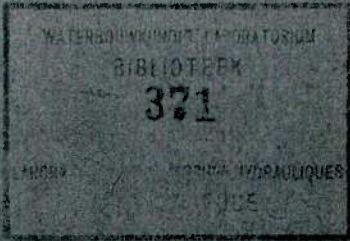


151385



VAN BRABANDT, L.

371

Note sur les étales de courant dans
l'onde marée et sur leurs lieux géo-
métriques.

1421

WATERBOUWKUNDIG LABORATORIUM

BIBLIOTEEK

371

LABORATOIRE de RECHERCHES HYDRAULIQUES
BIBLIOTHEQUE

151385 Au Camarade J. Blockmans

Son dévoué

Frans van Loobbe

Avril 1908

NOTE

SUR

LES ÉTALES DE COURANT DANS L'ONDE MARÉE

ET SUR

LEURS LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PAR

Léon VAN BRABANDT

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

EXTRAIT DU 2^e FASCICULE DES
ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE

(Avril 1908.)



151385

BRUXELLES,

GOEMAERE, IMP. DU ROI, ÉDITEUR
24, rue de la Limite

1908

0307 001 7251



NOTE

SUR

LES ÉTALES DE COURANT DANS L'ONDE MARÉE

ET SUR

LEURS LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PAR

Léon VAN BRABANDT

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.		Numéros
1	PRÉLIMINAIRES.	1
	CHAPITRE I. — ÉTUDE GÉNÉRALE DES ÉTALES ET DE LEURS LIEUX	
4	GÉOMÉTRIQUES	4
4	§ 1. Onde marée fluviale	5
20	§ 2. Onde marée en mer	22
21	CHAPITRE II. — PROPRIÉTÉS DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES DES ÉTALES.	24
	§ 1. Relations entre les lieux géométriques des étales et	
21	les débits	24
21	A. Cas général	24
26	B. Cas particuliers	30
28	C. Onde marée en mer	31
	§ 2. Relations entre les lieux géométriques des étales	
	et les déplacements horizontaux des molécules liquides	
30	pendant le flot et pendant le jusant	34
31	A. Onde marée fluviale.	35
35	B. Onde marée en mer.	42

II

Pages		Numéros
37	CHAPITRE III. — APPLICATIONS	43
37	§ 1. Étude du régime d'une rivière existante	43
37	A. Généralités	43
38	B. Étude de marées déterminées	44
39	C. Détermination du débit supérieur	46
41	§ 2. Étude de l'amélioration d'une rivière	50

PL. I, II ET III.

LES
ÉTALES DE COURANT DANS L'ONDE MARÉE
ET
LEURS LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PRÉLIMINAIRES.

1. Lorsque l'onde-marée se propage en mer ou dans les rivières, elle engendre des courants dont le sens général se renverse périodiquement. Il est d'usage d'appeler *courant de flot* celui qui se produit dans le sens de la propagation de l'onde, *courant de jusant* celui qui est dirigé en sens contraire de cette propagation. Les mots *flot* et *jusant* sont réservés aux courants ; le *flux* ou *gagnant* et le *reflux* ou *perdant* désignent respectivement le mouvement d'ascension et le mouvement de descente de la surface liquide. Le gagnant cesse au moment de la marée haute, qui correspond au passage du sommet de l'onde ; la fin du perdant correspond à la marée basse et au pied de l'onde ⁽¹⁾.

Les *étales de flot* et *de jusant* marquent la fin des courants respectifs dont ils empruntent les noms. Comme la renverse des courants ne se produit pas au même instant dans les diverses parties de la section transversale, le mot *étale* n'a de signification précise qu'à condition d'être appliqué à la vitesse moyenne, c'est-à-dire au rapport $\frac{q}{\omega}$, du débit instantané à la section mouillée correspondante ; en d'autres termes, l'étale

⁽¹⁾ Par *sommet* et par *pied* nous entendons les points où l'onde touche respectivement le lieu géométrique des marées hautes et celui des marées basses ; le *sommet* de l'onde ne correspond à son point le plus élevé et le *pied* à son point le plus bas que lorsque les lieux géométriques en question présentent un élément horizontal au point de tangence.

marque, par définition, le moment où le débit de la section est nul.

Les étales se propagent dans le même sens que les hautes et les basses mers soit, pour les rivières, de l'aval vers l'amont, sauf la restriction qui sera indiquée plus loin (n° 15). On sait par expérience que les étales se produisent, en général, à des instants différents de ceux de la marée haute et de la marée basse. Si, sur un profil en long, on réunit par des traits continus les points qui représentent les flottaisons, d'une part aux moments des étales de flot, d'autre part aux moments des étales de jusant, on obtient des lignes que nous avons appelées respectivement le lieu géométrique des étales de flot et le lieu géométrique des étales de jusant.

Ces lieux géométriques ne semblent guère avoir été utilisés, jusqu'à présent, dans l'étude des rivières à marée. La présente note a pour but d'attirer l'attention sur quelques-unes de leurs propriétés. Cet essai ne saurait avoir la prétention d'être une étude complète ; il se borne à une suite de considérations de l'ordre le plus simple ; au surplus, il ne s'applique intégralement qu'aux marées dont la durée totale se décompose en un gagnant et un perdant réguliers, comme c'est le cas pour les marées de l'Escaut.

2, Les développements qui suivent s'appuient constamment sur la relation de continuité qui existe, pour tout liquide incompressible et de densité constante, entre le volume limité par des faces quelconques et les débits de ces faces. Cette relation peut s'établir comme suit pour un cours d'eau :

Considérons deux sections transversales quelconques, ω et ω_1 ,

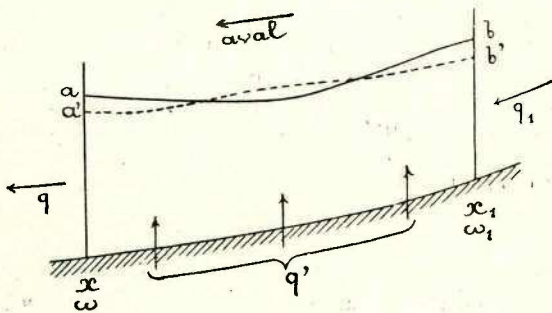


Fig. 1.

dont la seconde est située à l'amont de la première. Nous supposerons ces sections verticales, comme on le fait d'habitude en hydraulique ; nous compterons les abscisses horizontalement,

en sens contraire de la propagation de l'onde, ou de l'amont

vers l'aval ; dès lors les vitesses et les débits de jusant seront positifs, les vitesses et les débits de flot négatifs, par définition.

A un instant déterminé, soit ab l'axe hydraulique, q le débit de la section d'aval, q_1 celui de la section d'amont. Dans le cas le plus général, les parois du tronçon débiteront également une certaine quantité d'eau, q' , constante ou variable, qu'on peut appeler *débit latéral* et qui peut provenir d'un déversement supérieur, de sources débouchant dans le lit sous la nappe liquide ou d'affluents soumis eux-mêmes à l'action de la marée. Par convention, nous donnerons à q' le signe positif lorsqu'il représente un débit réellement *introduit* ; inversement, le débit latéral pourrait être *emprunté* au tronçon d'une façon continue ou intermittente ; nous l'affecterons, dans ce cas, du signe négatif.

Après un intervalle de temps élémentaire dt , les hauteurs d'eau se seront modifiées, dans chaque section, de quantités infiniment petites, $\frac{\partial \omega}{\partial t} dt$, positives ou négatives, et l'axe hydraulique aura pris une nouvelle forme, que nous supposons figurée par $a'b'$. L'augmentation algébrique, pendant le temps dt , du volume liquide compris dans le tronçon, est égale à la différence entre les volumes introduits et les volumes évacués par ses diverses faces pendant le même temps. Nous pouvons donc poser

$$\int_{x_1}^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dt dx = q_1 dt + q' dt - q dt,$$

en remarquant que les variations des débits pendant le temps dt peuvent être négligées, comme conduisant à des termes du deuxième ordre.

L'équation précédente peut encore s'écrire

$$q = q_1 + q' - \int_{x_1}^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx \dots \dots \dots (1)$$

On observera que cette équation est une relation purement géométrique. Elle ne préjuge rien de la forme des axes hydrauliques, ni de la distribution des vitesses dans les sections transversales, ni des lois suivant lesquelles agissent les pressions ou les résistances dues aux frottements ; elle doit donc conduire à des résultats exacts, tant qu'on n'introduit pas d'hypothèses faites sur ces éléments ; enfin, elle est applicable

à deux sections et à un instant entièrement quelconques ⁽¹⁾.

3. Les termes du second membre de l'équation (1) ont des valeurs qui dépendent de l'importance de la marée et de celle du débit des eaux supérieures. Lorsqu'on étudie le régime, actuel ou futur, d'un cours d'eau soumis à la marée, on fait généralement une série d'hypothèses bien déterminées sur la grandeur de ces deux facteurs; dans chaque combinaison, on admet que la marée soit rigoureusement périodique et que le débit naturel soit constant pour une même section transversale. Cette méthode est très rationnelle, car elle permet de déterminer les caractéristiques du régime dans les diverses circonstances où il est intéressant de les connaître et elle élimine la variabilité accidentelle des éléments influencés par les circonstances astronomiques ou météorologiques, dont il serait, d'ailleurs, impossible de tenir compte exactement. Nous opérerons de même dans toute la suite de cette étude; l'importance de la marée et celle du débit supérieur en chaque point seront donc représentées par des coefficients constants.

CHAPITRE I^{er}

ÉTUDE GÉNÉRALE DES ÉTALES ET DE LEURS LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

4. Notre but est d'étudier ici la *forme générale* qu'affectent les lieux géométriques des étales, principalement dans les rivières; nous ferons donc abstraction, dans cette recherche, des irrégularités locales que ces lignes peuvent présenter, tout comme on en rencontre dans les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses.

§ 1. — Onde marée fluviale

5. Il est évident que les lieux géométriques des étales ne peuvent exister que dans la partie de rivière où les courants renversent. L'extrémité amont de cette zone sera appelée la *limite du flot*; nous la désignerons toujours par la lettre ou par l'indice L. Par *limite de la marée* nous entendons le point

(1) L'équation en question s'applique aussi bien aux crues qu'aux marées fluviales.

à l'amont duquel le niveau reste constant, pour un débit supérieur donné; cette limite sera marquée, soit par un barrage, soit par le point où l'amplitude s'annule; nous l'indiquerons constamment par la lettre ou par l'indice O et nous y placerons l'origine des distances. Le débit supérieur à la limite de la marée sera désigné par q_0 ; à l'amont du point O le régime sera considéré comme permanent.

6. En général, la limite du flot et la limite de la marée, sont deux points différents. Considérons, pour simplifier, une rivière sans affluents à marée, mais écoulant un débit naturel amené par l'amont ou par les côtés. Appliquons la formule (1) entre une section x quelconque et la limite de la marée. Nous ferons :

$$q_x = q_0 \text{ et } q' = [\Delta q_0]_0^x. \quad$$

Si l'on désigne par q_s le débit supérieur à l'amont de la section considérée, on peut poser :

$$q_s = q_0 + [\Delta q_0]_0^x. \quad (2)$$

et la formule (1) devient :

$$q_x = q_s - \int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx \quad (3)$$

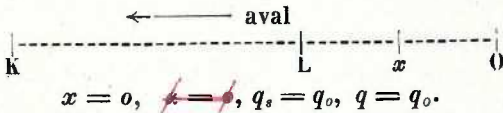
A l'instant que l'on considère, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ a une valeur différente dans chaque section transversale; soit α sa valeur moyenne, à cet instant, sur la longueur x , comprise entre la limite de la marée et la section où l'on veut évaluer le débit. Nous posons :

$$\int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx = \alpha x \quad (4)$$

et l'équation (3) pourra s'écrire :

$$q_x = q_s - \alpha x \quad (5)$$

Plaçons-nous d'abord en O, à la limite de la marée. On a, en ce point :



Le débit y est constant et égal au débit supérieur, ce qui était évident.

Pour les sections transversales situées à une faible distance

quant à α , sa limite est la valeur de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ au point O à l'instant considéré (et cette valeur n'est pas nulle, en général, s'il y a un barrage).

à l'aval de la limite de la marée, le débit sera, à tout instant, dirigé vers l'aval. En effet, $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ a toujours une valeur finie, sauf dans le cas d'un mascaret, que nous laissons en dehors de cette étude; il en sera donc de même de α . Si x est suffisamment petit, le produit αx sera toujours inférieur à q_s , c'est-à-dire qu'il y aura jusant aussi bien pendant la montée que pendant la descente de l'eau.

Il est facile de voir que ce débit, variable à chaque instant, a comme valeur moyenne celle du débit supérieur. Soit, en effet, T la durée totale de la marée, (12 h. 25 minutes, en moyenne, pour les marées dont nous nous occupons).

$$\int_0^T \alpha x dt = \int_0^x dx \int_0^T \frac{\partial \omega}{\partial t} dt = \text{zéro},$$

car ω a la même valeur à l'instant T qu'à l'instant 0;

Donc

$$\int_0^T q_x dt = q_s \times T. \quad \dots \dots \dots (6)$$

(Cette équation est d'ailleurs vraie pour une section transversale quelconque de la rivière.)

On voit que dans la région dont nous venons de parler, et qu'on pourrait appeler *fluvio-maritime*, les dénivellations de la surface sont uniquement dues aux accélérations ou aux ralentissements qui se produisent dans l'écoulement ininterrompu des eaux supérieures vers l'aval.

En continuant à descendre la rivière, on trouvera une section L, telle que la plus grande valeur positive de α , multipliée par la distance finie OL, atteigne la valeur de q_s . A l'instant où ce maximum de α se trouvera réalisé, le débit sera nul dans la section L; à tout autre instant de la marée il sera positif.

Enfin, immédiatement à l'aval de la section L, α augmentant sans cesse, le produit de cette longueur par la plus grande valeur de α dépasse de plus en plus la valeur de q_s ; on trouve donc des débits négatifs, ou débits de flot, dont le maximum en chaque point est de plus en plus important en valeur absolue; par raison de continuité on doit en conclure qu'il existe des débits de flot dans toute section située à l'aval de la section L,

laquelle marque ainsi la limite du flot ⁽¹⁾. Au moment où le débit de flot atteint la section L, son maximum ^{local} s'annule et l'on

$$a \text{ à la fois } q = 0 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial t} = 0.$$

On remarquera toutefois qu'il est un cas, et un seul, où la limite du flot se confond avec la limite de la marée: c'est lorsque le débit supérieur q_0 est nul en ce dernier point. On a alors constamment $q = 0$ à la limite du flot.

7. Comme application de ce qui précède, calculons approximativement la position de la limite du flot dans l'Escaut, pour une marée d'importance moyenne. Le barrage de Gendbrugge marque la limite de la marée. À l'aval de ce point, la moyenne des largeurs, au moment de l'ascension la plus rapide de l'eau (instant peu éloigné de celui de la mi-marée montante), peut être approximativement représentée, avant les derniers travaux d'amélioration, par la formule

$$l^m = 35^m + 1,4 x^k$$

x étant la distance au barrage, exprimée en kilomètres.

