* d'Aberdeen. En général, le courant observé par cette technique est plus intense que celui déduit du modèle mathématique.

4.3.- Comparons la circulation résiduelle calculée avec le modèle mathématique à celle déduite de la distribution du radio-isotope 137

A partir de la distribution spatio-temporelle du césium 137, Kautsky (1973) a déterminé, de manière détaillée, le déplacement des

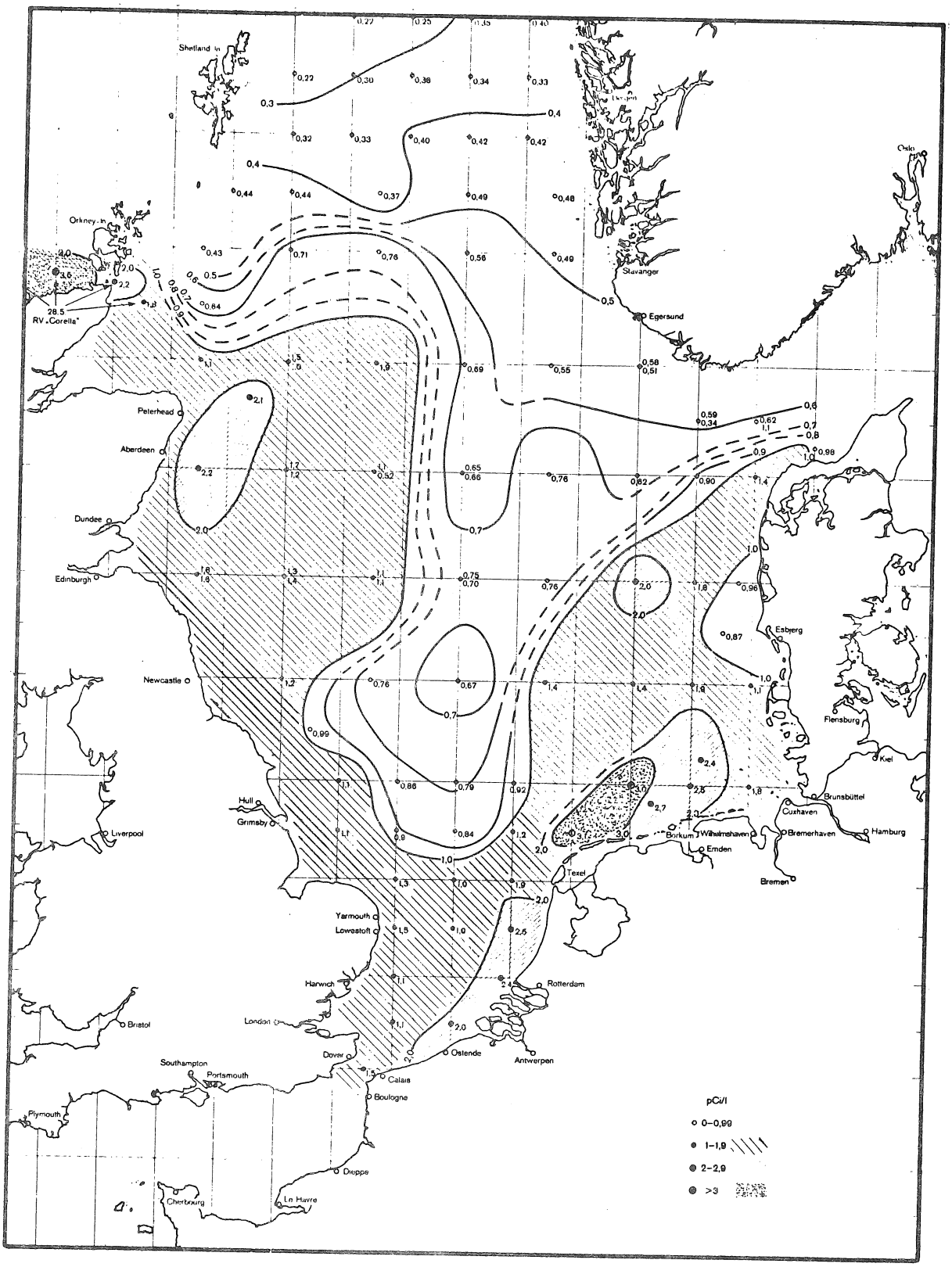


fig. 11.

Distribution du césium 137 en juin 1972. [Figure tirée de Kautsky (1973).]

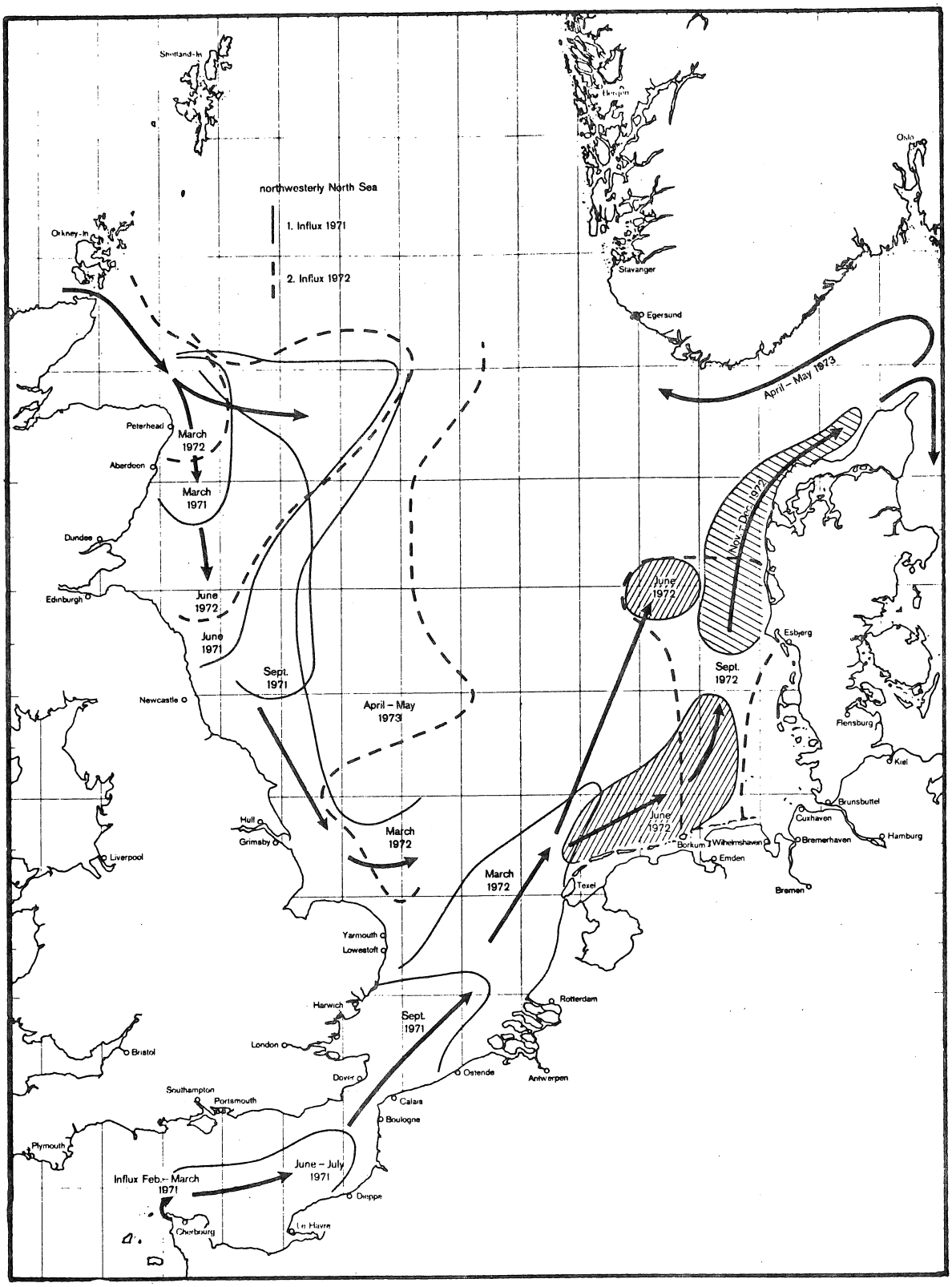


fig. 12.

Distribution du césium 137 dans la mer du Nord durant la période février 1971 - mai 1973. [Figure tirée de Kautsky (1973).]

masses d'eau et la vitesse du courant résiduel dans la mer du Nord (fig. 11 et 12). Ce traceur radioactif provient des usines de traitement de combustibles nucléaires, proches de Cherbourg et de Windscale. Les travaux de Kautsky sont en très bon accord avec les observations de Böhnecke et Laevastu et ils confirment les résultats de nos calculs (fig. 7). Les vitesses des courants résiduels, déduites du transport du Cs 137, sont généralement plus faibles que celles observées par les méthodes courantométriques.

Comme des erreurs de plusieurs centimètres par seconde peuvent exister dans les enregistrements d'un courant près de la surface, nous préfèrerons comparer la circulation résiduelle calculée avec notre modèle à celle déduite des distributions de traceurs passifs (salinité, turbidité, traceur radioactif, etc.).

4.4.- Conclusions

Nous pouvons donc conclure que notre modèle permet de calculer, de manière très satisfaisante, la circulation résiduelle dans une mer continentale comme la mer du Nord. En raison même de la technique de résolution (méthode numérique aux différences finies), il est impossible de connaître la structure fine de la circulation résiduelle en mer du Nord avec un modèle caractérisé par des pas spatiaux

$$\Delta\lambda = \Delta\phi = 20' \ .$$

Pour une étude détaillée de la circulation résiduelle, il faut réduire les dimensions de la maille du réseau numérique.

5.- Etude de la circulation résiduelle dans le sud de la mer du Nord

Le modèle donnant la circulation résiduelle dans l'ensemble de la mer du Nord a révélé le long de la côte belge un gyre qui

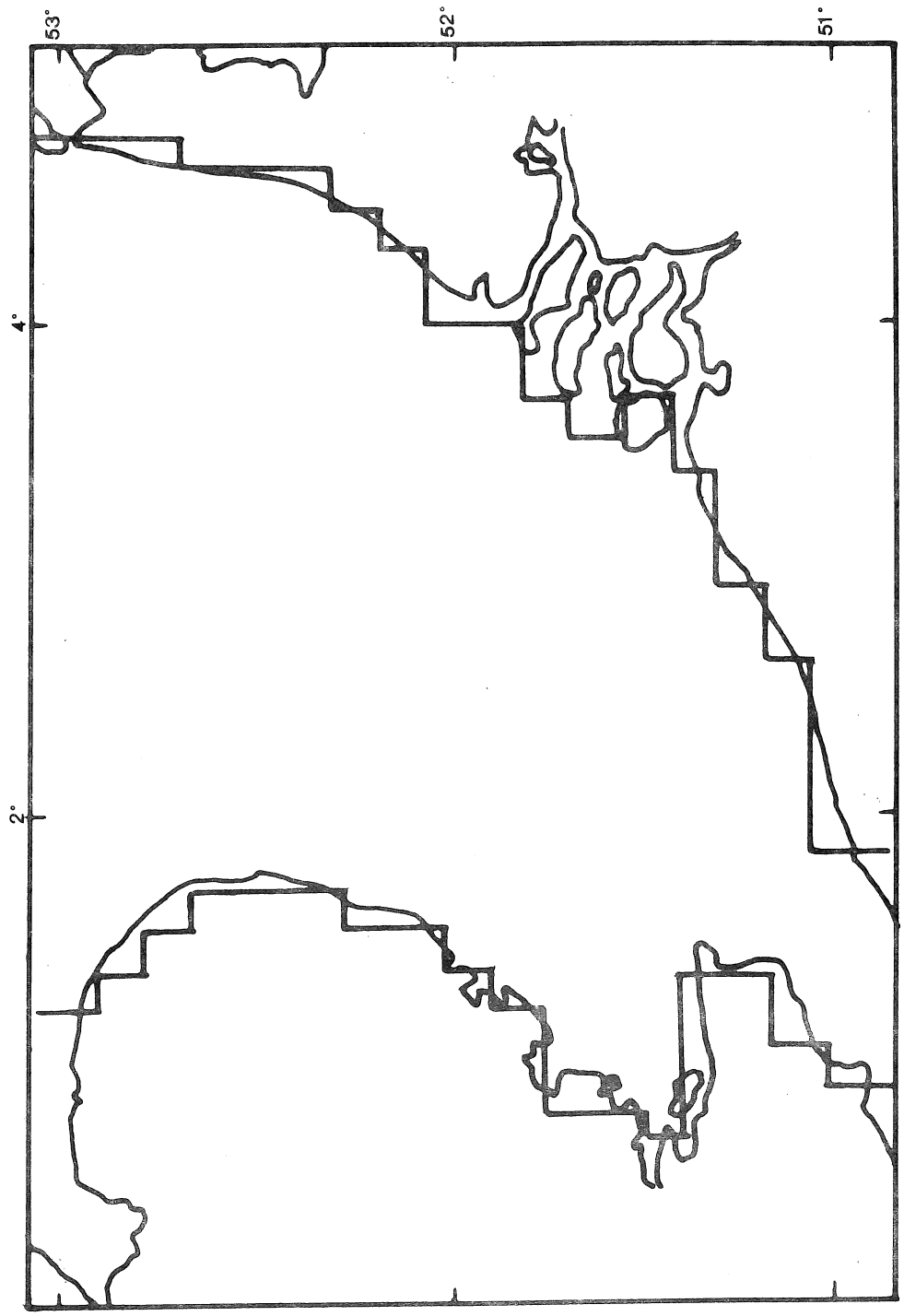


fig. 13.
Grille numérique utilisée pour le calcul des circulations résiduelles et transitoires dans le sud de la mer du Nord.

n'était mis en évidence ni par Böhnecke et Laevastu ni par Kautsky. Afin de vérifier la présence ou l'absence de cette circulation locale, nous avons défini un nouveau réseau maillé caractérisé par des pas spatiaux plus petits (fig. 13).

