

HAARLEMSCHE UNIVERSITEIT
BIBLIOTHEEK
971
LABORATOIRE DE RECHERCHES HYDRAULIQUES
D'ARTHEQUE

251725
UNIVERSITEIT VAN UTRECHT
LABORATOIRE
D'ARTHEQUE

DRONKERS, J.J.

971

Algemene beschouwingen over zout-
en zoetwaterbeweging.

WATERBOUWKUNDE LABORATORIUM
BIBLIOTEK
971
LABORATOIRE de RECHERCHES HYDRAULIQUES
BIBLIOTHEQUE

0307 001 9127


2076

Berekeningsmethoden door Dr. J. J. Dronkers.

Algemene beschouwingen over zout- en zoetwaterbeweging.

Par. 1. Inleiding.

Als gevolg van de getijbeweging dringt het zoute zeewater bij vloed de rivier binnen; het wordt bij eb weer afgevoerd. Door de gestadige oppervlakteraafvoer van de Bovenrijn is het zout slechts in een deel van het ~~benedaamde~~ *Waal* in merkbare hoeveelheid aanwezig, n.l. op de Nieuwe Waterweg, de Nieuwe Maas en het zeevaartroute einde van de Oude Maas.

Door de voortdurende verbeteringen in het stelsel van de

~~benedaamde~~, speciaal de vernauwing van de profielen van de Nieuwe

Waterweg en Oude Maas, is de waterbeweging steeds krachtiger geworden

en ook het zoutbezwaar toegenomen (nadeel voor de aanliggende gebieden).

In verband hiermede is het ook van belang geworden de beweging van het

zoute water en de menging nader te onderzoeken.

Bij dit probleem kan onderscheid gemaakt worden tussen de

relatief langzaam verloopende getijbewegingen met een periode van on-

geveer $12\frac{1}{2}$ uur, en de veel sneller verloopende turbulentiëleverschijnsel-

len met perioden van niet meer dan enige minuten. Hier zal eerst de

hoofdbeweging van het zoute en het zoete water behandeld worden, en

daarna zal de turbulentie, die de voornaamste oorzaak is van de men-

ging van het zoete water, nader worden besproken.

Eerst worden enkele algemene opmerkingen gemaakt over de

wijze, waarop deze zout- en zoetwaterbeweging plaats heeft:

1, Door de menging van het zoute en het zoete water zal het zoutgehal-

te rivieropwaarts geleidelijk afnemen. Terwijl in zee voor de mond van

de Nieuwe Waterweg het gemiddelde zoutgehalte ± 15.000 mg Cl. per li-

ter water bedraagt, moet het zoutgehalte rivieropwaarts tot b.v. 300

mg Cl. per liter zijn afgenomen, opdat het rivierwater geschikt wordt voor land- en tuinbouw.

2. Het is verder gemakkelijk te begrijpen dat ongeveer 1 tot 2 uur na H.W., dus ongeveer aan het einde van de vloed, de zoutgrens het verst is voortgeschreden en bij L.W., aan het einde van de eb, zich het meest zeewaarts bevindt. Beide grenzen zijn ongeveer 12 km uit elkaar gelegen.

Volgens de waarnemingen neemt bij gemiddelde opperwaterafvoer over een afstand van omstreeks 30 km het maximum zoutgehalte af van ongeveer 15.000 mg Cl. tot 300 mg Cl. Indien de waterdeeltjes in een profiel ^{zich} overal met dezelfde snelheid verplaatsen, zou ongeveer 15 km rivieropwaarts geen verzouting meer merkbaar zijn. Doordat de vloeistof met een groter soortelijk gewicht zich relatief gaat verplaatsen t.o.v. de vloeistof met een lager soortelijk gewicht verkrijgen de grensvlakken een bepaalde helling, die volgens de waarneming ongeveer 1 m per km bedraagt. Langs deze grensvlakken heeft er dan menging plaats totdat zich een continue verdeling van het soortelijk gewicht heeft ingesteld.

Maar ook bij homogeen water is de snelheid bij de bodem geringer dan voor hoger gelegen punten. Deze snelheidsverschillen kunnen door het verschil in zoutgehalte aanzienlijk toenemen, zodanig zelfs, dat langs de bodem het water rivieropwaarts stroomt en bij het oppervlak rivierafwaarts. Dit verschijnsel, de ondervloed genoemd, komt in de mond van de Nieuwe Waterweg gedurende een deel van de getijperiode voor, n.l. bij de overgang van eb- naar vloedstroom, gedurende een periode die zelfs drie uur kan duren.

In fig. 1 is het verloop van de snelheid in een verticaal op achtereenvolgende momenten weergegeven. Hieruit blijkt hoezeer het verloop van deze snelheid door zoutgehalteverschillen kan worden be-

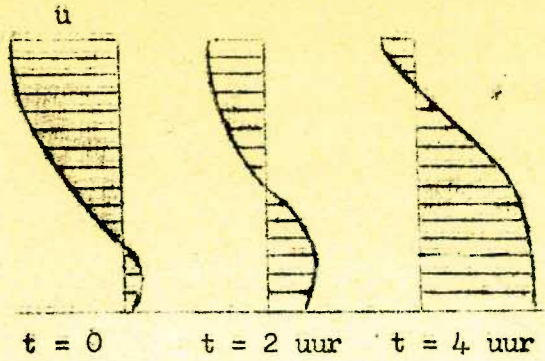


FIG. 1

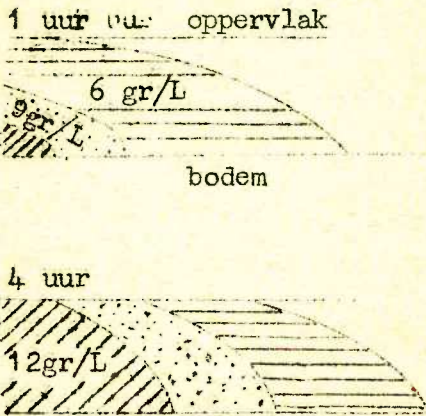


FIG. 2

invloed. Op de volgende wijze kan een overzicht verkregen worden van het verloop van de dichtheid.