Si h est la cote de l'eau, les courbes locales montrent que la plus grande valeur de $\frac{\partial h}{\partial t}$ correspond à une montée d'à peu près 0^m,50 par heure, d'où

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\max} = \frac{0,50}{3600} = \frac{1}{7200} \text{ environ}$$

On a aussi

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_{\max} = l \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\max}.$$

La limite du flot sera donc donnée par

$$l \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{\max} \times 1000 x = q_s$$

d'où l'on déduit facilement $x^2 + 25x - 5q_s = 0$

$$x = -12^k,5 + \sqrt{156,25 + 5q_s}$$

On trouve ainsi :

pour $q_s = 0$, $x = 0$;

(1) Il est inutile d'envisager l'hypothèse où l'accroissement du débit supérieur vers l'aval serait aussi rapide que celui de $(\alpha x)_{\max}$; cela reviendrait à admettre l'absence de tout débit de flot dans la rivière; le débit supérieur prendrait une importance telle qu'il empêcherait l'introduction des eaux de marée.

(*debit moyen*)
 pour $q_s = 23$ mètres cubes, $x = 4$ km., résultat identique à celui qu'ont donné les cubatures exactes ;
 pour $q_s = 50$ mètres cubes, $x = 7.5$ km., etc.

On remarquera que la même formule pourrait servir à déterminer approximativement le débit supérieur, connaissant la limite atteinte par le courant de flot. Nous indiquerons plus loin un procédé plus exact, basé sur le même principe (*au fond*) (nos 46 à 48).

Pour les grands débits, il faudrait évidemment utiliser d'autres valeurs de $\frac{\partial h}{\partial t}$ que celles déduites des courbes locales moyennes.

8. Nous allons maintenant établir quelques principes généraux relatifs aux mouvements des ondes et dont nous aurons à faire usage dans la suite de cette étude.

L'onde-marée éprouve dans sa propagation une série de résistances : ce sont principalement, dans les rivières, les frottements contre les parois, la réduction progressive des sections et des profondeurs, la pente du lit et l'afflux des eaux supérieures. Ces résistances ont pour effet de réduire continûment le volume de l'onde, depuis l'instant où elle pénètre dans la rivière jusqu'à celui où elle disparaît à la limite de la marée. Cette proposition peut-être considérée comme évidente et elle explique, dans son ensemble, tout le mécanisme des marées fluviales. Elle entraîne cette *autre* conséquence que les volumes totaux, auxquels les diverses sections transversales livrent passage, vont eux-mêmes en décroissant d'une manière continue de l'aval vers l'amont ; ces volumes, en effet, doivent varier dans le même sens que l'énergie de l'onde qui les met en mouvement. De ce principe fondamental découlent les conséquences suivantes :

9. Soient bhb_1 , et $b'h'b'_1$, les coupes longitudinales de l'onde

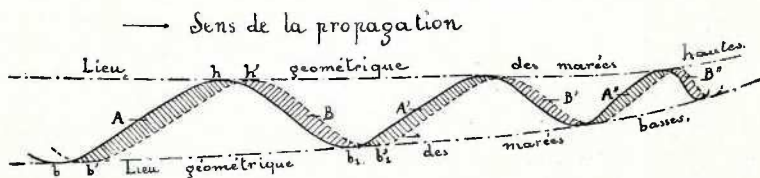


Fig. 2

respectivement au temps t quelconque et au temps $t + dt$. On

a constamment, entre les volumes représentés par les lettres A et B, la relation

$$B - A < 0 \quad (7)$$

Si la rivière a un développement tel que plusieurs ondes successives y trouvent place simultanément, on pourra poser une inégalité semblable pour chacune de ces ondes

$$B - A < 0, B' - A' < 0, B'' - A'' < 0 \text{ etc.}$$

d'où

$$\Sigma(B - A) < 0. \quad (8)$$

L'équation (3) appliquée aux points b, b_1, \dots etc. peut s'écrire

$$q_b = q_s - \sum_0^x (B - A). \quad (9)$$

Il résulte de cette équation qu'à marée basse le débit est toujours positif et plus grand que le débit supérieur, sauf à la limite de la marée, où le dernier terme de l'équation disparaît.

En l'absence de débit supérieur, le débit à la limite de la marée sera constamment nul; toutefois il faut, dans ce dernier cas, considérer le moment de la marée basse comme étant celui de l'étale de jusant. En effet, l'équation (3) montre qu'à une distance élémentaire, dx , à l'aval de la limite de la marée, le débit à chaque instant est donné par la formule

$$q_{dx} = q_s - \frac{\partial \omega}{\partial t} dx. \quad (10)$$

~~en négligeant l'accroissement imperceptible de q_s .~~ Le diagramme qui représente la loi de variation de ce débit est donc, à une constante près, la courbe dérivée de celle des surfaces mouillées en fonction du temps. A marée haute et à marée basse $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, le débit est égal au débit supérieur, donc nul

dans le cas particulier que nous avons en vue; le débit est $< q_s$ pendant la marée montante, $> q_s$ pendant la marée descendante, donc respectivement négatif et positif, si q_s est nul; il en résulte bien que, dans cette dernière hypothèse, l'étale de jusant vient se placer à la marée basse; et l'on voit aussi que l'étale de flot coïncide avec la marée haute.

10. Des considérations qui viennent d'être développées résultent les deux propriétés suivantes :

I. A marée basse il ne peut y avoir ni courant de flot ni étale de flot.

II. Pour que l'étalement de jusant se produise à marée basse, il faut et il suffit que l'on se trouve à la limite de la marée et que le débit supérieur soit nul en ce point.

11. Si un étalement de jusant pouvait se produire pendant la marée descendante, l'étalement de flot suivant devrait se produire pendant la même marée descendante, sinon on trouverait, à marée basse, un débit négatif, ce qui est impossible d'après ce qui vient d'être dit. Or, la position relative qu'on supposerait ainsi aux étalements ne saurait correspondre à la réalité, car il y aurait flot pendant une partie de la marée descendante et jusant pendant toute la marée montante. Le débit instantané de la section située à une distance dx à l'amont de celle que l'on considère est donné par l'équation

$$q_{x-dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial t} dx. \quad \dots \quad (11)$$

forme particulière de l'équation (1) lorsqu'on l'applique à deux sections infiniment voisines, ~~entre lesquelles on peut négliger l'accroissement du débit supérieur.~~

Si q_x et $\frac{\partial q_x}{\partial t}$ sont négatifs en même temps, q_{x-dx} est un débit négatif, plus grand, en valeur absolue, que le débit q_x . Comme, dans l'hypothèse envisagée, il en serait ainsi pendant toute la durée du flot, il passerait au total une plus grande quantité d'eau par la section d'amont que par la section d'aval, ce qui n'est pas possible (n° 8).

Les mêmes raisonnements s'appliqueraient ~~à fortiori~~ à l'hypothèse d'un étalement de jusant se produisant à marée haute.

En conséquence :

III. L'étalement de jusant ne peut se produire ni à marée haute ni pendant la marée descendante.

Rien ne s'oppose a priori à ce qu'un étalement de flot puisse avoir lieu à marée montante. Cette hypothèse exige seulement que l'étalement de jusant précédent ait eu lieu pendant la même marée montante, sinon il y aurait eu débit de flot à marée basse. Si l'on exprime, comme ci-dessus, la valeur du débit dans la section d'amont immédiatement voisine, on verra qu'à tout instant du flot, ce débit est plus petit en valeur absolue que celui de la section d'aval. Les débits totaux seront donc décroissants de l'aval vers l'amont, ce qui doit être.

12. Il résulte de l'équation (5) du n° 6, que la condition

nécessaire et suffisante pour qu'un étale de flot ou de jusant se produise dans une section x quelconque, s'exprime par l'équation :

$$q_s = \alpha x. \dots \dots \dots (12)$$

En dehors du cas où $q_s = 0$, α doit donc avoir une valeur essentiellement positive au moment d'un étale.

Observons que α est la valeur moyenne d'une série d'éléments affectés de l'un ou de l'autre signe, suivant l'instant considéré et la situation de la section transversale. En fonction du temps le diagramme des valeurs de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ dans une section quelconque est une courbe continue, dont l'ordonnée, nulle à marée haute et à marée basse, est positive pendant la marée montante, négative pendant la marée descendante, et présente un maximum pendant chacune de ces deux périodes. Les diverses phases par lesquelles passe la grandeur des sections mouillées se transmettent dans le même sens que le sommet et le pied de l'onde, donc continûment de l'aval vers l'amont. Autrement dit, si l'on rapporte à une même origine des temps les courbes continues représentant les valeurs de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ dans les sections successives, ces diagrammes présentent une disposition relative tout à fait analogue à celle des courbes locales simultanées; on en conclut qu'à l'amont d'un point quelconque la valeur de α varie suivant une loi semblable à celle qui régit les valeurs de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ dans chacune des sections composantes. Le calcul confirme entièrement la vérité de cette proposition. En outre, les diverses phases du diagramme des valeurs de α se produisent d'autant plus tard et correspondent à des ordonnées d'autant plus petites que la section dont on cherche le débit est elle-même située plus vers l'amont.

Outre la condition (12), l'étales de flot au temps t est caractérisée par le fait qu'au temps $t + dt$ le débit est positif, c'est-à-dire que α a une valeur croissante; dans le cas d'un étale de jusant, ce débit sera, au contraire, négatif et α aura une valeur décroissante (1).

(1) Il n'y a pas lieu d'examiner le cas où $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, donc $\frac{\partial q}{\partial t}$ serait nul au moment de l'étales, car q étant également nul, ces deux conditions simultanées caractérisent la limite du flot (n. 0).



13. Nous avons admis, à partir du n° 6, que la rivière considérée ne reçoive aucun affluent, soumis lui-même à l'action des marées. Nous avons fait cette hypothèse dans le seul but de simplifier les équations et les raisonnements. Il est facile de voir que toutes les conclusions auxquelles nous avons abouti restent vraies dans tous les cas. A cet effet, il suffit de remarquer qu'on peut poser, pour chaque affluent à marée, une relation analogue à l'équation (1) et qu'en combinant par addition ces diverses équations on obtiendra l'équation générale :

$$q_x = \Sigma q_1 + \sum_{x_1}^x \Delta q_0 - \Sigma \int_{x_1}^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx. \quad \dots \quad (1^a)$$

dans laquelle les limites indiquent, désormais, que les sommes et les intégrales doivent être étendues, non seulement au tronçon de rivière considéré, mais encore aux tronçons analogues de tous les affluents à marée qui débouchent dans le premier.

On trouverait de même les formes générales des autres équations, en attribuant la même signification aux notations qui indiquent les limites :

$$q_x = \sum_0^x q_0 + \sum_0^x \Delta q_0 \quad \dots \quad (2^a)$$

$$q_x = q_0 - \Sigma \int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx, \quad \dots \quad (3^a)$$

$$\Sigma \int_0^x \frac{\partial \omega}{\partial t} dx = \alpha \sum_0^x x. \quad \dots \quad (4^a)$$

$$q_x = q_0 - \alpha \sum_0^x x. \quad \dots \quad (5^a)$$

$$q_x = \alpha \sum_0^x x. \quad \dots \quad (12^a)$$

Les équations (6), (7), (10) et (11) ne changent pas. Il en est de même des équations (8) et (9), à condition de les supposer éventuellement étendues aux affluents.

14. Poursuivons l'examen du régime des étales à l'aval de la limite du flot. D'après ce qui a été dit plus haut (n° 6) et en vertu de la continuité et de l'allure des fonctions α (n° 12), nous trouverons, immédiatement à l'aval du point L, deux étales dans chaque section transversale, l'un de ces étales se produisant avant, l'autre après le moment où la fonction α passe par sa plus grande valeur positive. Le premier est un étale de jusant, le second un étale de flot, car α augmente dans

le premier cas et diminue dans le second. Ces deux étales se produiront à marée montante, comme l'étale au point L, mais les instants qui leur correspondent respectivement différeront de plus en plus l'un de l'autre à mesure qu'on s'avancera vers l'aval. Il en sera de même des hauteurs d'eau. La flottaison au moment de l'étale de flot et l'heure de cet étale seront donc de plus en plus voisines de celles de la marée haute; de même l'étale de jusant se produira à un niveau et un instant de plus en plus rapprochés de ceux de la marée basse.

On rencontrera finalement une section où l'étale de flot se produira en même temps que la marée haute, la faible valeur moyenne de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ à l'amont de cette section étant suffisante à assurer l'égalité (12^a), eu égard à l'accroissement de x . Nous désignerons par K cette section caractéristique. L'étale de jusant s'y produira encore à marée montante, en vertu des propriétés que nous avons démontrées plus haut (n^{os} 9, 10 et 11).

15. Dans la région comprise entre la limite L du flot et le point caractéristique K, où l'étale se produit à marée haute, la durée du flot, nulle au point L, augmente rapidement vers l'aval. L'étale de flot s'y propage *d'amont en aval*, avec une célérité croissante. Soit, en effet, V la vitesse de propagation de l'étale. Cette vitesse est déterminée par l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial t} dt = 0 \dots \dots \dots (13)$$

qui exprime que la variation totale d'un débit de grandeur déterminée est nulle et dans laquelle il faut faire

$$dx = V dt \text{ et, implicitement, } q = 0.$$

En différentiant, d'autre part, l'équation (1) et en négligeant le débit latéral sur la distance dx , on obtient

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \dots \dots \dots (14)$$

équation équivalente à celle qui a été posée au n^o 11.

Par substitution, on trouve

$$V = \frac{\frac{\partial q}{\partial t}}{\frac{\partial \omega}{\partial t}} \dots \dots \dots (15)$$

$\frac{\partial q}{\partial t}$ est positif au moment de l'étalement de flot; dans la région considérée $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ est également positif, puisque cet étalement a lieu à marée montante; V est donc positif, c'est-à-dire que la vitesse de propagation de l'étalement est dirigée vers l'aval.

En particulier, au point K,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \pm \infty, V = \pm \infty$$

A la limite L du flot,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \pm 0, V = \pm 0.$$

16. Poursuivons notre chemin à l'aval de la section caractéristique K. A l'instant de la marée haute correspondra, dans le tronçon d'amont, une valeur de α de plus en plus grande; pour assurer l'égalité (12^a) il faudra donc faire intervenir des éléments négatifs de plus en plus importants. On peut voir ainsi que l'étalement de flot aura lieu pendant la marée descendante et qu'il s'écartera de plus en plus de la marée haute, ce qui est conforme à l'expérience. Nous savons que l'étalement de jusant se produit toujours pendant la marée montante, mais ce dernier étalement ne continue pas à se rapprocher de la marée basse comme c'était le cas dans la région LK; dans l'ensemble, il s'en écarte au contraire bientôt de plus en plus vers l'aval. On peut s'en rendre compte en observant que pour compenser les valeurs négatives de $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ à l'amont des sections où se produisent les marées basses, il faut faire intervenir des éléments positifs d'autant plus importants que ces sections sont plus éloignées vers l'aval. Cette déduction est encore confirmée par l'expérience.