Avant de calculer la circulation résiduelle, il est indispensable de connaître la distribution spatiale de la contrainte de marée. Comme la topographie du fond est très irrégulière dans le sud de la mer du Nord, il faut recalculer les courants et les élévations de marée en tous les noeuds du réseau maillé. Le modèle de marée, décrit au chapitre V, fournit les conditions aux limites du modèle caractérisé par de petites mailles. Les observations [*e.g.* Van Cauwenberghe (1971)]

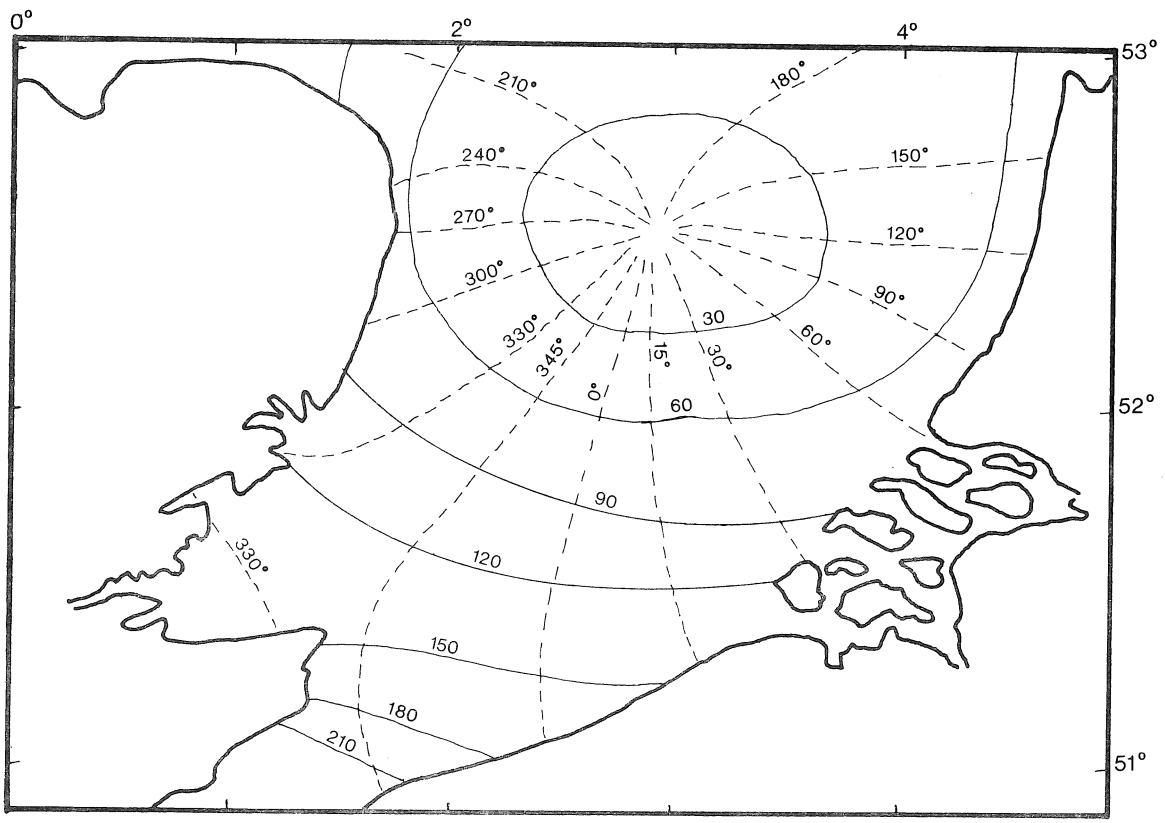


fig. 14.

Les lignes cotidales et d'égale amplitude calculées avec le modèle mathématique. Les lignes cotidales sont exprimées en degrés et les lignes d'égale amplitude en centimètres.

montrent que l'influence de l'Escaut se fait sentir au voisinage des côtes belges et de la région du Delta. Dans le modèle mathématique, nous tenons compte de l'estuaire de l'Escaut en prenant une variation périodique de la surface libre au noeud voisin de Vlissingen. L'amplitude et la phase de cette élévation sont tirées des *Tables des constantes harmoniques de Monaco*. Le calcul de la marée a permis de déterminer les contraintes de marée et la moyenne de la norme de la vitesse du courant qui seront introduites dans le modèle de la circulation résiduelle. Les figures 14 et 15 montrent les lignes cotidales et les lignes d'égale amplitude pour la marée semi-diurne lunaire. Nous remarquons un très bon accord entre la théorie et l'observation.

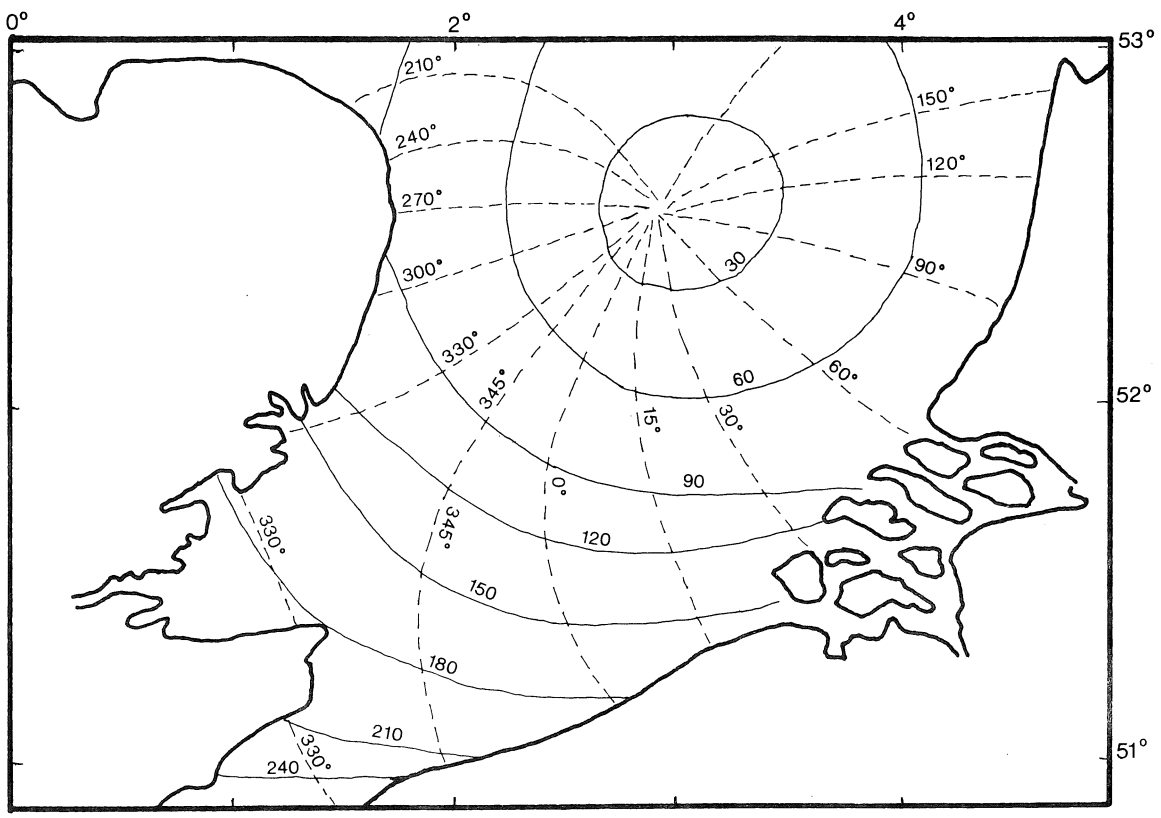


fig. 15.

Les lignes cotidales et d'égale amplitude déduites des observations. Les lignes cotidales sont exprimées en degrés et les lignes d'égale amplitude en centimètres. (D'après la carte n° 301 de l'Amirauté Britannique.)

Pour résoudre l'équation (6.6) régissant la circulation résiduelle, il faut connaître les conditions aux limites du modèle. Le long des côtes, la fonction de courant doit rester constante et, le long des frontières à la mer ouverte (*open sea boundaries*), nous devons imposer une condition sur ψ ou sur $\frac{\partial \psi}{\partial n}$. Au Pas de Calais, nous supposons un débit de 235×10^3 m^3/s ($7{,}4 \times 10^3$ km^3/an) distribué uniformément à travers l'ouverture : la fonction ψ varie linéairement depuis la côte anglaise ($\psi = 0$) jusqu'à la côte française ($\psi = 235 \times 10^3$ m^3/s).

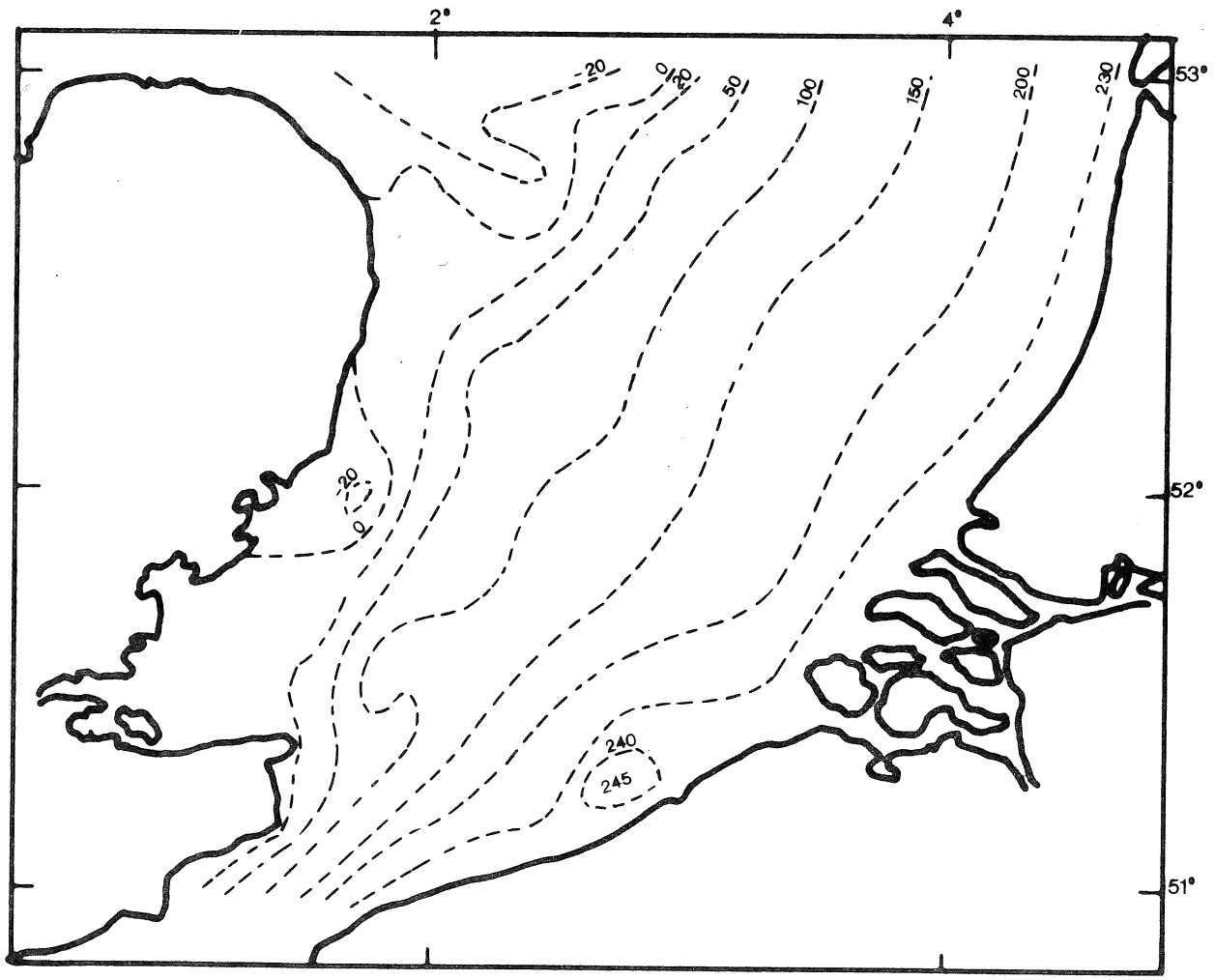


fig. 16.

Circulation résiduelle calculée avec les contraintes de marée et de vent. Le coefficient de friction sur le fond est donné par $K = f(z_o, h, \|u\|_o)$. Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s.