Men kan met behulp van de resultaten der metingen in de lengterichting van de rivier oppervlakken van gelijke dichtheid construeren. Een bepaalde verticaal heeft hoogstens één punt met een dergelijk oppervlak gemeen. Enkele van de genoemde vlakken zijn voor twee verschillende tijdstippen schematisch in fig. 2 weergegeven. Door de getijbeweging verandert de lig-

ging van de grensvlakken voortdurend. De vlakken van gelijk soortelijk gewicht verplaatsen zich gedurende het getij heen en weer volgens een periode die gelijk is aan die van het getij, dus 12 uur 25 minuten. De helling der vlakken schommelt daarbij om een gemiddelde waarde, die veel groter is dan de helling van het wateroppervlak. De maximale helling van het wateroppervlak bedraagt b.v. voor de Waterweg ongeveer 5 cm per km, terwijl de helling van de vlakken van gelijk soortelijk gewicht ongeveer gelijk is aan 100 cm per km, dat is dus ongeveer 20 maal groter. Deze omstandigheid is van grote invloed op de beweging der zoutwaterlagen.

Aan de beschouwing, die in het voorgaande over de zout- en

zoetwaterbeweging is gegeven, kan nog het volgende worden toegevoegd. De waterdeeltjes op de benedenrivieren bewegen zich als gevolg van de getijden heen en weer en door de opperwaterafvoer ondergaan ze een geleidelijke verplaatsing zeewaarts. Een waterdeeltje dat zich b.v. bij Krimpen aan de benedenmond van de Lek bevindt, zal pas na enkele dagen de zee bereiken. Bij deze beweging passeert dit zoete water het zoutwatergebied (eigenlijk: brakwatergebied). Hierin wordt het met het zee-water vermengd. Het vloeistofdeeltje blijft zich echter steeds, als gevolg van de getijbeweging, heen en weer verplaatsen. Het, aanvankelijk van de bovenrivier afkomstige, deeltje komt tenslotte in zee terecht.

Zodra de opperwaterafvoer constant is en er mag worden aangenomen, dat amplitude en middenstand van de getijbeweging niet variëren, zal de zout- en zoetwaterbeweging steeds op dezelfde periodiek terugkerende wijze plaats hebben, waarbij gedurende ieder getij de vloeistoflagen met gelijk soortelijk gewicht zich op gelijke wijze bewegen. Dan heeft ook de menging een stationair karakter.

Nu is in werkelijkheid de getijbeweging en de opperwaterafvoer aan voortdurende veranderingen onderhevig. Een evenwichtstoestand wordt zelden bereikt en volgens de metingen is dan ook de zout- en zoetwaterbeweging zeer wisselend van aard. Ook door de scheepvaart wordt de menging in belangrijke mate en op onregelmatige wijze bevorderd. Eveneens hebben de vele en uitgebreide havenkommen een belangrijke invloed, daar het zoutere water zich hierin min of meer verzamelt als gevolg van de geringe stroomsterkte in deze kommen. Ook het onregelmatige bodemprofiel kan van invloed zijn. In de diepe gedeelten blijft na de vloed het zoute water achter en dit vermengt zich bij eb met het zoetere water. Hierdoor stuit het toetsen van de uitkomsten van metingen door theoretische berekeningen op grote moeilijkheden. Men kan de

resultaten van de waarnemingen echter op statistische wijze onderzoeken.

Over dit onderwerp werd tot nu toe weinig gepubliceerd. In een artikel van ir. Canter Cremers over "Enige beschouwingen over de waterbeweging en de beweging van vaste stoffen", (Ingenieur 1921), wordt een beschrijving van het verschijnsel aangetroffen.

Betreffende deze zout- en zoetwaterbeweging kunnen de volgende vragen worden gesteld.

1. Laat bij gegeven rivierafmetingen, getijbeweging en opperwaterafvoer, het brakwatergebied in een evenwichtstoestand verkeren in dien zin dat in ieder punt de dichtheid een periodieke functie is van de tijd. Gevraagd wordt om de dichtheid ρ te bepalen als functie van de afstand x langs de rivier, de hoogte boven de bodem z en de tijd t .

2. Hoe verloopt de waterbeweging als gevolg van deze variabele dichtheid?

Beide vragen hangen met elkaar samen; de eerste vraag is niet te beantwoorden als men het antwoord op de tweede vraag niet kent, en omgekeerd.

3. Op welke wijze verandert de waterbeweging en de dichtheid als de opperwaterafvoer of het getij verandert en hoe wordt de nieuwe evenwichtstoestand bereikt ?

Uit technisch oogpunt is het hoofddoel van het onderzoek om bij gegeven getijbeweging en opperwaterafvoer de verandering van de z.g. zoutgrens te bepalen indien veranderingen in het rivierensysteem worden aangebracht door verdieping, verbreding of afsluiting van zee-armen. Deze zoutgrens wordt dan bepaald door de beweging van het vlak waarvoor de dichtheid ρ overeenkomt met 300 mgr Cl per liter. Het is momenteel alleen mogelijk om de richting aan te geven, waarop voorgaande vragen beantwoord zouden kunnen worden. Voor het uitwerken van een

definitieve oplossing moet worden beschikt over de resultaten van uitgebreide metingen die nog moeten worden verricht.

Par. 2. Diffusie van zout.

In de eerste plaats wordt de diffusie beschouwd van het zout, afkomstig uit lager gelegen waterlagen met grotere dichtheid naar de hoger liggende waterlagen met geringere dichtheid. Indien het water niet in beweging is, is dit een eenvoudige kwestie. Door de waterbeweging welke hoofdzakelijk in horizontale richting plaats heeft wordt echter de diffusie wegens het onderdrukken van de turbulentie belemmerd. In het vervolg zullen we veronderstellen, dat evenals bij normale getijbeweging de snelheid in verticale richting zeer gering is t.o.v. die in horizontale. Daarentegen blijkt het dichtheidsverval juist in verticale richting zeer groot te zijn t.o.v. dat in horizontale richting. De diffusie wordt dus hoofdzakelijk bepaald door het verticale dichtheidsverval. We beschouwen eerst het eenvoudige geval van stationnaire stroming van de opperwaterafvoer zonder getijbeweging, waarbij de rivier uitmondt in een zout meer.

We veronderstellen dat de opperwaterafvoer zo klein is, dat langs de bodem een zoutwig z naar binnen kan dringen, zodat bij de bodem de snelheid rivieropwaarts gericht is (fig. 3). Laat in de verticaal $A B$ de snelheid u ongeveer volgens de kromme $P Q A$ verlopen. In de verticaal $D C$ zal dan een belangrijke vormverandering optreden, b.v. volgens $P^1 Q^1 R^1 S^1$, terwijl aanvankelijk opp. $E Q^1 R^1 \approx$ opp. $R^1 C S^1$, is. In verticale richting heeft daarna diffusie van zout plaats, zodat na enige tijd in dit profiel $C D$ bij de evenwichtstoestand de dichtheid b.v. volgens $K L$ zal verlopen. Dan is er echter geen sprake meer van een eigenlijke zoutwig, wel wordt langs de bodem zeewater aangevoerd.

