

PROGRAMME NATIONAL SUR L'ENVIRONNEMENT PHYSIQUE ET BIOLOGIQUE

Pollution des Eaux

Projet Mer

Modèle mathématique pour l'étude de
la circulation due à la marée
en mer du Nord

par

François C. RONDAY*

N 17

* François C. RONDAY,
Institut de Mathématique,
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 LIEGE (Belgium)

Ce travail a été effectué lors de notre séjour à la Direction des Sciences de la Mer,
Ministère de l'Environnement du Canada, à la suite du Programme d'Echanges entre la
Belgique et le Canada placé sous les auspices du Comité des Défis à la Société Moderne
de l'O.T.A.N.

1.- Introduction

Le but de nos études [Ronday (1971,1972)] est d'établir un modèle mathématique qui permettra d'étudier la dispersion spatio-temporelle d'un traceur hydrodynamique. En fait, il s'agit de résoudre une équation de diffusion connaissant le champ de courant en tout point et à tout instant. Nous nous proposons de résoudre l'équation suggérée par Nihoul (1971) qui est particulièrement bien adaptée à l'étude de la diffusion dans une mer peu profonde telle que la mer du Nord où le mélange turbulent est très intense. L'équation de diffusion est la suivante :

$$(1) \quad \frac{\partial r}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{r} = \frac{1}{H} \nabla_h \cdot (\alpha H^2 \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{r}}{|\mathbf{u}|}) + \frac{1}{H} \nabla_h \cdot (\mu \nabla_h r H)$$

où

$$r = \frac{R}{H} \equiv \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \bar{\rho} \, dx_3$$

est la concentration du traceur; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ est la vitesse moyenne sur la profondeur calculée par rapport au temps caractéristique T du phénomène étudié,

$$u_1 = \frac{V_1}{H} \equiv \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \bar{v}_1 \, dx_3$$

et

$$u_2 = \frac{V_2}{H} \equiv \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} \bar{v}_2 \, dx_3 ;$$

h est la profondeur moyenne et ζ l'élévation de la surface de la mer par rapport à son niveau moyen, $H = h + \zeta$ est la profondeur instantanée; μ est le coefficient de viscosité turbulente calculée par rapport au temps caractéristique T ; α est un coefficient dépendant du type de profil considéré (avec le profil de Van Veen, $\alpha = 1,11$).

Nous avons résolu [Ronday (1971)] une forme simplifiée de cette équation en nous basant sur les données courantométriques fournies par les cartes marines. Dans ce travail, nous avons essayé de reproduire théoriquement l'expérience de l'I.C.E.S. qui a été largement décrite par Talbot (1970). Les concentrations calculées et observées sont semblables et les différences sont principalement dues aux manques d'informations précises sur le champ de courant existant dans la région du déversement de rhodamine B.

Pour cette raison, il est apparu nécessaire de construire des modèles mathématiques qui permettront de connaître d'une manière plus précise le champ de courant. Le grand avantage de la méthode du modèle mathématique est sa souplesse; ainsi, lorsqu'on désire étudier avec précision une région déterminée et de dimensions limitées, il suffit d'utiliser deux modèles : l'un à mailles fines autour de la zone à étudier tandis que l'autre à mailles larges fournira les conditions aux limites du premier. Cette méthode sophistiquée donnera des résultats de bonne qualité en dépit des erreurs inhérentes aux méthodes numériques.

Notre premier modèle hydrodynamique [Ronday (1972)] a consisté en l'étude de la circulation résiduelle et de vent qui joue un rôle capital dans le phénomène d'advection. Cette circulation influence également la diffusion d'un polluant par l'intermédiaire du *shear effect diffusivity* [Bowden (1965); Nihoul (1971)] mais dans une mesure moindre que la circulation due à la marée.

Dans ce présent travail, nous établirons un modèle mathématique de marée afin d'en déterminer les courants qui sont les principaux responsables de la diffusion des polluants. Les nombreuses informations côtières sont indispensables pour tester la précision du modèle; nous nous sommes basés sur les constantes harmoniques fournies par le Bureau Hydrographique International de Monaco.

Comme le but que nous nous sommes assignés est de construire un modèle de marée et non de retrouver toutes les caractéristiques de toutes les marées partielles, nous nous sommes bornés à étudier la marée partielle la plus importante qui est du type semi-diurne car le *Form - Zahl* facteur, introduit par Defant (1961), est partout inférieur à 0,25 excepté en deux points : Lowestoft (0,34) et Fair Isle (0,28). Le pourcentage de la marée M_2 dans l'élévation à vive eau est le suivant :

- pour le nord de la mer du Nord (76 ± 7) %
- pour le *Southern Bight* (78 ± 4) % .

Ainsi l'étude de la seule marée partielle M_2 nous donnera des renseignements très utiles sur les phénomènes associés à la marée réelle existant en mer du Nord.

2.- Formulation mathématique

En introduisant la notion de transport

$$(2) \quad V_1 = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v}_1 \, dx_3 \quad , \quad V_2 = \int_{-h}^{\zeta} \overline{v}_2 \, dx_3 \quad ,$$

les équations de conservation de la masse et du moment donnent, dans le cas où l'on suppose l'équilibre quasi statique, l'homogénéité du fluide et la viscosité turbulente constante :

$$(3) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} - fV_2 - A_h \Delta V_1 + \frac{k}{H^2} V_1 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_1}{H} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_2}{H} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ = \tau_1 + H X_1$$

$$(5) \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} + fV_1 - A_h \Delta V_2 + \frac{k}{H^2} V_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2} + gH \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \lambda \frac{V_1}{H} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \lambda \frac{V_2}{H} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \\ = \tau_2 + H X_2$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées spatiales; t la coordonnée temporelle; V_1, V_2 les deux composantes du transport fluide; ζ l'élévation du niveau de la surface de la mer par rapport à sa position d'équilibre h ; $H = h + \zeta$ la profondeur instantanée; X_1 et X_2 les composantes des forces extérieures; τ_1 et τ_2 les composantes de la contrainte du vent sur la surface; f le paramètre de Coriolis; k le coefficient de friction sur le fond; g la gravité de la terre; A_h le coefficient de viscosité turbulente et λ un coefficient qui tient compte du profil vertical du courant.

Defant (1961) a montré que la marée astronomique est de loin beaucoup plus faible que celle externe pour les mers côtières et les golfes. Dans ces conditions, nous pouvons supposer

$$X_1 \sim 0 \, \text{m/s}^2 \\ X_2 \sim 0 \, \text{m/s}^2$$

sans trop restreindre la généralité du modèle. Le travail développé par les forces extérieures provient donc principalement de l'onde de marée atlantique qui engendre aux ouvertures de la mer du Nord des ondes progressives.

Nous prendrons un coefficient de profil vertical du courant ($\lambda = 1$) comme Kreiss (1957) et Brettschneider (1967) l'ont suggéré. Le terme de viscosité turbulente A_h lisse le champ de vitesse et on pourrait montrer que sa présence est indispensable pour obtenir un schéma numérique non divergent. Les observations de Bowden (1966) ont donné pour A_h un ordre de grandeur de $10^2 \text{ m}^2/\text{s}$; en introduisant cette valeur dans notre modèle, il a été impossible de reproduire avec succès les lignes cotidales et d'égale amplitude. Nous avons dû, comme Brettschneider, choisir une valeur beaucoup plus grande $A_h \sim 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$. Ce terme ne représente plus la viscosité turbulente réelle mais bien un coefficient de lissage rendu nécessaire pour reproduire correctement la marée.

Le schéma de discrétisation de Lax et Wendroff (1960) a été choisi car une étude critique de Fischer (1965) a montré qu'il conduisait aux meilleurs résultats (voir *A survey of finite-difference approximations to the primitive equations*). Les figures 1, 2 et 3 nous montrent les procédures de calcul.

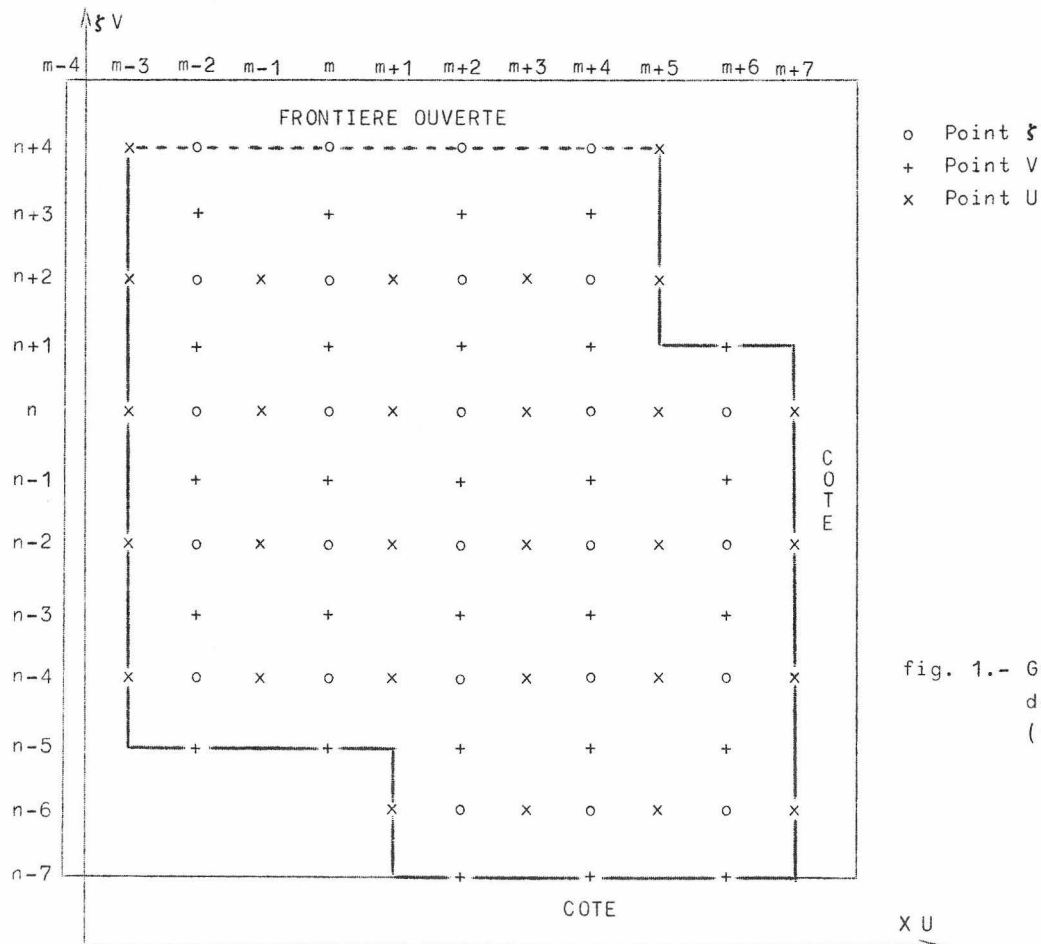


fig. 1.- Grille spatiale de Lax-Wendroff (1960).

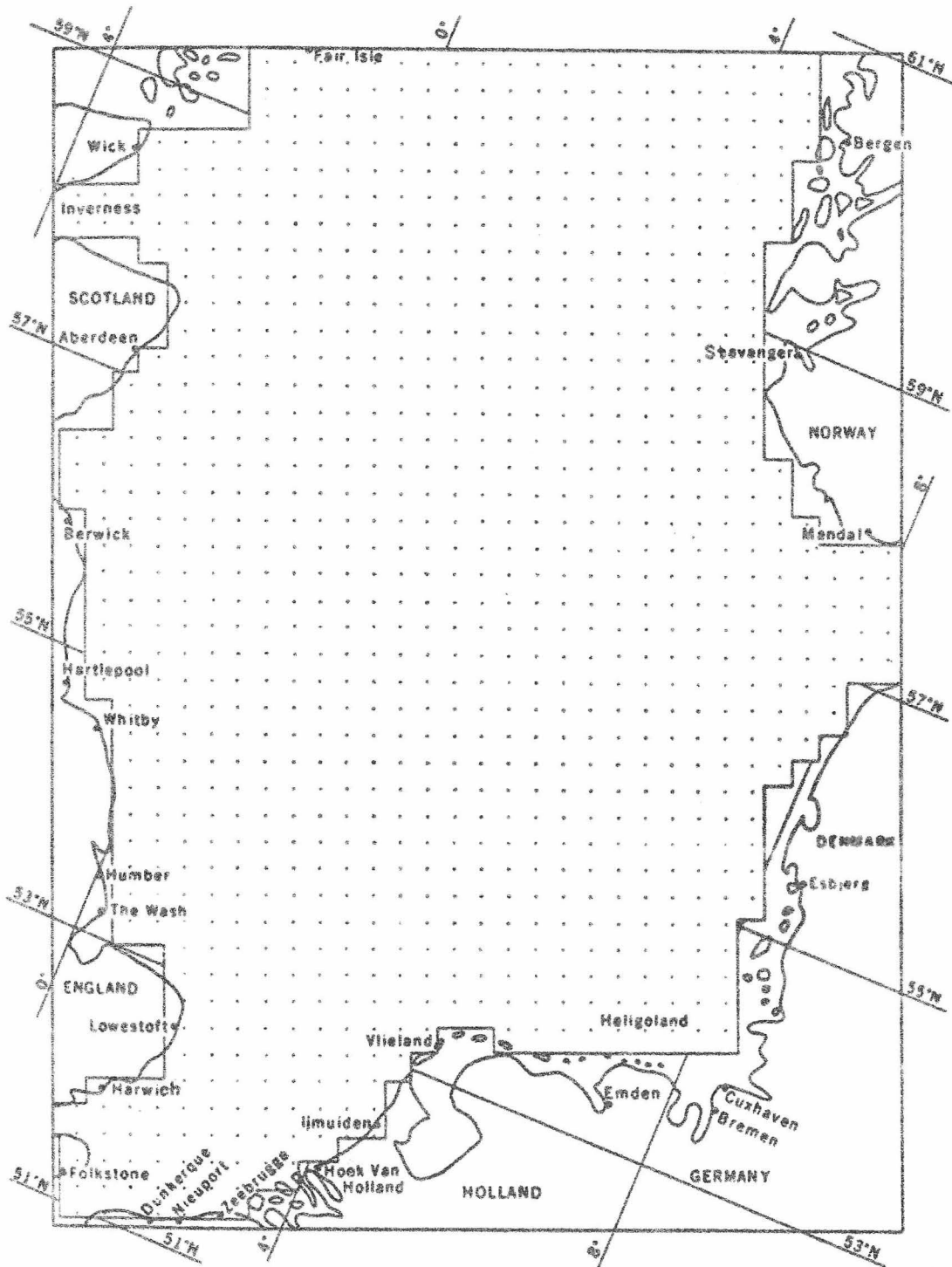


fig. 2.- Grille numérique utilisée pour l'étude de la circulation due à la marée.