Le long des côtes françaises et belges, la fonction de courant est constante ($\psi = 235 \times 10^3$ m^3/s) . Pour tenir compte de l'apport d'eau de l'Escaut {3 km^3/an [Postma (1957)]}, nous augmentons ψ de 100 m^3/s le long des côtes néerlandaises. La fonction ψ subira encore une augmentation de 10^3 m^3/s pour tenir compte de l'apport d'eau provenant du Rhin et de la Meuse. Le modèle de circulation résiduelle couvrant toute la mer du Nord et les observations de salinité [Wyatt (1973)] nous ont permis de connaître la distribution spatiale de la fonction de courant ψ le long de la frontière nord du modèle.

La figure 16 donne la circulation résiduelle dans le sud de la mer du Nord calculée avec notre modèle mathématique. La partie centrale du flux venant de la Manche s'écoule de manière régulière dans la plus grande partie de la mer du Nord. Au voisinage des côtes belges et de l'East Anglia, on obtient deux circulations secondaires; le modèle couvrant l'ensemble de la mer du Nord n'en révélait qu'une. On comprend aisément que des modèles caractérisés par des pas spatiaux importants ne puissent révéler des circulations secondaires dont les dimensions sont inférieures à celles d'une maille élémentaire.

Ramster (1965)(fig. 17) a étudié à l'aide de *Woodhead seabed drifters* (il s'agit de gros champignons en matière plastique qui dérivent avec les courants) la circulation résiduelle dans le sud de la mer du Nord et le long des côtes du Lincolnshire. La fig. 17 montre que le courant résiduel est généralement dirigé vers le nord-est dans la partie sud de la mer du Nord. La région située au voisinage du 53ème parallèle, près de la côte de l'East Anglia, est le lieu de rencontre des eaux provenant de l'Atlantique et de la Manche : on y observe très souvent un courant résiduel dirigé vers le sud. L'extension de cette lame d'eau d'origine Atlantique est cependant limitée à quelques dizaines de kilomètres. Il convient toutefois de faire deux remarques importantes à propos de l'emploi des *Woodhead seabed drifters*. Ces instruments ne donnent :

- aucune information entre les lieux de largage et de récupération;
- que des estimations grossières de vitesse car il est difficile de déterminer le temps réel de séjour de ces instruments dans l'eau.

Notre modèle (fig. 16) reproduit toutes les tendances de circulation observées par Ramster. Nous pouvons donc conclure à un accord satisfaisant entre la théorie et l'expérience.

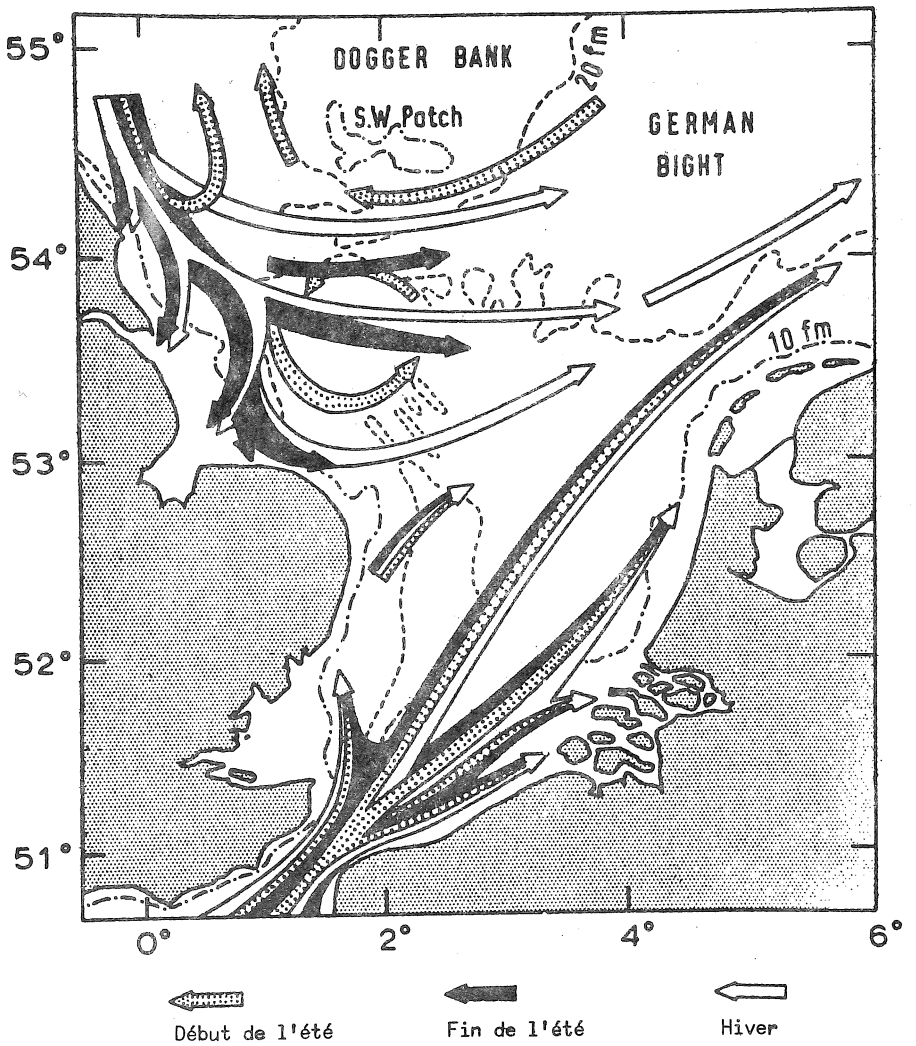


fig. 17.
Les courants résiduels près ou fond [d'après Ramster (1965)]

Au voisinage des côtes belges, les nombreux bancs de sable rendent difficile l'interprétation des mesures courantométriques. Les moyennes bimensuelles [Moens (1974)] donnent un courant généralement dirigé vers le nord-est dans la partie ouest et vers le sud-ouest dans la partie est de la côte belge. Les mesures courantométriques confirment donc la présence de la circulation secondaire révélée par le modèle mathématique. Les observations directes des courants sont très utiles mais il ne faut pas oublier que les courants résiduels mesurés sont

affectés d'erreurs importantes (imprécision des instruments, influence des ondes de surface et mouvement de la ligne de mouillage). Pour ces raisons, nous préférons vérifier la validité de notre modèle en nous basant sur des mesures de turbidité et de certains paramètres chimiques et biologiques.

5.1.- La distribution de la vase dans le sud de la mer du Nord

Durant les années 1972 et 1973, quelque 1200 échantillons de sédiment ont été prélevés dans la partie sud de la mer du Nord. Gullentops (1974) expliqua la distribution de la vase de la manière suivante :

"The Southern Bight is strikingly free of muddy sediments, indicating that currents and here also wave turbulence are high enough to allow only temporary decantation but no final deposition. Only in front of the Meuse-Rhine mouth, increased fluvial input of suspension material influences the bottom sediments. The big exception is the low energy triangle in front of the eastern Belgian coast in which muddy sedimentation is developing to a considerable extent due to local affluents as the Yser, but mostly to the suspension material dragged out of the Scheldt estuary and trapped in this area.

ERTS-A remote sensing documents proved this fact strikingly, showing a suspension plume in front of the Rhine estuary and a huge turbid area in front of the eastern Belgian coast connected with an extremely turbid Scheldt estuary."

Les observations de Wollast (1972) et de Elskens (1974) ont également montré qu'il existait au large de la côte belge une zone privilégiée pour l'accumulation de la vase. La figure 18 donnant la distribution de la turbidité dans la partie sud de la mer du Nord confirme encore les résultats d'Elskens.

Notre modèle permet d'expliquer de tels phénomènes. Les eaux de l'Escaut, chargées de matières "polluantes", sont en grande partie entraînées le long des côtes belges par le courant résiduel; ensuite elles sont reprises par le courant principal. Une partie de cette eau

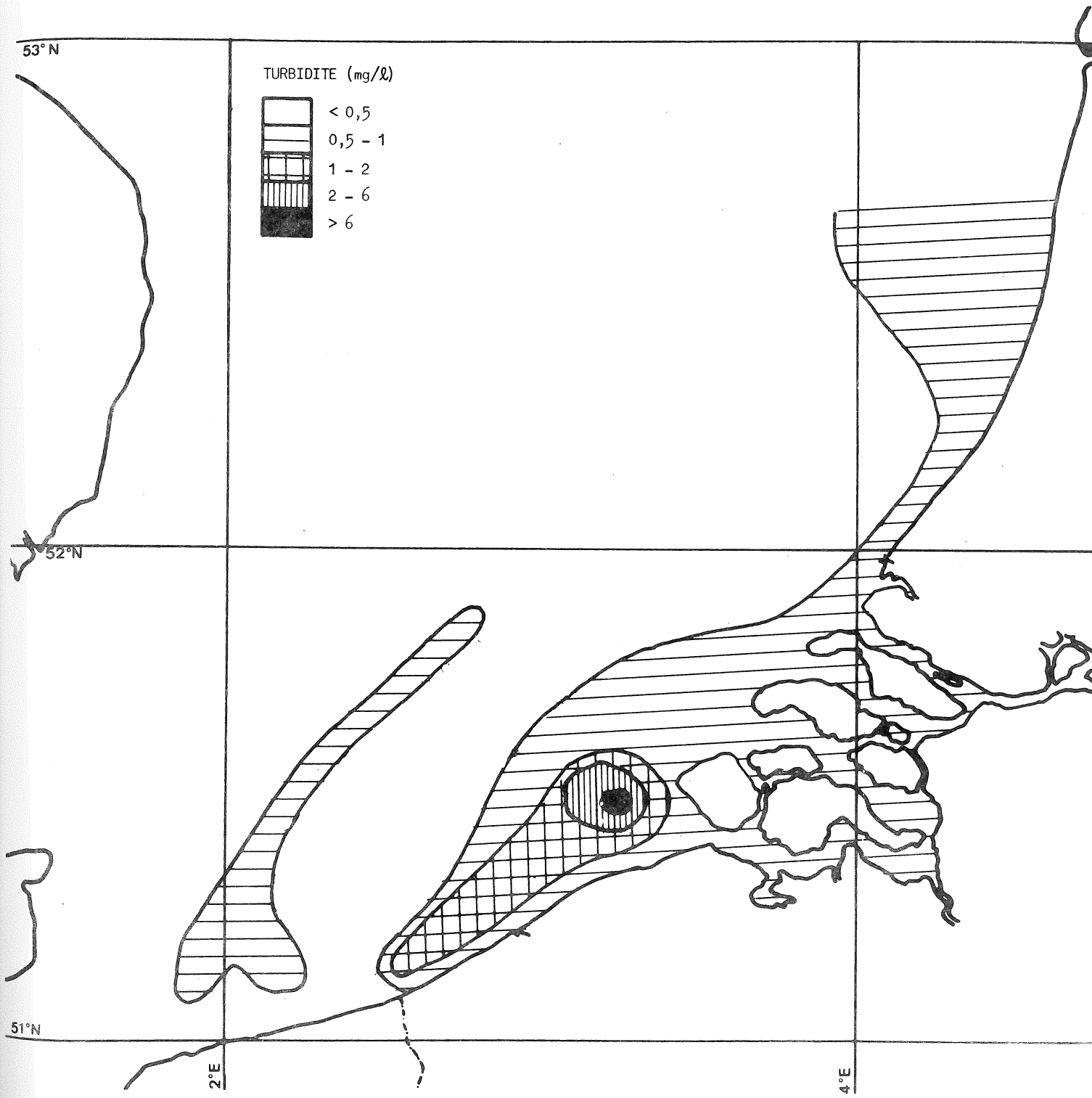


fig. 18.

Distribution de la turbidité au large des côtes belges et néerlandaises [figure tirée de Wollast (1972)].

est "piégée" dans la circulation secondaire révélée par le modèle mathématique. Comme le temps de résidence des masses d'eau est élevé dans le voisinage du tourbillon, les particules solides présentes dans la colonne d'eau auront une tendance très marquée pour la sédimentation.

5.2.- La dynamique des écosystèmes dans la partie sud de la mer du Nord

Les nombreuses expéditions, menées de 1972 à 1975 par le Ministère de la Programmation de la Politique scientifique dans le cadre du Programme national sur l'Environnement marin, ont permis d'étudier les variations spatio-temporelles des paramètres chimiques et biologiques. Sur base de ces informations, la région étudiée fut divisée en trois sous-régions caractérisées par des activités biologiques différentes (fig. 19).

On peut aisément voir que ces trois zones correspondent à des régimes de circulation résiduelle différents.

a) Zone 1

La zone 1 est située au large de la côte belge et coïncide approximativement avec la région du gyre (fig. 16). L'écosystème de cette région est malsain car l'intense activité phytoplanctonique n'a pas sa finalité classique, c'est-à-dire fournir de la nourriture au premier niveau de la chaîne alimentaire. La plupart du phytoplancton est laissé pour compte et le recyclage des nutrients se fait au niveau du phytoplancton mort par l'intermédiaire des bactéries.

b) Zone 2

La zone 2 correspond approximativement à la région comprise entre les lignes de courant ($\psi = 1{,}25 \times 10^5$ m^3/s et $\psi = 2 \times 10^5$ m^3/s). Les caractéristiques des eaux se rapprochent de celles de l'océan. Selon Podamo (1974), le comportement écologique de cette région est quasi-idéal.