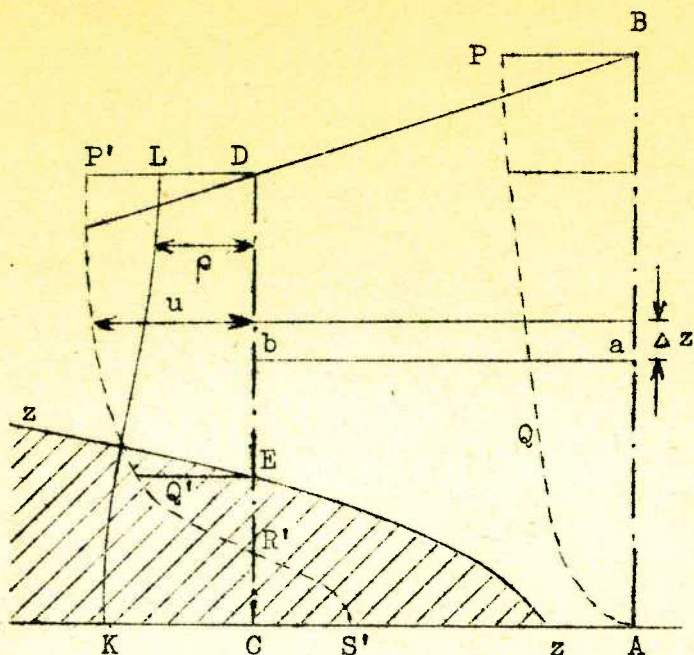


FIG. 3

We beschouwen nu een vloeistoflaag met hoogte Δz en breedte l over een afstand a b . Bij a stroomt er per seconde door de doorsnede Δz een hoeveelheid vloeistof $u \Delta z$. Als deze vloeistof in b is aangekomen heeft ze een hoeveelheid zout opgenomen, waardoor de dichtheid van de vloeistof is toegenomen.

Over een afstand Δx is het gewicht van de opgenomen hoeveelheid zout gelijk aan $g u \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$ (x en u zijn rivieropwaarts positief gerekend). Dit zout wordt aangevoerd door de diffusie in verticale zin.

De diffusiesnelheid is

$$-\frac{1}{\rho} D_s \frac{\partial \rho}{\partial z} .$$

D_s is de coëfficiënt van diffusie.

Het verschil tussen het door het onder- en bovenvlak gediffundeerde gewicht aan zout is voor het element $\Delta z \cdot \Delta x$:

$$g \frac{\partial}{\partial z} D_s \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z \cdot \Delta x .$$

In het geval van evenwicht is dus:

$$(1) \quad u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} D_s \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Voor de bepaling van $\rho(x, z)$ gelden nog twee randvoorwaar-

den: voor $x = 0$ moet $\rho (0, z)$ gegeven zijn, terwijl voor $x = \infty$, ρ constant moet zijn (in praktische gevallen geldt dit reeds voor $x = b$). De randvoorwaarde $\rho (0, z)$ is echter moeilijk vast te stellen, doordat bij de mond het water in een meer stroomt en aldaar eveneens dichtheidsverschillen vercorzaakt. Men moet eigenlijk het deel van het meer nabij de mond in de beschouwingen opnemen.

Verder moet de snelheid u , die zelf weer van $\rho (x, z)$ afhankelijk is, als functie van x en z bekend zijn, terwijl ook de bepaling van D_s belangrijke moeilijkheden geeft.

In het geval van de getijbeweging op een rivier is ρ ook een functie van de tijd. Dan moet, zoals direct is in te zien, aan (1) de term $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ worden toegevoegd:

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} D_s \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Hieraan moet behalve $\rho (0, z, t)$ weer de randvoorwaarde worden toegevoegd, dat voor $x = b$, $\rho = \rho_0$ onafhankelijk van z en t moet zijn.

In de formules (1) en (2) zal bij gegeven x en t de diffusie-functie D_s o.a. afhankelijk zijn van u , haar afgeleiden naar z , enz. en van de hoogte z boven de bodem. Hierover wordt door Ir. Schönfeld het een en ander medegedeeld. Bij de praktische toepassing zal het het eenvoudigst zijn om voor een tijdsinterval $(t_0, t_0 + \Delta t)$ D_s als functie van z en x weer te geven, waarbij dan gedacht wordt aan een polynoom met een aantal parameters, die geschikt gekozen worden, terwijl voor $z = z_0$ en $z = 0$, $D_s = 0$ is, b.v.

$$(3) \quad D_s = (z_0 - z) z (Pz^2 + Qz + R)$$

P , Q en R moeten dan met behulp van metingen nader bepaald worden, waar-

bij deze coëfficiënten voor een niet al te groot interval nog lineair van x zullen afhangen. Verder is $P > 0$ en zal voor $0 < z < z_0$, $Pz^2 + Qz + R > 0$ moeten zijn. De formule voor de diffusiecoëfficiënt zal n.l. veel overeenstemming vertonen met die van de turbulentiecoëfficiënt (zie voor de motivering aldaar). In dat geval moet ook de snelheid u , die in (1) en (2) voorkomt, in de vorm van een polynoom in x en z worden voorgesteld, hetgeen als benadering zeer wel mogelijk blijkt. Daarna kan ook getracht worden om voor het tijdsinterval $(t_0, t_0 + \Delta t)$, ρ in een polynoom van x en z uit te drukken waarbij direct aan de randvoorwaarde voor $x = 0$ kan worden voldaan. Voor dit tijdsinterval wordt dan de waarde van de term $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ t.o.v. de tijd als constant beschouwd. Verder zal evenals bij de bepaling der getijbeweging het traject $x = 0$, $x = b$ in een aantal delen gesplitst worden, zodanig dat voor ieder deel de variabele x als lineair kan worden aangenomen.

Welke werkwijze bij de oplossing van de algemene diff. verg. (2) gevolgd moet worden is nog niet definitief aan te geven. Dit zal nog moeten blijken aan de hand van uit te voeren berekeningen en te verrichten controlemetingen. In het algemeen is het verband tussen ρ en z minder variabel dan b.v. tussen u en z .

We merken nog op, dat in de praktijk de verdeling van $\rho(x, z, t)$ en $u(x, z, t)$ gemakkelijk kan worden gemeten. Met behulp van (2) is dan omgekeerd $D_S(x, z, t)$ te bepalen.

