

MATHEMATISCHE MODELLERING VAN MEANDERENDE WATERLOPEN

ir. G. DE MUYNCK
Universiteit Gent
Laboratorium voor Hydrologie en
Waterbeheer
ir. D. VAN ERDEGHEM
Ingenieursbureau Soresma n.v.
Dr. ir. P. TROCH
Universiteit Gent
Laboratorium voor Hydrologie en
Waterbeheer

MATHEMATICAL MODELLING OF MEANDERING RIVERS

Many mathematical models that describe meandering rivers can be found in literature (CHANG et al. (1984), ODGAARD (1986), SMITH (1984). These models however have no predictive power, i.e. they cannot be used to predict the dimensions of a developing meander. In this paper we present a simulation model to estimate characteristic parameters of meandering river systems. By means

of these parameters, geomorphologic characteristics of a meander can be predicted. It should be noted that this study is focused towards the prediction of a stable meander, meaning that the meander will not expose significant morphological changes. The model also allows the calculation of sediment transport in the meandering river.

1. INLEIDING

In het kader van de landinrichting in het algemeen en het rivierherstel in het bijzonder is er een groeiende belangstelling ontstaan voor het behoud van meanderende waterlopen en het hermeanderen van rechtgetrokken waterlopen. Een meanderende waterloop is een waterloop die zich min of meer bochtig door het landschap slingert. Men is dus niet enkel geïnteresseerd in een zuiver mathematische beschrijving van een meanderende rivier, maar tevens in modellen waarmee men toekomstige meanderdimensies kan voorspellen. In deze bijdrage ontwikkelen we een voorspellend model voor stabiele meanders. Hierin wordt aangetoond dat aan de hand van een reeks gekende parameters van de rechte waterloop, de dimensies kunnen berekend worden van de eventueel aan te leggen meanders. Hierbij dient wel benadrukt te worden dat de bekomen resultaten een zuiver repetitief meanderbeeld zullen opleveren, wat in de praktijk zeker niet gewenst is. De gevonden resultaten dienen dan ook meer als aanwijzing omtrent de afmetingen en vorm van de aan te leggen bochten of beter, als een soort gemiddelde waar rond de werkelijke afmetingen zullen schommelen. In de praktijk zullen de dimensies in de meeste gevallen toch aangepast moeten worden aan onder andere natuurlijke hindernissen en bestaande kunstwerken.

2. DEFINITIES

Alvorens het model toe te lichten is het nodig veel terugkerende benamingen kort te

beschrijven. In figuur 1 zijn de meest gebruikte termen aangegeven.

Als ruwe benadering voor de vorm van een meander kan men een sinusfunctie aannemen. Onder sinuositeit verstaat men de verhouding tussen de werkelijke rivierlengte en de valleilengte of met andere woorden tussen de booglengte van een volledige periode en de meanderlengte (golflengte). De sinuositeit is een goede parameter om het meanderend karakter van een rivier te karakteriseren. Men kan de meandervorm benaderen door een kromme rond een reeks cirkels. Liggen de middelpunten van die cirkels op een rechte dan is de sinuositeit gelijk aan de omtrek van een cirkel ($\pi \cdot d$) gedeeld door de 'golflengte' ($2 \cdot d$) wat gelijk is aan $\pi/2$ of 1,57. In sommige

gevallen spreekt men pas van een meanderende waterloop als de sinuositeit groter is dan 1,5 (BOUWKNEGT EN GELOK, 1992a). Bij gebrek aan uniformiteit in de geraadpleegde literatuur wordt hier voor de benaming 'meander' geopteerd.

De hoek $2\theta_0$ tussen de twee loodlijnen op de raaklijnen in twee opeenvolgende kruisingen wordt de booghoek genoemd. De waarde van deze hoek kan nuttig gebruikt worden als men een schets van het meanderpatroon wenst te maken.