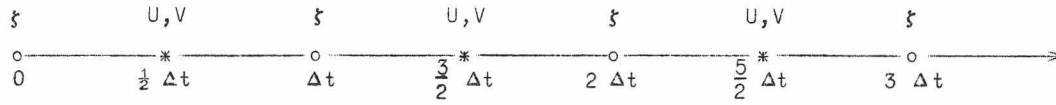


fig. 3.- Procédure de calcul

Les termes de viscosité turbulente, de friction sur le fond et d'advection sont calculés au temps précédent pour éviter les divergences numériques. Dans ces conditions, aux équations différentielles partielles (3), (4) et (5) correspondra le système d'équations simultanées suivant :

$$(6) \quad Z_{2i,2j}^{(n)} = Z_{2i,2j}^{(n-2)} - \frac{\Delta t}{\Delta s} \{ U_{2i+1,2j}^{(n-1)} + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} - U_{2i-1,2j}^{(n-1)} - U_{2i,2j-1}^{(n-1)} \}$$

$$(7) \quad U_{2i+1,2j}^{(n+1)} = U_{2i+1,2j}^{(n-1)} - 2 \Delta t \left\{ U_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{U_{2i+3,2j}^{(n-1)} - U_{2i-1,2j}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}} \right. \\ + \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} - U_{2i+1,2j-2}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}} \\ + g \tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j} \frac{Z_{2i+2,2j}^{(n)} - Z_{2i,2j}^{(n)}}{2 \Delta s} \\ - f \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} + k U_{2i+1,2j}^{(n-1)} \frac{\sqrt{[U_{2i+1,2j}^{(n-1)}]^2 + [\tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)}]^2}}{[\tilde{H}_U^{(n)}{}_{2i+1,2j}]^2} \\ \left. - \frac{A_h}{4(\Delta s)^2} [U_{2i+3,2j}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j-2}^{(n-1)} - 4 U_{2i+1,2j}^{(n-1)}] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad U_{2i,2j+1}^{(n+1)} = U_{2i,2j+1}^{(n-1)} - 2 \Delta t \left\{ \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} - U_{2i-2,2j+1}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_{2i,2j+1}^{(n)}} \right. \\
 + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{U_{2i,2j+3}^{(n-1)} - U_{2i,2j-1}^{(n-1)}}{4 \Delta s \tilde{H}_{2i,2j+1}^{(n)}} \\
 + g \tilde{H}_{2i,2j+1}^{(n)} \frac{Z_{2i,2j+2}^{(n)} - Z_{2i,2j}^{(n)}}{2 \Delta s} \\
 + f \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} + k U_{2i,2j+1}^{(n-1)} \frac{\sqrt{[\tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)}]^2 + [U_{2i,2j+1}^{(n-1)}]^2}}{[\tilde{H}_{2i,2j+1}^{(n)}]^2} \\
 - \frac{A_h}{4(\Delta s)^2} [U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i-2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i,2j+3}^{(n-1)} \\
 \left. + U_{2i,2j-1}^{(n-1)} - 4 U_{2i,2j+1}^{(n-1)}] \right\}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{2i+1,2j}^{(n)} &= H_{2i+1,2j} + \frac{1}{2} \{Z_{2i+2,2j}^{(n)} + Z_{2i,2j}^{(n)}\} \\
 \tilde{H}_{2i,2j+1}^{(n)} &= H_{2i,2j+1} + \frac{1}{2} \{Z_{2i,2j+2}^{(n)} + Z_{2i,2j}^{(n)}\} \\
 \tilde{U}_{2i+1,2j}^{(n-1)} &= \frac{1}{4} \{U_{2i+2,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i+2,2j-1}^{(n-1)} + U_{2i,2j+1}^{(n-1)} + U_{2i,2j-1}^{(n-1)}\} \\
 \tilde{U}_{2i,2j+1}^{(n-1)} &= \frac{1}{4} \{U_{2i+1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i+1,2j}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j+2}^{(n-1)} + U_{2i-1,2j}^{(n-1)}\}
 \end{aligned}$$

Fischer (1959, 1965), Kasahara (1965), Harris et Jelesnianski (1965) ont étudié le problème de la stabilité numérique du système d'équations (3), (4) et (5) et ont montré qu'on pouvait estimer le pas temporel par la relation de Courant-Friedrich :

$$(10) \quad 2 \Delta t < \frac{2 \Delta s}{\sqrt{2 g h_{\max}}}$$

La profondeur en mer du Nord est partout inférieure ou égale à 500 mètres et le pas spatial choisi vaut 21.700 mètres; le critère de Courant-Friedrich donne en introduisant ces valeurs dans la relation (10) :

$$(11) \quad 2 \Delta t < 217 \text{ s} .$$

On pourrait certes utiliser d'autres formules donnant le pas temporel maximal qui feraient intervenir la rotation de la terre, la friction sur le fond et la viscosité turbulente mais l'influence de ces termes sur le choix du pas temporel maximal est faible. La forme irrégulière du fond est source d'instabilités imprévisibles lorsque les gradients de profondeur sont importants (cas de la mer du Nord); nous avons été obligés pour cette raison de réduire le pas temporel donné par la relation (11) et avons choisi, pour des raisons pratiques, un pas temporel correspondant à $1/360$ de la période de la marée M_2 :

$$2 \Delta t = \frac{T_{M_2}}{360} = 124,3 \text{ s} .$$

Le système ne montre aucun signe d'instabilités avec cette valeur, ce qui prouve que le choix du pas est adéquat.

Le système d'équations différentielles partielles doit satisfaire à des conditions initiales et aux frontières.

Conditions initiales

Le système d'équations différentielles partielles est du type hyperbolique car il admet des multiplicités caractéristiques réelles. Sur des exemples simples, on vérifie en s'appuyant sur les propriétés des systèmes hyperboliques que le régime oscillatoire établi est pratiquement indépendant des conditions initiales. Nous pouvons donc supposer les deux composantes du transport et l'élévation de la surface nulles à tous les noeuds de la grille à l'instant initial.

Conditions aux frontières

i) le long des côtes

Le flux de fluide normal à une côte est partout et à tout instant nul :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

ii) le long des frontières ouvertes

L'élévation de la surface de la mer est donnée par la relation :

$$H = A \cos (\sigma t_{Gr} + p\lambda - \kappa)$$

où t_{Gr} est le temps de Greenwich, $p = 2$ car la marée est semi-diurne et où λ est la longitude géographique positive vers l'est.

Ne connaissant les constantes harmoniques de marée que le long des côtes, une interpolation linéaire a permis de calculer l'élévation de la surface aux points frontières situés en pleine mer. Les constantes harmoniques de la marée M_2 sont les suivantes :

	Amplitude A (cm)	Phase κ_{Gr} (degrés)
Pas-de-Calais côté nord (4,4) côté sud (4,2)	245 270	330 325
à la frontière nord côté est (24,86) côté ouest (58,86)	63,2 43,9	306 241
à la frontière baltique côté nord (64,50) côté sud (64,42)	8,3 10,8	80 95

avec $\kappa_{Gr} = - (p\lambda - \kappa)$.

3.- Discussion des résultats

Le but de ce travail est de déterminer les courants de marée de la manière la plus précise que possible. Les observations côtières (amplitude et phase de l'élévation de la mer) permettent de vérifier la qualité du modèle.

3.1.- Influence du nombre d'itérations sur l'amplitude de la marée calculée (fig. 4)

La figure 4 montre l'influence du nombre d'itérations sur l'élévation de la surface à deux points choisis l'un près, l'autre éloigné des forces excitatrices. On remarque donc que le système est en régime après trois périodes de marée, c'est-à-dire 1.080 itérations soit 37,29 heures, même

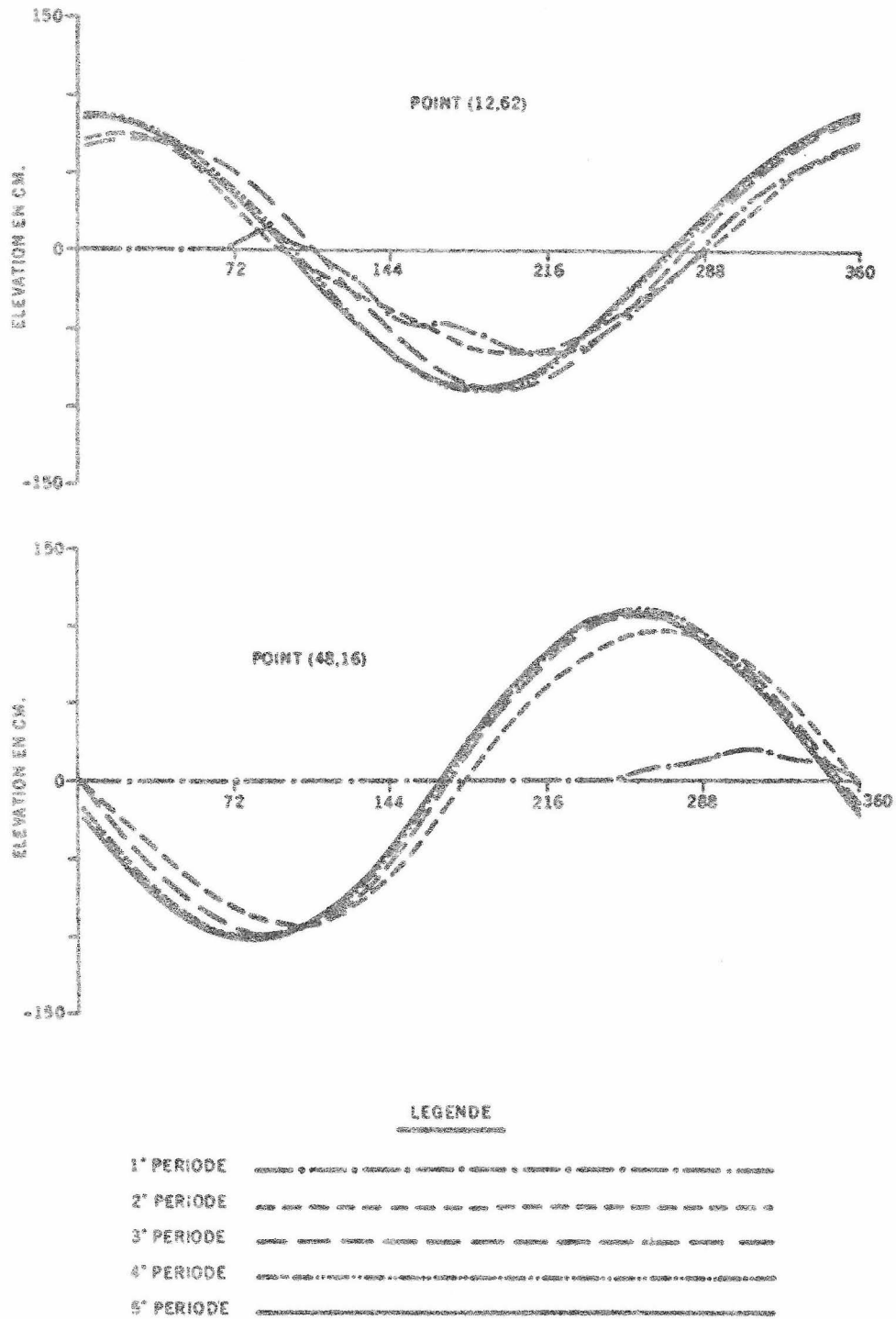


fig. 4.- Influence du nombre d'itérations sur l'élévation de la surface de la mer.

pour des points éloignés des forces excitatrices et situés dans des eaux peu profondes. Ce fait est une justification de notre hypothèse de départ portant sur l'insensibilité des systèmes hyperboliques, soumis à des oscillations forcées, à la forme particulière donnée aux conditions initiales.

Conclusions

Le modèle est donc en régime après trois périodes ce qui nous autorisera, dans nos prochains travaux, à limiter le nombre d'itérations à 1.440 .

3.2.- Comparaison des résultats fournis par les méthodes expérimentales et numériques (fig. 5 et 6, tableau 1)

Afin de tester la qualité de notre modèle, nous comparerons les marées observées et calculées à différentes stations marégraphiques côtières. Nous nous sommes basés, dans toute cette discussion, sur les informations fournies par le Bureau Hydrographique International de Monaco. Quelques détails doivent être donnés sur la méthode utilisée pour calculer l'amplitude et la phase de la marée aux ports et endroits non situés aux noeuds du modèle. Nous nous sommes servis de l'interpolation linéaire, à défaut de mieux, pour calculer l'élévation du niveau de la mer à la côte. Lorsqu'un port se situe au fond d'un chenal, comme Bergen et Bremen par exemple, l'élévation de la surface sera supposée égale à celle que l'on observerait à la côte si le chenal était fermé. Pour la phase, nous avons agi différemment : l'interpolation linéaire sera toujours de rigueur pour les ports situés le long des côtes alors que pour ceux situés au fond d'un chenal, nous avons estimé le retard de phase en supposant que l'onde de marée progresse à la vitesse $0,8 \sqrt{gh}$ pour tenir compte de la friction sur le fond.