La formule (15) montre qu'à l'aval du point K l'étalement de flot se propage vers l'amont, car $\frac{\partial q}{\partial t}$ est positif et $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ est négatif. La vitesse de propagation devient infinie au point K, où $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ est nul. Si l'on tient compte de ce qui a été dit aux numéros 14 et 15, on voit qu'il existe une période de la marée pendant laquelle il y a constamment deux étalements de flot, l'un à l'amont, l'autre à l'aval du point K.

Pour l'étales de jusant, on a partout

$$\frac{\partial q}{\partial t} < 0, \frac{\partial \omega}{\partial t} > 0;$$

la vitesse de propagation de cet étales est donc toujours dirigée vers l'amont ; elle est nulle à la limite du flot.

17. Il est évident que dans le cas particulier où le débit supérieur est nul à la limite de la région maritime et où, dès lors, cette limite se confond avec celle du flot, la section caractéristique K vient également se confondre avec cette limite commune, l'étales de flot l'atteignant au moment de la marée haute et l'étales de jusant au moment de la marée basse, comme nous l'avons vu (n° 9). Le régime particulier des étales dans la région LK cesse d'exister en même temps que le débit supérieur.

18. En résumé dans une rivière régulière, le régime des étales s'établit comme suit :

I. Dans la région d'aval, l'étales de flot se produit après la marée haute, donc pendant la marée descendante, et l'étales de jusant après la marée basse, c'est-à-dire pendant la marée montante. II. Ces étales se propagent vers l'amont avec des vitesses respectivement plus grandes que celles des marées hautes et des marées basses. III. Dans la région d'amont, sous l'influence du débit supérieur, la vitesse de propagation de l'étales de jusant se ralentit notablement et elle s'annule à la limite du flot, au moment où l'accroissement des sections est le plus rapide dans la région fluvio-maritime. IV. A cet instant l'étales de flot engendré par l'aval se trouve dans le perdant de l'onde, mais il se produit dès lors un deuxième étales de flot engendré par l'amont. Ce dernier étales a son point de départ à la limite du flot, où il se confond avec l'étales de jusant ; il se propage vers l'aval avec une vitesse ^{absolue} croissante et les deux étales de flot viennent se rencontrer dans une section caractéristique où ils arrivent en même temps que la marée haute. Après ce moment, le jusant règne dans toute l'étendue de l'onde. V. La section caractéristique se confond avec la limite du flot ainsi qu'avec celle de la marée, lorsque le débit supérieur est nul en ce dernier point ; dans ce cas particulier, l'étales de flot et l'étales de jusant se propagent constamment vers l'amont ; le premier suit toujours la marée haute et le second la marée basse avec des retards respectifs qui ne s'annulent qu'à la limite de la marée.

19. D'après ce qui précède, nous pouvons représenter l'al-

lure générale des lieux géométrique des étales, dans une rivière régulière, par les lignes tracées en traits pleins sur les figures schématiques 1, 2, 3 et 4 de la planche I, les lignes en traits mixtes représentant les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses. Les figures 1 et 2 se rapportent au cas d'une rivière librement ouverte à la marée, les figures 3 et 4 au cas où la marée est arrêtée par un barrage. Pour chacun de ces deux cas, nous avons distingué l'hypothèse où le débit ~~est~~ supérieur à une valeur finie (figures 1 et 3) et celle où ce débit est nul (figures 2 et 4) à la limite de la marée. Dans la première hypothèse, les deux lieux des étales ont une tangente verticale commune à leur point de jonction L et le lieu des étales de flot touche celui des marées hautes dans la section K. Dans la seconde hypothèse, le lieu des étales de flot et celui des marées hautes d'une part, le lieu des étales de jusant et celui des marées basses d'autre part, sont tangents à la limite de la marée. Il doit être entendu qu'on ne saurait déduire de ces figures des conclusions concernant l'allure *de détail* des lieux géométriques des étales et relatives, notamment, aux courbures de ces lignes.

Sur la planche II, nous avons représenté les lieux géométriques des étales de l'Escaut maritime pour une marée et des débits supérieurs d'importance moyenne. Les observations utilisées sont celles de la période 1888-1895. On peut juger, par cette figure, des irrégularités locales que les lieux en question présentent souvent dans la réalité. Les instants, et par suite les hauteurs, qui correspondent aux étales, sont déduits des diagrammes des débits dressés pour un grand nombre de sections transversales. Ces diagrammes eux-mêmes résultent de cubatures, ou, ce qui revient au même, de l'application répétée de la formule générale (1^a) (1). On a trouvé que la limite du flot est située à 4 kilomètres à l'aval de la limite de la marée (voir aussi n° 7), et que la section caractéristique K se trouve sensiblement à 11 kilomètres de cette même limite. Sur la même planche sont figurés les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses et les axes hydrauliques d'heure en heure, l'origine de celles-ci étant l'heure de la marée haute à Flessingue.

(1) Voir *Recueil de documents relatifs à l'Escaut maritime. — Études sur le régime des rivières du bassin de l'Escaut maritime* par J. A. PIERROT, ingénieur en chef, directeur, et L. VAN BRABANDT, ingénieur. — Bruxelles, Lesigne, 1907.

Un diagramme de ce genre permet de déterminer la situation des étales à un instant quelconque. A cet effet, on observera le principe suivant, qui résulte des théories précédentes. Les étales de jusant correspondent aux sections où leur lieu géométrique coupe le gagnant de l'onde, c'est-à-dire la partie antérieure des courbes instantanées ; les étales de flot correspondent aux intersections de leur lieu géométrique avec les perdants ou parties postérieures des axes hydrauliques pour les sections situées en aval de K, et avec leurs gagnants pour les sections comprises entre K et L. Aucune autre intersection ne correspond à un étale. Il est clair que la courbe instantanée qui correspondrait à la marée haute au point K doit être tangente en ce point au lieu géométrique des étales de flot, intérieurement vers l'aval et extérieurement vers l'amont.

On peut voir sur la planche II qu'au moment où l'étale de flot se produit en K, (à 6^h. 16^m) la marée est à peu près à son niveau le plus bas à l'embouchure de l'Escaut, de sorte qu'à partir de ce moment le courant de jusant règne sur toute la longueur du fleuve, jusqu'à l'instant où l'étale de jusant apparaît à l'embouchure ; ce phénomène dure un heure et quart environ.

20. Dans le cas où la rivière est très longue, on pourrait se demander si l'étale de jusant et l'étale de flot ne viendraient pas se rencontrer en quelque point d'aval, leurs lieux géométriques se recoupant pour présenter ensuite une position relative inversée. Les considérations du chapitre suivant permettent de voir que l'hypothèse envisagée est irréalisable, car elle conduirait à attribuer à des sections d'amont des débits totaux plus importants en valeurs absolues que ceux de sections d'aval, ce qui est inadmissible (voir n° 26). Au large de l'embouchure, les lieux des étales viendraient d'ailleurs se rejoindre vers le niveau moyen, qui est à peu près celui des deux étales en mer libre, pour les marées que nous envisageons. (n^{os} 23 et 31.)

21. Il est également intéressant de tracer le diagramme de propagation des étales, du moins pour la partie amont d'une rivière à débit supérieur.

On peut représenter la propagation d'une phase quelconque de la marée en adoptant un système de coordonnées rectangulaires, dont les abscisses représentent les distances parcourues et dont les ordonnées figurent les heures auxquelles le phénomène considéré se produit en chaque point. On obtient une

(tangentes des angles)
courbe dont les inclinaisons, par rapport à l'axe des ordonnées, sont proportionnelles aux vitesses de propagation. Les vitesses de propagation d'un sens déterminé correspondent à des ordonnées croissantes dans le même sens ; si la courbe est concave vers le haut, la vitesse de propagation décroît dans la direction de cette propagation ; l'inverse a lieu en cas de convexité ; un élément vertical correspond à une vitesse de propagation nulle ; un élément horizontal à une vitesse de propagation infinie, etc.

D'après ces principes, on voit que, lorsqu'il existe un débit supérieur, le diagramme de propagation des étales, dans la région d'amont, affecte la forme d'une courbe fermée, comme celle des lieux géométriques correspondants. Ce diagramme présente un élément vertical à la limite du flot, un élément horizontal dans la section où l'étales de flot a lieu à marée haute.

Nous avons calculé les éléments de ce diagramme pour le tronçon, de 15 kilomètres de longueur, qui forme l'extrémité amont de l'Escaut maritime (planche III). La partie supérieure de la figure reproduit les courbes instantanées de la planche II. Cette figure a été complétée en y représentant les diagrammes de propagation des autres phases principales de la marée, c'est-à-dire les heures de la marée haute, de la marée basse et des maximums locaux du débit et de la vitesse, ainsi que les instants où le débit de jusant a une valeur égale à celle du débit supérieur.

On remarquera que le débit maximum du flot précède la marée haute et que le débit maximum du jusant précède la marée basse. On peut démontrer qu'il doit en être ainsi dès qu'on admet que les débits maximums décroissent d'aval en amont, ce qui doit être considéré comme une conséquence de l'affaiblissement progressif de l'onde.

Soient, en effet, EMe , $E'M'e'$ les diagrammes des débits de flot de deux sections infiniment voisines. Ces diagrammes se coupent en un point H , caracté-

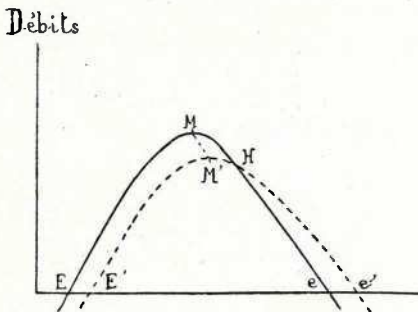


Fig. 3.

à la que la décroissance des débits totaux, au même

térisé par l'égalité $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$. D'autre part, $\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$, d'après l'équation (14). Le point H correspond donc à la marée haute. Les distances verticale et horizontale des sommets M et M' étant deux infiniment petits du même ordre, la ligne MM' fait un angle fini avec l'axe des temps; on conclut facilement de là que le point M' se trouve à l'intérieur de la courbe EMe et que l'intervalle de temps qui sépare M ou M' de H est une quantité finie (1).

Démonstration plus simple:

À l'instant de maximum de flot $\frac{\partial q}{\partial x} < 0$.

donc $\frac{\partial \omega}{\partial t} > 0$.

marée montante

l'instant précis

de la jusan

La démonstration est analogue pour le jusan.

A la limite du flot, le maximum du débit de flot s'annule en coïncidant avec l'étales; il se transforme ensuite en minimum de débit de jusan. Celui-ci se propage jusqu'à la limite de la marée, et s'y produit au moment ou l'accroissement de la section mouillée est le plus rapide; en ce même point, le maximum du débit de jusan correspond au contraire à la décroissance la plus rapide de la section mouillée (équation 5^a, n° 13). En ce qui concerne la vitesse de flot (en donnant au mot vitesse le sens indiqué n° 1), son maximum se produit antérieurement à celui du débit, car

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\omega \frac{\partial q}{\partial t} - q \frac{\partial \omega}{\partial t}}{\omega^2} \dots \dots \dots (15)$$

Au moment où $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$, $q < 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial t} > 0$, donc $\frac{\partial v}{\partial t} > 0$, la vitesse est croissante, et, comme elle est négative, elle décroît déjà en valeur absolue. (2)

Si l'on applique un raisonnement analogue au jusan, on trouve, au contraire, que pendant cette période le maximum de la vitesse se produit après le maximum du débit, mais avant la marée basse.

A la limite du flot, la vitesse maximum de flot se produit en même temps que le débit maximum du même signe. Elle se transforme ensuite en vitesse minimum de jusan.

(1) Le principe de cette démonstration est emprunté à une étude parue aux *Annales des Ponts et Chaussées de France* (année 1877, 2^e sem.). Note sur la théorie du mouvement non permanent des liquides et son application à la propagation des crues des rivières, par M. KLEITZ, inspecteur général des Ponts et Chaussées.

(2) V. KLEITZ, ouvrage cité.

Cette dernière suit le minimum du débit et vient, à la limite de la marée, coïncider avec la marée haute. A la même limite, le maximum de la vitesse de jusant vient se placer à marée basse.

Dans le cas où le flot atteint la limite de la marée, les maximums de vitesse des deux sens correspondent en ce point aux maximums des débits et se produisent, en conséquence, lorsque la section mouillée croît ou décroît le plus vite.

Les autres diagrammes ne donnent pas lieu à des remarques spéciales.

Sur l'Escaut et sur ses affluents, le maximum du débit de chaque sens est toujours unique, tandis que les vitesses présentent fréquemment un double maximum.

§ 2. — Onde-marée en mer.

22. Nous ne nous étendrons pas longuement sur le régime des étales au large, notre but étant principalement d'étudier les marées fluviales. Observons seulement que l'équation de continuité, sous la forme que nous lui avons donnée, reste applicable aux marées en mer, si l'on n'envisage que l'unité de largeur dans le sens normal à la translation de l'onde. Pour les ondes simples, le débit latéral peut être considéré comme nul. Au large il n'y a plus, à proprement parler, de limite de marée ni de limite de flot ; le débit des eaux pluviales peut être négligé. Quant aux ondes qui viennent mourir à la côte ou dans une baie, elles sont entièrement assimilables aux ondes-marées fluviales. La plupart des considérations développées au paragraphe précédent sont donc applicables ici, *mutatis mutandis*.

23. Nous nous bornerons à considérer le cas d'une onde simple, de forme sinusoïdale et de volume constant. Cherchons à voir ce que deviennent dans ce cas les lieux géométriques des étales. L'observation apprend qu'en mer libre les deux étales se produisent à des hauteurs peu différentes du niveau moyen. La théorie conduit au même résultat, si l'on remarque que dans une mer ouverte les résistances à la propagation de l'onde sont très faibles et que, dès lors, on se trouve sensiblement dans les conditions admises ci-dessus. Si l'on envisage le cas limite d'une onde parfaitement symétrique, il est facile de démontrer que tous les étales se produisent rigoureusement au niveau moyen.

Représentons, en effet, les deux positions successives de

l'onde au temps t et au temps $t + dt$, et soit M le niveau moyen. Si le débit est nul dans une section quelconque au moment où la flottaison est E et si e est un point situé au même

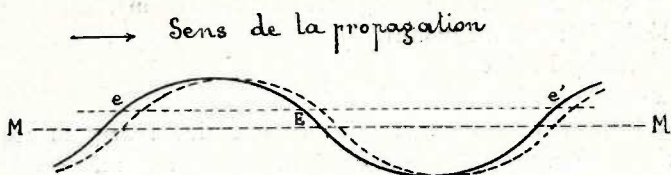


Fig. 4

niveau que E , la formule (1) montre que le débit en e sera également nul à cet instant, car l'accroissement du volume compris entre les sections E et e est lui-même nul à des infiniments petits du 2^o ordre près. On verrait de même que le débit est nul en e' et qu'il a au contraire une valeur finie pour tous les points de l'onde situés plus haut ou plus bas. Le lieu géométrique de tous les étales est donc représenté par une parallèle au niveau moyen. Si eEe' ne coïncidait pas avec le niveau moyen, le courant de flot et le courant de jusant auraient, ^{parcourus} une durée ~~différente en chaque point~~ ^{des}, ce qui doit être rejeté par raison de symétrie. On en conclut que le lieu géométrique des étales, tant de flot que de jusant, est le niveau moyen lui-même.