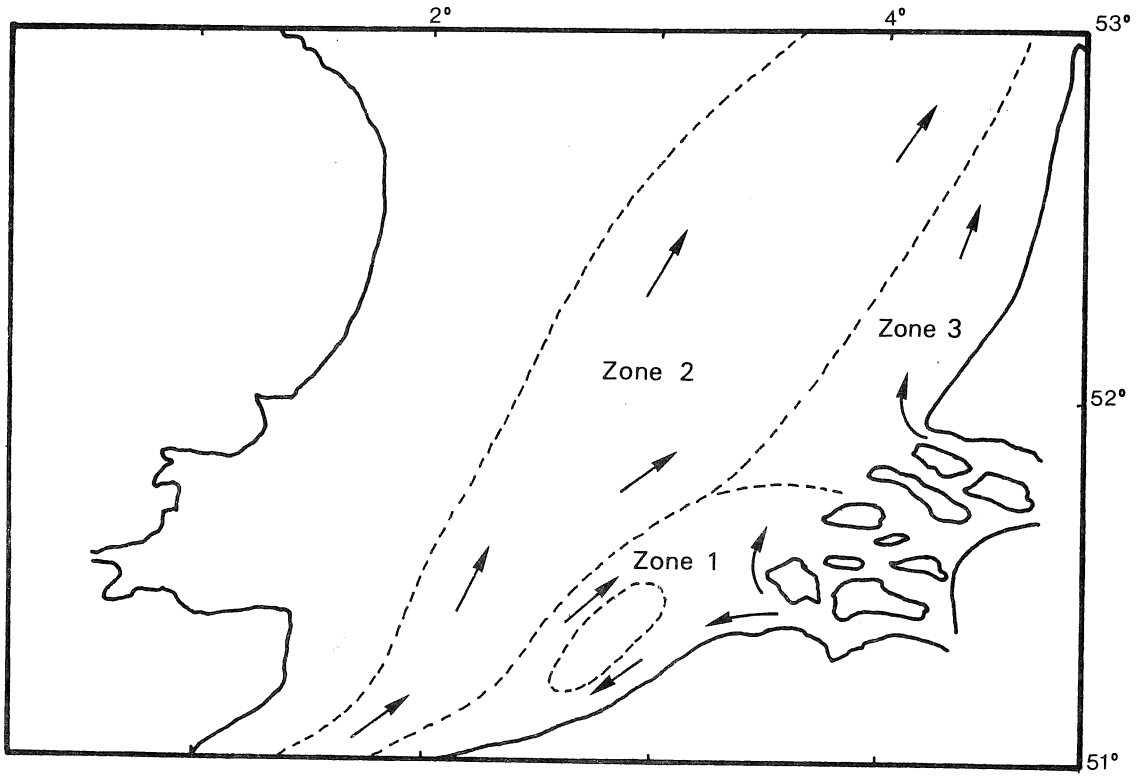


fig. 19.
Les différentes régions écologiques dans le sud de la mer du Nord

c) Zone 3

Elle correspond approximativement à la région soumise à l'influence des eaux du Rhin et de la Meuse. Sur la figure 16, elle se situe au large des côtes néerlandaises entre la côte et la ligne de courant $\psi = 2 \times 10^5$ m^3/s . Podamo (1974) a montré que la plus grande partie de la production primaire se fait au détriment des nutrients exogènes. Le recyclage des nutrients par les bactéries est peu important. Vraisemblablement, la plus grande partie de la biomasse produite est soit exportée vers d'autres régions, soit sédimentée sur place. Ce comportement écologique mal équilibré est la conséquence de l'eutrophication existant dans cette région de la mer du Nord.

La dynamique des écosystèmes observés reflète donc la distribution des courants résiduels déduits du modèle mathématique.

5.3.- Conclusions

Les modèles de circulation résiduelle, qui font intervenir les interactions avec les circulations transitoires, reproduisent toutes les caractéristiques de la circulation résiduelle observée en mer du Nord. Un modèle à mailles fines a permis de découvrir de nouvelles circulations secondaires. Les expériences courantométriques et les mesures de turbidité et de certains paramètres chimiques et biologiques ont confirmé les prédictions du modèle mathématique.

6.- Etude critique des principaux termes de l'équation régissant la circulation résiduelle

Aux paragraphes 4 et 5 de ce chapitre, nous avons montré que le modèle mathématique régi par l'équation (6.6) permettait de reproduire l'ensemble des caractéristiques de la circulation résiduelle et d'expliquer la distribution de vase et la dynamique des écosystèmes dans la partie sud de la mer du Nord. Il nous semble intéressant de démontrer l'importance et le rôle joués par les principaux termes de l'équation (6.6).

6.1.- Influence de la topographie du fond sur la dynamique des courants

Pour démontrer l'importance de la topographie du fond dans la dynamique des courants résiduels, nous comparerons les résultats obtenus par deux modèles différents : le premier est caractérisé par une profondeur constante ($h = 80$ m) (fig. 20) et le second par la topographie réelle du fond (fig. 21). Pour bien comprendre le rôle joué par $h = h(\lambda,\phi)$, nous avons annulé la contrainte de marée τ_{t_o}.

Lorsque la profondeur du bassin est constante, nous avons :

$$\tau_{\Sigma_\lambda} \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial}{\partial\phi} (h \cos\phi) - \tau_{\Sigma_\phi} \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial h}{\partial\lambda} = 0 \ ,$$

$$h \, (\nabla \wedge \tau_\Sigma)_z \sim 0$$

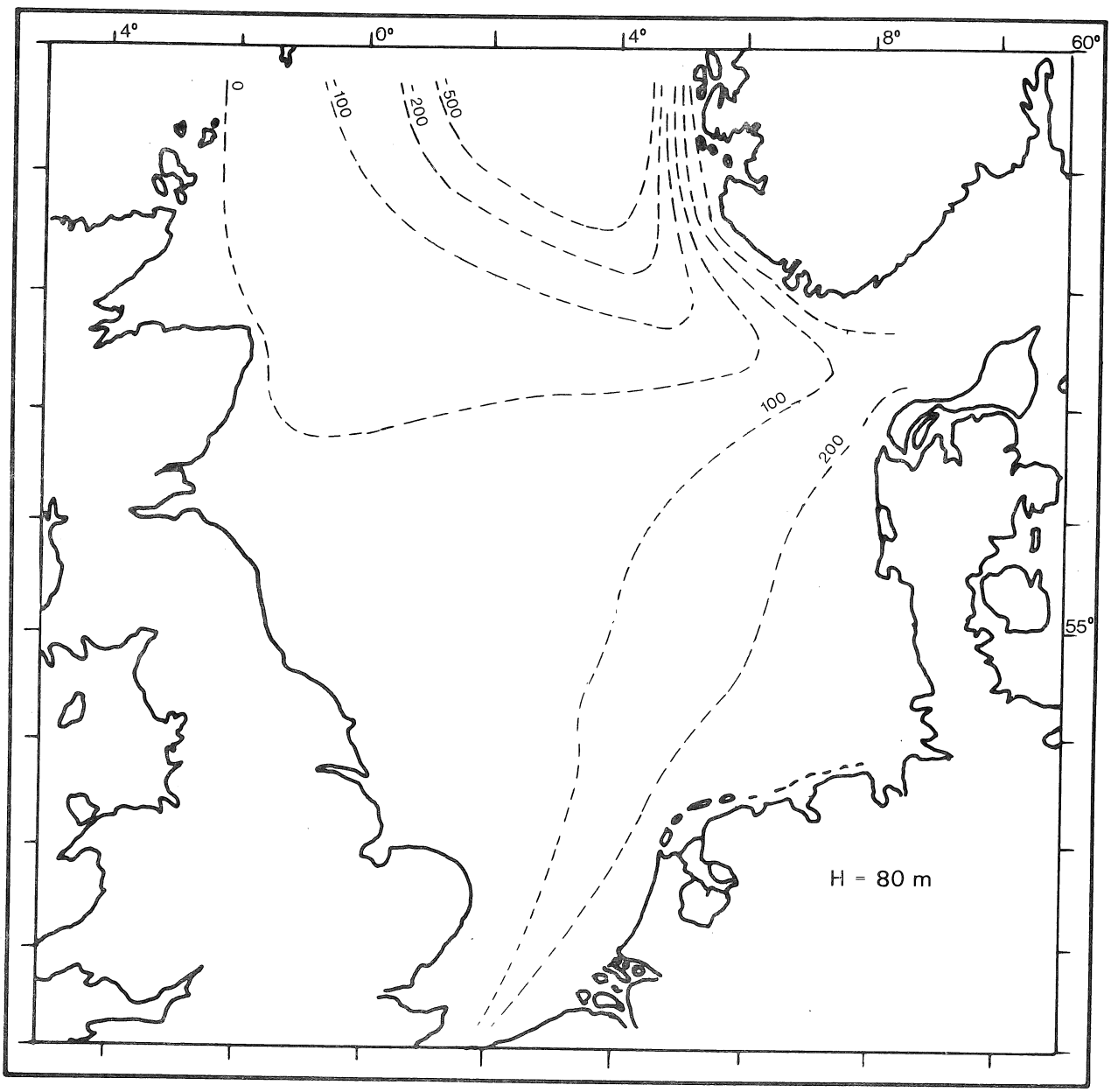


fig. 21.

Circulation résiduelle calculée en l'absence d'interactions entre les circulations transitoires et résiduelles. Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

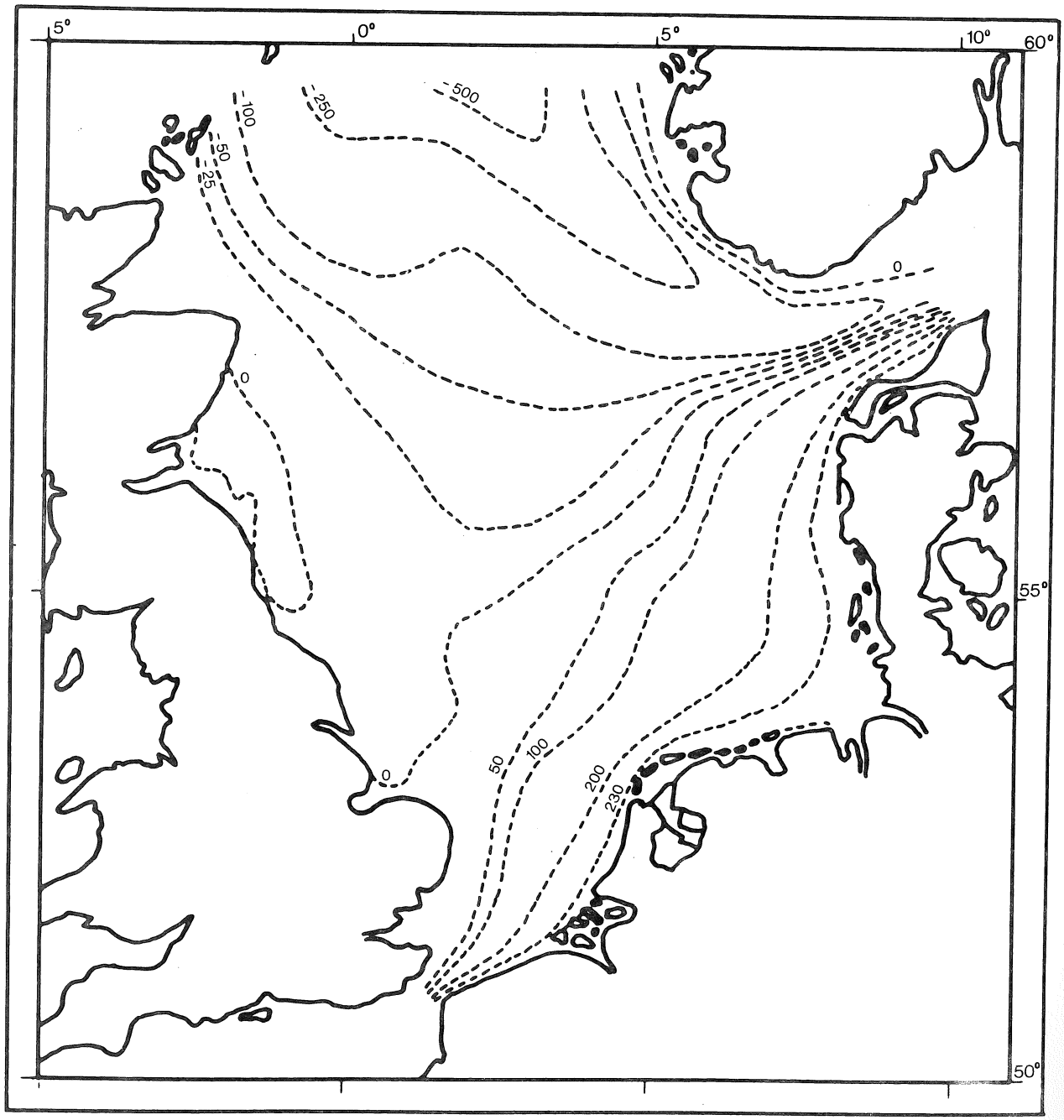


fig. 20.

Circulation résiduelle calculée dans le cas particulier suivant : h = 80 m et $\tau_{t_o} = 0$.
Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

car la distribution spatiale de la contrainte de vent est caractérisée par une très grande échelle ($\ell_c > 10^6$ m) .

La circulation résiduelle est donc uniquement conditionnée par les flux aux frontières dans le cas h = constante .