Les figures 5 et 6 et le tableau 1, donnant les corrélations entre les résultats observés et calculés tant pour l'amplitude que la phase de la marée partielle M_2 , montrent que certains points s'éloignent de la droite idéale à 45° ; ils correspondent aux régions situées le long des côtes est de l'Angleterre et du Danemark caractérisées par de très basses profondeurs et de nombreux bancs de sable. En raison de ces hauts fonds

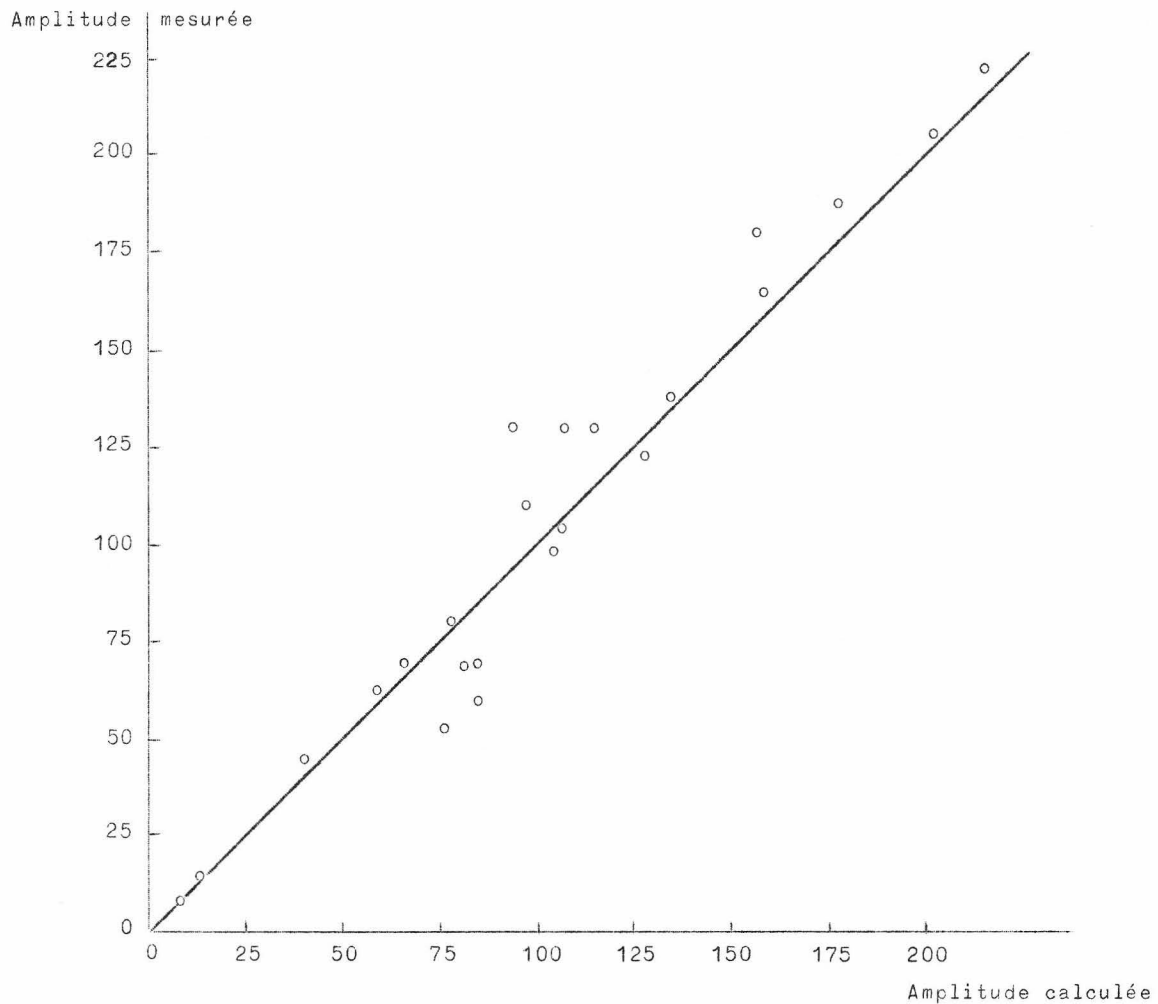


fig. 5.- Corrélation entre l'amplitude calculée et observée de la marée M_2 .

qui sont responsables de divergences numériques, nous avons été obligés de les réduire en nous servant d'un artifice : le lissage des profondeurs. Il permet d'éliminer les divergences mais il est la cause de nombreux problèmes :

- i) réduction de l'amplitude de la marée et de ses composantes non linéaires,
- ii) diminution de la phase de la marée; donc augmentation de la vitesse de l'onde (on développera cette question dans le paragraphe 3.6 de la discussion des résultats).

Tableau 1

	Latitude	Longitude	Amplitude A (cm)		Phase χ_{Gr} (degrés)	
			Observée	Calculée	Observée	Calculée
Dunkerque	51°03'N	2°22'E	206	203	352	348
Nieuport	51°09'N	2°44'E	188	178	0	0
Oostende	51°14'N	2°55'E	180	157	5	6
Zeebrugge	51°21'N	3°12'E	169	158	15	14
Hoek van Holland	51°59'N	4°07'E	80	78	64	66
Ijmuiden	52°28'N	4°35'E	68	82	106	108
Den Helder	52°58'N	4°45'E	53	74	159	164
Vlieland	53°18'N	5°03'E	69	84	226	188
Emden	53°21'N	7°12'E	131	107	339	331
Cuxhaven	53°52'N	8°43'E	123	128	341	340
Helgoland	54°11'N	7°53'E	99	105	316	270
Esbjerg	55°29'N	8°27'E	60	85	39	330
Mandal	58°00'N	7°34'E	8,3	8,3	94	78
Stavanger	58°59'N	5°44'E	15	15	271	270
Bergen	60°24'N	5°18'E	44	37	287	275
Fair Isle	59°33'N	1°38'0	63	61	304	306
Wick	58°26'N	3°05'0	111	98	320	314
Invergordon	57°41'N	4°10'0	138	134	336	346
Aberdeen	57°09'N	2°05'0	131	98	25	6
Berwick	55°46'N	2°00'0	161	110	61	42
Whitby	54°29'N	0°37'0	165	135	103	95
Lowestoft	52°29'N	1°46'E	70	67	259	220
Harwich	51°57'N	1°17'E	130	110	326	336
Dover	51°07'N	1°19'E	223	215	330	336

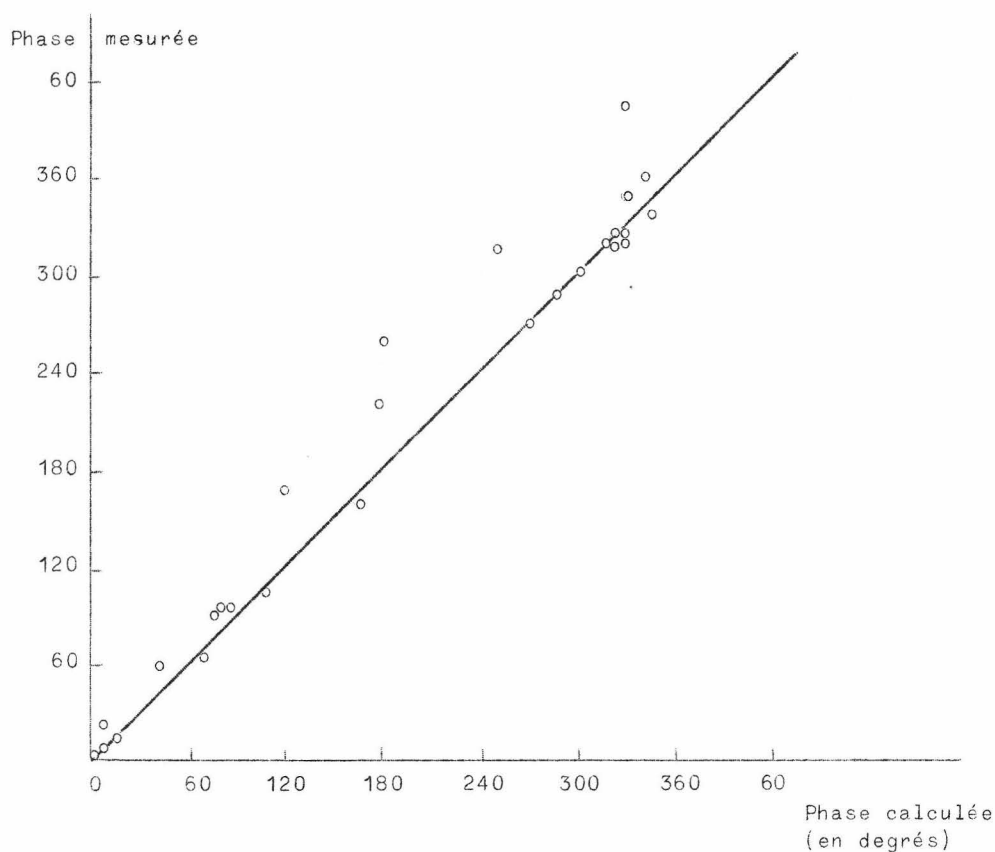


fig. 6.- Corrélation entre la phase calculée et observée de la marée M_2 .

Conclusions

Malgré le lissage exagéré, que nous espérons réduire dans le futur, notre modèle donne des résultats satisfaisants en tout point comparables à ceux fournis par les Instituts Hydrographiques Nationaux.

3.3.- Lignes cotidales et d'égale amplitude (fig. 7 et 8)

Si on compare les lignes d'égale amplitude et cotidales observées (fig. 7) et calculées (fig. 8) on peut conclure à un accord raisonnable entre celles-ci. Les discordances apparaissent dans le *Deutsche Bucht* et le long des côtes est de l'Angleterre, régions caractérisées par de hauts fonds. Dans le paragraphe 3.2 de cette discussion, nous avons déjà expliqué l'origine de ces discordances que nous espérons réduire dans nos travaux ultérieurs en diminuant le lissage des profondeurs.

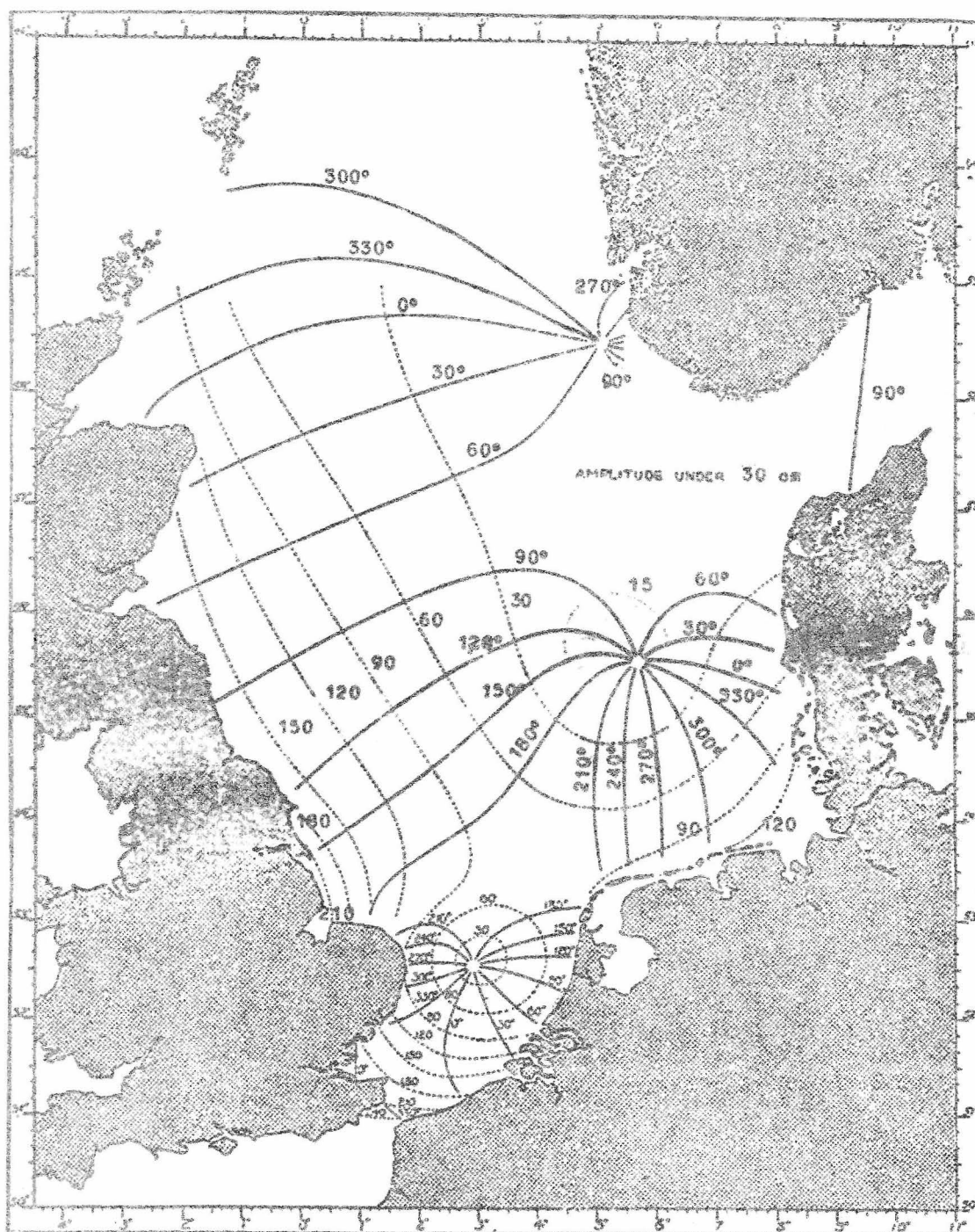


fig. 7.- Lignes cotidiales et d'égale amplitude observées.
(Proudman et Doodson, 1924)

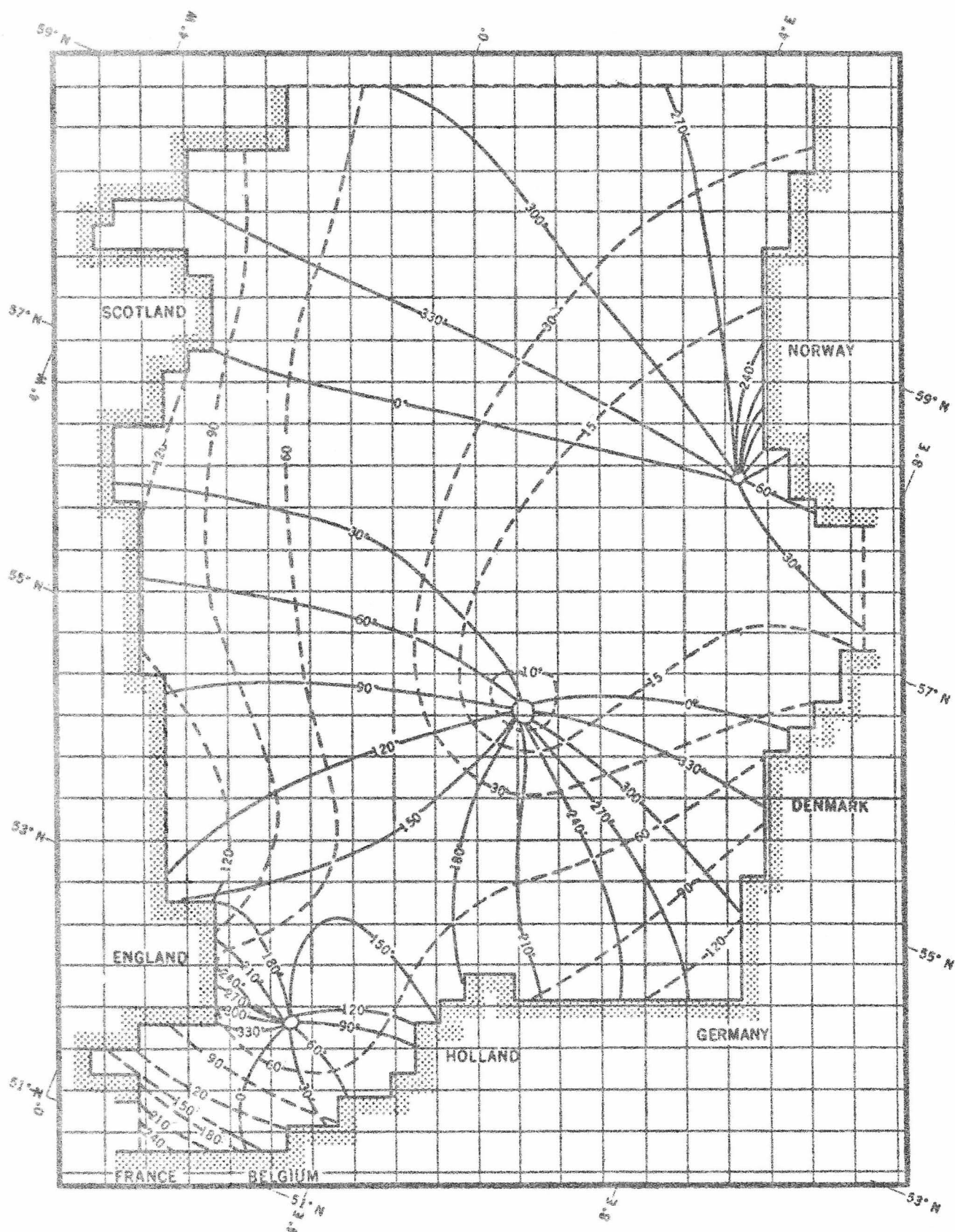


fig. 8.- Lignes cotidiales et d'égale amplitude calculées avec le modèle mathématique.