Als eenvoudig voorbeeld dat vaak voorkomt nemen we aan, dat ρ vanaf het oppervlak tot een bepaalde hoogte boven de bodem lineair toeneemt. Verder beschouwen we voor een interval $(t_0, t_0 + \Delta t)$ de gemiddelde waarde van ρ en nemen aan, dat in de verticaal de waarde van $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ als functie van z geen al te grote afwijkingen van haar gemiddelde vertoont.

Dan is bij benadering:

$$(4) \quad \rho = \rho_b + \frac{\rho_0 - \rho_b}{z_1} z.$$

Hierbij is het vlak $z = 0$ op een zodanige hoogte gekozen, dat haar afstand tot het oppervlak z_1 bedraagt; ρ_b is derhalve de dichtheid in dit vlak en ρ_0 de dichtheid aan het oppervlak. Verder zijn

ρ_b en ρ_0 functies van x en t . Betreffende $u(x, z)$ kan eventueel voor een bepaald gebied en gedurende het interval $(t_0, t_0 + \Delta t)$ bij benadering gesteld worden:

$$(5) \quad u(x, z) = u_0 + \beta z + \gamma x$$

De grootheden u_0 , β en γ worden zo bepaald dat $u(x, z)$ voor $z < z_1$ zo gunstig mogelijk wordt benaderd. Substitutie in (2) leidt tot een diff. verg. voor D_s , die gemakkelijk op te lossen is. Deze oplossing luidt, indien voor $z = z_1$ wordt aangenomen $D_s = 0$:

$$(6) \quad D_s = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{gem}} \frac{\left(\frac{z}{z_1} - 1 \right) z_1^2}{\rho_0 - \rho_b} - \frac{1}{6} z_1^3 \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) \frac{1}{\rho_0 - \rho_b} \left[6 \frac{u_0 + \gamma x}{z_1} \right.$$

$$\left. \frac{\partial \rho_b}{\partial x} + 3 \left\{ \beta \frac{\partial \rho_b}{\partial x} + \frac{u_0 + \gamma x}{z_1} \frac{\partial (\rho_0 - \rho_b)}{\partial x} \right\} \left(1 + \frac{z}{z_1} \right) + 2\beta \right.$$

$$\left. \frac{\partial (\rho_0 - \rho_b)}{\partial x} \left\{ 1 + \frac{z}{z_1} + \left(\frac{z}{z_1} \right)^2 \right\} \right].$$

Meestal blijkt de term die onderstreept is, de grootste waarde te bezitten t.o.v. de overige termen tussen haken.

Voor enkele praktische gevallen werd de functie D_s berekend. Het bleek dat D_s ondanks de hogere machten van $\frac{z}{z_1}$ bij voldoende benadering lineair van z afhankelijk was. Het maakte verder weinig verschil

of in (5) de term βz werd weggelaten en voor u_0 de gemiddelde waarde van u in een verticaal werd aangenomen. Men kan dan stellen, dat $D_s = Az + Bx + C$ is, waarin A , B en C nader te bepalen "coëfficiënten" zijn, volgens (6).

De onderzoeken betreffende de functie D_s worden voortgezet, ook naar aanleiding van de resultaten van Ir. Schönfeld. Men zal haar echter steeds in zodanige vorm moeten wijzigen, dat de vergelijking integreerbaar blijft, terwijl men in het oog moet houden, dat de nauwkeurigheid der berekeningen die van de metingen niet kan overtreffen.

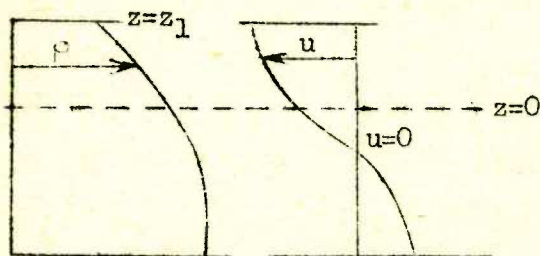


FIG. 4

Tenslotte nog de opmerking, dat het niet te verwachten is, dat voor de zoutwaterlaag langs de bodem de diff. verg. (1) c.q. (2) zullen gelden. In deze laag zijn de zoutgehalteverschillen vaak zeer klein, zodat het zoutgehalte als constant kan worden

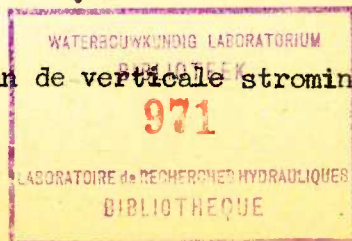
beschouwd. Men vindt over het algemeen een snelheids- en dichtheidsverloop in de verticaal als in fig. 4 is aangegeven.

Pag. 3. Bewegingsvergelijking voor brak water.

A. We beschouwen nu de stroming in het brakwatergebied, waarbij zal worden aangenomen, dat de verticale snelheidscomponent klein is t.o.v. de horizontale. Dan wordt de turbulente stroming in een punt x , z en een tijdstip t beheerst door de vergelijking:

$$(7) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} .$$

In verband met het verwaarlozen van de verticale stroming,



kan ook de term $u \frac{\partial u}{\partial x}$ worden weggelaten. Verder stellen we voor de schuifspanning:

$$(8) \quad \tau(x, z, t) = D_1(x, z, t) \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z}$$

Bij deze omstandigheden kan aangenomen worden, dat de druk in de z - richting hydrostatisch verdeeld is, zodat:

$$(9) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_0} \rho \, dz.$$

Als $\rho(x, z, t)$ differentieerbaar is naar x , is verder

$$(10) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = g \int_z^{z_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \, dz + g \rho(z_0) \frac{\partial z_0}{\partial x}.$$

Na de substitutie van (8) en (9) in (7), integreren we (7) achtereenvolgens twee maal naar z , waarbij voor de benedengrens i.p.v. $z = 0$, $z = \delta$ genomen wordt. Voor $z = 0$ is n.l. $D_1 = 0$ en divergeren de integralen. Ook voor $z = z_0$ is $D_1 = 0$ maar dit levert geen moeilijkheden op. Men vindt dan:

$$(11) \quad u = C_2 + \int_{\delta}^z \frac{1}{D_1} \int_{z_0}^z \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dz^2 + g \int_{\delta}^z \frac{1}{D_1} \int_{z_0}^z \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_0} \rho \, dz^3$$

Hierbij is voldaan aan de voorwaarde:

$$\left(D_1 \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z = z_0} = 0$$

Met dz^2 enz. wordt aangegeven, dat 2 keer naar z geïntegreerd moet worden, enz..

Verder volgt C_2 weer uit de voorwaarde, dat voor $z = \delta$,

$u = u_1(\delta, x, t)$ wordt.