Cette proposition peut se démontrer d'une manière plus précise en utilisant les propriétés que nous étudions dans le chapitre suivant. (Voir n^o 31.)

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES DES ÉTALES.

§ 1. — Relations entre les lieux géométriques des étales et les débits.

A. — Cas général.

24. Nous allons établir les relations qui existent entre les débits totaux d'une section quelconque et les lieux géométriques des étales, dans le cas le plus général d'un cours d'eau avec affluents. Nous conserverons toutes les notations employées jusqu'ici et nous désignerons, de plus, par

e indifféremment l'heure ou la hauteur à l'étales de flot, (on verra qu'il n'en résulte aucune ambiguïté),

E l'heure ou la hauteur à l'étales de jusant,

F le débit total du flot (négatif par définition),

J le débit total du jusant,

f la durée du flot,

j la durée du jusant.

25. Représentons (pl. I, fig. 5) par des traits mixtes les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses d'une rivière, par des traits pleins renforcés ses lieux géométriques d'étales à l'amont d'une section x quelconque, pour laquelle nous allons chercher une expression du débit total. Nous supposons que A soit l'embouchure d'un affluent, soumis ou non à l'action de la marée, *d'autres affluents pouvant exister à l'amont de*

L'étales de jusant, qui se produit à l'instant E dans la section considérée, arrive à l'instant E' devant l'embouchure de l'affluent; à ce dernier instant, l'axe hydraulique est représenté en partie par y E'. Subdivisons la durée de temps finie (E'-E) en une infinité d'éléments dt . A chacun des instants intermédiaires nous pouvons appliquer la formule générale (1), en choisissant arbitrairement les sections extrêmes. Convenons de prendre comme section d'aval la section x et comme section d'amont celle où l'axe instantané coupe le lieu géométrique des étales de jusant entre E et E'. Nous pourrions faire constamment $q_x = 0$, $q' = 0$ et écrire une série d'équations

$$q_x = - \int_t^{t+dt} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx.$$

Multiplions toutes ces équations par dt et intégrons du temps E au temps E', nous obtenons :

$$\int_E^{E'} q_x dt = \text{vol } yE'E \dots \dots \dots (a).$$

On remarquera que, si l'on trace la partie de courbe instantanée Ebn, le débit de jusant qui passe par la section A, pendant l'intervalle de temps (E'-E), est représenté par E E'nb, puisque la différence entre les débits des sections x et A doit être égale et de signe contraire à l'augmentation de volume qu'accusent les courbes instantanées dans le tronçon Ax. On peut arriver directement à ce résultat par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer pour établir l'équation (a).

Opérons comme ci-dessus pour l'intervalle compris entre l'instant E' et l'instant e où l'étalement de flot a lieu dans la section x. Cette fois le débit variable de l'affluent interviendra, car toutes les parties de courbes instantanées que nous utilisons recouperont la section A. Faisant encore constamment $q = 0$, on posera une série d'équations, dont l'addition donnera

$$\int_{E'}^e q_x dt = \int_{E'}^e q' dt - \text{vol } ehE''E'y \dots \dots \dots (b)$$

en remarquant que tous les éléments qui constituent le volume Hhe interviennent deux fois avec des signes contraires.

Soit zKs la courbe instantanée au moment où la marée haute se produit dans la section caractéristique K ; nous savons que cette courbe est tangente à la fois au lieu des marées hautes et à celui des étales (n° 19). Nous appliquerons encore la formule (1) en subdivisant le temps comme précédemment, de l'instant e à l'instant K ; mais nous choisirons actuellement deux sections extrêmes de position variable ; la section d'aval sera celle où le perdant des ^{ondes} axes coupe le lieu des étales de flot, la section d'amont sera celle où leur gagnant coupe, soit le lieu des étales de jusant entre E'' et L, soit le lieu des étales de flot entre L et K. Dès lors, nous aurons constamment $q = 0, q_1 = 0$;

Du temps e au temps e' nous pourrons écrire :

$$0 = \int_e^{e'} q' dt + \text{vol } eh'h'e' - \text{vol } hh'E''E'' \dots \dots (c)$$

Après l'instant e' qui correspond à l'étalement de flot à l'embouchure de l'affluent, le débit de celui-ci n'intervient plus, puisque la section A n'est plus recoupée par les parties de courbes instantanées que nous considérons. On aura donc, du temps e' au temps K,

$$0 = \text{vol } e'h'K - \text{vol } h'KLE'' \dots \dots \dots (d)$$

Ajoutons enfin membre à membre les équations (a) (b) (c) et (d) et supprimons les volumes qui figurent deux fois avec des signes contraires ; nous obtenons l'équation

$$F_x = \int_E^e q_x dt = \int_{E'}^{e'} q' dt - \text{vol } eKLE \dots \dots (16).$$

26. On étendra sans peine les raisonnements qui précèdent au cas où le nombre des affluents est quelconque.

Chaque affluent donnera, dans l'équation (16), un terme analogue à $\int_{E'}^{e'} q' dt$, les limites de l'intégration étant, dans chaque cas, les instants des étales à l'embouchure de l'affluent considéré. Autrement dit, le second membre de l'équation (16) généralisée renfermera la somme des débits des affluents, soumis ou non à la marée, pendant le temps que dure le flot à leur embouchure. Entre le débit de flot de chaque affluent à marée et ses lieux géométriques d'étales existe une relation analogue à celle qu'exprime l'équation (16). Il en est de même pour les sous-affluents. Si l'on écrit toutes ces équations et si on les combine ensuite, par addition, avec l'équation principale, les termes en q' de l'équation résultante ne comprendront plus que les débits supérieurs introduits latéralement, soit dans la rivière, soit dans ses affluents ou sous-affluents, pendant les intervalles de temps analogues à $(e'-E')$.

Désignons, comme plus haut, par Δq_0 les débits supérieurs latéraux et adoptons le symbole conventionnel $[Et]$ pour représenter les volumes compris entre les lieux géométriques des étales, nous obtiendrons finalement l'équation générale

$$F_x = - \sum_L^x [Et] + \sum_L^x (\Delta q_0 \times f) \dots (17).$$

Nous rappelant que les débits de flot sont négatifs, nous traduirons comme suit la propriété qu'exprime cette équation :

Le volume total qui passe, pendant le flot, par une section transversale quelconque d'une rivière à marée, est égal à la quantité que l'on obtient

a) en faisant la somme des volumes compris entre les lieux géométriques des étales de jusant et de flot, tant dans la rivière que dans ses affluents, à l'amont de la section considérée.

b) en retranchant de cette somme celle des débits supérieurs latéraux pendant les durées du flot aux points où ils sont amenés.

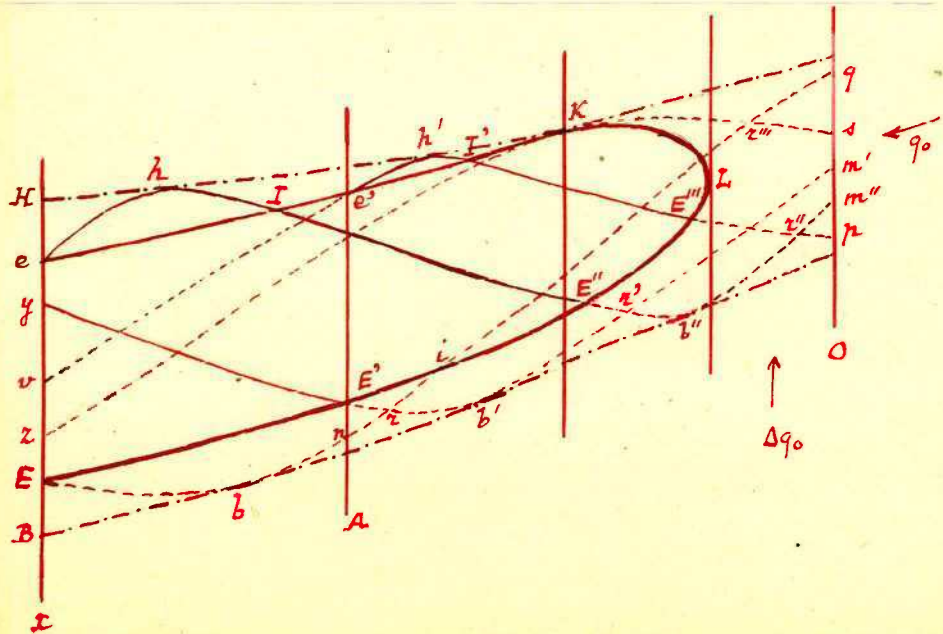
27. On pourrait rechercher d'une manière analogue l'expression du volume total écoulé pendant le jusant et on arriverait à l'équation (20) que nous donnons plus bas. Nous nous dispenserons de faire ici cette recherche, en remarquant que le débit total du jusant se déduit immédiatement de l'équation précédente. L'équation (6) (n° 6) peut en effet s'écrire

$$F_x + J_x = q_x \times (f + j) \dots (18)$$

(à condition d'utiliser les autres parties des étales instantanées prolongés vers l'amont et vers l'aval)

N.B. On pourrait simplifier en supprimant dans cet énoncé le mot "latéraux" puisqu'à l'amont de T, la durée de flot = 0

() Elle est donnée ci-contre →*



Equations à utiliser pour le calcul direct de J_x
 (I affluent ^(A) à l'aval de L)

$$\int_e^{e'} q_x dt = \text{vol } e' e' v$$

$$\int_{e'}^K q_x dt = \int_{e'}^K q' dt + \text{vol } v e' K z$$

$$\int_K^{E+T} q_x dt = q_0 (E+T-K) + [\Delta q_0]_L^K (E+T-K) + \int_K^{E+T} q' dt + \text{vol } z K z'' b' E - \text{vol } z'' q_0 s$$

$$0 = q_0 (K-E) + [\Delta q_0]_L^K (K-E) + \int_{E+T}^{E'+T'} q' dt - \text{vol } E b' L + \text{vol } i L E''' E'' - \text{vol } K z'' L + \text{vol } z'' q_0$$

$$J_x = \int_e^{E+T} q dt = q_L \times T + \int_{e'}^{E'+T'} q' dt + \text{vol } e K L E$$

et, en généralisant, pour un nombre quelconque d'affluents,

$$J_x = \sum_L^x [E L] + \sum_L^x (\Delta q_0 \times f) + T \sum_L^x q_L \dots (20)$$

D'autre part

$$q_s = \sum_L^x q_L + \sum_L^x \Delta q_0 \dots \dots \dots (19)$$

q_s représentant le débit supérieur à la limite du flot, débit qui peut également être exprimé par q₀ + [Δq₀]₀

et la constance de la somme f+j permet d'écrire: (f+j) Σ Δq₀ = Σ (Δq₀ × f) + Σ (Δq₀ × j)

En combinant les équations (17), (18) et (19), on obtient

$$J_x = \sum_L^x [Et] + \sum_L^x (\Delta q_0 \times j) + T \sum_L^x q_L \dots \dots (20)$$

ou, si l'on préfère: J_x = Σ^L [Et] + Σ^L (Δq₀ × j) + T Σ^L (q₀ + Δq₀)..... (20 bis)

Le volume total qui passe, pendant le jusant, par une section transversale quelconque d'une rivière à marée est égal à la quantité que l'on obtient

a) en faisant la somme des volumes compris entre les lieux géométriques des étales de flot et de jusant, tant dans la rivière que dans ses affluents, à l'amont de la section considérée,

b) en ^{ajoutant à} retranchant de cette somme 1°) celle des débits supérieurs latéraux pendant les durées du jusant aux points où ils sont amenés, 2°) celle des débits supérieurs aux limites du flot pendant la durée totale de la marée.

N.B. On pourrait simplifier en supprimant, dans cet énoncé, le mot "latéraux", et en faisant alors disparaître tout le cas pour tout ce qui débouche en 0 et 1, la durée du jusant n'est autre que la durée totale de la marée

28. *Remarques.* I. Nous avons supposé que la limite de la marée soit déterminée par un barrage. Néanmoins, la démonstration est générale et on la répéterait identiquement dans le cas d'une rivière librement ouverte à la marée.

II. Nous avons choisi une section située à l'aval de la section caractéristique K. Les équations s'appliquent aussi bien à une section située à l'amont de ce point. On le démontre sans peine en suivant la même méthode que dans le premier cas, mais en ne perdant pas de vue qu'à l'amont du point K les étales de flot ont lieu successivement d'amont en aval.

III. Les valeurs de Δq₀ sont, en général, difficiles à déterminer exactement. Elles se déduisent en partie de jaugeages directs, en partie de l'étude du régime des pluies et de celle des bassins hydrographiques. On admettra, le plus souvent, qu'entre deux affluents importants, ce débit supérieur latéral augmente comme une fonction continue, et même rectiligne, de la distance à l'origine. Dans ce cas on pourra introduire dans les formules (17) et (20) les valeurs moyennes des durées du flot et du jusant sur des longueurs plus ou moins grandes de rivière, ce qui constituera une simplification.

29. Si l'on applique les formules (17) et (20) successivement à deux sections x₁ et x₂, dont la seconde est située à l'amont

de la première, on trouve par différence:

$$F_{x_1} - F_{x_2} = - \sum_{x_2}^{x_1} [Et] + \sum_{x_2}^{x_1} (\Delta q_s \times f) \dots \dots \dots (21)$$

$$J_{x_1} - J_{x_2} = \sum_{x_2}^{x_1} [Et] + \sum_{x_2}^{x_1} (\Delta q_s \times j) + T \sum_{x_2}^{x_1} q_s \dots \dots \dots (22)$$

la particulière, si aucun affluent à marée ne débouche de la partie de rivière considérée, on peut écrire, pratiquement

de la première, on trouve par différence, et en tenant compte de la remarque III,

$$F_{x_1} - F_{x_2} = - \sum_{x_2}^{x_1} [Et] + f_m \times [\Delta q_s]_{x_2}^{x_1} \dots \dots (21) \text{ bis}$$

et

$$J_{x_1} - J_{x_2} = \sum_{x_2}^{x_1} [Et] + j_m \times [\Delta q_s]_{x_2}^{x_1} \dots \dots (22) \text{ bis}$$

f_m et j_m étant les durées moyennes respectives du flot et du jusant sur le tronçon de rivière compris entre les deux sections; Δq_s étant la différence entre les débits supérieurs de ces sections. L'énoncé de ces propositions s'indique de lui-même; il

va de soi que la somme $\sum [Et]$ s'étend aux affluents à marée

les sommations ~~$\sum [Et]$~~ *à l'amont de*

qui débouchent dans le tronçon de rivière considéré.