3. HET WISKUNDIG MODEL

Voor het opstellen van het model werd uitgegaan van de volgende basisgegevens:

- bestaande afmetingen van de dwarssekties;

Fig. 1: Belangrijkste definities in verband met meanders.

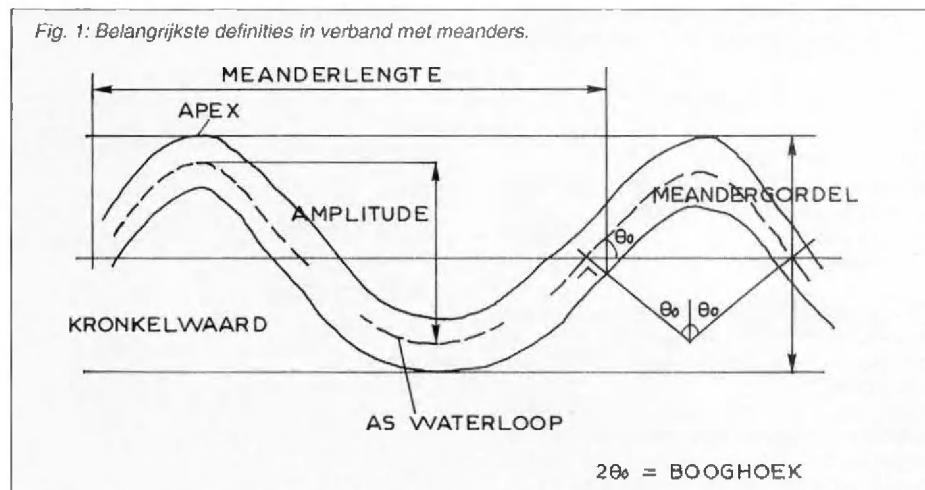
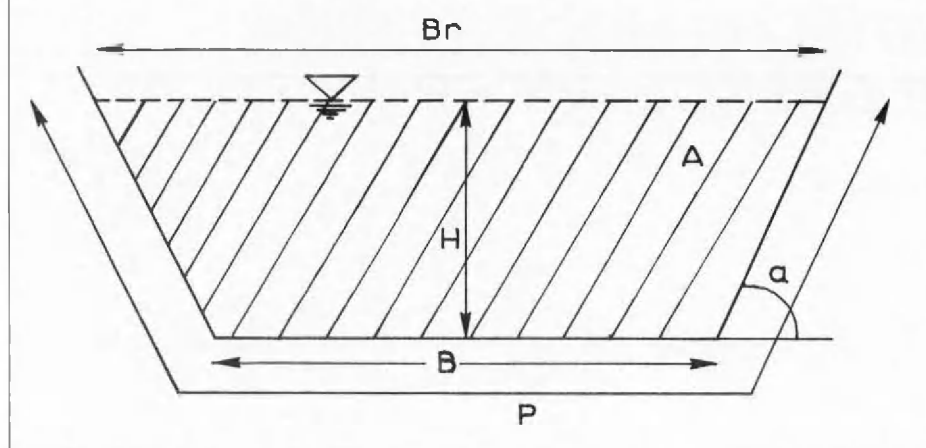


Fig. 2: Schematische voorstelling van de dwarssectie van een waterloop.



- bestaand bodemverhang (van de rechte waterloop);
- huidige + toekomstige afvoeren in functie van bepaalde retourperioden;
- D_{50} : gemiddelde korreldiameter van het bodemmateriaal.

In volgende onderdelen zal in grote lijnen de opbouw van het model en de gebruikte formules verduidelijkt worden.

3.1. Berekening van de waterhoogte bij eenparige stroming

We veronderstellen dat in de waterloop eenparige stroming heerst en dat dus $S_0 = S_f$.