In deze formule kan eventueel bij benadering $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ gelijk aan $\frac{\partial}{\partial t} \rho u$ gesteld worden. Verder stellen we $u = \bar{u} + u'$ waarbij

$$\delta \int_{z_0}^z u' dz \approx 0$$

is zodat

$$(11a) \int_{\delta}^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z \rho \frac{\partial u}{\partial t} dz^2 = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \int_{\delta}^z \frac{z - z_0}{D_i} dz + \int_{\delta}^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z$$

$$\frac{\rho \partial u'}{\partial t} dz^2 .$$

Daar $g \rho$ hoogstens van 1 tot 1,02 verandert, kan in deze formule ρ als constant worden beschouwd.

De formule (11) kan alleen worden toegepast als de functies $D_i(x, z, t)$, $u(\delta, x, t)$ en $\rho(z, x, t)$, welke laatste aan (2) moet voldoen, bekend zijn.

B. Aan deze oplossing zijn belangrijke moeilijkheden verbonden. Zo is de functie $u(\delta, x, t)$ meestal niet direct te bepalen. In het algemeen is n.l. $u(\delta, x, t)$ een functie van de schuifspanning τ_0 en van de ruwheid van de bodem. Dezelfde moeilijkheid ondervindt men bij de beweging in een rivier van homogeen water.

Voor de snelheid nabij de bodem is in verband met de voorkomende oneffenheden op de bodem en de aard van het bodemmateriaal, moeilijk een formule aan te geven. Men zou een afspraak kunnen maken en voor $u_1(\delta)$ de snelheid op een hoogte van b.v. 20 cm boven de bodem kunnen invoeren. Overigens is met behulp van de schuifspanningstheorie van von Karman in homogeen water het snelheidsverloop langs de verticaal goed weer te geven.

Voor de bepaling van de snelheid voor $z = 0$ kan men in dit laatste geval eventueel nog gebruik maken van de formule van de Chezy

$$s = C_0 \sqrt{z_0 i},$$

mits de "coëfficiënt" van de Chezy C uit metingen bekend is.

Hierin is: s = totale stroom door het profiel, i = verhang, z_0 = hydraulische straal, O = oppervlak van het profiel.

In het brakwatergebied kan men een analoge weg volgen. Bij de vraagstukken die zich in de praktijk betreffende de getijbeweging voordoen, bekommert men zich n.l. niet om de zout- en zoetwaterbeweging, maar gaat men uit van de bewegingsvergelijking voor de totale stroom s in het profiel:

$$(12) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -g z_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{gs(s)}{C^2 z_0^2} \quad (\text{breedte} = 1).$$

Hierin is C een "coëfficiënt", die men met die van de Chezy kan vergelijken en welke uit metingen wordt bepaald. Het getijvraagstuk is dan volledig bepaald, indien aan de bewegingsvergelijking (12) de continuïteitsverg.

$$(12a) \quad \frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\partial z_0}{\partial t}$$

en twee randvoorwaarden b.v. voor $x = 0$ en $x = L$ worden toegevoegd. Men kan dan voor iedere waarde van x de totale stroom s_0 bepalen. Het ligt dus voor de hand om ook uit (11)

$$(13) \quad s = \int_0^{z_0} u \, dz \quad (\text{breedte} = 1)$$

te berekenen. Dan zal uit (11) na enige herleiding onder verwaarlozing van enige onbelangrijke termen voor s een vergelijking moeten volgen, die analoog is aan (12). Dit verband is echter zeer ingewikkeld en zal

hier niet verder worden aangegeven. Hieruit zou tevens een formule voor de **coëfficiënt** C worden verkregen.

Betreffende de turbulentie-functie $D_i(x, z, t)$ merken we het volgende op. In homogeen water is volgens von Karman in de vergelijking

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \rho g i \quad \tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en} \quad l = k \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

met $i =$ **verhang** waterspiegel. De functie D_i is derhalve:

$$(14) \quad D_i = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial z} = \rho k^2 \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2}$$

Men kan nu gemakkelijk u als $f(z)$ bepalen en vindt dan voor het **snelheidsverloop** langs een verticaal:

$$u = \sqrt{\frac{giz_0}{k}} \left[\ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{z}{z_0}} \right) - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{z}{z_0}} \right) \right] + C_1 .$$

De **integratieconstante** C_1 moet weer bepaald worden uit de voorwaarde, dat voor $z = \delta$, $u = u_1$ wordt. Zoals reeds gezegd kan men voor $z = \delta$ b.v. 20 cm kiezen, afhankelijk van de oneffenheden van de bodem. Dan hangt u_1 op een bepaalde wijze van de ruwheid van de bodem af. Verder is, zoals reeds gezegd, δ in verband te brengen met de z, g , "constante" van de **Chézy**, daar moet gelden dat

$$s = \int_{\delta}^{z_0} u dz = C \sqrt{z_0} i, \quad \text{terwijl} \quad \int_0^{\delta} u dz \text{ te verwaarlozen}$$

klein is t.o.v. s . Verder blijkt, als A een bepaalde constante is, dat

voor homogeen water geldt:

$$(14a) \quad D_i = A \frac{z (z_0 - z)}{z_0^2}$$

In het brakwatergebied zal voor de schuifspanning de formule (14) en dus (14a) niet meer gelden. Zo zal bij die waarden van z , waarvoor het **dichtheidsverval groot is**, door de stroming van het water de turbulentie geringer worden. Volgens de beschikbare metingen betreffende het snelheidsverloop heeft dan $\frac{\partial u}{\partial z}$ een grote en $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ een kleine waarde, zodat volgens (14) D_i juist een grote waarde zal hebben. Er zijn zelfs vaak een paar waarden z aan te wijzen waarvoor $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ is.