3.4.- Les courants de marée (fig. 9 à 20)

Ayant testé le modèle en nous basant sur les observations côtières, il nous reste à étudier le champ de courant dû à la marée partielle M_2 . Les figures 9 et 10 donnent respectivement les courants à $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$; on remarque immédiatement que les courants intenses se localisent dans les régions de faibles profondeurs où ils peuvent atteindre une vitesse de 113 cm/s. Le long des côtes de la Norvège, l'amplitude du courant est très faible (2 à 3 cm/s) en raison de la profondeur partout supérieure à 200 mètres. Dans cette région, les courants dus à la marée astronomique que nous avons négligée dans le modèle, sont du même ordre de grandeur que ceux associés à la marée externe. L'hypothèse d'une marée astronomique négligeable se justifie parfaitement car notre zone d'intérêt se limite dans le *Southern Bight* où la marée externe est intense.

Les différences entre les courants observés et calculés (fig. 11 à 18) sont faibles. Elles apparaissent surtout au moment du renversement du courant : un léger déphasage suffit alors pour modifier sensiblement la distribution des courants en raison de l'anisotropie marquée des ellipses de marée (fig. 19 et 20).

La figure 19 nous montre la distribution des ellipses de marée ainsi que leur sens de rotation. On remarque directement que celles-ci tournent indifféremment à gauche ou à droite. Dans une mer de dimensions infinies, la rotation du vecteur courant se fait vers la droite dans l'hémisphère nord; dans une mer de dimensions réduites et presque entièrement fermée, comme la mer du Nord, il est pratiquement impossible de déterminer *a priori* le sens de rotation de l'ellipse à cause des réflexions multiples de l'onde de marée. Il n'y a que les observations et les modèles physiques et numériques qui puissent nous indiquer le sens de rotation du courant de marée.

L'amplitude et la phase des courants sont affectées d'erreurs (5 à 20 %) dues à la discrétisation du milieu, au lissage des profondeurs et aux erreurs d'estimation des conditions aux limites (interpolation linéaire). Nous ne pouvons vérifier la précision du modèle en toute rigueur car les mesures courantométriques que nous possédons actuellement sont peu précises et peu nombreuses. Des campagnes de mesures courantométriques réalisées à l'aide d'instruments perfectionnés, mouillés durant plusieurs jours

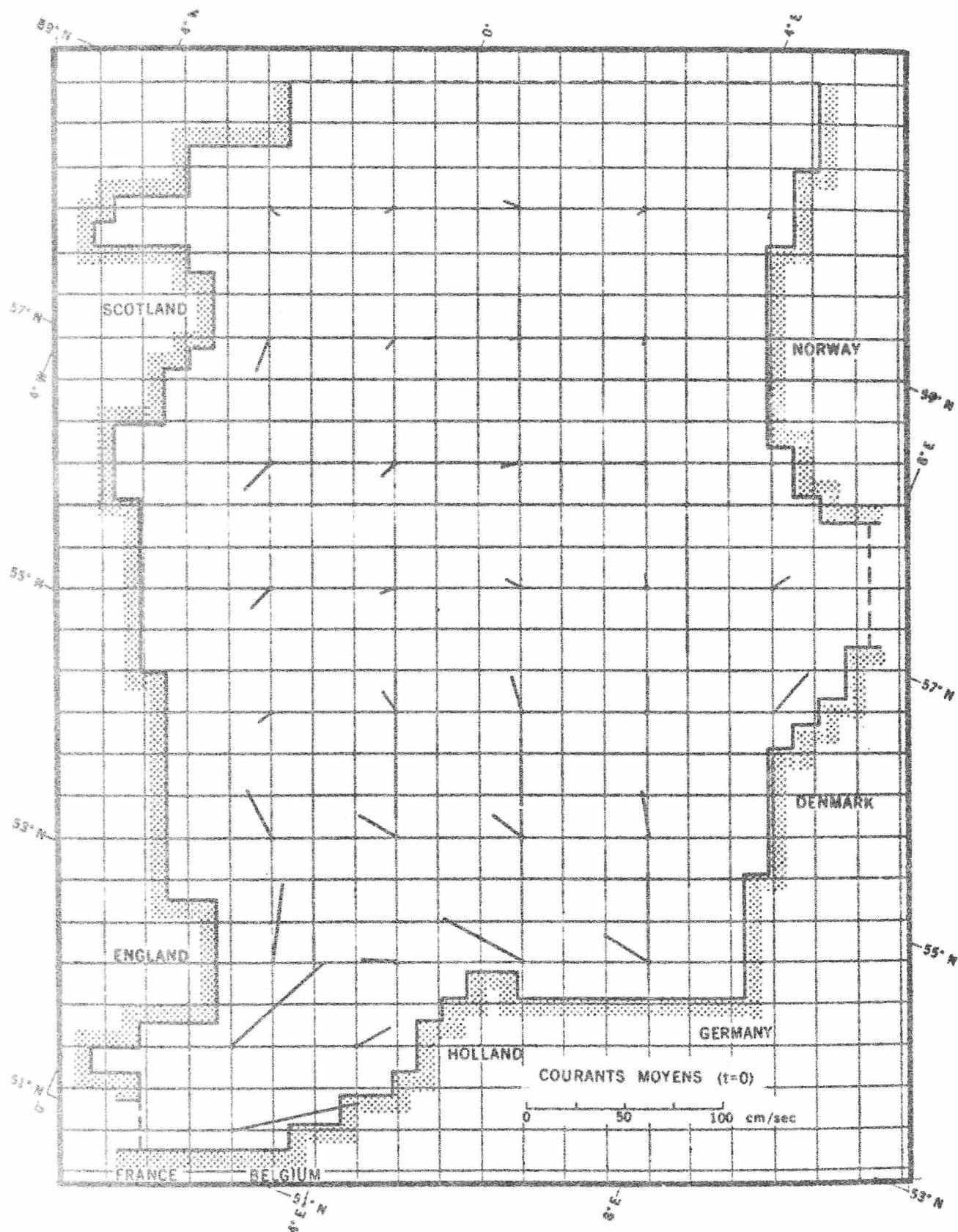


fig. 9.- Champ de vitesse en mer du Nord à $t_{Gr} = 0$.

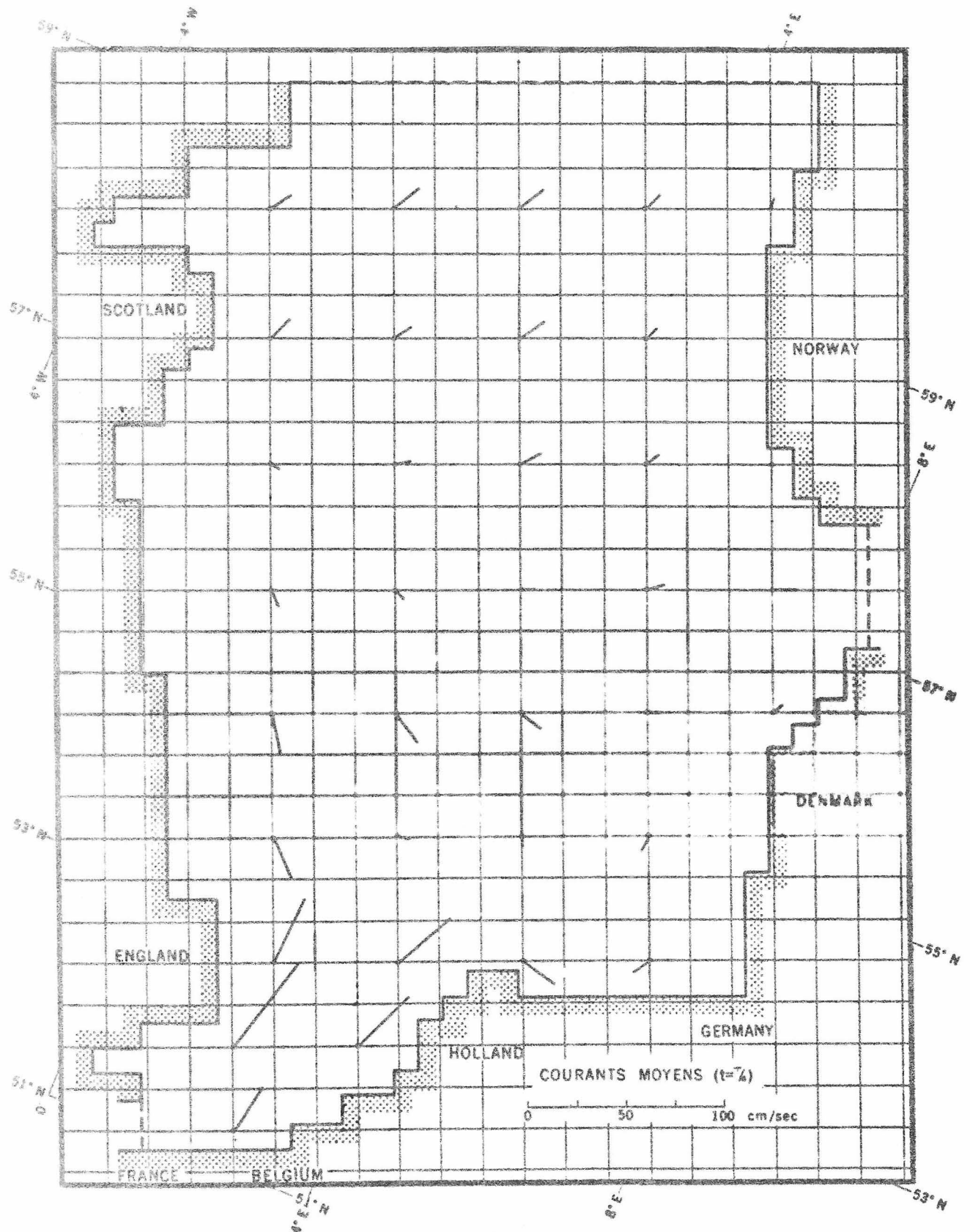


fig. 10.- Champ de vitesse en mer du Nord à $t_{Gr} = \frac{T}{4}$.

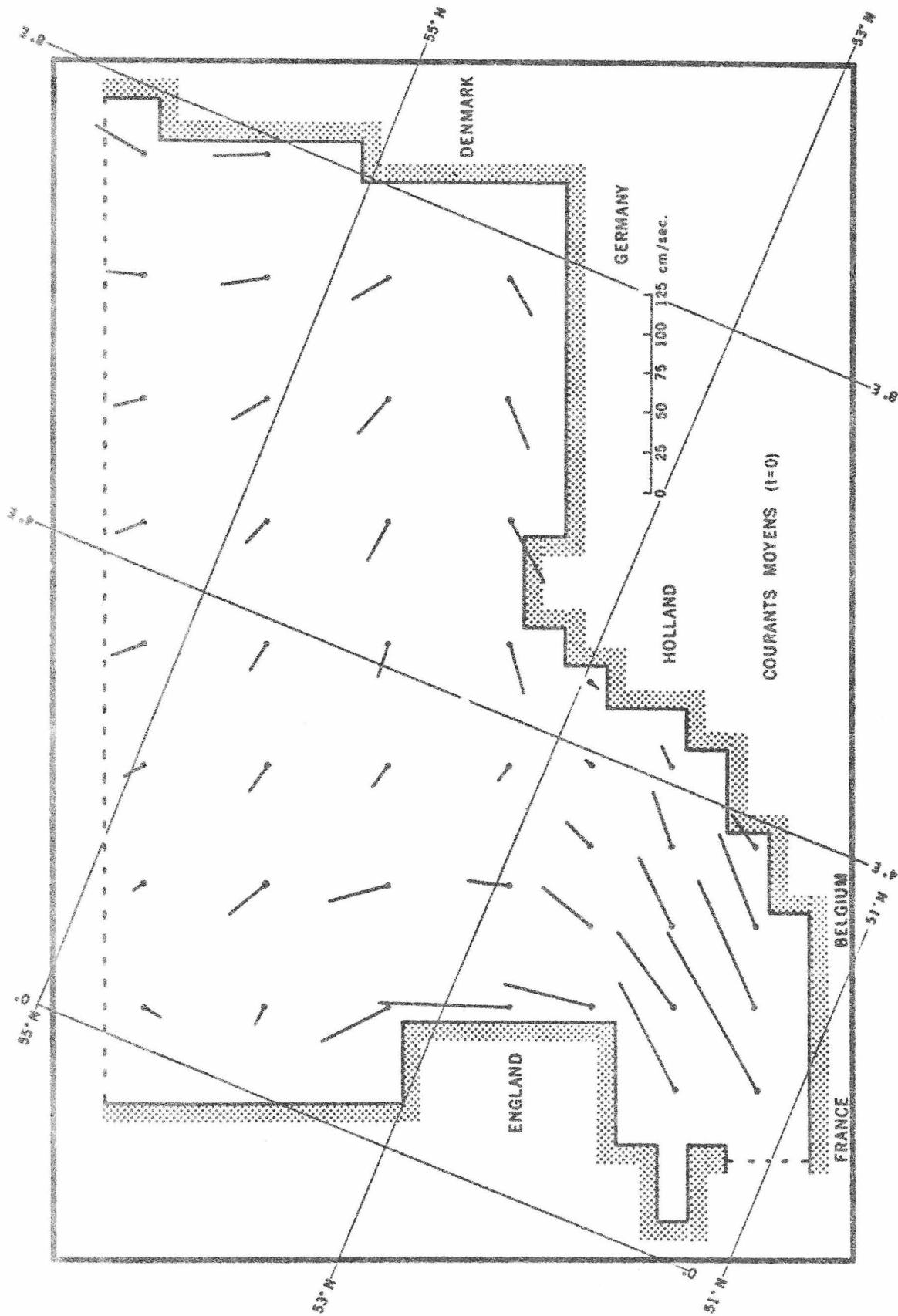


fig. 11.- Champ de vitesse calculé à $t_{gr} = 0$ dans le Southern Bight.