Er wordt uitgegaan van de formule van Manning:

$$U = \frac{1}{n} \cdot R^{2/3} \cdot S_f^{1/2} \quad (1)$$

met
 U = gemiddelde stroomsnelheid [m/s]
 n = Manning-n [$s \cdot m^{-1/3}$]
 R = hydraulische straal [m]
 S_f = wrijvingsverhang [-]
 S_0 = bodemverhang [-]

Door linker en rechter lid te vermenigvuldigen met de oppervlakte van de natte sectie en R te vervangen door A/P bekomt men:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \cdot S_f^{1/2} \quad (2)$$

met
 Q = debiet van de waterloop [m^3/s]
 A = oppervlakte van de natte sectie [m^2]
 P = natte omtrek [m]

Ter verduidelijking worden in figuur 2 de gebruikte grootheden in verband met de dwarsdoorsnede van de rivier schematisch voorgesteld.

Indien we niet beschikken over gemeten waarden van de hoogte van eenparige beweging h dan zijn we genooddaakt om via iteratie deze te bepalen. Daar men uit de

kennis van het debiet en de waterhoogte in staat is om de gemiddelde stroomsnelheid U te bepalen, kan men door middel van de formule van Darcy-Weisbach de friktiefactor f berekenen. De waarden van deze friktiefactor hebben we nodig om bepaalde formules te kunnen toepassen zoals verder zal blijken.

$$S_f = \frac{f \cdot U^2}{D \cdot 2 \cdot g} \quad \text{met } D = 4R \text{ voor open kanalen} \quad (3)$$

$$\text{waaruit volgt dat: } f = \frac{8 \cdot g \cdot R \cdot S_0}{U^2} \quad (4)$$

3.2. Berekening van de meandervorm en zijn afmetingen

Algemeen kan gesteld worden dat een meander kan beschreven worden door een schaalparameter (b.v. de booglengte) en een vormparameter (b.v. de booghoek).

Uit waarnemingen en mathematische beschrijvingen van bestaande meanders konden LANGBEIN en LEOPOLD (1966) besluiten dat de meandervorm algemeen kan voorgesteld worden door een sinusgegeneerde curve. Deze curve wordt als volgt beschreven:

$$\theta = \theta_0 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot s}{M} \quad (5a)$$

$$\frac{1}{r_c} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_c} \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot s}{M} \quad (5b)$$

$$\text{met } \frac{1}{R_c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \theta_0}{M} \quad (5c)$$

met
 θ_0 = de helft van de booghoek [-]
 θ = hoek tussen de raaklijn aan de curve en de horizontale [-]
 s = afstand gemeten vanaf een bepaald gekozen referentiepoint [m]
 M = booglengte, totale lengte van 1 periode gemeten langs de middellijn van de waterloop [m]
 r_c = kromtestraal aan de curve behorend bij bepaalde waarde van θ [m]
 R_c = kromtestraal aan de curve behorend bij θ_0 [m]

De curve kan men konstrueren door s systematisch met eindige stapjes ds te laten toenemen en daarbij telkens θ te berekenen. De elementaire toename van s wordt hierbij als een recht lijnstuk getekend dat een hoek maakt met de horizontale van θ graden.

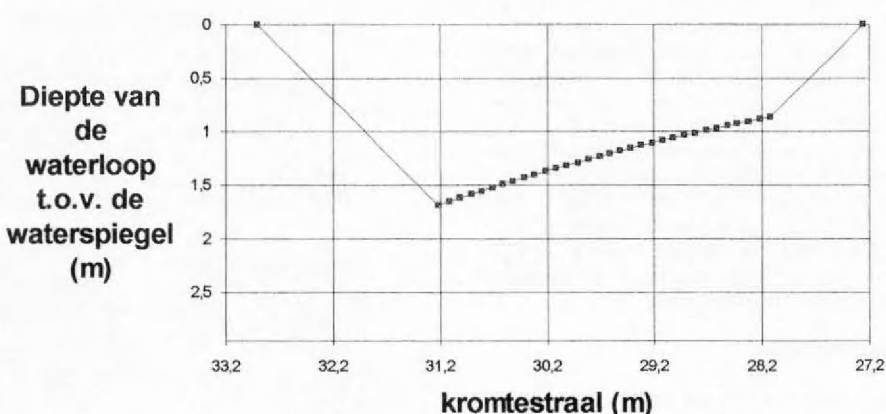
Bij de beschrijving van bestaande meanderpatronen beschikt men over waargenomen waarden van de booglengte M en de hoek θ_0 . Dit is bij het a priori beschrijven van een aan te leggen meander niet het geval. Daarom werd gezocht naar formules waaruit men de onbekenden kon afleiden.