En mer du Nord, la circulation résiduelle avec une profondeur constante (fig. 20) est fortement différente de celle à profondeur variable. Les différences fondamentales sont les suivantes :

- l'influence de l'Atlantique nord est limitée à la partie nord du bassin dans le cas h = 80 m ,
- dans la partie centrale et sud du bassin, l'intensité des courants est beaucoup plus faible ($< 10^{-2}$ m/s) pour le modèle caractérisé par une profondeur constante.

Les différences entre les circulations calculées (fig. 20 et 21) montrent donc le rôle important joué par la topographie dans la dynamique des courants résiduels.

6.2.- Importance de la contrainte de "marée" dans les mers peu profondes soumises à de fortes marées

L'équation (6.6) contient le terme τ_{t_o} qui dépend de la distribution spatio-temporelle des phénomènes caractérisés par une échelle de temps inférieure à celle des courants résiduels. Comme les courants transitoires les plus importants en mer du Nord sont les courants de marée, nous avons pu calculer explicitement τ_{t_o} .

Pour déterminer l'importance de ce terme dans l'équation de mouvement, il suffit de comparer les résultats de deux modèles différents, l'un avec la contrainte de marée τ_{t_o} , l'autre sans.

La figure 21 donne la circulation résiduelle en mer du Nord sans la contrainte de marée. Les grandes tendances de la circulation résiduelle observée (fig. 1) sont correctement reproduites avec ce modèle. Il n'y a donc, à grande échelle, aucune différence marquante entre les résultats donnés par les modèles mathématiques, avec ou sans contrainte de marée. Les grands tourbillons observés par Böhnecke et Laevastu (fig. 4) ne sont pas reproduits avec le modèle caractérisé par une

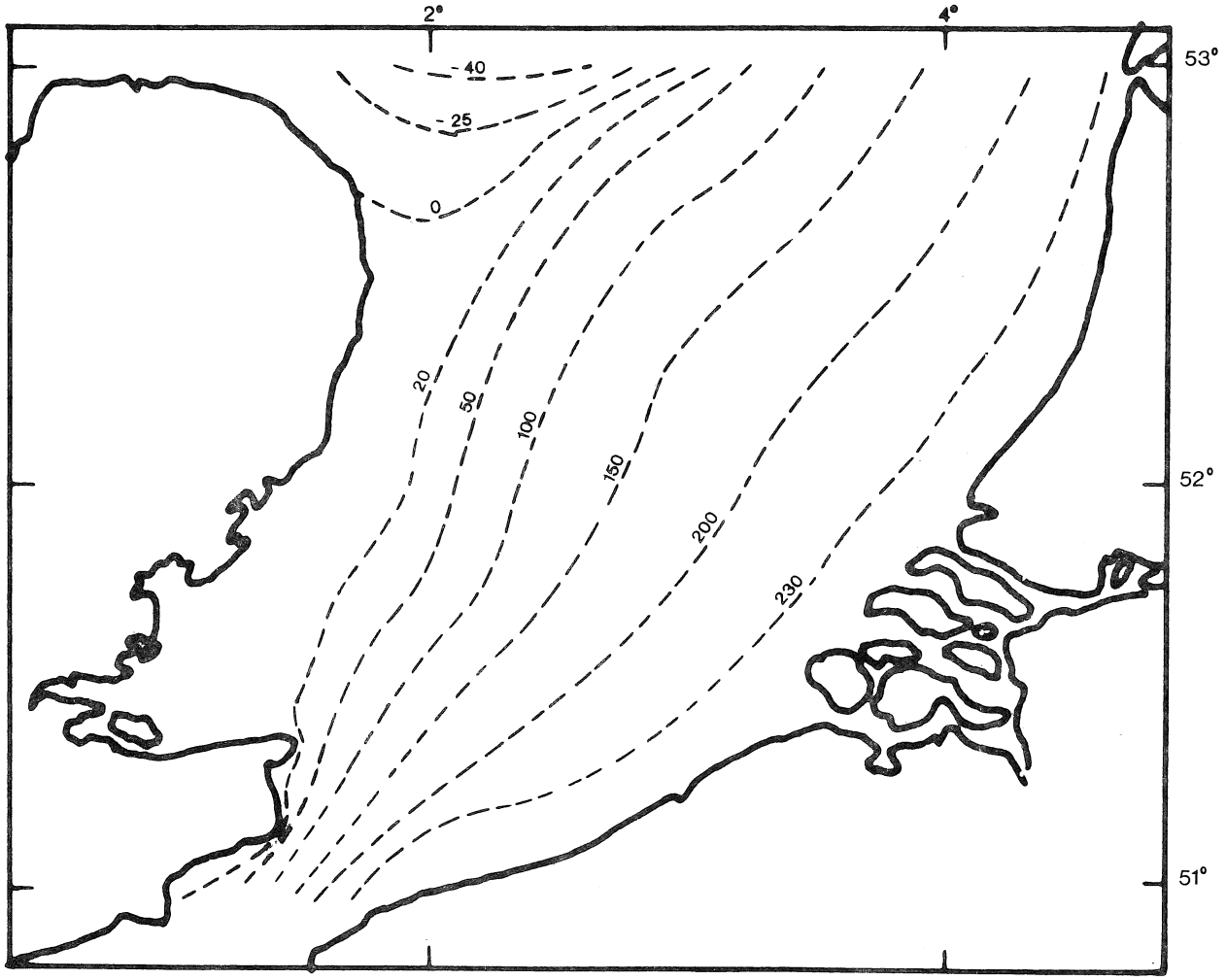


fig. 22.

Circulation résiduelle calculée sans contrainte de marée et sans contrainte de vent. Le coefficient de friction sur le fond est pris égal à $K = 1{,}25 \times 10^{-3}$ m/s . Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

contrainte de marée nulle, mais ils le sont avec le modèle contenant τ_{t_o} (fig. 7).

La figure 22 représentant la circulation résiduelle sans contrainte de marée montre que le flux d'eau venant de la Manche s'écoule de manière très régulière dans toute la partie sud de la mer du Nord. Les circulations secondaires observées et présentes dans le modèle avec τ_{t_o} (fig. 17) ne sont pas mises en évidence avec le modèle sans contrainte de marée.

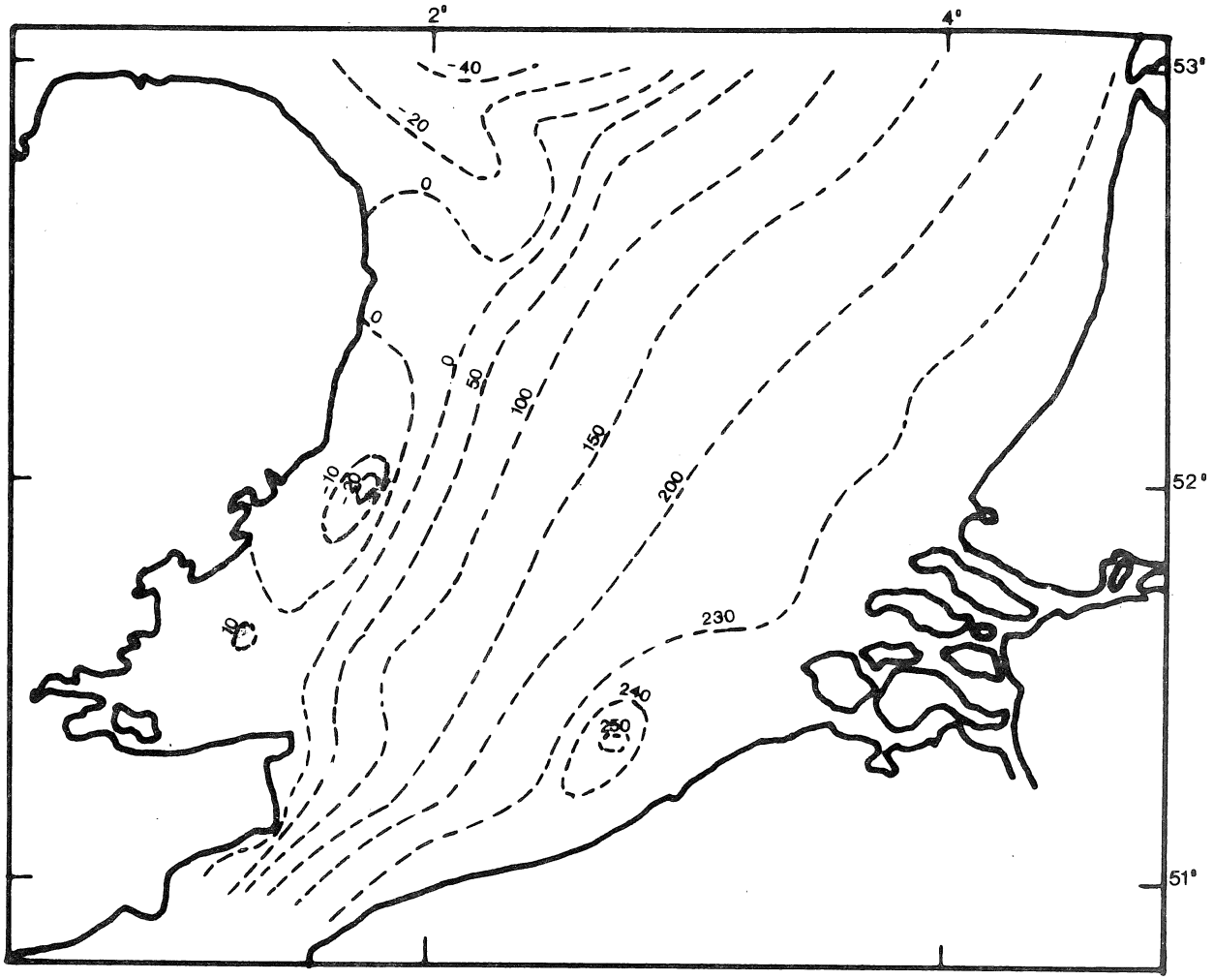


fig. 23.

Circulation résiduelle calculée avec la contrainte de marée mais sans la contrainte de vent. Le coefficient de friction sur le fond est pris égal à $K = 1{,}25 \times 10^{-3}$ m/s . Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

Les modèles sans interactions avec les circulations transitoires reproduisent les grandes tendances de la circulation résiduelle mais sont incapables de révéler les circulations secondaires ou tourbillons.

6.3.- Importance du paramètre de friction

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques [*e.g.* Richtmyer et Morton (1967)] démontre que les phénomènes régis par

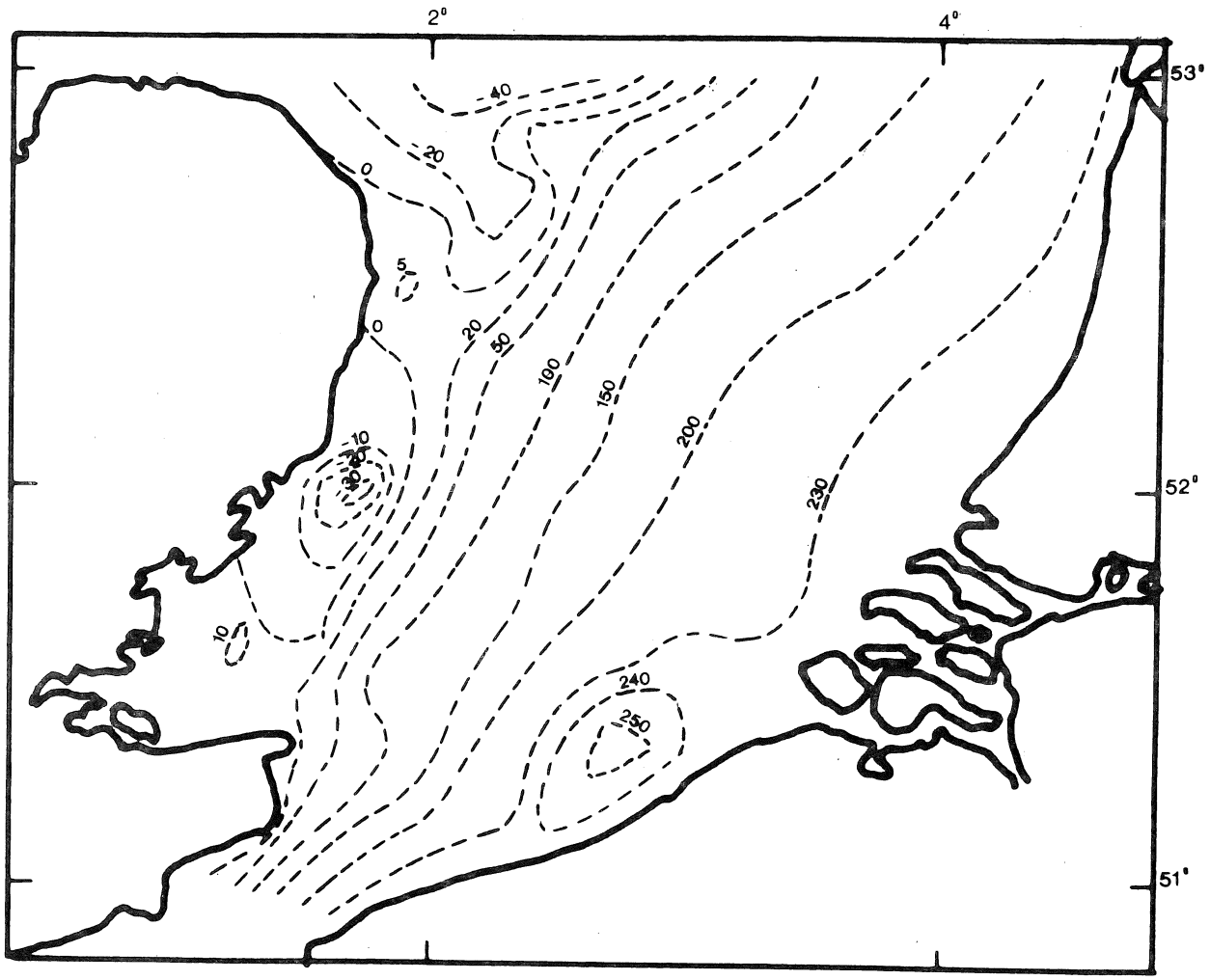


fig. 24.
Circulation résiduelle calculée avec la contrainte de marée mais sans la contrainte de vent. Le coefficient de friction sur le fond est donné par $K = f(z_0, h, \|u\|)$. Les lignes de courant sont exprimées en $10^3\ m^3/s$.