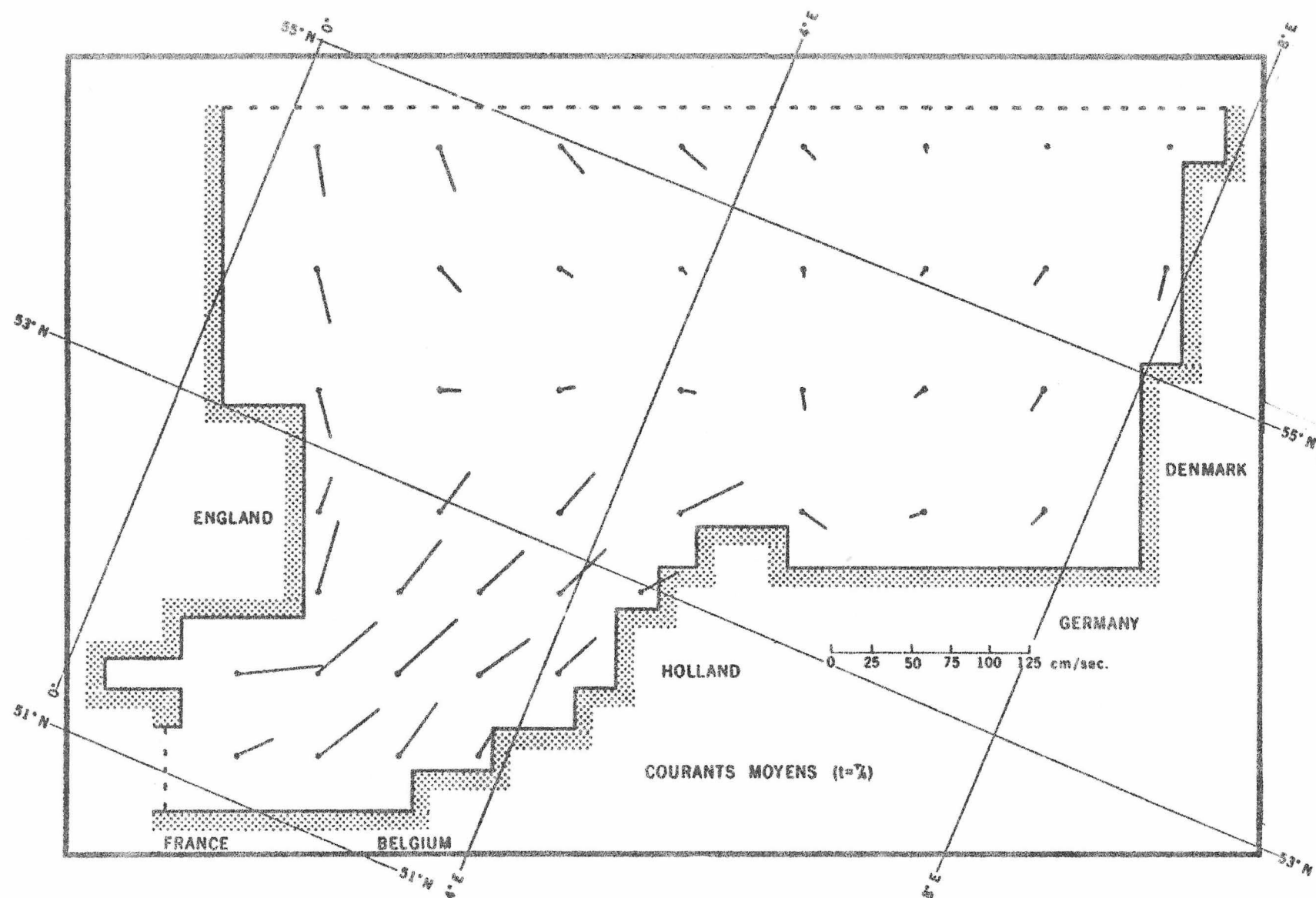


fig. 12.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = \frac{T}{4}$ dans le Southern Bight.

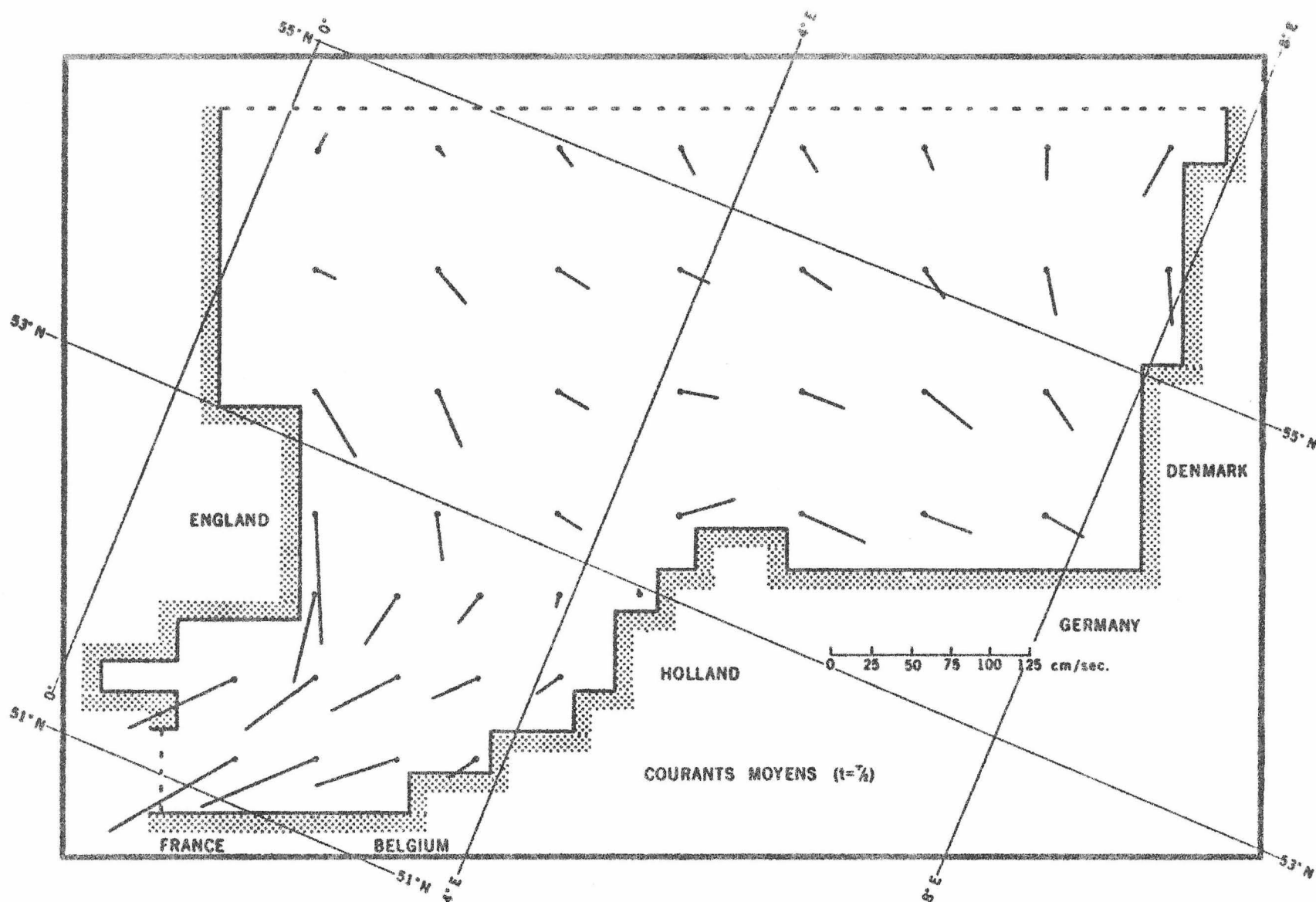


fig. 13.- Champ de vitesse calculé à $t_{Gr} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight.

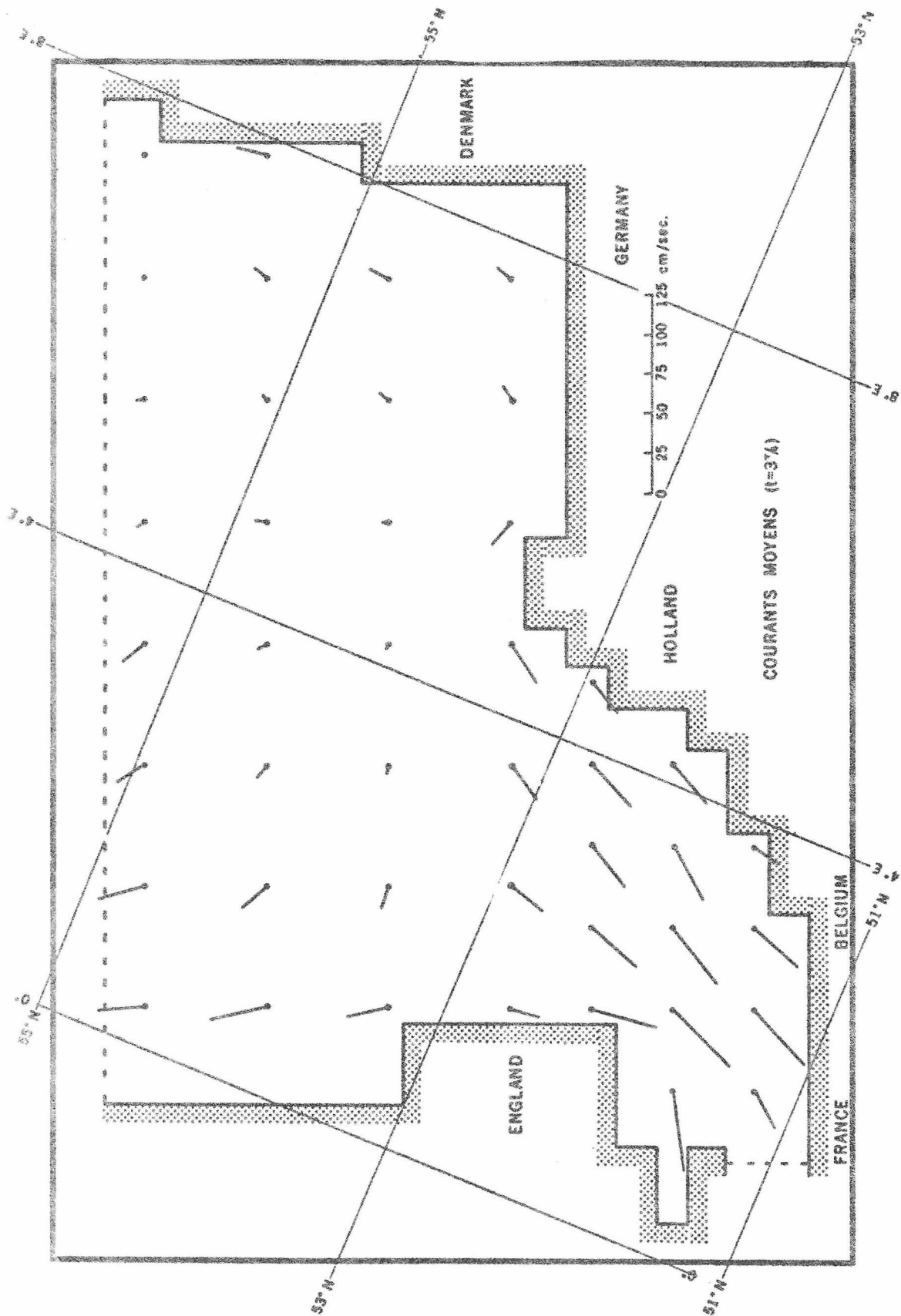


fig. 14.- Champ de vitesse calculé à $t_{6r} = \frac{3I}{4}$ dans le Southern Bight.

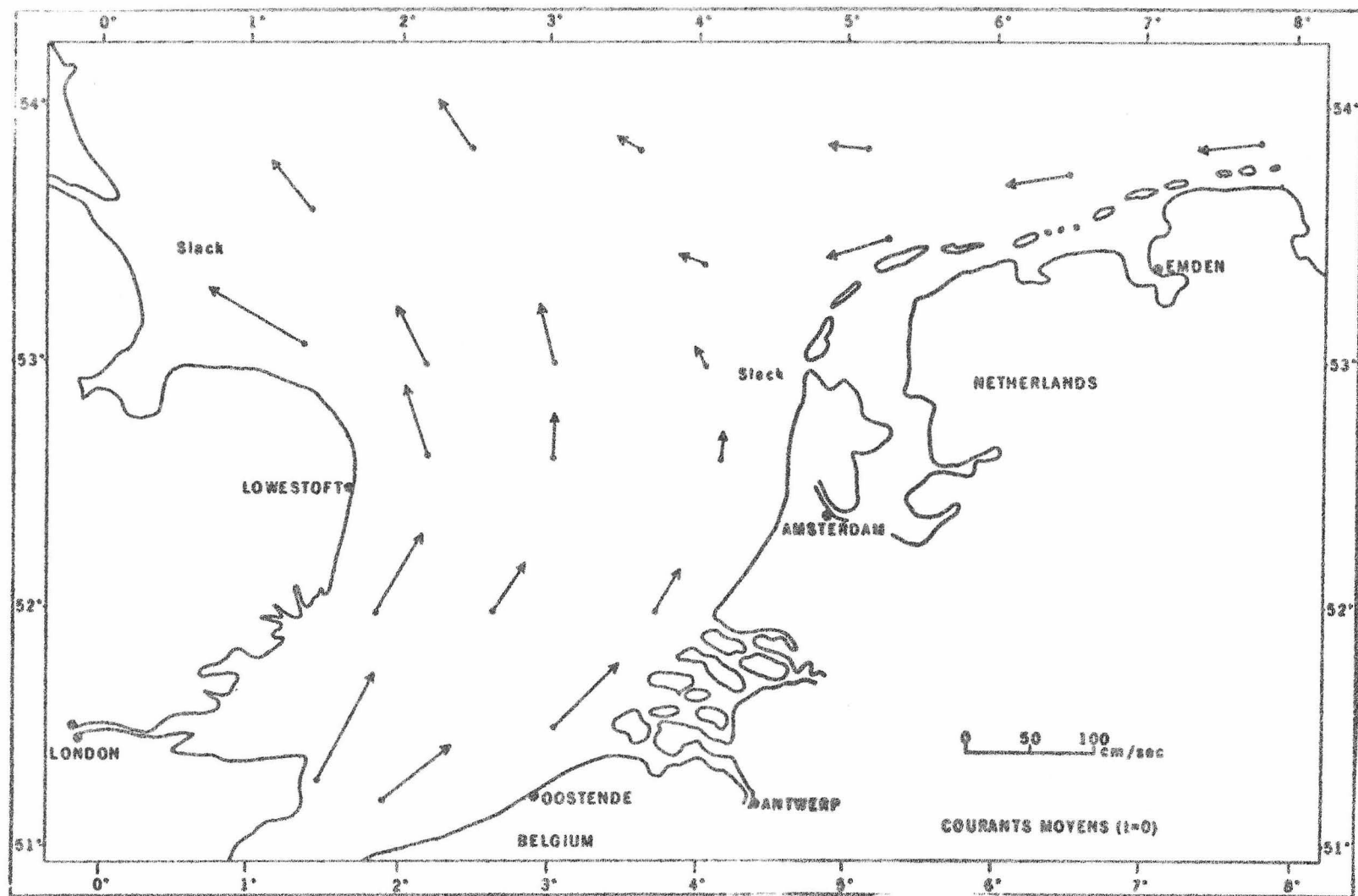


fig. 15.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = 0$ dans le Southern Bight.