Volgens LANGBEIN en LEOPOLD (1966) werd proefondervindelijk vastgesteld dat men in de meeste gevallen kan schrijven:

$$\theta_0 = 2.2 \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda}{M}} \quad (6)$$

Hierin komt een nieuwe onbekende voor, namelijk de golflengte λ zodat bijkomende vergelijkingen nodig zijn. Uit een nomogram van CHANG (1984) kan men afleiden dat er een vast verband bestaat tussen

Fig. 3: Voorstelling van het maximaal bodemdwarsverhang voorbij de apex van de bocht.



enerzijds de verhouding M/h en anderzijds de friktiefactor f van Darcy - Weisbach. Voor de diskrete waarden van M/h met de overeenkomstige f -waarden werd het mathematisch verband tussen beide grootheden vastgelegd door middel van niet lineaire regressie. Dit leverde het volgende verband tussen beide met een R^2 -waarde van 99,9%:

$$\frac{M}{h} = 50,73 \cdot f^{0,4513} \quad (7)$$

Door IKEDA et al. (1981) werd proefondervindelijk een verband opgesteld tussen λ enerzijds en f , b en h anderzijds:

$$\frac{\lambda}{h} = 8 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot b}{f \cdot h}} \quad (8)$$

Als men vergelijking 6, 7 en 8 bekijkt zien we dat er 3 onbekenden zijn, namelijk λ , θ_0 en M . Dit stelsel van drie vergelijkingen kan numerisch worden opgelost. De waarden van b , h en f zijn bekend. De verhouding λ/h is bijgevolg gekend uit vergelijking 8. Uit vergelijking 7 kan men M/h berekenen. Uit de kennis van λ/h en M/h kan men h elimineren zodat λ/M gekend is. Substitueert men dan deze waarde in vergelijking 6 dan bekomt men θ_0 .

3.3. Bodemdwaarsverhang in functie van de plaats langs de meander

Ten gevolge van de stroming in bochten vertoont het bodemprofiel een verhang dwars op de stroomrichting en wel zo dat de binnenbocht aangezand wordt terwijl de buitenbocht weggeërodeerd wordt. De hier gebruikte methode om het ontstane dwarsverhang mathematisch te benaderen wordt beschreven in ODGAARD (1981). Figuur 3 toont het berekende dwarsprofiel net voorbij de apex van de bocht (plaats met kleinste kromtestraal). Op de x-as van de grafiek vindt men de kromtestraal van de stroomlijnen in de beschouwde sectie terwijl de y-as de eigenlijke diepte van de waterloop weergeeft t.o.v. de waterspiegel. Er dient wel opgemerkt te worden dat de plaats met het grootste bodemverhang gelegen is voorbij de plaats met kleinste kromtestraal in de richting van de stroming. Men spreekt over een defasering tussen enerzijds de rivierbedding en anderzijds de waterstroom.