ces équations sont conditionnés en grande partie par les termes en dérivée seconde et par les forces extérieures. Le paramètre de friction, coefficient du laplacien, joue donc un rôle très important dans la distribution de la fonction de courant ψ . Une simple analyse d'ordre de grandeur montre que le coefficient $K \sim D \|u\|_0$ vaut

$$K \sim 1{,}25 \times 10^{-3}\ m/s$$

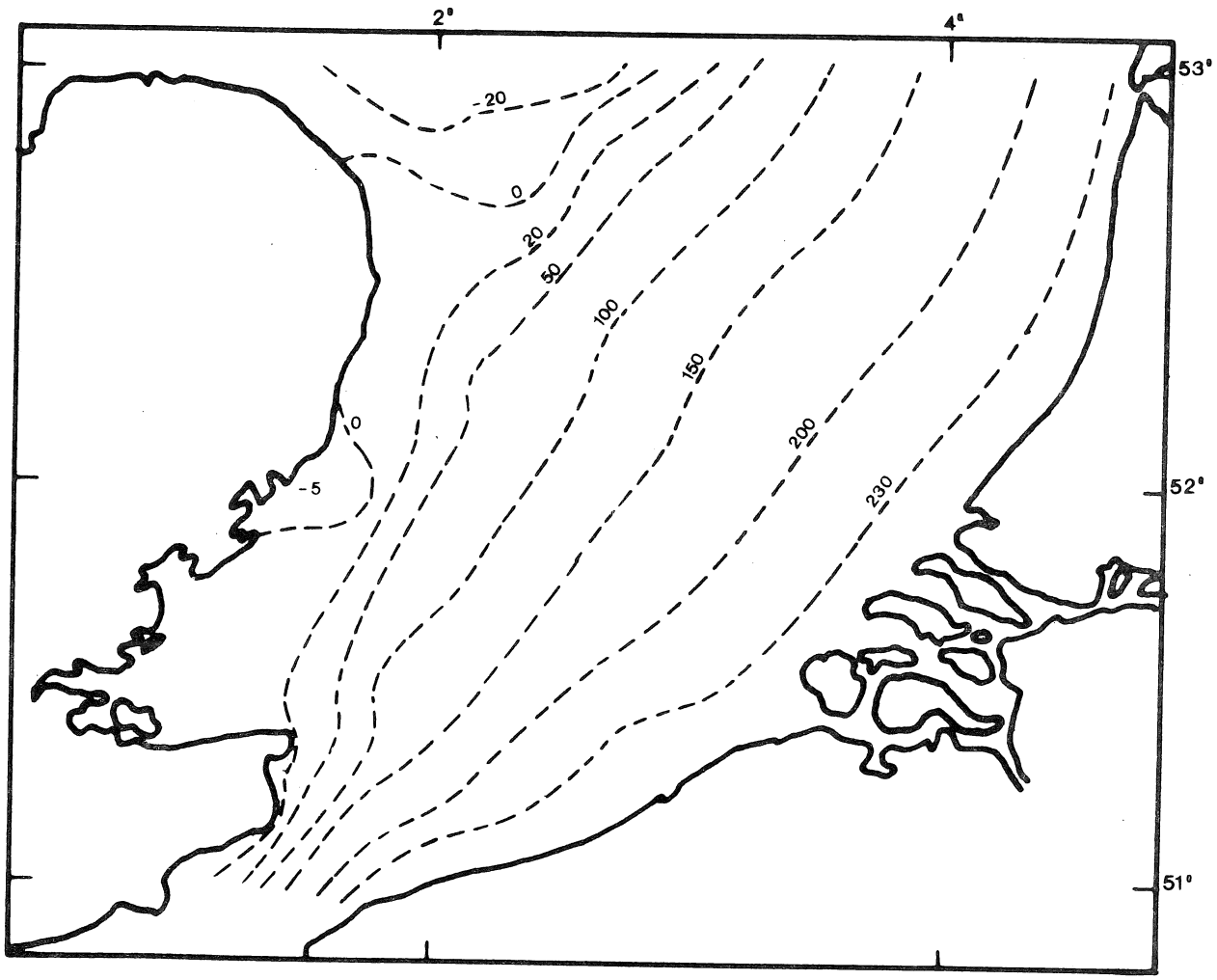


fig. 25.
Circulation résiduelle calculée avec la contrainte de marée mais sans la contrainte de vent. Le coefficient de friction sur le fond est pris égal à $K = 3 \times 10^{-3}$ m/s . Les lignes de courant sont exprimées en 10^3 m^3/s .

en supposant un courant de marée de 1 m/s . La figure 23 donne la circulation résiduelle dans la partie sud de la mer du Nord avec la contrainte de marée, un coefficient de friction constant $K = 1{,}25 \times 10^{-3}$ m/s , mais sans contrainte de vent. La comparaison des figures 23 et 24 montre le peu d'importance des *variations spatiales* du coefficient de friction K . Si on double la valeur de K (fig. 25), les circulations secondaires créées par les termes du second membre de l'équation (6.6)

disparaissent : le rôle joué par le deuxième membre diminue lorsqu'on augmente K .

Dans la dynamique de la circulation résiduelle, ce ne sont pas les variations spatiales du paramètre de friction K qui sont importantes mais bien son amplitude. Pour obtenir de bons résultats, il suffira donc d'avoir une bonne estimation de K .

Conclusions

Le but essentiel, fixé au début de ce travail, était d'établir un modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle dans une mer continentale peu profonde, soumise à de fortes marées et à de violentes tempêtes.

Notre modèle, faisant intervenir les interactions avec les marées et les tempêtes, nous a permis de simuler avec succès les grandes tendances de la circulation résiduelle et a mis en évidence des gyres ou écoulements secondaires. Pour des raisons évidentes, nous nous sommes également attachés à la circulation résiduelle dans le sud de la mer du Nord : cette étude a permis d'expliquer la distribution de la vase et de certains paramètres chimiques et biologiques.

Des modèles plus simples, comme ceux développés par nous-même en 1972, ne faisant pas intervenir le couplage entre les circulations résiduelles et transitoires, ne mettent pas en évidence ces écoulements secondaires qui sont cependant très importants pour la dynamique de nombreux phénomènes chimiques, géologiques et biologiques.

Comme l'étude de la circulation résiduelle nécessite la connaissance de l'interaction entre les circulations résiduelles et transitoires, nous avons dû aborder la simulation des marées et des tempêtes. Les équations non-linéaires des modèles hydrodynamiques, intégrés sur la profondeur, ont été résolues en nous basant sur un algorithme original, dérivé de celui de Hansen. Les simulations de la marée semi-diurne lunaire et de la tempête du 17 au 20 novembre 1973 ont démontré les capacités offertes par le modèle non stationnaire et par l'algorithme numérique, développés dans ce travail. Malgré le peu d'informations relatives aux paramètres de friction et aux élévations de la surface le

long de la frontière nord de la mer du Nord, nous constatons un accord très satisfaisant entre les résultats des simulations et les observations. La connaissance de la marée semi-diurne lunaire fut également nécessaire pour calculer la contrainte de marée et les coefficients de friction sur le fond du modèle mathématique régissant la circulation résiduelle.

Il ressort de notre étude que nos modèles sont capables de simuler aussi bien les circulations résiduelles que les circulations transitoires de marée et de tempête. Les modèles non-stationnaires sont à même de déterminer les profondeurs vraies de chenaux de navigation et de calculer les élévations de la surface induites par les marées et par les tempêtes. Quant aux modèles stationnaires, ils sont indispensables pour étudier le transport à long terme du plancton, des nutrients et des polluants.

Bibliographie

AIRY, G.B., (1842). *Tides and waves*, in *Encycl. Metropolitana, Vol. 5*, London.

ARAGO, F., (1836). Ursache der Meeresströmungen, Poggendorffs, *Ann. der Physik. und Chemie, 37*, 450-454, Leipzig.

ARISTOTE, (384-322 av. J.C.). *Meteorologica, 2*, 2, Trad. H.D. LEE, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952.

BANKS, J.E., (1974). A mathematical model of a river-shallow sea system used to investigate tide, surge and their interaction in the Thames-southern North Sea region, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 275*, 567-609.

BATCHELOR, G.K., (1967). *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, London.

BERNOULLI, D., (1740). *Sur le flux et le reflux de la mer*, in *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, 2*, de Diderot et de D'Alembert, p.784, réimpression : Readex micro-film corporation, New York, 1969.

BJERKNES, V., (1898). Ueber einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres, *Kongl. Svenska. Vetenskaps-Akad. Handl.*, N.F., (4ème série), *31, 4*, 1-35 plus 4 pages de figures.

BÖHNECKE, G., (1922). Salzgehalt und Strömungen der Nordsee, Inst. Meeresk. Univ. Berlin, Neue Folge A., Geogr-naturwiss., Reihe 10, 1-34.

BOWDEN, K.F., (1953). Note on wind drift in a channel in the presence of tidal currents, *Proc. Roy. Soc. London, A 219*, 426-446.

BOWDEN, K.F., (1956). The flow of water through the Straits of Dover related to wind and differences in sea-level, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 248*, 517-551.

BOWDEN, K.F., (1962). Measurements of turbulence near the sea bed in a tidal current, *J. Geophys. Res., 67,* 3181-3186.

BOWDEN, K.F., (1965). Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, *J. Fluid Mech., 21,* 83-95.

BOWDEN, K.F., (1966). *Turbulence,* in *The Sea, Vol. 1,* édité par M.N. Hill, Interscience Publishers, Wiley, New York, 802-825.

BOWDEN, K.F. and FAIRBAIRN, L.A., (1956). Measurements of turbulent fluctuations and Reynodls stresses in a tidal current, *Proc. Roy. Soc. London, A 237,* 422-438.

BRETTSCHNEIDER, G., (1967). Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens zur Ermittlung der M_2, Mitschwingungsgeseit der Nordsee, Mitteilungen Inst. Meeresk. Univ. Hamburg, *7.*

BROGMUS, W., (1952). Eine revision der Wasserhaushaltes der Ostsee *Kieler Meeresforschung, 9,* 15-42.

BRYAN, K., (1963). A numerical investigation of a non-linear model of a wind-driven ocean, *J. Atmos. Science, 20,* 594-606.

BRYAN, K. and COX, M.D., (1967). A numerical investigation of the oceanic general circulation, *Tellus, 19,* 54-80.

CAESAR, C.J., (51 av. J.C.). *The Gallic War, 4,* §23-25, trad. H.J. EDWARDS, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952.

CARRUTHERS, J.N., (1926). The water movements in the southern North Sea, Part 2, The bottom currents, *Fishery Invest. London, 2, 9,* 1-114.

CARRUTHERS, J.N., (1928). The flow of water through the Straits of Dover as gauged by continuous current-meter observations at the Varne lightvessel (50 ° 56 N, 1 ° 17 E), Part I, Methods employed with a preliminary survey of the results, *Fishery Invest. London, 2, 11,* 11-109.

CARRUTHERS, J.N., (1935). The flow of water through the Straits of Dover, *Fishery Invest. London, 2, 14,* 1-67.

CARRUTHERS, J.N., LAWFORD, A.L. and VELEY, V.F.C., (1950). Studies of water movements and winds at various lightvessels in 1938-39 and 1940, The Varne lightship and her successors, *Ann. Biol. Copenhagen, 6,* (pour 1949), 115-120.

CARTWRIGHT, D.E., (1961). A study of currents in the Straits of Dover, *J. of Inst. Navigation, 14,* 130-151.

CARTWRIGHT, D.E., (1976). Shelf-boundary tidal measurements between Ireland and Norway, Eighth Liège Colloquium on Ocean Hydrodynamics, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, (à paraître).

CHARNEY, J.G., (1955). The Gulf Stream as an inertial boundary layer, *Proc. Nat. Acad. Sci. Washington*, *41*, 731-740.

CHARNOCK, H., (1959). Tidal friction from currents near the seabed, *Geophysical Journal*, *2*, 215-221.

CORKAN, R.H., (1948). *Storm surges in the North Sea* (Part I and II), U.S. Hydrogr. Office, Misc. 15072, Washington, D.C.

DAUBERT, A., et GRAFFE, O., (1967). Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents, Applications aux estuaires, *La Houille blanche*, *8*, 867-889.