Door Ir. Schönfeld zal in het volgende een wijziging van de formule van von Karman worden aangegeven, die aan deze bezwaren eniger mate tegemoet kan komen. Met het oog op een gemakkelijke integratie der diff. verg. kan men overwegen de volgende weg in te slaan:

In het brakwatergebied kan iedere snelheidsverdeling langs een verticaal worden benaderd door

$$u = A z^3 + Bz^2 + Cz + D .$$

Hierin zijn A, B, C en D nog nader te bepalen functies van x . Indien de formule van von Karman zou gelden, kan D_i in de vorm geschreven worden:

$$D_i \approx \alpha z^4 + \beta z^3 + \gamma z^2 + \delta z$$

waarbij α, β, γ en δ weer afhankelijk zijn van A, B, C en D . Maar ook bij een gewijzigde formule voor de schuifspanning kan men een dergelijke betrekking voor D_i bij benadering aannemen, mits een ander verband tussen α , enz. en A , enz. aangenomen wordt. Aan het oppervlak zal ook $D_i = 0$ zijn, dus kan worden gesteld:

$$(15) \quad D_i = (z_0 - z) z (\beta_1 z^2 + \gamma_1 z + \delta_1)$$

waarbij voor $0 < z < z_0$, $\beta_1 > 0$ en ook $\beta_1 z^2 + \gamma_1 z + \delta_1 > 0$ moet zijn. In deze functie moeten β_1 , γ_1 , en δ_1 nog nader worden bepaald voor een zo gunstig mogelijke benadering van D_i . In fig. 5 is weergegeven op welke wijze D_i voor een bepaalde verticaal in het brak-

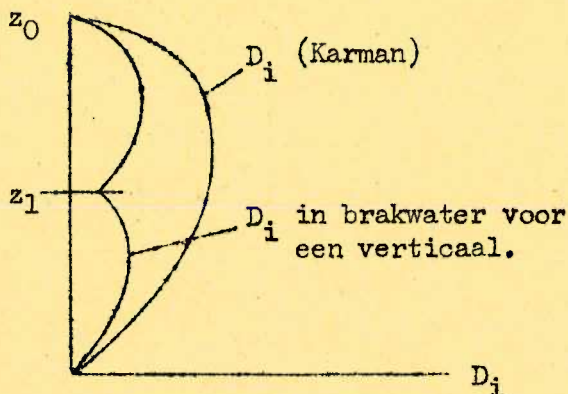


FIG. 5

watergebied vermoedelijk zal verlopen. Hierbij is aangenomen dat voor $z = z_1$, D_i een relatieve minimum waarde heeft, terwijl in het algemeen β_1 , γ_1 en δ_1 , en dus ook z_1 nog van x afhankelijk zullen zijn.

Voor $\rho(x, z)$ kan men, indien dit geoorloofd is, de eenvoudigste benaderingsformule (6) substitueren.

C. Volgens (10) en (11) kunnen dus alle integraties in de tweede term van het linkerlid worden bepaald.

We moeten tenslotte nog de term (11a)

$$\int_0^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z \rho \frac{\partial u}{\partial t} dz^2$$

beschouwen.

Zoals gezegd stellen we dan

$$u = \bar{u} + u'$$

waarbij $\int_0^z u' dz = 0$ is, terwijl toch meestal niet nul zal zijn de waarde van de term

$$(a) \quad \int_0^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z \frac{\partial \rho u'}{\partial t} dz$$

Met behulp van de meetresultaten kan men de waarde van deze integraal schatten en vergelijken met de waarde van de integraal:

$$(b) \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} \int_0^z \frac{z - z_0}{D_i} dz$$

die zoals uit het vervolg blijkt, te berekenen is. Over het algemeen heeft de integraal (a) een kleine waarde t.o.v. de integraal (b), zelfs als $\bar{u} = 0$ is, en dus u' het meest varieert. Dan blijkt juist de waarde van (b) ongeveer maximaal te zijn. Na verwaarlozing van (a) wordt bij berekening der integralen de volgende vergelijking voor u verkregen, indien verder voor ρ de (meest eenvoudige) formule (4) wordt aangenomen:

$$u = C_2 - \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\rho_0 + \rho_b}{2} + \frac{1}{2}g \frac{\partial \rho_b}{\partial x} z_0 + g \rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{1}{3}g z_0 A \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2c} \left[2 \ln z - 2 \ln c - \ln \frac{1}{c} (az^2 + bz + c) - \frac{2b}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{tg} \frac{z\sqrt{4ac-b^2}}{bz+c} \right] -$$

$$- \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\rho_0 - \rho_b}{2 z_0} - \frac{1}{2}g \frac{\partial \rho_b}{\partial x} + \frac{g}{z_0} \frac{b}{12a} A - \frac{1}{6}gA \right] \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{tg} \frac{z\sqrt{4ac-b^2}}{bz+c} +$$

$$+ \frac{1}{12a} \frac{g}{z_0} A \ln \frac{1}{c} (az^2 + bz + c) . \quad (16)$$

$$\text{Hierin is } A = \frac{\partial (\rho_0 - \rho_b)}{\partial x} - \frac{\rho_0 - \rho_b}{z_0} \frac{\partial z_0}{\partial x} .$$

Verder wordt voor $s = \int_0^{z_0} u dz$ gevonden:

$$s = C_2 z_0 - \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\rho_0 + \rho_b}{2} + \frac{1}{2}g \frac{\partial \rho_b}{\partial x} z_0 + g \rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{1}{3}g z_0 A \right] \cdot$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{z_0}{2c} \left[2 \ln z_0 - 2 - 2 \ln \int + z_0 - \ln \frac{1}{c} (az_0^2 + bz_0 + c) - 2 \frac{bz_0 + 2c}{z_0 \sqrt{4ac - b^2}} \right. \\
 & \left. bg \operatorname{tg} \frac{z_0 \sqrt{4ac - b^2}}{bz_0 + 2c} \right] - \frac{1}{2a} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\rho_0 - \rho_b}{2z_0} - \frac{1}{2} g \frac{\partial \rho_b}{\partial x} + \frac{g}{z_0} \frac{b}{12a} A - \frac{1}{6} gA \right] \cdot \\
 & \left[2 \frac{2az_0 + b}{\sqrt{4ac - b^2}} bg \operatorname{tg} \frac{z_0 \sqrt{4ac - b^2}}{bz_0 + 2c} - \ln \frac{1}{c} (az_0^2 + bz_0 + c) \right] + \\
 & + gA \frac{2az_0 + b}{24a^2 z_0} \ln \frac{1}{c} (az_0^2 + bz_0 + c) - \frac{1}{6a} gA + \\
 & + gA \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{12a^2 z_0} bg \operatorname{tg} \frac{z_0 \sqrt{4ac - b^2}}{bz_0 + 2c} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Nagegaan moet worden, welke termen verwaarloosd kunnen worden.

In de voorgaande formules is alleen voor de termen in (11) die bij $z = 0$ divergeren, $z = \partial$ gekozen, daar de waarde der overige termen voor het interval $(0, \int)$ geïntegreerd, gering is.

De vergelijking (17) kan men vergelijken met de formule (12), die bij getijbeweging wordt toegepast. Hierop zullen we nu niet nader ingaan; men verkrijgt dan voor de constante van Chezy C een zeer ingewikkelde betrekking ook na verwaarlozing van de minder belangrijke termen. Hieruit blijkt, dat het getij beïnvloed wordt door de zout- en zoetwaterbeweging, hetgeen ook uit de empirische waarden voor C blijkt. Deze zijn n.l. belangrijk hoger dan elders, ofschoon moeilijk is te schatten in hoeverre een gladdere bodem hierop van invloed is. In de Nieuwe Waterweg is C ongeveer 70 en op een (zoete) bovenrivier ongeveer 50, terwijl ook de afwijkingen in C belangrijker zijn dan normaal.