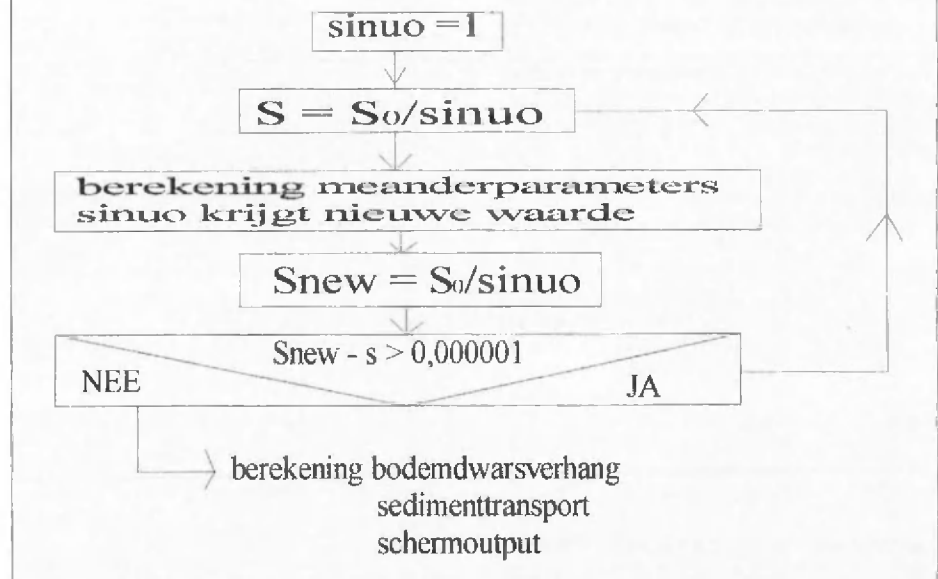
3.4. Sedimenttransport

Voor het inschatten van het sedimenttransport in een meanderende waterloop zijn de formules van Engelund-Hansen (1967) en van Ackers-White (1973) het best geschikt gebleken. De formules worden hier niet expliciet aangehaald daar ze toch letterlijk toegepast werden. Het model houdt rekening met beide formules en geeft het sedimenttransport weer in m^3/s voor de beschouwde waterloop.

4. EVALUATIE VAN HET MATHEMATISCH MODEL EN TOEPASSING

Om het model toe te passen is het noodzakelijk om over voldoende afvoergegevens

Fig. 4: Flow-chart van het computerprogramma.



te beschikken. De berekeningen steunen namelijk op het 'maatgevend debiet'. Volgens BOUWKNEGT et al. (1992b) hebben de frekwent voorkomende lage afvoeren weinig invloed op de meandergeometrie maar veeleer op het sedimenttransport. De minder frekwent voorkomende hoge afvoeren daarentegen bepalen in grote mate de meandervorm. Het maatgevend debiet kan geschat worden tussen de afvoer die éénmaal per jaar voorkomt en de gemiddelde afvoer. Een betere schatting van het maatgevend debiet is onderwerp van verdere studie.

Figuur 4 toont een flow chart waarin het berekeningsprincipe van het mathematisch model wordt geïllustreerd. Het eigenlijke verloop van het programma is enigszins complex en wel om volgende reden: als men de meanderparameters begint te berekenen start men vanuit een recht kanaal met bodemverhang S_0 . Maar na het berekenen bekomt men een meanderende waterloop waarvan de bodemhelling gewijzigd is. Het is dus duidelijk dat men ook hier noodzaak zal zijn om op iteratieve wijze de berekeningen uit te voeren.

Men vertrekt dus met een rechte waterloop met sinuïteit gelijk aan 1 ($\sinuo = 1$). Vervolgens berekent men de bodemhelling, waarmee men in het programma gaat rekenen, als zijnde het quotiënt van S_0 en de sinuïteit. Na het berekenen van de meanderparameters bekomt men een nieuwe waarde voor de sinuïteit, waarmee men een nieuwe bodemhelling berekent (S_{new}). Men vergelijkt nu de nieuwe bodemhelling S_{new} met S . Als het verschil groter is dan een bepaalde gekozen drempelwaarde, dan begint men opnieuw met de berekening van S (nu met een andere waarde voor de sinuïteit). In het andere geval wordt het bodemdwaarsverhang en het sedimenttransport berekend waarna de schermoutput gegeven wordt. Deze schermoutput bestaat voor het grootste deel uit cijfermatig materiaal waarmee men bij machte is

om het meanderpatroon met bijhorende afmetingen te schetsen. Het programma zelf is in staat om een schets te genereren.