Les formules (21) et (22) peuvent aussi s'établir directement. On peut remarquer qu'en les additionnant membre à membre on obtient la vérification

$$F_{x_1} - F_{x_2} + J_{x_1} - J_{x_2} = T \times [\Delta q_s]_{x_2}^{x_1} \dots \dots (23)$$

relation qui est une conséquence immédiate de l'équation (18).

B. — Cas particuliers et Corollaires.

30. Lorsque le débit supérieur est nul (ou négligeable) à l'extrémité amont de la région maritime, nous savons (n° 19) que les lieux géométriques des étales présentent une forme plus simple que dans le cas général; il arrivera aussi que le débit supérieur latéral puisse être négligé. On peut établir directement les formules pour ces cas particuliers; on arriverait au même résultat qu'en supprimant dans les formules générales les termes qui sont fonctions des débits que l'on considère comme nuls.

Dès que le débit latéral peut être négligé

1°) le volume total amené par le flot est égal à la somme des volumes compris entre les lieux géométriques des étales à l'amont de la section considérée; le débit total de jusant est égal à la même quantité augmentée du débit supérieur à la limite du flot pendant toute la durée de la marée [équations (17) et (20)].

La différence entre les débits totaux de flot ou de jusant de deux sections quelconques est égale, en valeur absolue, au volume compris entre les lieux géométriques des étales dans le tronçon délimité par ces sections [équations (21) et (22)].

On observera que pour deux sections assez peu éloignées l'une de l'autre, on pourra presque toujours négliger le débit supérieur latéral sur la distance qui les sépare.

2° Si l'on considère une courbe instantanée quelconque, pendant la période comprise entre le moment où l'étales de flot a lieu à l'embouchure et celui où cet étales atteint la section K, les trois points d'intersection de cette courbe avec les lieux des étales déterminent, de part et d'autre de ces lieux, des volumes égaux.

Cette proposition découle de l'équation (d) du n° 25.

C'est ainsi que l'on aurait sur la fig. 5, (pl. I) :

$$\text{vol } ehl = \text{vol } IKLE''$$

et

$$\text{vol } e'h'l' = \text{vol } l'KLE'''.$$

Si les surfaces qui correspondent à ces volumes paraissent et sont, en réalité, très différentes, on ne perdra pas de vue que c'est à cause de la diminution des largeurs vers l'amont.

Cette propriété entraîne l'égalité des volumes compris entre deux courbes instantanées et limitées supérieurement au lieu géométrique des marées hautes, vers l'aval au lieu des étales de flot et vers l'amont à celui des étales de jusant ou à la partie LK du premier. Ce résultat se déduit aussi de l'équation (c).

Exemple (fig. 5) :

$$\text{vol } ehh'e' = \text{vol } hh'E''E''$$

et aussi :

$$\text{vol } ehl = \text{vol } l'e'h'E''E''.$$

3° Le débit total du flot en un point quelconque équivaut, en valeur absolue, au volume limité supérieurement par la courbe instantanée à l'étales de flot, inférieurement par le lieu géométrique des étales de jusant et éventuellement par la partie amont du lieu géométrique des étales de flot. Autrement dit, on aurait (fig. 5) :

$$F_x = - \text{vol } ehlE''E''.$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la précédente ou de l'addition, membre à membre, des équations (a) et (b).

N.B. Rien ne dit a priori qu'il ne puisse y avoir plus de 3 points d'intersection. (Voir, p. ex. planche II, les courbes de 1^h et de 3^h.); dans ce cas, ce sont les sommes algébriques des volumes de part et d'autre des lieux d'étales qui sont égales

jusant et on trouverait que son débit total est représenté par surface Ebe' . Comme les volumes d'eau qui passent au flot et au jusant sont nécessairement égaux, il en résulte que les lieux géométriques des deux étales se confondent avec le niveau moyen. C'est la démonstration que nous annonçons au n° 23.

Réciproquement, si les étales se produisent au niveau moyen, on en conclut que les volumes de l'onde, de part et d'autre de ce niveau moyen, sont égaux et que ces volumes ne diminuent pas.

32. La première propriété du n° 30 peut sembler, à première vue, ne pas être applicable au cas actuel, car le volume compris entre les lieux géométriques des étales est nul. En réalité, l'hypothèse que nous envisageons revient à admettre que l'onde accomplisse un parcours indéfini, sans obstacles. Dès lors, le volume total compris entre les lieux géométriques des étales, volume qui doit être équivalent à celui du flot ou du jusant, est représenté par l'expression déterminée $o \times \infty$. En fait, à mesure que les effets des résistances s'accroissent, les deux lieux géométriques doivent s'écarter insensiblement l'un de l'autre, pour aboutir aux formes que nous leur avons reconnues dans les rivières, et qui sont la conséquence de la diminution du volume de l'onde.

Les mêmes remarques sont applicables à la première partie de la deuxième proposition.

La première proposition, adaptée au cas présent, exprime en second lieu que la différence entre les débits totaux de deux sections transversales quelconques est nul, ce qui est bien le cas.

En tenant compte, enfin, de ce qu'il n'y a plus ici, à proprement parler, une limite de flot, les autres propriétés du n° 30 restent entièrement vraies pour l'onde-marée en mer.

33. Soit x une section quelconque (fig. du n° 31) dans laquelle la hauteur d'eau, comptée positivement au-dessus du niveau moyen, est représentée par ε . Appliquons l'équation (1) entre la section x et celle où se produit l'étale E à marée montante. Si l'on considère l'unité de largeur, cette équation devient

$$q_x = - \int_E^x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dx.$$

On peut y remplacer ~~dx par $-Vdt$~~ , V étant la vitesse de

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{ par } -V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

de la hauteur)
propagation, la même pour toutes les parties d'une onde qui ne se déforme pas. On trouve alors

$$q = \varepsilon V \dots \dots \dots (24)$$

Le débit n'est fonction que de la hauteur d'eau; il est indépendant de la position de la section. Il est négatif pour les hauteurs supérieures au niveau moyen, positif pour les autres; e marque donc bien un étale de flot et E un étale de jusant, comme nous l'avions implicitement admis aux n^{os} 31 et 32.

La vitesse est donnée par

v. s.
Comme la constante de V suppose ε négligeable devant H , on peut écrire pratiquement: $v = V \frac{\varepsilon}{H}$

$$v = V \frac{\varepsilon}{H \cdot \varepsilon} \dots \dots \dots (25)$$

H étant la profondeur d'eau sous le niveau moyen.

Les maximums positif et négatif du débit se produisent respectivement à marée basse et à marée haute, en même temps que les maximums de la vitesse.

Si a désigne l'amplitude, la loi de variation de ε en fonction du temps est

$$\varepsilon = \frac{a}{2} \sin \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (26)$$

en choisissant l'étale de jusant comme origine des temps.

Introduisons cette valeur de ε dans l'équation (24) et intégrons entre les limites 0 et $\frac{T}{2}$; nous trouvons comme expression du débit total

$$F = \frac{aVT}{2\pi} \dots \dots \dots (27)$$

Cette égalité peut aussi se déduire de la figure du n^o 31, en observant que eE est la moitié de la longueur de l'onde, et que cette longueur est évidemment égale au produit \sqrt{VT} .

§ 2. — Relations entre les lieux géométriques des étales et les déplacements horizontaux des molécules liquides pendant le flot et pendant le jusant.

34. Il serait fort difficile d'établir les équations des trajectoires réelles des molécules d'eau dans l'onde-marée. On peut montrer par des considérations ~~fort~~ simples que, pour l'onde régulière considérée aux numéros précédents, ces trajectoires sont des courbes fermées, analogues à des ellipses et symétriques par rapport à deux axes, dont l'un coïncide avec le

niveau moyen, l'autre est perpendiculaire à ce niveau et situé au point de la trajectoire où la vitesse est la plus grande. Toutefois ces considérations sortent du cadre de la présente étude.

A proprement parler, la vitesse n'est jamais nulle, mais sa projection horizontale peut l'être. Les diverses molécules d'une même section transversale peuvent aussi subir des déplacements très différents. Le déplacement horizontal moyen correspond à la moyenne $\frac{q}{\omega}$ des projections horizontales des vitesses. C'est le déplacement ainsi entendu que nous nous proposons d'examiner.

A. Onde-marée fluviale.

35. Les lieux géométriques des marées hautes, des marées basses et des étales étant représentés par les mêmes espèces de traits que précédemment, considérons une section A quelconque.

Au moment de l'étales de jusant E_1 , les molécules de cette section commencent à se déplacer vers l'amont; leur vitesse horizontale, croissante d'abord, décroît ensuite; leur déplacement moyen, d , est le même que si toutes ces molécules venaient s'arrêter dans une section B; où cet arrêt sera marqué par l'instant e_2 de l'étales de flot. La figure suppose qu'on se trouve à l'aval du point K; l'étales e_2 , au point B, est donc postérieur à l'étales e_1 au point A; soit yh le profil instantané à l'instant e_2 .

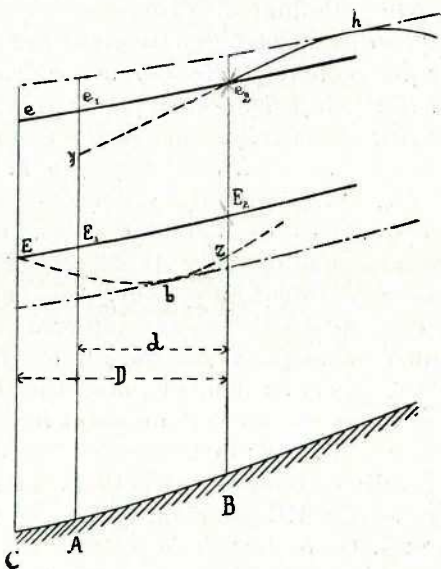


Fig 6.

Admettons d'abord que la rivière ne reçoive aucun affluent

dans le tronçon AB. Le volume figuré par ye_2BA est la différence entre le volume total amené par le flot dans la section A et la partie de ce volume évacuée par la même section entre les instants e_1 et e_2 . Or, ce dernier volume partiel est représenté par $e_1 e_2 \mathcal{V}$ (propriété 4 du n° 30).

Dès lors

$$\text{vol } ye_2BA = -F_A - \text{vol } e_1 e_2 \mathcal{V}$$

ou, encore,

$$\text{vol } e_1 e_2 BA = -F_A \dots \dots \dots (28)$$

La distance totale parcourue par les molécules d'eau pendant le flot est donc telle que le volume compris entre les sections extrêmes et limité inférieurement par le fond du lit, supérieurement par le lieu géométrique des étales de flot, est égal, en valeur absolue, au débit total de flot de la section de départ.

36. On trouve une deuxième relation du même genre en utilisant la 1^{re} propriété du n° 30, d'après laquelle

$$F_A - F_B = -\text{vol } e_1 e_2 E_2 E_1 \dots \dots \dots (29)$$

En éliminant F_A entre cette équation et la précédente, on obtient

$$\text{vol } E_1 E_2 BA = -F_B \dots \dots \dots (30)$$

On peut donc dire encore :

La distance totale parcourue par les molécules d'eau pendant le flot est telle que le volume compris entre les sections extrêmes et limité inférieurement par le fond du lit, supérieurement par le lieu géométrique des étales de jusant, est égal, en valeur absolue, au débit total de flot de la section d'arrivée.

37. Au jusant, les molécules qui quittent la section B, à l'instant e_2 de l'étale de flot, redescendent en moyenne jusqu'à une distance D de cette section. Soit C la section où elles s'arrêtent lorsqu'elles rencontrent l'étale de jusant E, c'est à dire à un instant antérieur à celui de l'étale E_2 . Le volume amené par la section B est représenté par $EbzBC$. Or, du temps e_2 au temps E, la section B amène dans le tronçon BC un volume d'eau égal au débit total qu'elle écoule pendant le jusant, diminué de la partie de ce débit qui correspond à l'intervalle de temps $(E_2 - E)$. Ce dernier volume partiel est représenté par EE_2zb , ainsi que nous l'avons fait remarquer au n° 25. On obtient donc

$$\text{vol } EE_2BC = J_B \dots \dots \dots (31)$$

et l'on trouverait aussi

$$\text{vol } ee_2BC = J_C \dots \dots \dots (32)$$

La distance totale parcourue par les molécules d'eau pendant le jusant est donc telle que le volume compris entre les sections extrêmes et limité inférieurement par le fond du lit, supérieurement par le lieu géométrique des étales de jusant est égal au débit total de jusant de la section de départ. Si l'on considère le volume limité supérieurement au lieu géométrique des étales de flot, ce volume est égal au débit total de jusant dans la section d'arrivée.

38. Il résulte immédiatement des deux propriétés précédentes que si le débit total du jusant est supérieur à celui du flot, pris en valeur absolue, le chemin parcouru pendant le jusant sera supérieur à celui parcouru pendant le flot. Pour qu'il en soit ainsi, il faut donc et il suffit qu'il existe un débit supérieur, comme l'indique l'équation (18) du n° 27. Ce résultat met en évidence l'effet utile du débit supérieur. Si celui-ci n'existe pas, les chemins parcourus dans les deux sens sont égaux. L'excès de D sur d s'obtient en observant qu'en vertu des équations (30) et (31) on a

$$\text{vol } \text{EE}_1\text{AC} = F_B + J_B = q_s \times T. \quad (35)$$

Soit ω' la section moyenne à l'étales de jusant sur la longueur AC; on peut poser

$$\text{vol } \text{EE}_1\text{AC} = (D - d) \omega'$$

et l'on obtient

$$D - d = \frac{q_s \times T}{\omega'} \quad (34)$$

Comme ω' croît en général beaucoup plus vite que q_s , lorsqu'on descend la rivière, on voit que la différence en question diminue dans la même direction.

Quant à la longueur du trajet parcouru dans chaque sens, elle dépend du rapport qui existe entre le débit total et les sections transversales rencontrées. Ce rapport augmente d'une manière générale lorsqu'on descend la rivière, mais cette règle peut présenter des exceptions locales

39. On aboutirait identiquement aux mêmes formules si l'on examinait le cas d'une section située à l'amont du point où l'étales de flot se produit à marée haute.

Nous ne pensons pas devoir insister sur les procédés graphiques qu'on peut employer pour déterminer les valeurs de D et de d , connaissant les débits totaux, les sections transversales et les hauteurs d'eau qui correspondent aux étales.

En ce qui concerne les temps employés au parcours de ces

distances, ils sont indiqués par les courbes instantanées qui coupent les lieux géométriques des étales dans les sections extrêmes.