DEACON, E.L., (1973). Geostrophic drag coefficients, *Boundary layer Meteorology*, *5*, 321-340.

DEFANT, A., (1932). Die Gezeiten und inneren Gezeitenwellen des Atlantischen Ozeans, *Wiss. Ergebn. Deut. Atlant. Expedi. "Meteor"*, *7*, 1-117.

DEFANT, A., (1961). *Physical Oceanography*, *Vol. 2*, Pergamon Press, London.

DICKSON, R.R., (1971). A recurrent and persistent pressure anomaly pattern as the principal cause of intermediate scale hydrographic variations in the European shelf seas, *Deut. Hydr. Zeit.*, *24*, 97-119.

DOODSON, A.T., (1935). Tides in oceans bounded by meridians, II, Diurnal tides, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, *A 100*, 305-329.

DOODSON, A.T., (1938). Tides in oceans bounded by meridians, III, Ocean bounded by complete meridian : semi-diurnal tides, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, *A 237*, 311-373.

DRONKERS, J.J., (1966). *Tidal computations*, North Holland Publishing Co., Amsterdam.

DUUN-CHRISTENSEN, J.T., (1971). Investigations on the practical use of a hydrodynamic-numeric method for calculation of sea level variations in the North Sea, the Skagerrak and the Kattegat, *Deut. Hydr. Zeit*, *24*, 210-227.

DUUN-CHRISTENSEN, J.T., (1974). The analysis of the surface pressure field for application in a H-N model for the North Sea, I.C.E.S.

special meeting 1974 on Models of Water Circulation in the Baltic, Paper *15*.

DUUN-CHRISTENSEN, J.T., (1975). The representation of the surface pressure field in a two-dimensional hydrodynamic model for the North Sea, the Skagerrak and the Kattegat, *Deut. Hydr. Zeit., 28*, 97-116.

EKMAN, V.W., (1905). On the influence of the earth's rotation on ocean-currents, *Arkiv. Math. Astr. Fysik, 2*, 1-52.

ELDER, J.W., (1959). The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech., 5*, 544-560.

ELSKENS, I., (1974). Some aspects of the dynamic behaviour of metallic and other pollutants in the water column and the associated sector, in Math. Modelsea, I.C.E.S., *CM 1974-C:1*, Hydrography committee, 415-454.

EULER, L., (1740). *Problema 16, Sectio prima de statu aequilibri i fluidorum, Volumen posterius, Commentationes Mechanicae*, édité par Truesdell Auctoritate et impensis societatis scientiarum naturalium Helveticae, Lausanne, 1955, 67-72.

FERREL, W., (1882). *Popular essays on the movements of the atmosphere*, U.S. War Dept., Professional papers, Signal Serv., 21 59.

FISCHER, G., (1959). Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, *Tellus, 11*, 60-76.

FISCHER, G., (1965). On a finite difference scheme for solving the non linear primitive equation for a barotropic fluid with application to the boundary problem, *Tellus, 17*, 405-412.

FLATHER, R.A. et DAVIES, A.M., (1975). *The application of numerical models to storm surge prediction*, Institute of oceanographic Sciences (Liverpool), Report *16*, 1-34.

FRANKLIN, B., (1786). A letter from Dr. B. Franklin to Mr. Alphonsus le Roy ... containing sundry maritime observations, *Trans. Amer. Philos. Soc. Philadelphie, 2*, 294-329.

GALILEE, G., (1564-1642). In *Encyclopaedia Universalis, 7*, 441, Paris 1970.

GILL, A.E., (1968). A linear model of the Antartic circumpolar current, *J. Fluid Mech., 32*, 465-488.

GODIN, G., (1965). Some remarks on the tidal motion in a narrow rectangular sea of constant depth, *Deep Sea Res., 12*, 461-468.

GODIN, G., (1972). *The analysis of tides*, Liverpool University Press, Liverpool.

GOLDSBROUGH, G.R., (1930). The tidal oscillations in an elliptic basin of variable depth, *Proc. Roy. Soc. London, A 130*, 157-167.

GROEN, P., and GROVES, G.W., (1966). *Surges*, in *The Sea, Vol. I*, édité par Hill, Interscience Publishers, Wiley, New York, 611-646.

GROTKOP, G., (1973). Finite element analysis of long-period water waves, *Computer Methods Appl. Mech. Engin.*, *2*, 147-157.

GULLENTOPS, F., (1974). Detrital sedimentology in the Southern Bight of the North Sea, in Math. Modelsea, I.C.E.S., Hydrography Committee, *CM-1974-C-7*, 55-80.

HANSEN, W., (1952). Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondtide M_2 in der Nordsee, *Deut. Hydr. Zeit. Erganzungsheft I.*

HANSEN, W., (1956). Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen, *Tellus*, *8*, 287-300.

HANSEN, W., (1966). *Tides*, in *The Sea, Vol. I*, édité par Hill Interscience Publishers, Wiley, New York, 764-801.

HASSE, L., (1968). Zur Bestimmung des vertikalen Transporte von Impuls und fühlbarer Wärme in der wassernahen Luftschlicht über See, *Hamburger Geophysikalische Einzelschriften*, Heft N° *11*.

HASSE, L., (1973). On the surface to geostrophic wind relationship at sea and the stability dependence of the resistance law, *Beitr. Phys. Atmos.*, *47*, 45-55.

HEAPS, N.S., (1965). Storm surges on a continental shelf, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 257*, 351-383.

HEAPS, N.S., (1967). *Storm Surges*, in *Oceano. Mar. Biol. Ann. Rev.*, édité par H. Barnes, Allan and Unwin Publ. Co, London, 11-47.

HEAPS, N.S., (1969). A two-dimensional numerical sea model, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 265*, 93-137.

HEAPS, N.S., (1972). On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, *6*, 2, 143-180.

HEAPS, N.S., (1973). Three-dimensional numerical model of the Irish Sea, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc. London*, *35*, 99-120.

HERODOTE, (484-420 av. J.C.). *Histoires, Euterpe, 2,* §11, trad. Ph. Legrand, Les Belles Lettres, Col. Universités de France, Paris, 1936.

HILL, H.W., (1974). *Currents and water masses,* in *North Sea Science,* édité par E.D. Goldberg, M.I.T. Univ. Press, Cambridge, Mass., 17-42.

HILL, H.W. and PARAMORE, M.J., (1971). An analysis of long-term trends in temperature and salinity at four English lightvessels, I.C.E.S. *CM 1971-C 27,* Hydrography Committee, 1-6.

HÖHN, R., (1974). *On the climatology of the North Sea,* in *North Sea Science,* édité par E.D. Goldberg, M.I.T. Univ. Press, Cambridge, Mass., 183-236.

HOLSTERS, H., (1959). Calcul d'une marée sinusoïdale simple se propageant dans deux dimensions, *Ann. Trav. Publ. Belg., 2,* 1-13.

HOLSTERS, H., (1962). *Remarques sur la stabilité dans le calcul de marée,* in *Proc. Symp. Math. Hydr. Meth. Phys. Ocean,* September 1961, Inst. Meeresk. Univ. Hamburg, 211-225.

HOUGH, S.S., (1897). On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 189,* 201-257.

JELESNIANSKI, C.P., (1965). A numerical calculation of storm tides induced by a tropical storm impinging on a continental shelf, *Month. Weath. Rev., 93,* 343-358.

KALLE, K., (1949). *Die natürlischen Eigenschaften der Gewasser,* in *Handbuch der Seefischerei Nordeuropas, Vol. 1,* part 2, Schweizerbart, Stuttgart.

KAUTSKY, H., (1973). The distribution of the radio-nuclide caesium 137 as an indicator for the North Sea watermass transport, *Deut. Hydr. Zeit., 26,* 241-246.

KOHL, J.G., (1868). *Geschichte des Golfstroms und seiner Erforschung,* edit. C.E. Müller, Bremen.

KEPLER, J., (1571-1630). *Mysterium cosmographicum, De stella nova, 1,* C.H. Beckesche Verslagbuchhandlung, München, 1938.

KOLMOGOROV, A.N., (1941). Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, *C.R. (Dokl) Acad. Sci., URSS, 32,* 16-21.

KOOP, D., (1974). Windgenerated sealevel fluctuations in the Baltic, A comparison between numerical results and observations from 13 to 20 October 1967, I.C.E.S. Special Meeting 1974, Models of water circulation in the Baltic, Paper N° *12*, 1-12.

KRAUSS, E.B., (1972). *Atmosphere-Ocean Interactions*, Oxford Monographs on Meteorology, édité par P.A. Shepard, Clarendon Press, Oxford.

KRAUSS, W., (1974). Two-dimensional seiches and stationary drift currents in the Baltic Sea, I.C.E.S. Special Meeting 1974, Models of water circulation in the Baltic, Paper N° *10*, 1-13.

KREISS, H., (1957). Some remarks about non-linear oscillations in tidal channels, *Tellus*, *9*, 53-68.

LAEVASTU, T., (1963). *Water types in the North Sea and their characteristics*, in *Serial Atlas of the Marine Environment*, édité par Amer. Geogr. Soc. Folio, 2 cartes.

LAMB, H., (1962). *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 6ème édition.

LAMOEN, J., (1949). Tides and currents velocities in a sea-level canal, *Engineering*, July 29, 1-3.

LAPLACE, P.S., (1775). *Recherches sur plusieurs points du système du monde*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, in *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars Paris, *9*, 71-310, 1893.

LAPLACE, P.S., (1846). *Du flux et du reflux de la mer*, in *Exposition du système du monde*, Chap. XI, 312-334, Oeuvres de Laplace, Tome 6, Imprimerie Royale, Paris.

LAUWERIER, H.A., (1960a). The North Sea, problem II, Influence of a stationary wind field upon a bay with a uniform depth, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 63*, 266-278.

LAUWERIER, H.A., (1960b). The North Sea, problem III, Influence of a stationary wind field upon a bay with an exponentially increasing depth, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 63*, 279-290.

LAUWERIER, H.A., (1960c). The North Sea, problem V, Free oscillations of a rotating rectangular bay, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 63*, 423-438.

LAUWERIER, H.A., (1961). The North Sea, problem VI, Non-stationary wind effects in a rectangular bay (theoretical part), *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 64*, 104-122.

LAUWERIER, H.A. and DAMSTÉ, B.R., (1963). The North Sea, problem VIII, A numerical treatment, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 66,* 167-183.

LEE, A.J. and RAMSTER, J.W., (1968). The hydrography of the North Sea, A review of our knowledge in relation to pollution problems, *Helgoländer. Wiss. Meeresunters, 17,* 44-63.

LEE, A.J., (1970). The currents and water masses of the North Sea, *Oceano. Mar. Biol. Ann. Rev., 8,* 33-71, édité par H. Barnes, Allan and Unwin Pulb. Co., London.

LEENDERTSE, J.J., (1967). *Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation,* Ph. D. thesis, Technische Hogeschool te Delft, 29 June 1967, 1-165.

LEENDERTSE, J.J., ALEXANDER, R.C. and LIU, S.K., (1973). *A three-dimensional model for estuaries and coastal seas, Volume I, Principle of computation,* Report R-1417-OWRR, December 1973 of the Rand Corporation, Santa Monica, 1-57.

LE PROVOST, Ch., (1974). *Contribution à l'étude des marées dans les mers littorales, Application à la Manche,* Thèse doctorat, Université de Grenoble, 1-228.

LORENTZ, H.A., (1926). *Verslag Staatscommissie Zuiderzee 1918-1926,* Report of the government Zuiderzee Commission, Ag. Landsdrukkerij, Den Haag.

MacCAVE, I.N., (1974). *Mud in the North Sea,* in *North Sea Science,* édité par E.D. Goldberg, M.I.T. Univ. Press, Cambridge, Mass., 74-100.

MACLAURIN, C., (1740). *De causa physica fluxus et refluxus maris, Proposi 7 : "Motus aequae turbatur ex inaequali velocitate qua corpora circa axem terrae motu diurno deferuntur",* Mém. Acad. Sci. Paris.

MERIAN, J.R., (1828). Ueber die Bewegung tropfbarer Flüsigkeiten in Gefässen, *Math. Ann. Basel, 27,* 575

MOENS, M., (1974). Suspended matter, in Math. Modelsea, I.C.E.S. Hydrography Committee, *CM 1974-C 1,* 81-91.

MONIN, A.S. and YAGLOM, A.M., (1970). *Statistical fluid mechanics, Mechanics of turbulence,* M.I.T. Univ. Press, Cambridge, Mass.

MUNK, W.H., (1950). On the wind-driven ocean circulation, *J. Meteorology, 7,* 79-93.

MURTY, T.S. and RAO, D.B., (1970). *Wind-generated circulation in lakes Erie, Huron, Michigan and Superior*, in *Proc. 13th Conf. Great Lakes Res.*, 927-941.

NEWTON, I., (1714). *Prop 24, Theor. 14 "fluxum et refluxum maris ab actionibus solis ac lunae oriri"*, Editio Ultima, in *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Auctior et emendatior, Amsterdam, Sumptibus Societatis.

NIHOUL, J.C.J., (1972). Shear effect diffusion in shallow open seas, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 9-10*, 521-526.

NIHOUL, J.C.J., (1973). *Mathematical Models*, in *North Sea Science*, édité par E.D. Goldberg, M.I.T. Univ. Press, Cambridge, Mass., 43-57.