Het computerprogramma werd geschreven met de bedoeling om de toekomstige meandering van een deel van de Lossing (Opwinkel) te beschrijven. Om het programma op zijn geldigheid te testen liet men de meanderdimensies berekenen van een gekende meanderende waterloop (de Aa) uitgaande van de gedachte als zou de waterloop initieel recht zijn. Daartoe werd het gemeten wrijvingsverhang van de kronkelende waterloop omgerekend naar dat van een rechte waterloop met zelfde begin- en eindreferentie om als input te kunnen dienen. De belangrijkste gemeten inputs van de controle-waterloop zijn:

$$\begin{aligned} Q &= 1,1 \text{ m}^3/\text{s} \\ M &= 90 \text{ m} \\ \lambda &= 60 \text{ m} \\ b &= 3,6 \text{ m} \\ a &= 90^\circ \\ S_0 &= 0,00082 \end{aligned}$$

Zoals reeds aangehaald is het moeilijk te achterhalen welk debiet maatgevend is voor het ontstaan van het meanderpatroon. Voor het controlevoorbeeld was het gemiddeld debiet $0,75 \text{ m}^3/\text{s}$ terwijl het debiet met een retourperiode van 1 jaar $4,01 \text{ m}^3/\text{s}$ was. Door verschillende simulaties uit te voeren met telkens een ander debiet kon besloten worden dat $Q = 1,1 \text{ m}^3/\text{s}$ de beste correlatie leverde tussen het programma en de werkelijkheid. Om voor een willekeurige waterloop de te gebruiken maatgevende afvoer te kennen zou het noodzakelijk zijn om het programma voor verschillende bestaande meanderende waterlopen te ijken.

De belangrijkste outputvariabelen zijn:

$$\begin{aligned} M &= 92,4 \text{ m} \\ \lambda &= 60 \text{ m} \end{aligned}$$

sinuositeit = 1,4

Hieruit blijkt dat voor de beschouwde waterloop er een goede overeenkomst is tussen de gemeten en de berekende waarden.

De meest relevante resultaten van de toepassing van het programma voor de hermeandering van de Lossing worden hieronder opgesomd:

Input: $Q = 2\text{ m}^3/\text{s}$
 $b = 3\text{ m}$
 $a = 45^\circ$
 $S_0 = 0,00025$
 $D_{50} = 0,000131\text{ m}$ (gebruikt bij ODGAARD (1981) en de formules van Engeland-Hansen (1967)).

Output: $h = 1,34\text{ m}$
 $M = 199\text{ m}$
 $\lambda = 129\text{ m}$
Sinuositeit = 1,55

Aan de hand van deze gegevens is men in staat om de huidige rechte waterloop aan te passen tot een kronkelende waterloop en wel zodanig dat de aangelegde vorm ook min of meer de natuurlijke vorm zou benaderen (deze natuurlijke vorm zou slechts bereikt worden na lange tijd).

5. GEVOELIGHEIDSANALYSE VAN HET PROGRAMMA

Om enkele algemeen geldende tendenzen in het meanderpatroon aan te tonen werd het programma onderworpen aan verschillende loops met telkens andere randvoorwaarden. Uit de berekende grafieken kunnen we het volgende besluiten:

- bij konstante taludhelling en bodembreedte neemt zowel de meanderbooglangte als de sinuositeit toe met stijgend debiet en met afnemende longitudinale bodemhelling;
- bij konstante taludhelling en longitudinale bodemhelling neemt zowel de meanderbooglangte als de sinuositeit af met stijgende breedte en dalend debiet;
- bij konstante bodembreedte en longitudinale bodemhelling neemt zowel de meanderbooglangte als de sinuositeit toe met groter wordende taludhelling en groter wordend debiet.