Tenslotte moet nog de waarde van de term $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ berekend

worden, hetgeen op twee manieren kan geschieden. Zoals reeds is opgemerkt kan men ook voor het brakwatergebied een getijberekening uitvoeren, uitgaande van de formules (12) en (12a). Men vindt dan $s(x, t)$ en $z_0(x, t)$ en kan dus

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{z_0} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (b = 1)$$

bepalen.

Wil men een dergelijke getijberekening in het zout- en zoetwatergebied niet uitvoeren, dan moet op enkele punten $z_0(x, t)$ gemeten worden, hetgeen op eenvoudige wijze kan geschieden. Door voor het aangrenzende zoetwatergebied wel een getijberekening te stellen, kan men daarna alleen met behulp van de formule van de komberging (continuïteitsvergelijking)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\partial z_0}{\partial t} ,$$

de stroom s in het brakwatergebied bepalen, daarbij uitgaande van de berekende waarden van de afvoer in het zoetwatergebied. Opgemerkt wordt nog, dat voor de bepaling van de coëfficiënt C_2 in (16) en (17) een extra voorwaarde nodig is. Hiervoor kan men de formule (17) gebruiken, doordat zowel s als $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ bekend zijn

Berekent men op analoge wijze de functie $u(x, z, t)$ op een tijdstip $t + \Delta t$ dan kan men door vergelijking met het resultaat voor het tijdstip t de vormverandering bepalen, die u in dit tijdsinterval Δt heeft ondergaan en dus nagaan in hoeverre de term

$$\int_0^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z \frac{\partial \rho u'}{\partial t} dz^2$$

van betekenis is. De aanvankelijke berekening kan op deze wijze gemakkelijk worden gecorrigeerd.

In het voorgaande is aangegeven op welke wijze $u(x, z, t)$ berekend kan worden als $\rho(x, z, t)$ bekend is. Deze functie moet echter voldoen aan (2). Men kiest op een bepaald tijdstip t_0 voor $\rho(x, z, t)$ eerst een eenvoudig lineair verband betreffende x en z , en berekent daarna $u(x, z, t)$ volgens (16). We substitueren deze functie in (2) en berekenen $\rho(x, z, t_0)$ waarna $u(x, z, t)$ opnieuw berekend wordt, enz. Nu is de formule (16) zeer ingewikkeld; het zal dus noodzakelijk zijn om haar te vereenvoudigen door alle termen op geschikte wijze in machtreeksen van $(\frac{z}{z_0})$ te ontwikkelen en hiervan alleen de belangrijkste termen in beschouwing te nemen.

In hoeverre deze berekeningen gemakkelijk verlopen in verband met de convergentie zal nog nader moeten blijken; maar volgens de tot nu toe beschikbare metingen zijn de mogelijkheden gunstig, daar zowel voor ρ als voor u , voor niet al te grote intervallen, een lineair verband in x en t kan worden aangenomen, hetgeen zelfs ook nog geldt voor ρ als functie van z . Dit is echter niet het geval voor de snelheid $u(z)$.

Pag. 4. Gescheiden zout- en zoetwaterbeweging.

Vooraf om een inzicht te verkrijgen in het vraagstuk van de menging van zout- en zoetwater kan het probleem ook nog op een andere, meer schematische wijze worden opgelost. De oplossing is gemakkelijker te overzien, maar geeft over het algemeen een grovere benadering. Indien tussen zout- en zoetwater scherpe grensovergangen voorkomen is deze oplossing zelfs te verkiezen.

Laat op een gegeven tijdstip t het verloop van het zoutgehalte ρ bekend zijn als functie van x en z . Dan kan men vlakken van gelijk s.g. bepalen:

$$\rho(x, z) = c$$

en beschouwt de vlakken resp. met waarden c_1, c_2, \dots, c_n .

Nu neemt men aan, dat tussen ieder tweetal opvolgende vlakken de dichtheid constant is en wel gelijk aan $\frac{1}{2}(c_k + c_{k+1})$. In een dergelijke laag blijft gedurende een niet al te lang tijdsinterval, b.v. een $\frac{1}{2}$ uur, ρ constant. Daarna wordt de ligging der grensvlakken behalve door haar beweging, ^{bovendien} gewijzigd als gevolg van de menging, die gedurende die periode plaats heeft gehad. Zo voortgaande wordt het gehele getij beschouwd. We bepalen nu de beweging, die gedurende dit half uur de grensvlakken als gevolg van de getijbeweging ondergaan:

Voor de eenvoud zullen we aannemen dat er slechts twee lagen zijn resp. met dichtheid ρ_1 en ρ_2 , terwijl het scheidingsvlak door $z_1(x, t)$ is bepaald. Het algemene geval is op analoge wijze te behandelen.

In een punt van de zoutlagen 1 en 2 gelden resp. de bewegingsvergelijkingen:

$$(18) \quad \begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (D_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial z}) \\ \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (D_{i2} \frac{\partial u_2}{\partial z}) \end{aligned}$$

We zullen nu de volgende voorwaarden aannemen:

$$1^e \text{ Voor } z = z_1 \text{ is } \lim_{z \downarrow z_1} \frac{\partial u_1}{\partial z} = \lim_{z \uparrow z_1} \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$\lim_{z \uparrow z_1} D_i(z) = \lim_{z \downarrow z_1} D_i(z)$$

$$2^e \text{ Voor } z = \delta \text{ is } u = u_b, \text{ voor } z = z_1 \text{ is } u_1 = u_2.$$

3^e Aan het oppervlak is $D_i \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$. (19)

Verder is voor laag 1 : $\rho_1(z) = \rho_1 g(z_0 - z)$ en voor laag 2:

$$\rho_2(z) = \rho_1 g(z_0 - z_1) + \rho_2 g(z_1 - z).$$

Hieruit zijn $\frac{\partial \rho_1}{\partial x}$ en $\frac{\partial \rho_2}{\partial x}$ te berekenen en kunnen deze

in (18) gesubstitueerd worden.

Nu worden beide diff. verg. op dezelfde wijze geïntegreerd als in (11) is aangegeven.