40. Lorsqu'il existe des affluents sur le trajet des molécules, le problème se complique sensiblement. Il ne paraît pas comporter de solution générale se traduisant par une formule simple ; cependant il est possible de le résoudre avec une approximation satisfaisante.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il existe un affluent à marée vers le milieu du tronçon AB. Lorsque les molécules d'eau, parties de la section A à l'étale de jusant, arriveront à la bifurcation, il sera à peu près mi-marée montante en cet endroit. Les molécules se partageront entre les deux lits, d'après des conditions qui dépendent surtout des circonstances locales. On peut admettre que cette répartition sera proportionnelle aux débits totaux et que le moment où les molécules s'arrêteront dans chacun des deux lits sera à peu près le même. Dès lors, on peut opérer comme suit : supposant d'abord que toute l'eau entrée par la section A se loge dans le lit principal, on déterminera la distance d comme ci-dessus. Cette distance sera trop grande. On évaluera ensuite la partie du volume e_1, e_2 BA qui se trouve à l'amont de la bifurcation et on la partagera en deux fractions proportionnelles aux débits totaux respectifs de la rivière et de l'affluent à leur point de rencontre. Ces volumes partiels, portés sous les lieux géométriques correspondants des étales de flot, détermineront les extrémités des parcours, tant dans la rivière que dans l'affluent.

On ferait une répartition du même genre s'il y avait plusieurs affluents, en ayant soin d'opérer d'aval en amont.

Quant au débit supérieur latéral, il pourra, le plus souvent, être négligé dans le problème qui nous occupe. Il est possible, toutefois, d'en tenir compte approximativement.

Connaissant la distance parcourue pendant le flot, celle qui correspond au jusant s'obtiendra ensuite par l'équation (34), dans laquelle on prendra pour valeur de q , la somme des débits supérieurs des divers embranchements.

41. *En appliquant à l'Escaut maritime les principes qui précèdent, on trouve que l'eau de mer s'avance en moyenne dans le fleuve jusqu'à 14.4 kilomètres de l'embouchure. A Lillo, la distance parcourue pendant le flot est de 13.9 kilomètres. A Anvers, cette distance remonte à 16 kilomètres ; l'eau de flot*

refoulée à l'amont de ce point dépasse de 1 kilomètre l'embouchure du Rupel, où elle pénètre en partie. Enfin à Wetteren, point situé à 15 kilomètres à l'aval de Gand, le parcours en question se réduit à 2200 mètres. En redescendant au jusant, les molécules dépassent leur position initiale d'environ 6400 mètres à Wetteren, c'est à dire que le chemin décrit pendant le jusant est presque le quadruple de celui décrit pendant le flot; ce gain se réduit à 1 kilomètre à Anvers et à 700 mètres à Lillo; il n'atteint plus 100 mètres à l'embouchure du fleuve.

B. — Onde-marée en mer.

42. Nous nous limiterons comme précédemment au cas théorique de l'onde sinusoïdale indéformable, à laquelle nous pouvons appliquer,

avec les restrictions connues, tout ce qui vient d'être dit de l'onde-marée fluviale. Les chemins parcourus au flot et au jusant sont évidemment égaux (n° 38). Leur longueur d est déterminée par l'égalité

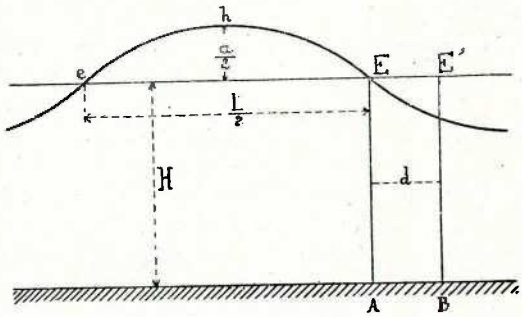


Fig. 7.

surf. $EE'BA = \text{surf. } ehE$, (voir n° 31)

ou, en tenant compte de l'équation (27),

$$Hd = -\frac{aVT}{2\pi}$$

On a donc

$$d = -\frac{aVT}{2\pi H} \dots \dots \dots (35)$$

La vitesse de propagation est sensiblement représentée par la formule

$$-v = \sqrt{gH} \dots \dots \dots (36)$$

formule d'autant plus exacte que a est plus petit vis à vis de H . Si l'on considère une même onde initiale se propageant

dans des mers de profondeurs différentes, l'onde conserve son volume et sa forme sinusoïdale, mais sa longueur et sa hauteur se modifient. La permanence du volume de l'onde s'exprime par

$$La = K = C^{te}$$

et, puisque $L = \sqrt{VT}$, cette condition, eu égard à l'équation (36), équivaut à

$$a \sqrt{H} = K' \dots \dots \dots (37)$$

Si l'on remplace, dans l'équation (35), V et a par leurs valeurs tirées respectivement des équations (36) et (37), on obtient

$$d = \frac{K'T \sqrt{g}}{2\pi H} \dots \dots \dots (38)$$

Exemple : pour l'onde de la Manche, on a, à peu près, $K' = 40$ (1).

D'autre part, $T = 12^h. 25^m. = 44700$ secondes. On peut donc écrire approximativement

$$d = \frac{900000^m}{H}$$

Pour une profondeur de 100 mètres, la distance parcourue serait d'environ 9 kilomètres; elle ne serait plus que de 900 mètres dans une mer profonde d'un millier de mètres.

Sur nos côtes, la constante K' paraît avoir une valeur comprise entre 25 et 30.

On remarquera que la vitesse de propagation et la longueur de l'onde sont proportionnelles à la racine carrée de la profondeur de la mer et inversement proportionnelles à l'amplitude, tandis que la vitesse moyenne du courant *(à peu près)* est inversement proportionnelle à la profondeur de la mer, donc proportionnelle au carré de l'amplitude.

(1) Voir Comoy, *Étude pratique sur les marées fluviales et notamment sur le mascaret*. Paris, Gauthier-Villars, 1881. — Cet auteur indique des valeurs de d beaucoup plus grandes que celles que nous trouvons ici; cela provient de ce qu'il a utilisé dans son calcul la vitesse du courant au sommet de l'onde, au lieu de considérer sa vitesse moyenne; le résultat est exagéré à peu près dans le rap-

$$\text{port } \frac{\pi}{2}$$

(2) Je dis : à peu près, parce que les parcours de flot et de jusant, quoique égaux, ne se font pas exactement dans le même temps. Il est aisé de voir que leurs durées respectives sont $\frac{T}{2} (1 + \frac{a}{\pi H})$ et $\frac{T}{2} (1 - \frac{a}{\pi H})$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

§ 1 — Étude du régime d'une rivière existante.

A. — Généralités.

43. On connaît le rôle important que jouent, dans l'étude du régime des rivières à marée, les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses. L'étude des lieux géométriques des étales nous paraît devoir conduire également à des résultats très utiles. Nous avons déjà eu l'occasion de montrer, par des exemples, comment on peut appliquer certaines de leurs propriétés. Nous ajouterons ici quelques considérations générales sur le même sujet.

Les causes qui amènent des modifications dans les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses doivent exercer des effets correspondants sur les lieux géométriques des étales.

Les marées de forte amplitude écartent les deux branches qui constituent ces lieux et font reculer vers l'amont le point où elles viennent se rejoindre, c'est-à-dire la limite du flot. Inversement, les grands débits supérieurs augmentent la distance entre la limite de la marée et celle du flot; ce dernier point recule vers l'aval. Les volumes compris entre les lieux géométriques des étales, donc les débits totaux du flot, augmentent dans le premier cas et diminuent dans le second. Tout barrage établi dans la région maritime fait descendre la limite de la marée et a, dès lors, pour effet de diminuer les débits dans les deux sens. Les diagrammes de propagation montrent que les durées du flot doivent être affectées dans le même sens que les amplitudes.

Les irrégularités que peuvent présenter les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses doivent également se manifester dans les lieux géométriques des étales. Un relèvement anormal de la marée haute, à l'aval d'un obstacle, entraîne une diminution de la durée du gagnant et de celle du flot; l'écart en hauteur entre la marée haute ou la marée basse

et l'étales de flot ou l'étales de jusant s'accroît. L'effet est inverse pour un abaissement brusque de la marée haute. Les irrégularités des lieux des étales et de ceux des marées hautes et des marées basses se produisent donc en quelque sorte dans des sens opposés. Ces irrégularités sont, d'ailleurs, moins perceptibles dans la région d'amont, où le lieu des étales de flot doit, de toute façon, venir rencontrer celui des marées hautes. Cette corrélation entre les anomalies des deux espèces de lieux géométriques apparaît assez clairement pour l'Escaut maritime, ainsi qu'on peut en juger par la planche II. On y remarquera la déféctuosité que présentent les lieux des étales à l'amont de Bath.

B. — Étude de marées déterminées.

44. Il va de soi que, pour une marée et un débit supérieur d'importance donnée, on ne peut déterminer exactement les lieux géométriques des étales qu'à condition de connaître les débits dans un grand nombre de sections, ce qui suppose qu'on ait fait des cubatures complètes et détaillées de la rivière et de ses affluents. En effet, les jaugeages directs ne peuvent donner de résultats quelque peu précis dans la région d'aval des rivières à marée; toutefois, dans la région d'amont, où les sections sont petites, ils permettent de déterminer les vitesses moyennes avec une exactitude suffisante.

45. Après avoir achevé une première étude complète de la rivière, pour un coefficient de marée et un débit supérieur donnés, on peut vouloir étudier des marées d'autres coefficients, combinées avec des débits supérieurs plus ou moins grands. On se contentera souvent de déterminer, pour un certain nombre de sections, les éléments les plus importants, c'est-à-dire les débits totaux de flot et de jusant et, par déduction, les débits moyens et les vitesses moyennes approximatives. Il faut observer, en effet, que la détermination de la loi de variation des débits et des vitesses en fonction du temps, pour un grand nombre de points, est un travail de très longue haleine.

Supposons que la première étude complète ait été faite pour une marée moyenne. La seule manière pratique de déterminer les débits totaux pour une série d'autres marées est la suivante : l'observation ayant fourni les cotes et les heures des marées

hautes et des marées basses, on se donnera les instants des étales dans chaque section, en se basant sur les valeurs de ces éléments, connus exactement pour la marée moyenne, et en les modifiant eu égard aux circonstances particulières dans lesquelles on se place. Ces modifications seront rarement très importantes, du moins pour les postes d'aval, de sorte qu'on pourra tracer avec une précision très suffisante les courbes instantanées du fleuve et de ses affluents pour les deux instants qui correspondent aux étales de flot et de jusant dans chacune des sections dont on se propose de déterminer le débit total. Il ne restera plus ensuite qu'à faire les cubatures des volumes compris entre les courbes instantanées, dans le fleuve et dans ses affluents.

Bien que notablement réduit, ce travail peut encore atteindre une grande importance, celle-ci étant d'ailleurs croissante avec le nombre de sections auxquelles il s'applique. On remarquera, en effet, que les courbes instantanées qui correspondent aux étales sont différentes, et conduisent dès lors à des cubatures spéciales, pour chacune des sections considérées.

Si, partant de la même hypothèse sur les heures et les hauteurs des étales en chaque point, on trace les lieux géométriques de ces étales, il suffira d'une seule cubature, faite entre ces lieux géométriques, pour déterminer les débits totaux de toutes les sections transversales ; on utilisera pour chacune d'elles les tableaux qui se rapportent à toute la région d'amont. Cette manière d'opérer conduira donc à une réduction considérable des tracés et des calculs.

Le procédé qui vient d'être décrit a été appliqué à l'Escaut maritime et à ses affluents. Il a permis de déterminer les débits totaux de plusieurs marées réelles, en un grand nombre de points (1).

C. — Détermination du débit supérieur.

46. Quelle que soit la méthode suivie pour déterminer, par cubatures, les débits de la partie maritime d'une rivière, ce problème suppose que les débits supérieurs sont connus. Pour les déterminer, on peut notamment faire des jaugeages directs dans les parties fluviales de la rivière et de ses affluents.

(1) Voir *Recueil de documents* précité.

Si ces opérations ne se font pas d'une manière continue, les éléments en question feront souvent défaut pour les jours où il serait le plus intéressant de les connaître. Nous allons montrer comment on peut utiliser le concours de la marée elle-même pour déterminer les débits supérieurs avec une assez grande exactitude.

47. Le procédé que nous avons en vue suppose la connaissance de deux éléments : les profils instantanés de la surface liquide et la situation de la limite du flot.

Sur la plupart des rivières à marée, les hauteurs d'eau sont observées à intervalles réguliers ou, mieux, enregistrées par des marégraphes, en un certain nombre de stations; il est donc possible de reproduire, à toute époque, la courbe instantanée des hauteurs d'eau qui correspond à un moment quelconque.

En ce qui concerne la situation de la limite du flot, il suffirait, pour la connaître, d'établir dans la région d'amont deux ou tout ou plus trois postes d'observation convenablement répartis, dans lesquels on noterait l'heure du renversement des courants à chaque marée. Ces instants pourraient s'obtenir avec une exactitude suffisante en observant les mouvements d'un ou de deux bâtons lestés et les observations ne devraient être faites qu'aux environs des heures prévues pour les étales. Les axes instantanés indiquant les hauteurs correspondantes, ces observations suffiraient pour tracer les parties supérieures des lieux géométriques des étales avec toute la précision désirable pour la détermination que nous voulons faire. (Rappelons ici l'utilité de telles observations pour la solution du problème examiné aux n^{os} 44 et 45)

48. Les lieux géométriques des marées hautes, des marées basses et des étales étant représentés (pl. I, fig. 6) de la même manière que nous l'avons fait jusqu'à présent, soient zKs la courbe instantanée à l'instant K , où l'étales se produit à marée haute, abm un autre axe hydraulique quelconque, mais correspondant à un instant t compris entre celui où l'étales de jusant se produit à l'embouchure et l'instant K . Opérons comme au n^o 25 et appliquons la formule (1) à la série des intervalles dt que comprend la période $(K-t)$, en prenant constamment comme section d'aval celle où l'axe hydraulique rencontre le lieu ELK , comme section d'amont la limite de la marée où le débit est q_0 . Si l'on suppose nul le débit latéral, on obtient

$$\text{vol } KsmbEL = \int_t^K q_0 dt \dots \dots \dots (39).$$

Il suffit de mesurer graphiquement le volume marqué par des hachures sur la fig. 6 pour connaître le débit supérieur amené pendant un temps connu. C'est un véritable jaugeage par empotement.

49. On ne peut plus résoudre le même problème lorsqu'il existe des affluents, soumis ou non à la marée, entre le point E et la limite du flot, car le volume $K_{smb}EL$ comprend alors la quantité d'eau amenée par les affluents, depuis l'instant t jusqu'à celui où l'étales de jusant se produit devant leurs embouchures respectives et, éventuellement, depuis l'étales de flot en ces points jusqu'à l'instant K. On introduirait donc une série d'inconnues dans l'équation précédente. En pratique, on pourra souvent s'affranchir de cette difficulté, puisqu'on dispose de la valeur de t dans d'assez larges limites et qu'on pourra toujours faire en sorte que l'étales E corresponde à un point assez rapproché de la limite du flot. En outre, à l'instant K on peut substituer tout autre instant compris entre t et K. Si un ou plusieurs affluents débouchaient dans la rivière entre la limite du flot et celle de la marée, il n'en résulterait, au contraire, aucune complication; le débit purement fluvial de ces affluents s'ajouterait au débit q_0 ; le volume mesuré donnerait la valeur du débit supérieur à la limite du flot.