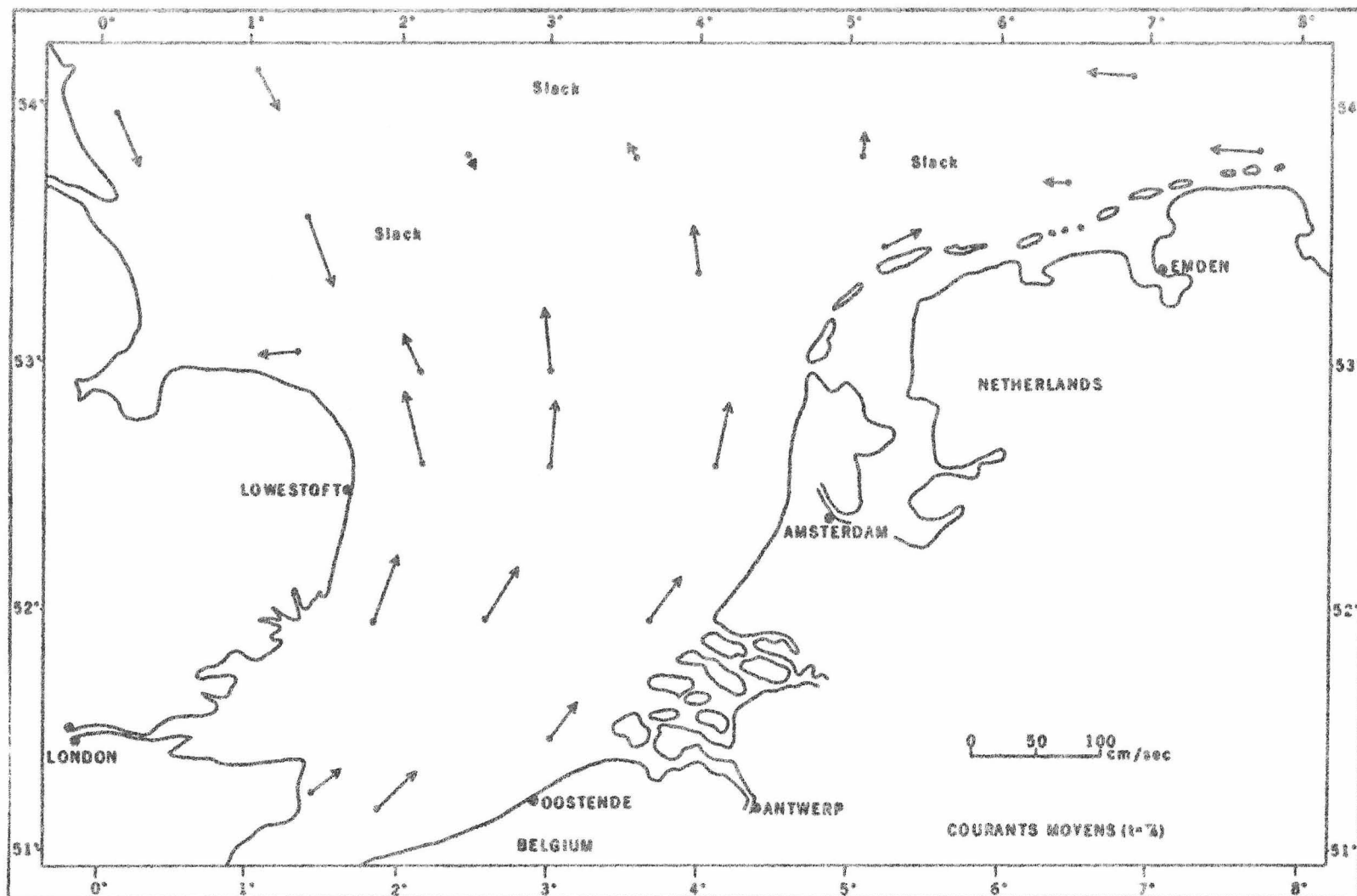


fig. 16.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{T}{4}$ dans le Southern Bight.

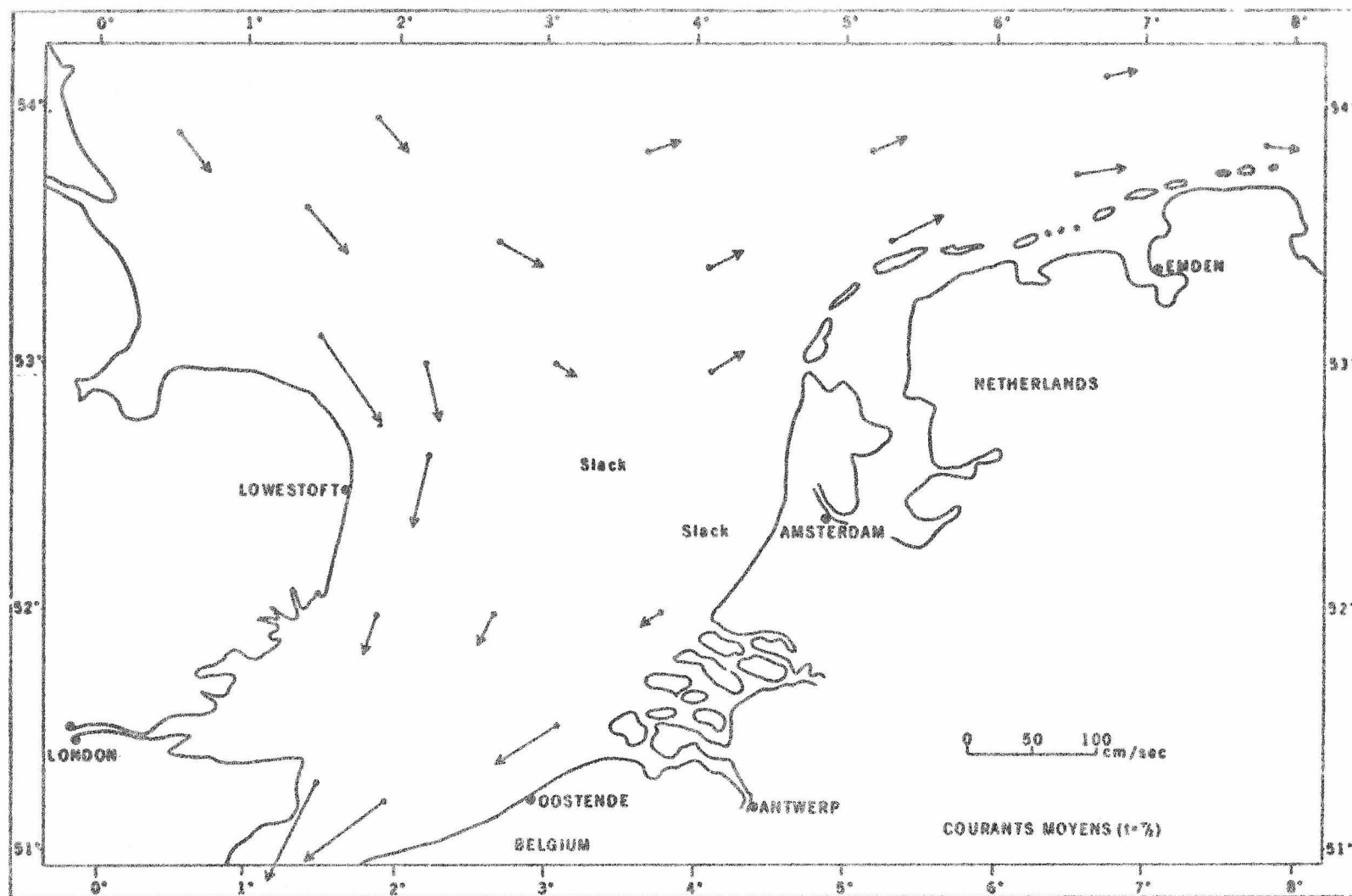


fig. 17.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{T}{2}$ dans le Southern Bight.

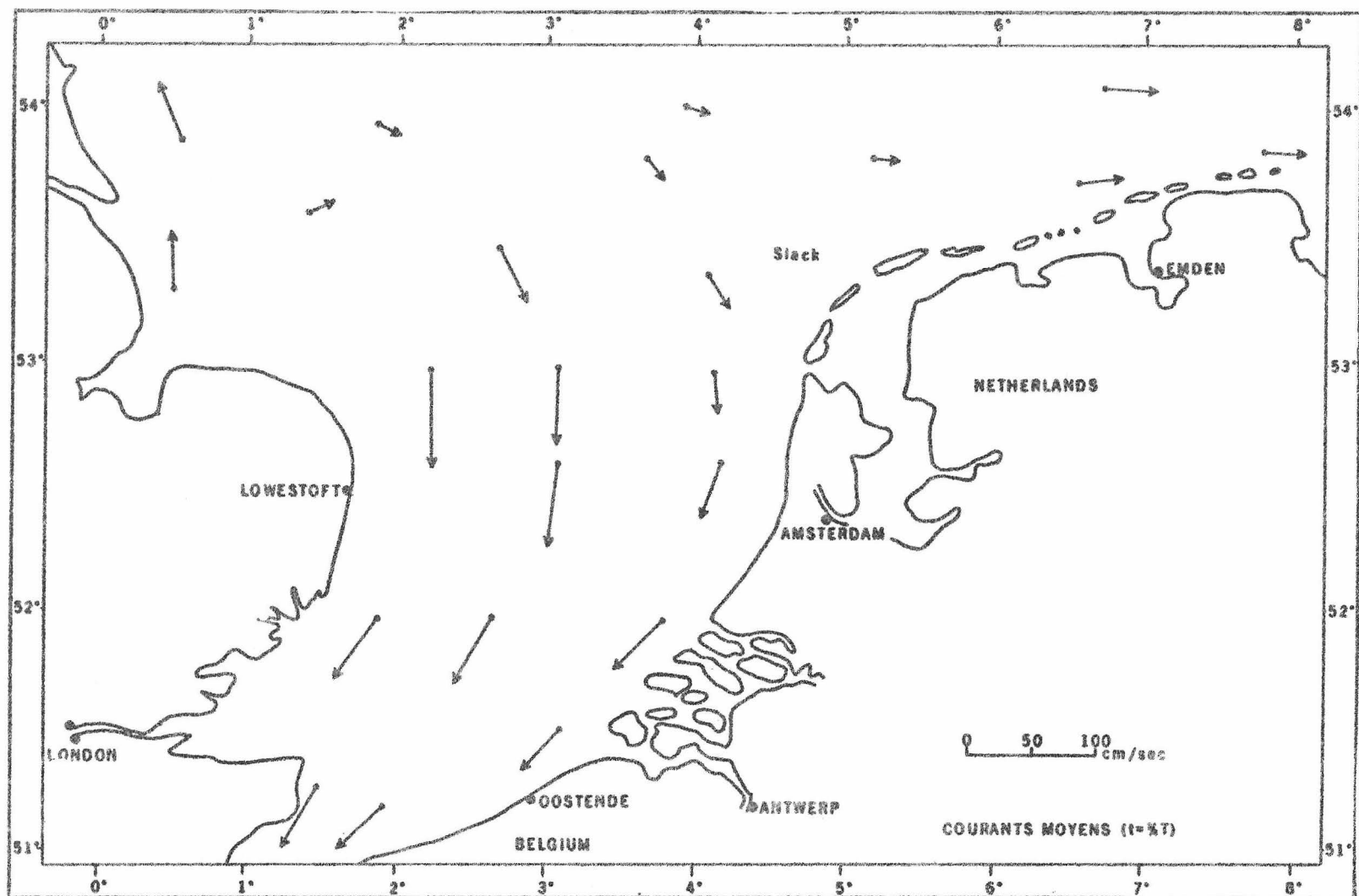


fig. 18.- Champ de vitesse observé à $t_{Gr} = \frac{3T}{4}$ dans le Southern Bight.