NIHOUL, J.C.J., (1975). *Modelling of Marine Systems*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam.

NIHOUL, J.C.J. and RONDAY, F.C., (1975). The influence of the tidal stress on the residual circulation, *Tellus, 27*, 484-489.

NOMITSU, T. and TAKEGAMI, T., (1934). Coastal effect upon the ocean current and the sea level, I, Steady state, *Mem. Coll. Sci. Kyoto Imper. Univ., A 17*, 93-141.

OTTO, L., (1970). The mean residual transport pattern in the southern North Sea, I.C.E.S. Hydrogr. Committee, *CM 1970-C 21*, 1-15.

OTTO, L., (1975). *Working paper on flushing times for the North Sea*, travail présenté à la réunion statutaire de I.C.E.S. à Montréal, 1-13.

OZMIDOV, R.V., (1965). Energy distribution between oceanic motions of different scales, *Izv. Atmos. Ocean Phys. Ser., 1*, 439-438.

PILLSBURY, J.E., (1891). *The gulf stream*, Rept. Supt., U.S. Coast and Geod. Surv. pour juin 1890, 459-620 (appendix 10).

PLATZMAN, G.W., (1958). A numerical computation of the surge of June 26, 1954 on Lake Michigan, *Geophysica, 6*, 407-436.

PLATZMAN, G.W., (1963). *The dynamical prediction of wind tides on Lake Erie*, Meteorological Monographs.

PLATZMAN, G.W., (1970). *Ocean tides and related waves*, in *Mathematical problems in the geophysical sciences*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, U.S.A.

PLINE l'Ancien (79-23 av. J.C.). *Natural History*, 2, §212-223, trad. H. Rackham, Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1949.

PODAMO, J., (1974). Aspects of dynamic biology in the Southern Bight of the North Sea and the Sluice Dock at Ostend, in Math. Model-sea, I.C.E.S. Hydrography, *CM 1974-C 1*, 187-257.

POINCARE, H., (1896). Sur l'équilibre et les mouvements des mers, *J. de mathématique*, Paris, 2, 57-102.

POINCARE, H., (1903). Sur un théorème général relatif aux marées, *Bull. Astronomique*, Paris 20, 215-229.

POINCARE, H., (1910). *Leçons de mécanique céleste, Tome 3, Théorie des marées*, Paris.

POSIDONIUS, (134-50 av. J.C.). *Sur l'océan*, in *Histoire des Sciences*, partim *La science antique et médiévale*, édité par R. Taton, P.U.F., Paris, 1957, 372-373.

POSTMA, H., (1957). *Balans van het slibtransport in de Nederlandse rivieren en langs de kust : chemische samenstelling van het slib*, Ned. Inst. voor Onderzook ter Zee Publ. en Versl. N° 1957-1.

PRANDLE, D. et HARRISON, A.J., (1975). *Recordings of potential differences measured on a submarine cable across the Dover Strait during the period July-December 1973*, Institute of oceanographic sciences (Liverpool), Data Report N° 5, 1-5.

PROUDMAN, J., (1953). *Dynamical oceanography*, Methuen and Co. Ltd., London.

PROUDMAN, J., (1954). Note on the dynamics of storm surges, *Month. Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.*, 7, 44-48.

PROUDMAN, J., (1955). The propagation of tide and surge in an estuary, *Proc. Roy. Soc. London*, *A 231*, 8-24.

PROUDMAN, J. et DOODSON, A.J., (1924). The principal constituents of the tides of the North Sea, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, *A 224*, 185-219.

RADACH, G., (1971). Ermittlung zufallsangeregter Bewegungsvorgänge für zwei Modellmeere Mittels des hydrodynamisch-numerischen Verhahrens, Mitt. Inst. Meeresk. Univ. Hamburg, *20*.

RAMSTER, J.W., (1965). Studies with the Woodhead seabed drifters in the southern North Sea, Rap. techn. Fish. Lab. Lowestoft (N.S.), *6*, 1-6.

RAO, D.B., (1968). Natural oscillations of the bay of Fundy, *J. Fish. Res. Board Canada, 25,* 1097-1114.

RAO, D.B. et MURTY, T.S., (1970). Calculation of the steady state wind-driven circulations in Lake Ontario, *Arch. Met. Geophys. Biokl., A 19,* 195-210.

RAYLEIGH, J.W.S., (1876). On waves, *Phil. Magazine, 5,* 257-279.

REID, R.O., et BODINE, B.R., (1968). Numerical model for storm surges in Galveston Bay, *J. Waterways, Harbors,* Div. A.S.C.E., *94,* 33-57.

RICHTMYER, R.D. and MORTON, K.W., (1967). *Difference methods for initial value problems,* Interscience Publishers, Wiley, New-York.

ROLL, H.U., (1965). *Physics of the marine atmosphere,* in *International Geophysical Series,* Academic Press, New York, vol. 7.

RONDAY, F.C., (1971). *Etude de la dispersion d'un polluant en mer du Nord,* mém. Ing. Phys. Univ. Liège, 1-20.

RONDAY, F.C., (1972). Modèle mathématique pour l'étude des courants résiduels dans la mer du Nord, Marine Sciences Directorate, Dept. of the Environment, Ottawa, Manuscript Report Series, *27,* 1-54.

ROSSBY, C.G., (1936). Dynamics of steady ocean currents in the light of experimental fluid mechanics, *Papers in Physical Oceanogr. and Meteor., 5,* 1-43.

ROSSBY, C.G. and MONTGOMERY, R.B., (1935). The layer of frictional influence in wind and ocean currents, *Papers in Physical Oceanogr. and Meteor., 3,* 1-101.

ROSSITER, J.R., (1961). Interactions between tide and surge in the Thames, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 6,* 29-53.

SCHALKWIJK, W.F., (1947). A contribution to the study of storm surges on the Dutch Coast, *Kon. Ned. Met. Inst. Mededelingen en Verhandelinen,* Serie *B,* N° *7* .

SCHOTT, F., (1966). Der Oberflächensalzgehalt in der Nordsee, *ErgänsHft. Deut. Hydr. Zeit., A 9,* 1-58.

SIMONS, T.J., (1972). *Development of numerical models of Lake Ontario, Part 2,* in *Proc. 15th Conf. Int. Assoc. Great Lakes Res., 15,* 655-672.

SMITH, S.D., (1967). Thrust anemometer measurements of wind-velocity spectra and of Reynolds stress over a coastal inlet, *J. Marine Res.*, *25*, 239-262.

SMITH, S.D., (1970). Thrust anemometer measurements of wind turbulence, Reynolds stress and drag coefficient over the sea, *J. Geophys. Res.*, *75*, 6758-6770.

SMITH, S.D., (1974). *Eddy flux measurements over Lake Ontario, Boundary Layer Meteorology*, in *Brockx Memorial Volume*, February 1974.

SOBEY, R.J., (1970). Finite difference schemes for wave-deformation characteristics in mathematical modelling of two-dimensional long-wave propagation, U.S. Army, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Tech. Memo N° *32*.

STOMMEL, H.M., (1948). The westward intensification of wind-driven ocean currents, *Trans. Amer. Geophys. Union*, *29*, 202-206.

STRICKLAND, W., (1802). On the use of the thermometer in navigation, *Trans. Amer. Phil. Soc. Philadelphia*, *5*, 90-103.

STRABON (63 av. J.C.- 21 après J.C.). *Géographie*, *1*, 3, Trad. A. Tardieu, Librairie Hachette, Paris, 1867.

SVANSSON, A., (1959). Some computations of water heights and currents in the Baltic, *Tellus*, *11*, 231-238.

SVANSSON, A., (1968). Hydrography of the Kattegat and the Skagerrak area, Swedish observations, *Meddn. Havsfiskelaboratoriet*, Lysckil, N° *48*, §2.

SVERDRUP, H.U., (1947). Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to the Equatorial currents of the eastern Pacific, *Proc. Nat. Akad. Sci.*, *33*, 318-326.

TAIT, J.B., (1930). The surface water drift in the northern and middle areas of the North Sea and in the Faroe-Shetland Channel, Part I, A preliminary report upon the results of Scottish experiments with surface-floating bottles 1910-1914, *Scient. Invest. Fishery Board, Scotland*, 1930, *2*, 1-82.

TAIT, J.B., (1931). The surface water drift in the northern and middle areas of the North Sea and in the Faroe-Shetland Channel, Part 2, Section 2, A cartographical analysis of the results of Scottish surface-drift bottle experiments commenced in the year 1911, *Scient. Invest. Fishery Board, Scotland*, 1931, *3*, 1-88.

TAIT, J.B., (1937). The surface water drift in the northern and middle areas of the North Sea and in the Faroe-Shetland Channel, Part 2, Section 3, A cartographical analysis of the results of Scottish surface drift bottle experiments of the year 1912, with a discussion of some hydrographical and biological implications of the drift bottle results of 1910-1911 and 1912, including statement of a theory of the upper water circulation of the northern and middle areas, *Scient. Invest. Fishery Board, Scotland*, 1937, *1*, 1-60.

TAYLOR, G.I., (1920). Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins, *Proc. London Math. Soc.*, *2*, *20*, 148-180.

THIJSE, J.Th., (1964). *La mer du Nord et les travaux du delta*, in *Amici et Alumini, Hommage à F. Campus*, éd. Thone, Liège, 337-345.

THOMSON, W., (Lord Kelvin), (1879). On gravitational oscillations of rotating water, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, *10*, 92

TOMPSON, P.D., (1961). *Numerical weather analysis and prediction*, Macmillan Co., New York.

TOMCZAK, G., (1967). Über die änderung der Oberflächentemperatur der Nordsee im Zeitraum 1905-1954, *Deut. Hydr. Zeit.*, *20*, 49-54.

TOMCZAK, G., (1968). Die Wassermassenverteilung und Strömungsverhältnisse am Westausgang des Skagerraks, wahrend der internationalen Skagerrak-Expedition in Sommer 1966, *Deut. Hydr. Zeit.*, *21*, 97-105.

TOMZCAK, G. and GOEDECKE, E., (1962). Monatskarten der Temperatur der Nordsee dargestellt für verschiedene Tiefenhorizonte, *Deut. Hydr. Zeit. ErgänsHft.*, *7*, 1-16.

TOWNSON, J.M., (1974). An application of the method of characteristics to tidal calculations in (x,y,t) space, *J. Hydr. Res.*, *12*, 449-523.

UENO, T., (1964). Non-linear numerical studies on tides and surges in the central part of Seto Inland Sea, *The Oceanographical Magazine*, édité par Japan Meteorological Society, *16*, 53-124.

VAN CAUWENBERGHE, C., (1971). *Stroomatlas Vlaamse Banken*, Ministerie van openbare werken, hydrografische dienst der kust, Oostende.

VAN CAUWENBERGHE, C., (1973). *Overzicht van de tijwaarnemingen langs de belgische kust*, Ministerie van openbare werken, hydrografische dienst der kust, Oostende, 1-41.

VAN GRIESHEIM, A., (1974). *Contribution à l'étude des courants à la limite mer du Nord - mer de Norvège en été*, Thèse doctorat, 3ème cycle, Université de Paris VI, 1-92.

VAN VEEN, J., (1938). Water movements in the Straits of Dover, *J. du Conseil*, Copenhagen, *13*, 7-38.

VAN DANTZIG, D. and LAUWERIER, H.A., (1960). General considerations concerning the hydrodynamical problem of the motion of the North Sea, The North Sea, problem I, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., A 63*, 170-180.

VERONIS, G., (1966). Wind-driven ocean circulation, Part 2, Numerical solutions of the non-linear problem, *Deep Sea Research, 13*, 31-55.

WEENINK, M.P.H., (1958). A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly-enclosed sea, with special application to the southern coast of the North Sea, *Kon. Ned. Met. Inst. Mededelingen en Verhandelingen, 73*, 1-111.

WEENINK, M.P.H. and GROEN, P., (1958). A semi-theoretical, semi-empirical approach to the problem of finding wind effects on water levels in a shallow partly-enclosed sea, Part I, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., B 61*, 198-213.

WELANDER, P., (1957). Windaction on a shallow sea, Some generalisations of Ekman's theory, *Tellus, 9*, 45-52.

WELANDER, P., (1961). Numerical prediction of storm surges, *Advances in Geophysics*, Academic Press, New York, *8*, 315-379.

WILSON, B.W., (1966). Note on surface wind stress over water at low and high wind speed, *J. Geophys. Res., 65*, 3377-3382.

WOLLAST, R., (1972). *Premier aperçu sur la distribution et la composition des sédiments dans le réseau du modèle mathématique*, in *Rapport de Synthèse du Modèle Mathématique*, Journées d'études 24-25 novembre 1971, Ministère de la Programmation de la Politique scientifique, Bruxelles, 164-175.

WYATT, T., (1973). The biology of Oikopleura dioica and Fritiblaria borealis in the Southern Bight, *Marine Biology, 22*, 137-158.

WYRTKI, K., (1954). Schwankungen in Wasserhaushalt der Ostsee, *Deut. Hydr. Zeit., 7*, 91-129.

Achevé d'imprimer le 28 mai 1976
sur le duplicateur et la presse offset
d'é.t.a.b.é.t.y.p.
72, quai de Longdoz - 4020 LIEGE
Tél.: 041/42.59.21

d/1976/1191/3