On peut, comme à E. et, trouver dans l'équation (34) un autre moyen, de précision d'ailleurs relative, de résoudre le même problème. Bien entendu, il ne s'agit que de la valeur de (D-d) peut être mesurée avec une précision suffisante, donc aussi dans la région d'amont.

§ 2. — Étude de l'amélioration d'une rivière.

50. Lorsqu'on projette l'amélioration d'une rivière à marée, on peut prévoir assez exactement l'influence que doivent exercer les travaux d'amélioration sur les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses. Ces prévisions ne résultent pas directement de formules explicites, car de telles formules n'existent pas; on se guide d'après des considérations judicieuses, confirmées par les résultats de l'expérience. Pour déterminer ensuite les débits et les vitesses dans la rivière améliorée, il faut faire des cubatures, qui exigent la connaissance des profils instantanés après l'amélioration. On part de la courbe locale des hauteurs d'eau au point d'aval où l'influence des travaux cesse d'être sensible; on considère une série de fractions de l'amplitude, déjà déterminée, des postes d'amont et l'on calcule les heures auxquelles ces diverses phases se produiront dans la situation modifiée. A cet effet, on se sert de formules empiriques, admettant, par exemple, que les vitesses

de propagation soient proportionnelles aux racines carrées des profondeurs moyennes. Ces formules donnent des résultats d'autant plus exacts que le lit auquel on les applique est plus régulier.

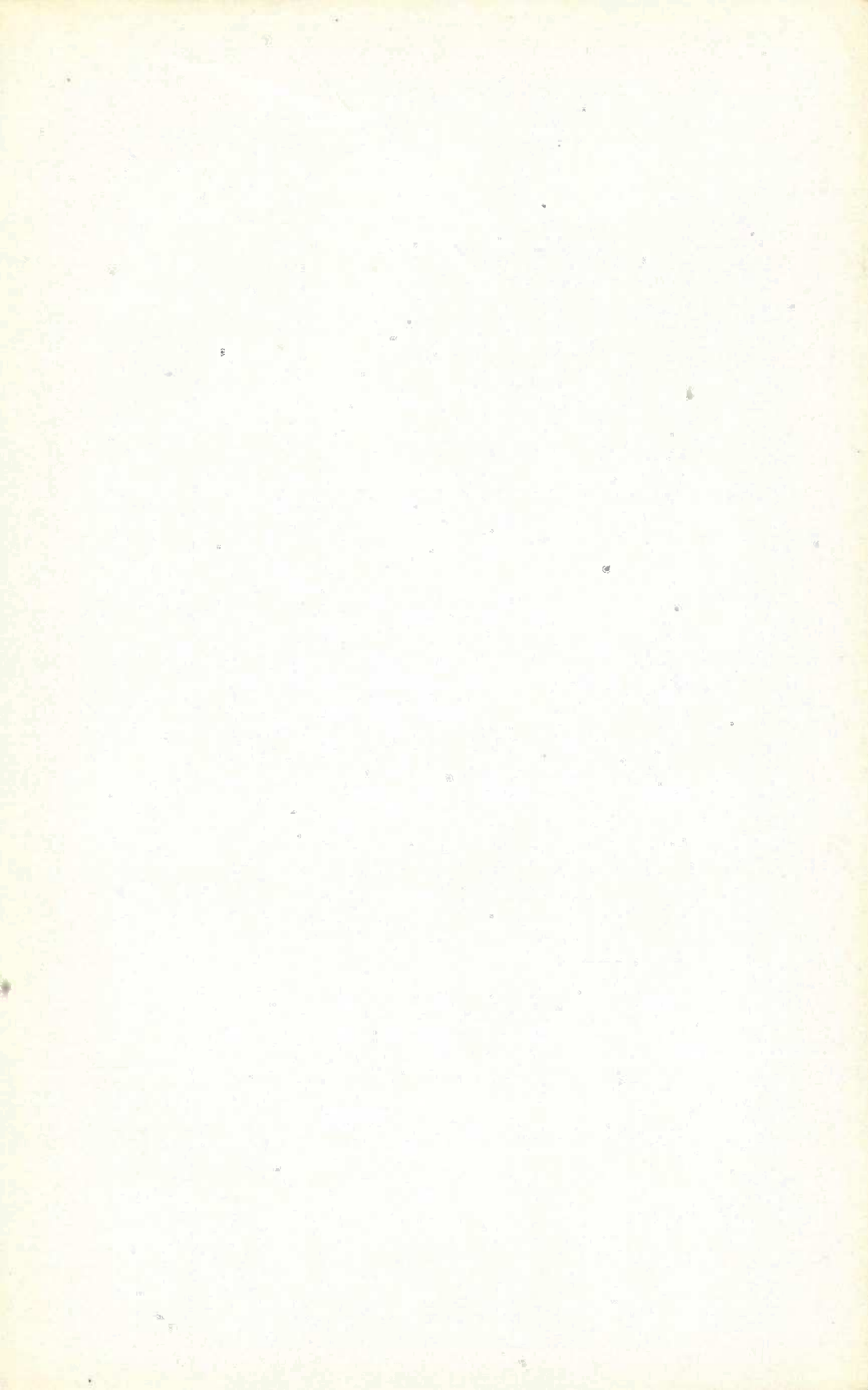
51. Si l'on en juge par les résultats trouvés pour l'Escaut maritime, et qu'indique la planche II, les irrégularités des lieux géométriques des étales sont plus sensibles que celles qui leur correspondent dans les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses. Il semble donc que les modifications à résulter des travaux puissent être déterminées pour les premiers plus nettement que pour les seconds. Si même ces prévisions ne sont qu'approximatives, elles présentent, en tous cas, le grand avantage de donner des indications immédiates sur l'importance des nouveaux débits totaux, ceux-ci pouvant se déduire de l'évaluation rapide des volumes compris entre les lieux des étales. Or, ce sont là les éléments les plus importants à connaître; on pourra en déduire très approximativement les vitesses moyennes, en utilisant les rapports qui existent entre les débits totaux, les durées du flot ou du jusant, les sections transversales et ces vitesses moyennes. Il conviendra de faire simultanément le tracé des nouveaux lieux géométriques des étales et de ceux des marées hautes et des marées basses, car les modifications à apporter à ces deux espèces de lignes doivent se correspondre. On remarquera aussi que les modifications apportées aux lieux géométriques des étales donnent des indications utiles sur les modifications correspondantes qui peuvent se produire dans les durées du flot; il sera d'ailleurs utile d'étudier également les modifications probables des diagrammes de propagation.

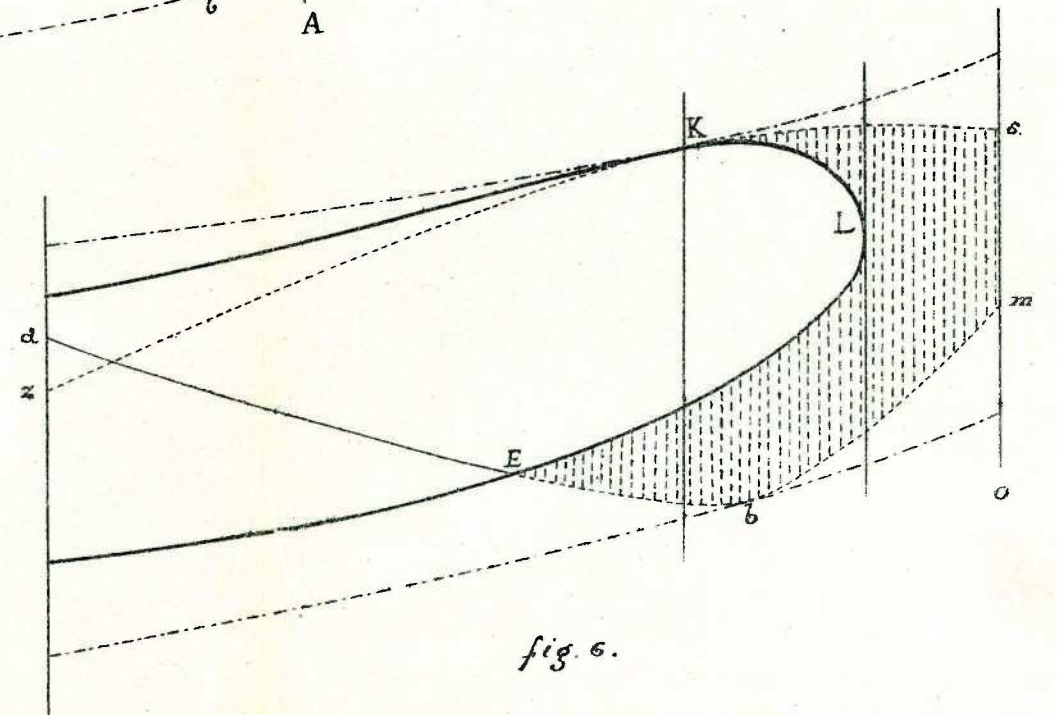
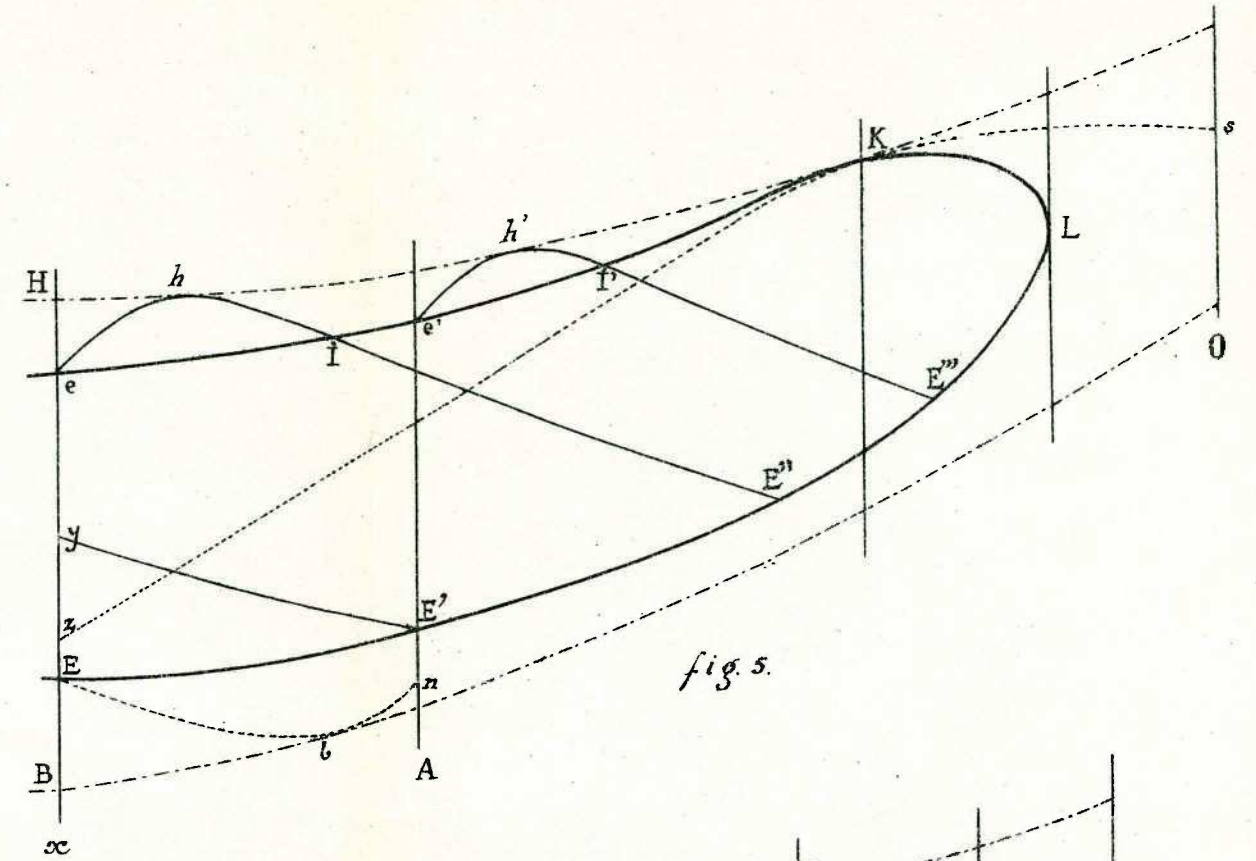
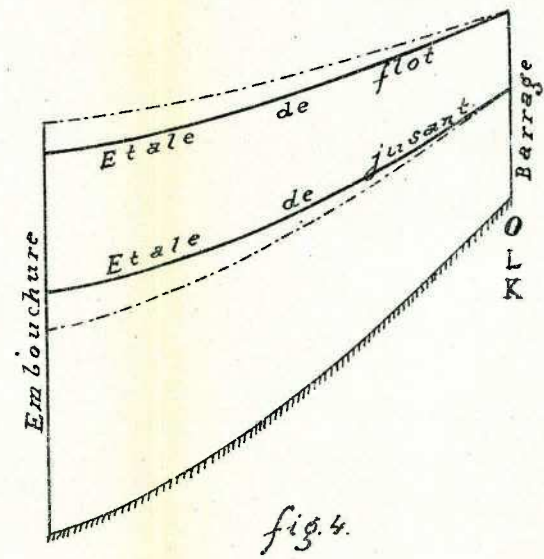
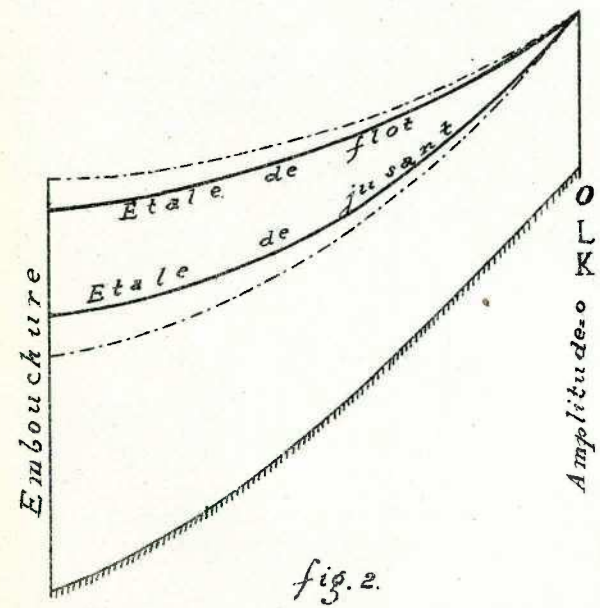
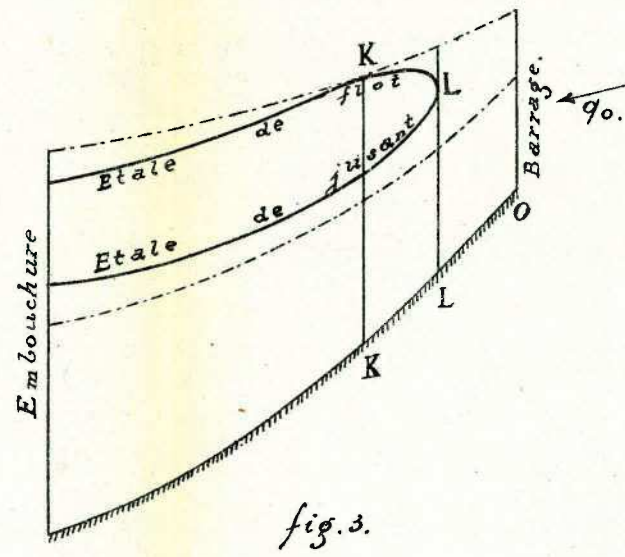
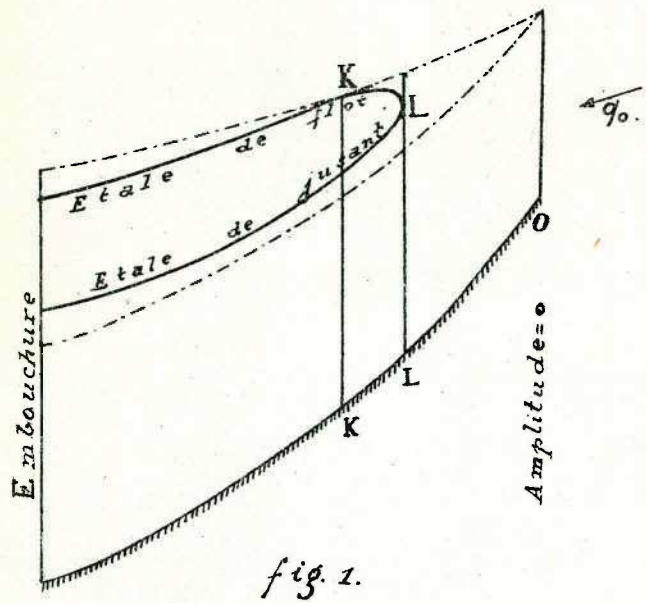
Les propriétés des lieux géométriques des étales montrent clairement que toute augmentation ou toute diminution du débit total, en un point quelconque d'une rivière à marée, entraîne des modifications du même sens dans les débits totaux des points situés à l'aval du premier. La nature des travaux, intervient toutefois ^{laçon} et exerce ^{pour} ^{une} influence sur la grandeur du volume ^{ainsi que} compris entre les lieux géométriques des étales. ~~Supposons, par exemple, qu'on supprime un barrage établi dans la région maritime; le flot portera plus loin qu'auparavant et les débits totaux de toutes les sections transversales augmenteront. Si, en outre, on régularise ces sections, de manière à supprimer les obstacles à la propagation de l'onde marée, les~~