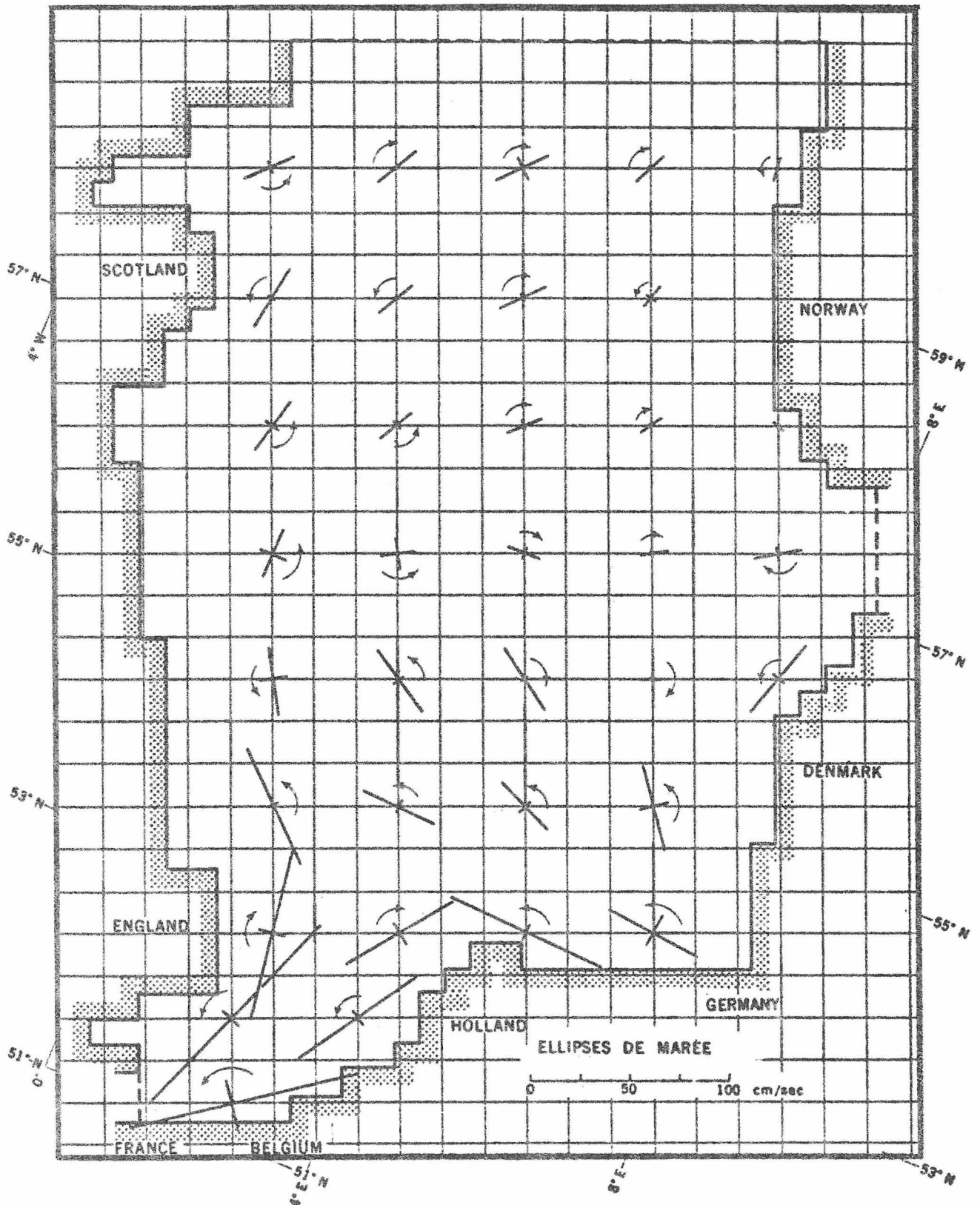


fig. 19.- Ellipses de marée en mer du Nord.

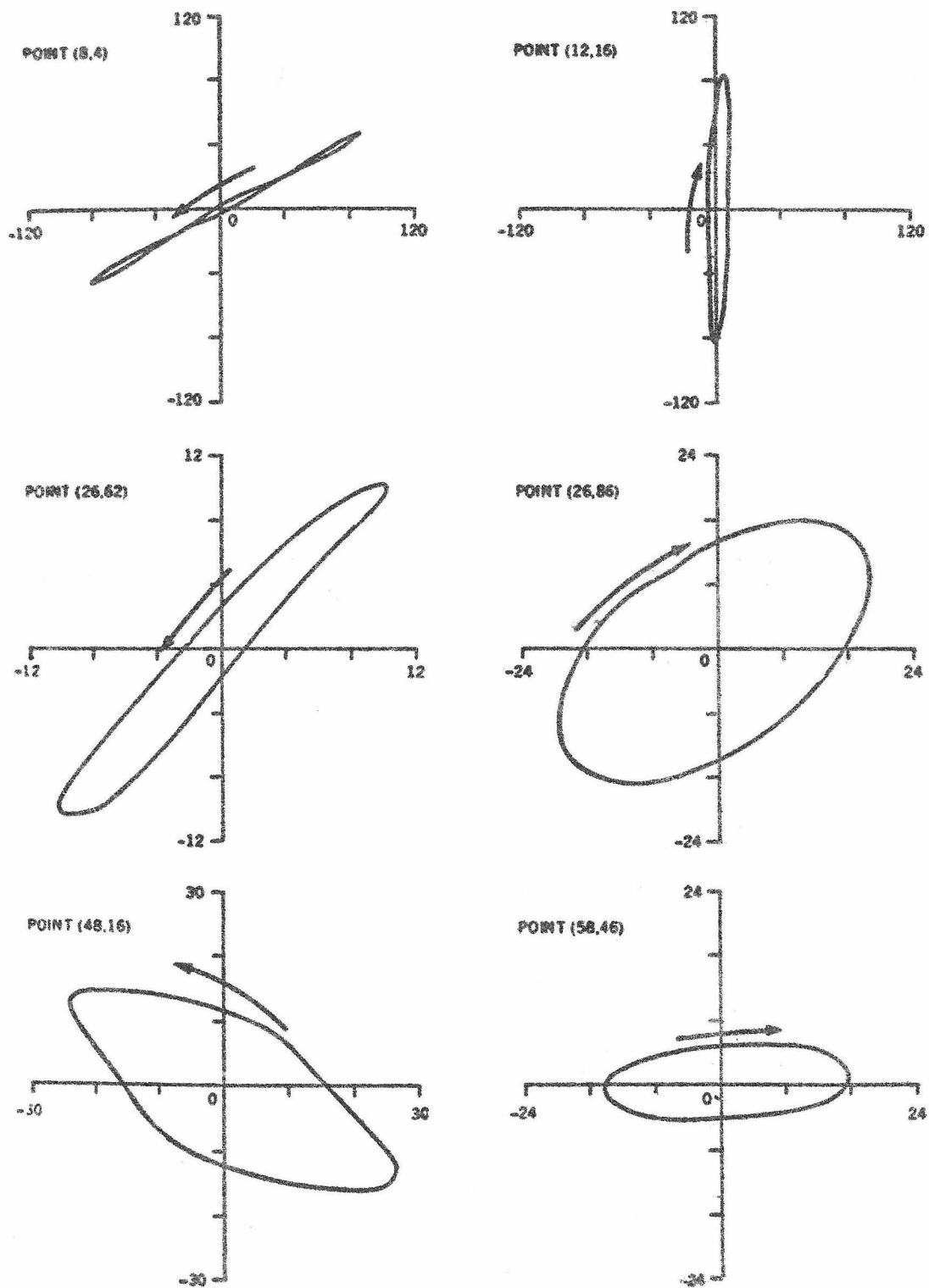


fig. 20.- Ellipses de marée en divers points choisis de la mer du Nord.

d'affilée nous fourniront des données précises permettant de tester le modèle. En possession de celles-ci, nous pourrions améliorer notre connaissance des courants en recherchant les coefficients de friction sur le fond, de viscosité turbulente et de profil vertical qui conduisent aux meilleurs résultats.

3.5.- Importance des termes non linéaires (fig. 21 à 23 et tableau 2)

Les termes non linéaires des équations de conservation de la masse et du moment compliquent fortement la résolution de ces équations. Beaucoup de chercheurs les ont négligés sans justification; nous avons, dans notre modèle, conservé tous les termes non linéaires et les figures 21 à 24 prouvent à suffisance l'importance des effets non linéaires dans les régions de basses profondeurs.

Les termes de friction

$$k \frac{V_1 \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{(h + \zeta)^2} \quad \text{et} \quad k \frac{V_2 \sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{(h + \zeta)^2}$$

introduisent des harmoniques d'ordre 2 comme on pourrait le montrer analytiquement sur un exemple simple basé sur le système suivant [voir Dronkers (1964) par exemple] :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + A_h V_h^2 U - k \frac{U |U|}{(h + \zeta)^2}$$

Les autres termes non linéaires des équations (4) et (5)

$$\frac{\lambda}{H} (V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2}) + g\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}$$

et
$$\frac{\lambda}{H} (V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2}) + g\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$$

sont à l'origine des harmoniques d'ordre 1 [Kreiss (1957)].

L'analyse des enregistrements de marée, dans les eaux peu profondes, montrent que l'harmonique la plus importante pour la marée partielle M_2 est M_4 c'est-à-dire l'harmonique d'ordre 1 ; même dans les cas les plus défavorables on a toujours :

$$\text{Elévation } (M_6) \leq 0,40 \text{ Elévation } (M_4) .$$

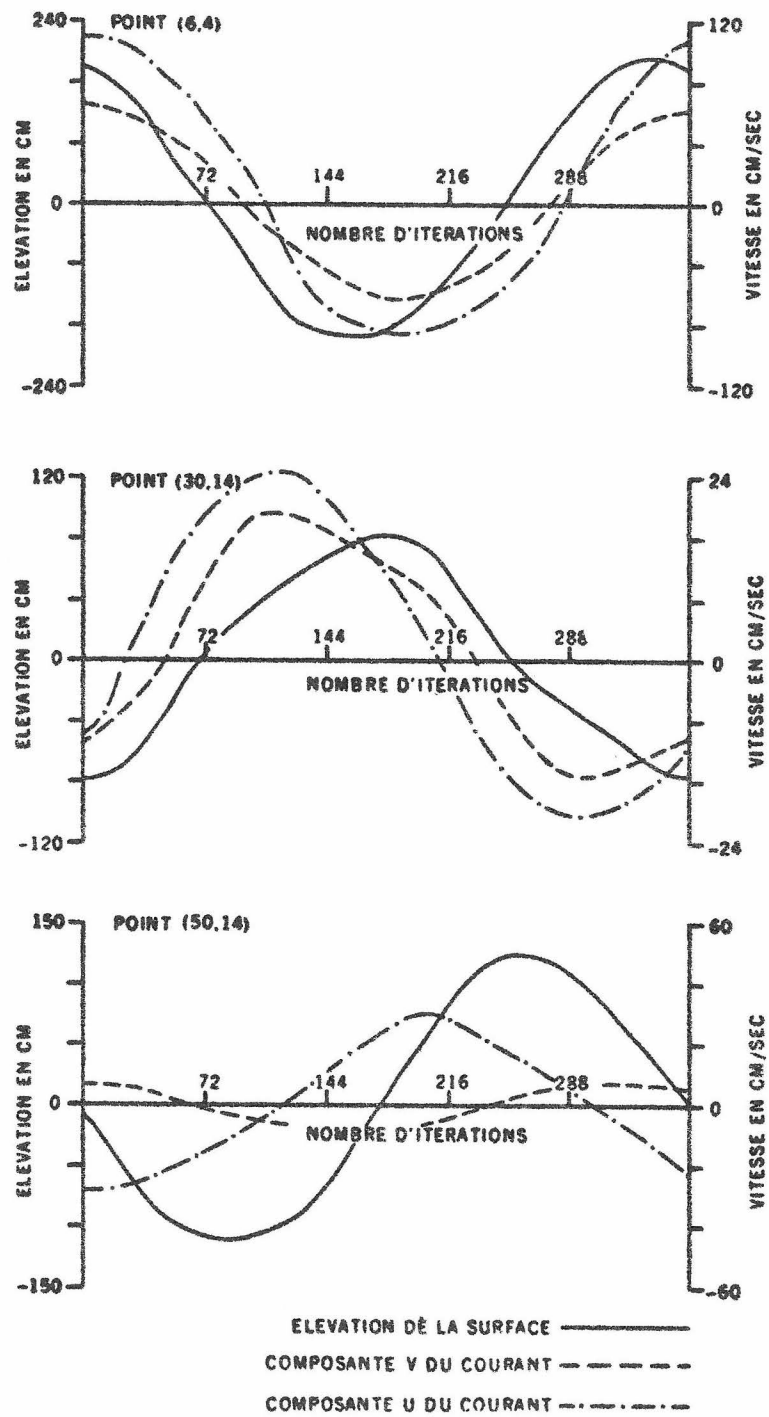


fig. 21.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface aux points (6,4) , (30,14) et (50,14).

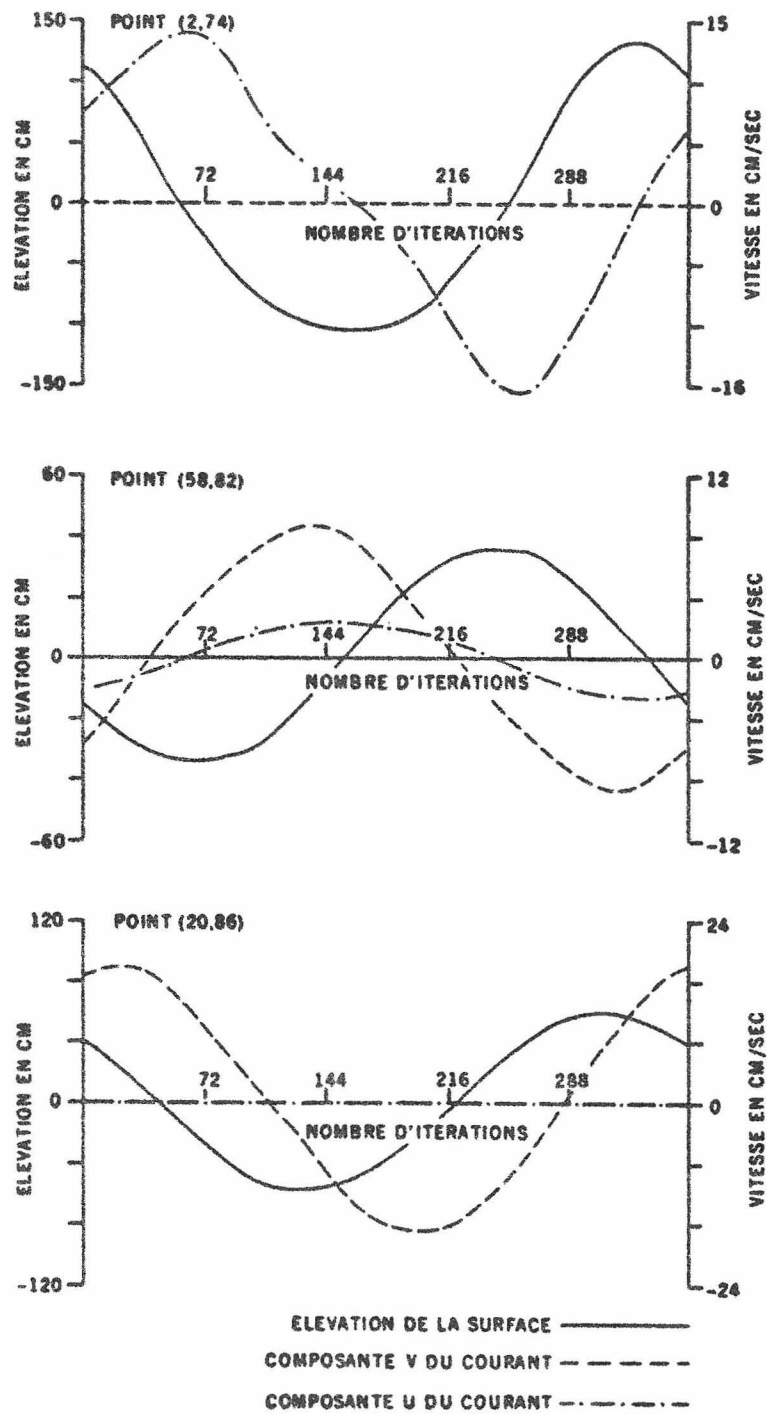
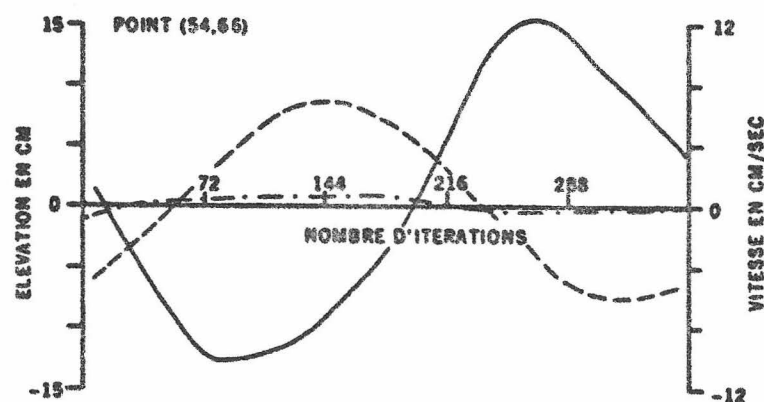
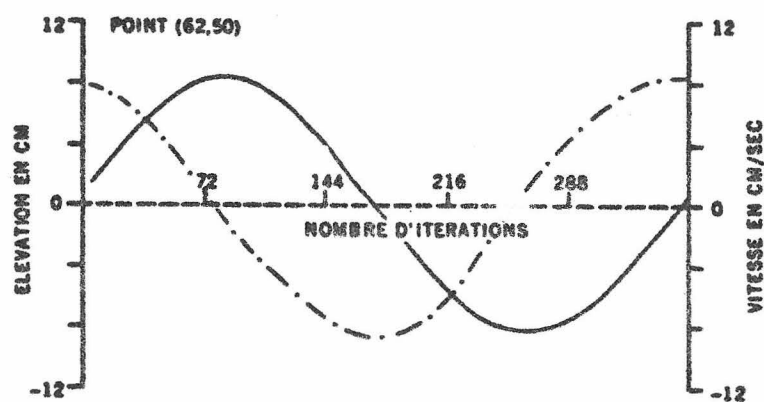
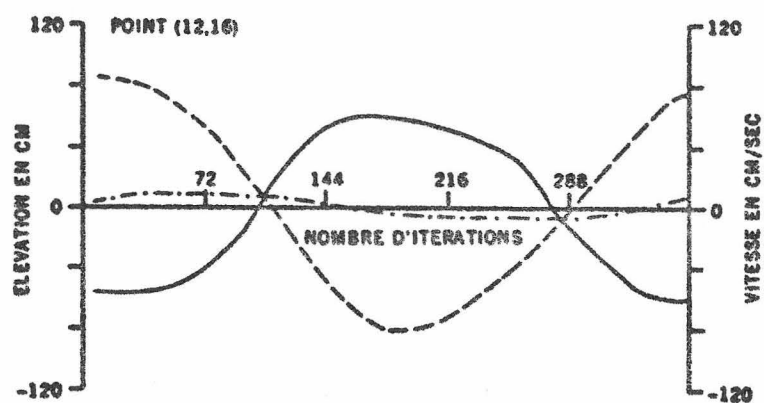