Men vindt dan eerst:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \frac{1}{D_i} \rho_1 \int_{z_0}^z \frac{\partial u_1}{\partial t} dz + \frac{g \rho_1}{D_i} \frac{\partial z_0}{\partial x} (z - z_0) \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \frac{1}{D_i} \left[\rho_1 \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} dz + \rho_2 \int_{z_1}^z \frac{\partial u_2}{\partial t} dz \right] + \frac{g \rho_1}{D_i} \frac{\partial z_0}{\partial x} (z - z_0) + \\ &+ \frac{g (\rho_2 - \rho_1)}{D_i} \frac{\partial z_1}{\partial x} (z - z_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Noemen we de rechterleden van (20) resp. $f_1(x, z, t)$ en $g_1(x, z, t)$, dan blijkt

$$u_1 = u_b + \int_{z_1}^z f_1(z) dz + \int_{\sigma}^{z_1} g_1(z) dz$$

$$u_2 = u_b + \int_{\sigma}^z g_1(z) dz$$

of

$$u_1 = u_b + \rho_1 \int_{z_1}^z \frac{1}{D_i} \int_{z_0}^z \frac{\partial u_1}{\partial t} dz^2 + \int_{\delta}^{z_1} \frac{1}{D_i} \left[\rho_1 \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} dz^2 + \right. \quad (21)$$

$$\left. \rho_2 \int_{z_1}^z \frac{\partial u_2}{\partial t} dz^2 \right] + g \rho_1 \frac{\partial z_0}{\partial x} \int_{\delta}^z \frac{z-z_0}{D_i} dz + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \int_{\delta}^{z_1} \frac{z-z_1}{D_i} dz$$

$$u_2 = u_b + \int_{\delta}^z \frac{1}{D_i} \left[\rho_1 \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} dz^2 + \rho_2 \int_{z_1}^z \frac{\partial u_2}{\partial t} dz^2 \right] +$$

$$+ g \rho_1 \frac{\partial z_0}{\partial x} \int_{\delta}^z \frac{z-z_0}{D_i} dz + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \int_{\delta}^{z_1} \frac{z-z_1}{D_i} dz .$$

Verder nemen we weer voor D_i een functie van z , zoals in (15) is aangegeven, waarna de integralen zijn te bepalen. We rekenen nu verder

$$s_1 = \int_{z_1}^{z_0} u_1 dz \quad \text{en} \quad s_2 = \int_{\delta}^{z_1} u_2 dz,$$

terwijl we in de integralen der rechterleden tevens substitueren:

$$u_1 = \bar{u}_1 + u'_1 \quad \text{en} \quad u_2 = \bar{u}_2 + u'_2$$

$$\text{waarbij} \quad \int_{z_1}^{z_0} u'_1 dz = 0 \quad \text{en} \quad \int_{\delta}^z u'_2 dz = 0 .$$

Dan kunnen bij de eerste benadering de integralen

$$\int_{z_1}^{z_0} \frac{1}{D_i} \int_{z_1}^z \int_{z_0}^z \frac{\partial u'_1}{\partial t} dz^3$$

weer worden verwaarloosd.

Ten slotte worden dan twee vergelijkingen gevonden van de volgende vorm:

$$s_1 = u_b(z_0 - z_1) + \frac{\partial s_1}{\partial t} \alpha_1(z_0, z_1) + \frac{\partial s_2}{\partial t} \alpha_2(z_0, z_1) + g \rho_1 \frac{\partial z_0}{\partial x} \alpha_3(z_0, z_1) + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \alpha_4(z_0, z_1) \quad (22)$$

$$s_2 = u_b z_1 + \frac{\partial s_1}{\partial t} \beta_1(z_0, z_1) + \frac{\partial s_2}{\partial t} \beta_2(z_0, z_1) + g \rho_1 \frac{\partial z_0}{\partial x} \beta_3(z_0, z_1) + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \beta_4(z_0, z_1) \quad (23)$$

Daar we bij deze afleiding de menging buiten beschouwing laten, kunnen we nog twee continuïteits verg. aan (22) en (23) toevoegen:

$$(24) \quad \frac{\partial s_1}{\partial x} = - \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} - \frac{\partial z_1}{\partial t} \right)$$

$$(25) \quad \frac{\partial s_2}{\partial x} = - \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad (\text{breedte} = 1)$$

We hebben nu vier vergelijkingen verkregen met de onbekende functies

$$s_1(x, t), \quad s_2(x, t), \quad z_0(x, t) \quad \text{en} \quad z_1(x, t).$$

Laat nu $z_0(x, t)$ uit een normale getijberekening bekend zijn, dan is dat eveneens het geval met de totale stroom $s_1 + s_2 = s$. Er blijven dan nog twee functies n.l. $s_2(x, t)$ en $z_1(x, t)$ te bepalen, waarvoor twee verg. nodig zijn, benevens bepaalde randwaarden. We moeten dus twee vergelijkingen laten vervallen en kiezen hiervoor vanzelfsprekend verg. (22) en de eerste continuïteitsverg. (24). Er blijven alleen de verg. (23) en (25) over, terwijl in (23) s_1 door $s-s_2$ wordt vervangen. Bij de berekening beginnen we nu met het tijdstip van max. stroom, zodat gesteld kan worden

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} \approx \frac{\partial s_2}{\partial t} = 0.$$

We hebben dan twee gewone diff. verg. verkregen met s_2 en z_1 als onbekende functies terwijl ook nog het differentiaalquotient $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ voorkomt. Laat z_1 gegeven zijn voor $x = 0$, dan is voor $t = t_0$, $z_1(x, t_0)$ te berekenen, door weer het vak $(0, b)$ in ondervakken $(0, x_1)$ (x_1, x_2) (x_{n-1}, b) te verdelen en voor ieder deelvak z_1 als lineair afhankelijk van x te beschouwen.

Daarna nemen we het tijdstip $t_0 + \Delta t$, en veronderstellen dat s_2 met Δs_2 verandert en eveneens z_1 met Δz_1 . We verkrijgen dan twee verg. om Δz_1 en Δs_2 te berekenen, eerst veronderstellende dat

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_{t + \Delta t} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_t \quad \text{enz.}$$

Deze beide verg. (23) en (25) zijn n.l. in grote trekken analoog aan die welke voor de getijbeweging gelden en kunnen in analoge zin worden opgelost

Door daarna de resultaten van deze berekeningen te vergelijken met de metingen, kan nagegaan worden van welke betekenis de menging is

geweest gedurende dit tijdsinterval Δt , waarna een onderzoek met behulp van de diffusievergelijking (2) kan worden ingesteld,

Nadat bij deze meer globale oplossing het nodige inzicht verkregen is, kan de definitieve oplossing volgens par. 2 en 3 worden opgesteld.