ainsi que sur les rapports de ces volumes aux capacités correspondantes comprises entre les lieux géométriques des marées basses et des marées hautes.

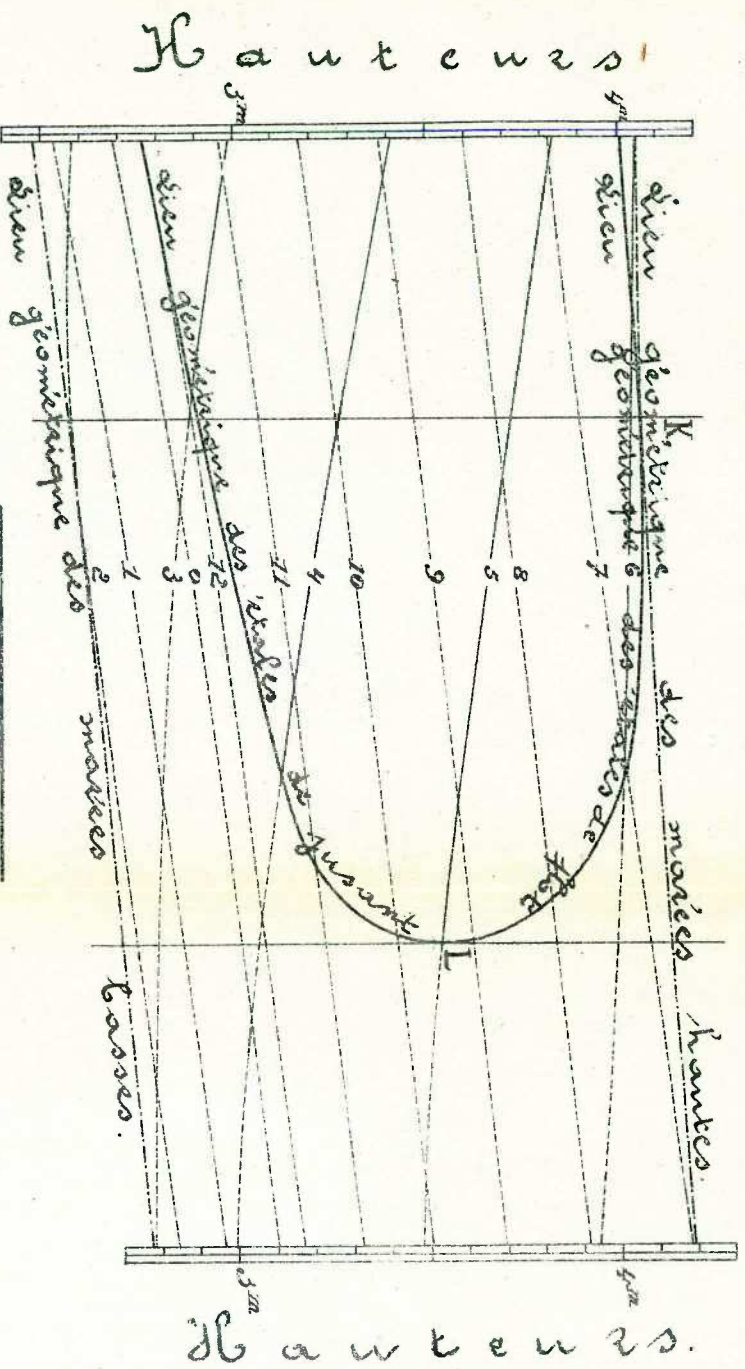
~~débites recevront un nouvel accroissement. On voit ainsi que l'effet d'ensemble des travaux qui favorisent la propagation de l'onde marée paraît être de rapprocher les étales de flot des marées hautes et les étales de jusant des marées basses. Le flot tend à se confondre avec le gagnant et le jusant avec le perdant ; le volume compris entre les lieux géométriques des étales se rapproche de sa limite théorique, c'est-à-dire du volume compris entre les lieux géométriques des marées hautes et des marées basses.~~

Anvers, 1904-1907.

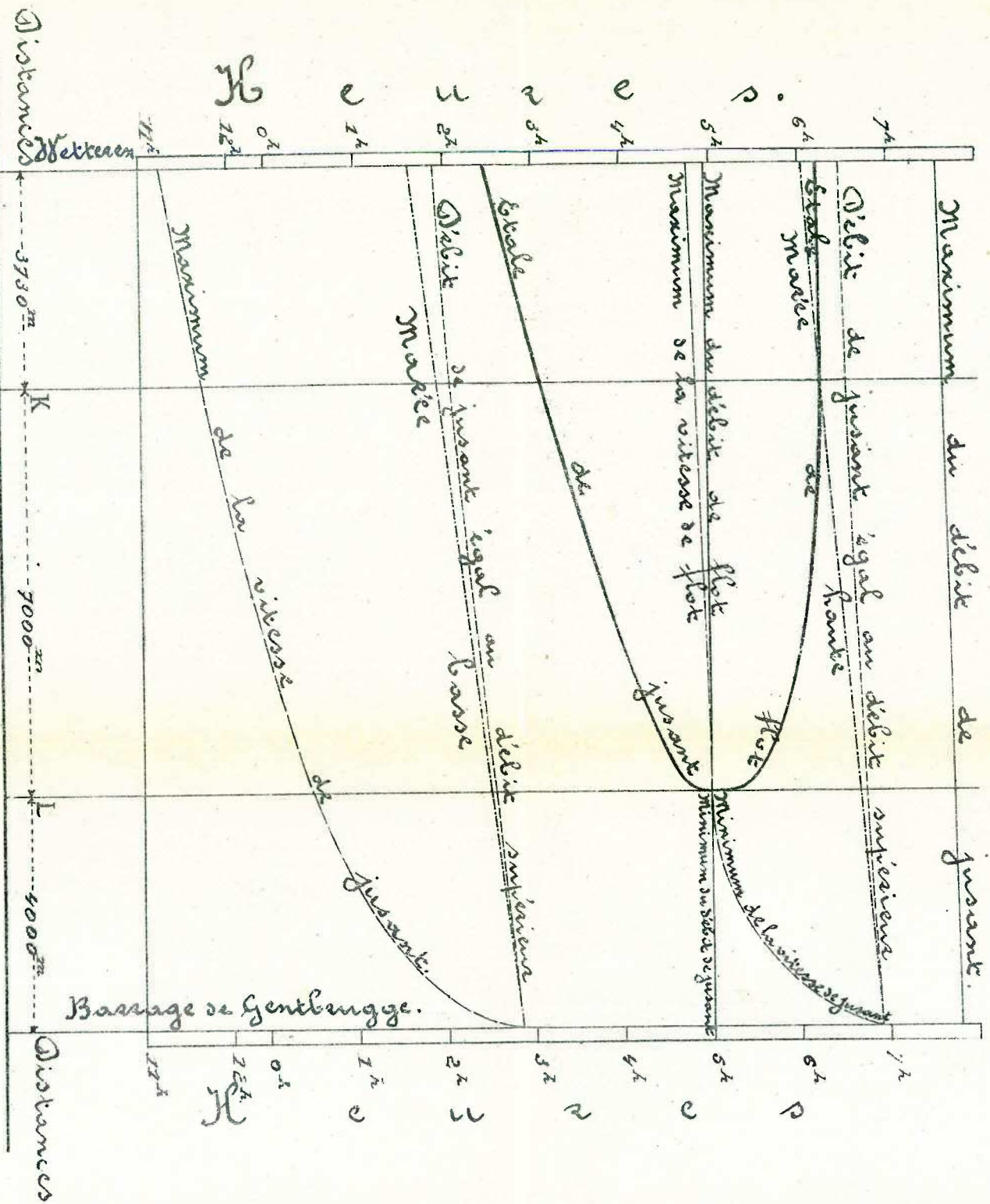






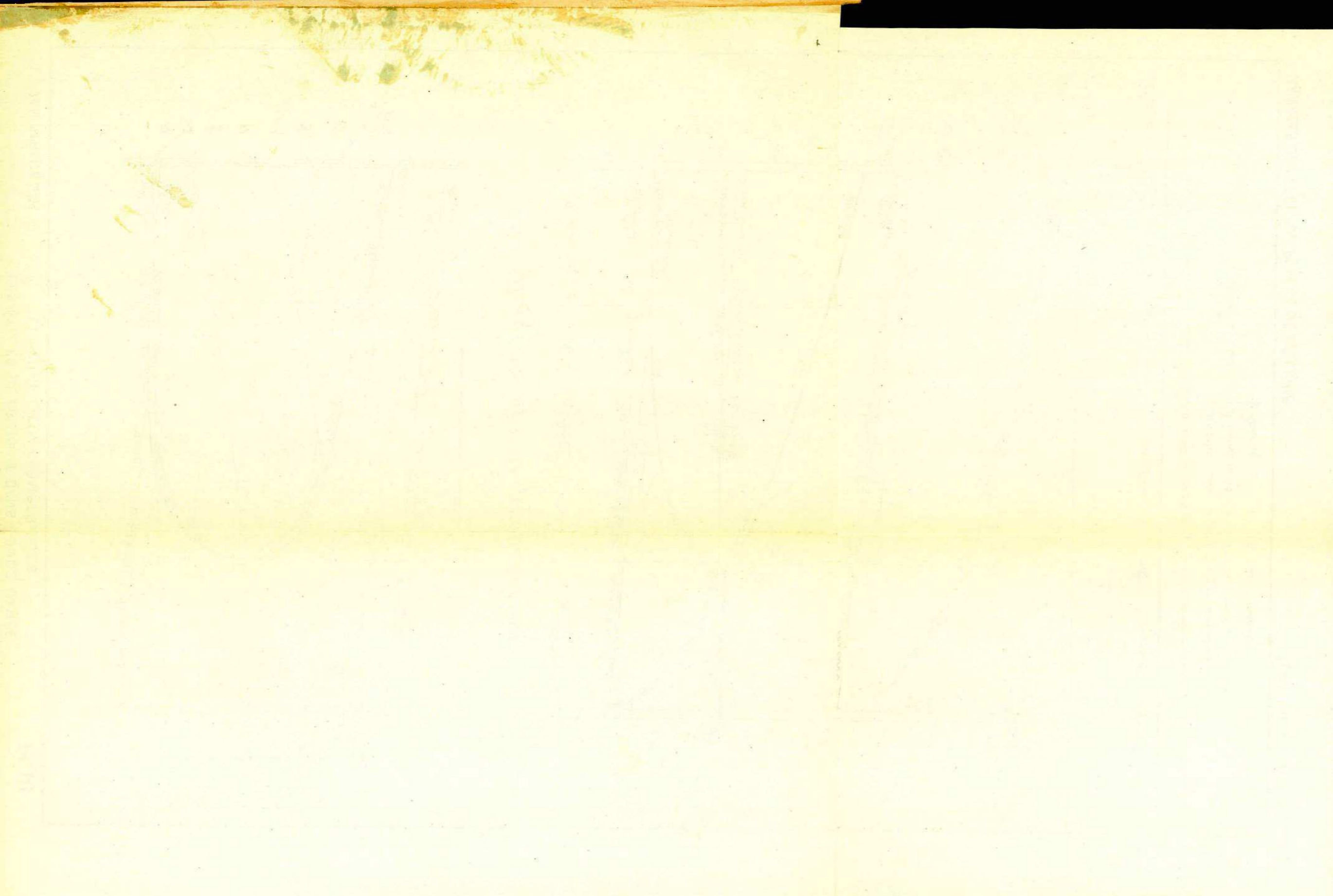


Diagrammes de propagation.



N. 33. d'origine des heures est l'instant de la marée haute à Bressingham.

Échelles
Distances : 0^m 01 par kilomètre.
Hauteurs : 0^m 05 par mètre.
Temps : 0^m 015 par heure.



Escaut maritime.

Profils instantanés et lieux géométriques des étales.

Echelles { Distances: 0^m002 par kilomètre.
Hauteurs: 0^m05 par mètre.

N.B. L'origine des heures est l'instant de la marée haute à Messines.
Le plan de comparaison est le zéro du Dépôt de la Guesse.
Les profils instantanés sont tracés en traits pleins pour les zones de flot, en traits interrompus pour les zones de jusant.