fig. 22.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface aux points (2,74) , (58,82) et (20,86) .



ELEVATION DE LA SURFACE —————
 COMPOSANTE V DU COURANT - - - - -
 COMPOSANTE U DU COURANT -

23.- Composantes du courant de marée et élévation de la surface
 aux points (12,16) , (62,50) et (54,66) .

Tableau 2

	Composante continue $\frac{M_0}{\Sigma}$ %	$\frac{M_2}{\Sigma}$ %	$\kappa_4 = \frac{M_4}{M_2}$ %	$\kappa_6 = \frac{M_6}{M_2}$ %	$\kappa_8 = \frac{M_8}{M_2}$ %	$\kappa_{10} = \frac{M_{10}}{M_2}$ %	Profondeur en mètres
(2,74)	1,2	87,5	5,0	3,0	-	-	35
(6,10)	4,0	85,9	2,5	2,8	1,0	-	10
(30,14)	0,5	90,3	-	5,0	0,3	0,6	19
(12,16)	1,3	86,4	1,4	8,2	-	0,3	15
(62,50)	0,2	94,4	-	-	-	-	150

avec
$$\Sigma = \sum_{i=0}^6 S_i$$

où

$$\begin{aligned}
 S_0 & \quad (\text{composante continue}) \\
 S_1 &= M_2 \quad [\text{fondamental (marée semi-diurne lunaire)}] \\
 S_2 &= M_4 \quad (\text{première harmonique}) \\
 S_3 &= M_6 \quad (\text{deuxième harmonique}) \\
 S_4 &= M_8 \quad (\text{troisième harmonique}) \\
 S_5 &= M_{10} \quad (\text{quatrième harmonique}) \\
 S_6 &= M_{12} \quad (\text{cinquième harmonique}) .
 \end{aligned}$$

Il est donc apparu qu'il serait utile de faire une analyse de Fourier de la marée calculée afin d'étudier l'importance des termes non linéaires dans l'élévation de la surface et la distribution des harmoniques. Pour tester l'efficacité de la méthode numérique d'analyse de Fourier et estimer le bruit introduit, on a engendré une sinusoïde de fréquence égale à celle de la marée M_2 . Les résultats tabulés (tableau 2) sont des valeurs corrigées obtenues en soustrayant le bruit estimé du signal correspondant aux différentes harmoniques.

i) Au point (62,50) situé dans une région profonde ($h > 150$ m) et près d'une force excitatrice purement sinusoïdale, on obtient un signal quasi harmonique de période T_{M_2} . L'influence des termes non linéaires est donc très faible.

ii) Aux points (30,14) , (12,16) et (6,10) caractérisés par une très faible profondeur ($h < 20$ m) , on remarque que l'harmonique d'ordre 2 est plus importante que celle d'ordre 1 ce qui prouve que la friction joue le rôle le plus important dans ces régions. Suivant le déphasage des harmoniques M_4 et M_6 par rapport au fondamental M_2 les marées sont caractérisées par des variations temporelles différentes [points (30,14) et (12,16) aux figures 21 et 23].

iii) Dans les bassins de profondeurs moyennes, les termes M_4 et M_6 sont du même ordre de grandeur avec toutefois $M_4 > M_6$ [point (2,74)]. Les termes de friction et les autres termes non linéaires influencent donc de la même manière l'élévation de la surface.

L'harmonique M_6 est donc une harmonique créée en grande partie par le modèle mathématique par l'intermédiaire du terme de friction quadratique. Modifier la forme de ce terme et l'estimer par un terme linéaire diminuerait fortement M_6 mais renforcerait la part prise par le fondamental.

Conclusions

Tant que le terme de friction sera estimé par une relation quadratique (générateur de M_6) ou linéaire (renforcement de M_2), il sera impossible de calculer de façon tout à fait exacte l'élévation et le courant dus à la marée. Nous voyons donc que la formulation actuelle de la friction impose une limite à la précision des modèles mathématiques; mais à défaut de mieux nous nous contenterons de la relation quadratique pour estimer la friction sur le fond car elle semble conduire aux meilleurs résultats.

3.6.- Vitesse de phase et caractère de l'onde de marée (tableau 3 et fig. 7 et 8)

Le caractère de l'onde de marée peut être déterminé en comparant la vitesse de phase de l'onde réelle à celle donnée par la relation :

$$(12) \quad c = \sqrt{gh}$$

qui est la vitesse de propagation d'une onde monochromatique et monodirectionnelle. Nous avons recherché la vitesse de phase de l'onde réelle, le long des côtes de la mer du Nord, en nous servant des lignes cotidales

Tableau 3

	Vitesse de phase d'une onde progressive monodirectionnelle $c = \sqrt{gh}$ m/s	Vitesse de phase calculée à partir des lignes cotidales	
		Calculée c_1 m/s	Observée c_2 m/s
Côte belgo-hollandaise (Dunkerque à Den Helder)	12,5	11	11,5
Deutsche Bucht	12,98	29	14,7
Côte norvégienne (Mandal à Stavanger)	31,11	12,2	11,4
Côte écossaise (Wick à Aberdeen)	22,89	30,6	24,5
Côte anglaise (Berwick à Whitby)	22,4	26,7	34,2
Côte du East Anglia (Lowestoft à Harwich)	15,22	6,64	11,5

données par les observations et le modèle (fig. 7 et 8). L'analyse du tableau 2 nous permet de tirer les conclusions suivantes :

i) Dans l'extrême sud de la mer du Nord, c'est-à-dire le long des côtes franco-belgo-hollandaises et des côtes est de l'Angleterre, les vitesses de phase observées et calculées sont comparables et sont inférieures à la vitesse c de l'onde unidirectionnelle. Ceci prouve que la marée est type progressif et unidimensionnel.

ii) Le long de la côte norvégienne, l'onde est aussi progressive et unidimensionnelle; la vitesse de phase est beaucoup plus faible que celle donnée par la relation (12). Ce fait peut s'expliquer par la difficulté de déterminer la profondeur h à introduire dans cette relation en raison de la forme particulière du Canal norvégien.

iii) Malgré les différences entre les vitesses c_1 et c_2 dans le *Deutsche Bucht*, dues aux imprécisions du modèle, on observe une vitesse de phase supérieure à celle donnée par la relation (12). L'onde de marée, dans cette région, résulte de la composition de deux ondes progressives, l'une provenant du Pas de Calais, l'autre de la frontière nord de la mer

du Nord. Un léger déphasage entre ces deux ondes peut provoquer des ondes secondaires se propageant à des vitesses de phase très grandes et une légère erreur dans le modèle explique les différences entre c_1 et c_2 .

iv) Dans le nord de la mer du Nord, les vitesses de phase c_1 et c_2 sont partout supérieures à la vitesse de phase c ; ceci veut dire que l'onde de marée est le résultat de l'interférence des ondes provenant de la marée de l'Atlantique et de la Manche. Le critère utilisé pour la détermination du caractère de l'onde ne peut être appliqué en toute rigueur en raison des dimensions trop importantes de l'ouverture nord de la mer du Nord et de la rotation de la terre.

4.- Conclusions

Dans ce travail, nous avons montré qu'il était possible de reproduire les marées avec précision. Les erreurs les plus importantes sont localisées le long des côtes anglaises et danoises en raison d'un lissage excessif que nous avons jugé nécessaire afin d'éviter les divergences numériques qui arrivent fréquemment dans ces régions de très basses profondeurs. Les résultats seront améliorés dans nos prochains travaux en diminuant le lissage au maximum mais tout en conservant un schéma numérique stable.

Les campagnes de mesures courantométriques projetées, tant par l' I.C.E.S. pour l'ensemble de la mer du Nord que par les autorités belges responsables du programme national sur l'environnement physique et biologique le long de leurs côtes, nous aideront à mieux connaître le champ de courant qui influence directement la dispersion d'un polluant par l'intermédiaire du *shear effect diffusivity*. Ces données seront de précieux outils pour tester la précision de nos modèles et permettront de les améliorer en recherchant d'une manière empirique d'abord théorique ensuite les coefficients de friction, de viscosité turbulente et de profil vertical du courant qui conduisent aux meilleurs résultats.

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans l'aide financière du Conseil des Arts du Canada que je tiens à remercier vivement.

Ma plus respectueuse gratitude va au Dr. N.J. Campbell, directeur du département des recherches océanographiques du Ministère de l'Environnement, qui m'a permis de venir étudier les techniques des modèles numériques à Ottawa.

Cette étude n'a pu être menée à son terme que grâce au dévouement des personnes suivantes à qui je désire exprimer ma plus vive gratitude :

- aux Dr. G. Godin et T. Murty ainsi qu'à Monsieur K. Yuen qui ont été mes guides tout le long de cette année et qui n'ont cessé de m'encourager par leurs nombreux conseils,

- à Monsieur F.G. Barber qui s'est chargé de résoudre toutes les questions relatives à l'édition de ce présent travail,

- à tous ceux qui, nombreux, à la Direction des Sciences de la Mer, ont pu m'aider.

Bibliographie

- BOWDEN (K.F.), (1965). Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, *J. Fluid. Mec.*, 21, 83-95.
- BOWDEN (K.F.), (1966). *Turbulence in The Sea*, vol. I, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York.
- BRETTSCHEIDER (G.), (1967). *Anwendung des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens zur Ermittlung der M_2 - Mitschwingungszeit der Nordsee*, Met. Inst. Meeresk. Hamburg, N° 7.
- DEFANT (A.), (1961). *Physical Oceanography*, Pergamon Press, Oxford.
- DRONKERS (J.J.), (1964). *Tidal computations*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York.
- FISCHER (G.), (1959). Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, *Tellus*, XI, 1, 60-76.
- FISCHER (G.), (1965). A survey of finite-difference approximations to the primitive equations, *Monthly Weather Review*, vol. 93, 1, 1-10.
- HANSEN (W.), (1966). *The reproduction of the motion in the sea by means of hydrodynamical-numerical methods*, Tech. Report N° 25 of the N.A.T.O Subcommittee on Oceanographic Research, Hamburg, December 1966.
- HARRIS (D.L.) and JELESNIANSKI (C.P.), (1965). Some problems involved in the numerical solutions of tidal hydraulics equations, *Monthly Weather Review*, vol. 92, 9, 409-422.
- KASAHARA (A.), (1965). On certain finite difference methods for fluid dynamics, *Monthly Weather Review*, vol. 93, 1, 27-31.
- KREISS (H.), (1957). Some remarks about nonlinear oscillations in tidal channels, *Tellus*, IX, 1, 53-68.
- LAX (P.D.) and WENDROFF (B.), (1960). Systems of conservation laws, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 217-237.
- Monaco Tables. Harmonics Constants, Special publication N° 26, Inter. Hydro. Bureau, Monaco.
- NIHOUL (J.C.J.), (1971). *Shear effect and eddy diffusivity*, Rapport de Synthèse, Programme national belge sur l'environnement physique et biologique, Journée d'étude des 24-25 novembre 1971.
- PROUDMAN (J.) and DOODSON (A.T.), (1924). The principal constituents of the tide of the North Sea, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 224, 185-219.
- RONDAY (F.C.), (1971). *Etude de la dispersion d'un polluant en mer du Nord*, Programme national belge sur l'environnement physique et biologique, Report 4.

RONDAY (F.C.), (1972). *Modèle mathématique pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord*, Environment Canada, Marine Sciences Branch, Manuscript Report Series, N° 27.

TALBOT (J.W.), (1970). *The influence of tides, waves and other factors on different rates in marine and coastal situations*, Proc. F.A.O. Technical Conference on Marine Pollution, Rome, December 9-18.