6. BESLUIT

Het hier ontwikkelde model met bijhorend komputerprogramma biedt een oplossing voor de dimensionering van stabiele meanders. Hierbij werd uitgegaan van enkele gemakkelijk meetbare parameters zoals: afmetingen van de dwarssectie, het bodemverhang, het debiet en de gemiddelde korrel diameter van het bodemmateriaal. Het model laat een repetitief beeld van de meander zien wat eigenlijk vrij kunstmatig

LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN

S_0	: bodemverhang	[-]
S_f	: wrijvingsverhang	[-]
U	: gemiddelde watersnelheid	[m/s]
n	: Manning-n	[s.m ^{-1/3}]
R	: hydraulische straal	[m]
A	: oppervlakte van de natte sectie	[m ²]
P	: natte omtrek	[m]
b	: breedte van de rivier op de bodem	[m]
h	: waterhoogte	[m]
a	: hoek tussen talud en horizontale	[°]
Br	: breedte van de waterspiegel	[m]
θ	: hoek tussen raaklijn aan de curve en de horizontale	[°]
θ_0	: halve booghoek	[°]
$2\theta_0$	: booghoek	[°]
M	: booglangte	[m]
s	: afstand gemeten langs de middeellijn van de waterloop	[m]
λ	: golf lengte	[m]
R^2	: determinatiecoëfficiënt	[-]
D_{50}	: gemiddelde korreldiameter	[μm]
Q	: debiet van de waterloop	[m ³ /s]
f	: friktiefactor van Darcy-Weisbach	[-]
g	: zwaartekrachtskonstante	[m/s ²]
r_c	: kromtestraal overeenkomstig de waarde van θ	[m]
R_c	: kromtestraal overeenkomstig θ_0	[m]

overkomt. Daarom is het noodzakelijk dat bij de dimensionering van meanders men de resultaten als leidraad gebruikt eerder dan ze letterlijk toe te passen. Uiteindelijk zal het eindresultaat in grote mate beïnvloed worden door de natuurlijke omstandigheden die plaats per plaats sterk kunnen variëren.

dr. ir. P. TROCH
ir. G. DE MUYNCK
Universiteit Gent
Laboratorium voor Hydrologie en Waterbeheer
Coupure 653
9000 GENT

ir. D. VAN ERDEGHEM
ingenieursbureau SORESMA nv
Britselei 23 bus 1
2000 Antwerpen

REFERENTIES

Bouwknegt, J. & Gelok, A.J. (1992a). Hydraulische aspecten van beekmeandering. *Landinrichting*, 1992/32 3, 9-15.

Bouwknegt, J. & Gelok, A.J. (1992b). Zandtransport bij beekherstel. *Landinrichting*, 1992/32 8 2-10.

Chang, Howard H. (1984). Regular meander path model. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, Vol. 110, No. 10, October, 1398-1411.

Ikeda, S., Parker, G. and Sawi, K. (1981). Bend theory of river meanders. Part I. Linear development. *Journal of fluid mechanics*, Vol. 112, 363-377.

Ingenieursbureau Soresma (1993). Landinrichtingsproject Noordost-Limburg. Inrichtingsvoorstellen Valleigebieden Abeek en Zuurbeek. Lossing en omgeving.

Langbein, W.B. and Leopold, L.B. (1966). River meanders-theory of minimum variance. USGS Professional paper 422-H, 15 p.

Odgaard, A. (1981). Transverse bed slope in alluvial channel bends. *Journal of the hydraulics Division, Proceedings of the ASCE*, Vol. 107, No. 12, december, 1677-1694.

Odgaard, A. (1986). Meander model, I: Development. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*, Vol. 112, No. 12, december, 1117-1150.

Smith, Duncan J. (1984). A model for flow in meandering streams. *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 9, 1301-1315.