RIJKSHOGERE TECHNISCHE EN HANDELSSCHOOL
BELGISCH TEXTIELINSTITUUT
GENT

INFINITESIMAALREKENING

DOOR

Lic. R. LOUWAGIE

EN

Lic. J. CARDON

TWEEDE DEEL

1963

RIJKSHOGERE TECHNISCHE EN HANDELSSCHOOL

BELGISCH TEXTIELINSTITUUT

GENT.

INFINITESIMAALREKENING

DOOR

Lic. R. LOUWAGIE

EN

Lic. J. CARDON

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

Tweede Deel.

1963.

On ne sait un peu ce que sont les mathématiques, on ne soupçonne leur extraordinaire extension, la nature des problèmes qu'elles posent et qu'elles résolvent, que lorsqu'on sait ce que c'est qu'une fonction, comment on étudie une fonction donnée, comment on suit ses variations, comment on représente son allure par une courbe, comment l'algèbre et la géometrie s'aident mutuellement, comment le nombre et l'espace s'éclairent l'un l'autre, comment on détermine une tangente, une aire, un volume, comment on est amené a créer de nouvelles fonctions, de nouvelles courbes, à en étudier les propriétés. Ce sont ces notions et ces méthodes dont on a besoin pour lire les livres techniques où les mathématiques interviennent. Elles sont indispensables à celui qui veut comprendre quelque chose à ce mouvement scientifique qui s' accélère, à ces applications des sciences qui se multiplient, et qui de jour en jour, tendent à modifier plus profondément notre façon de penser et de vivre.

Jules TANNERY.

TWEEDE DEEL.

HOOFDSTUK VIII.

THEORIE VAN DE ONEINDIG KLEINEN.

Par. 1. ALGEMENE EIGENSCHAPPEN.

VIII, 1. Definities.

Een oneindig kleine (O.K.) is een veranderlijke die naar nul convergeert. Vermits de oneindig kleinen uit hun aard zelf veranderlijken zijn zou het logisch zijn deze in te delen in onafhankelijk veranderlijken en afhankelijk veranderlijken. Maar in de praktijk van de infinitesimaalrekening komen veelal vraagstukken voor, waarin de behandelde oneindig kleinen functie zijn van één onder hen ; deze noemen wij de hoofdoneindig kleine. (H.O.K.)

Zij α de H.O.K. en β een functie van α die samen met α naar nul convergeert (onverschillig langs welke rij zulks voor α geschiedt). Wij zeggen dan dat β oneindig klein is ten opzichte van de H.O.K. α . Dit laatste is dus slechts een andere zegwijze voor de uitdrukking $\lim_{\alpha \to 0} \beta = 0$

Opmerking : Is $\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = k$ of $\lim_{\alpha \to 0} [f(\alpha) - k] = 0$ dan is $f(\alpha) - k$ een O.K. met betrekking tot de H.O.K. α . Stellen wij dan $f(\alpha) - k = \omega$ dan is

$$f(\alpha) = k + \omega$$

waarin ω O.K. is met betrekking tot de H.O.K. α.

Voorbeelden :

1) men heeft $\lim_{\alpha \to 0} \alpha^3 = 0$ en $\lim (\alpha^2 + 2 \sin 3\alpha) = 0$; derhalve zijn α^3 en $\alpha^2 + 2 \sin 3\alpha$ O.K. ten opzichte van de H.O.K. α.

2) men heeft $\lim_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1$ of $\lim (\cos\alpha - 1) = 0$. Stellen wij $\cos \alpha - 1 = \omega$ dan is $\cos \alpha = 1 + \omega$, waarin ω o.k. is ten opzichte van de H.O.K.

VIII, 2. Onderlinge vergelijking van oneindig kleinen.

Zij β een O.K. ten opzichte van de H.O.K. α en beschouwen wij $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha}$

Aangenomen zijnde dat deze limiet bestaat, (twijfelachtig geval $\frac{0}{0}$) kunnen zich de volgende drie gevallen voordoen :

1) $\frac{\beta}{\alpha}$ heeft een eingelijke limiet die niet 0 is : dan heet β O.K. van dezelfde orde als α of O.K. van de eerste orde t.o.v. α.

2) $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$: dan is β O.K. van hogere orde dan α

Is dan echter $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^m}$ eindig en niet nul, dan zeggen wij dat β O.K. is van de n^e orde ten opzichte van α.

3) $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ dan zou men moeten zeggen dat β van lagere orde is dan α ; in dat geval zal men echter α als H.O.K. verwerpen en een andere H.O.K. kiezen bv. β.

Voorbeelden :

1) Is α de H.O.K. dan zijn $\sin\alpha$ en $\operatorname{tg}\alpha$ O.K. van dezelfde orde als α omdat $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ en $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1$ (II, 26).

2) Is α de H.O.K. dan is $1-\cos\alpha$ O.K. van hogere orde dan omdat

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \times \lim_{\alpha \to 0} \sin\frac{\alpha}{2} = 1 \times 0 = 0.$$

maar :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Derhalve is $1-\cos\alpha$ O.K. van de tweede orde ten opzichte van α.

VIII, 3. Algemene vorm van een O.K. die van de n^e orde is ten opzichte van de H.O.K.

Als $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^m} = k$, dan kan men schrijven $\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \omega$ waarin ω een O.K. is (VIII, 1) . Derhalve is dan

$$\beta = \alpha^n (k + \omega) = \alpha^n k + \alpha^n \omega .$$

Dit laatste is de algemene vorm van een O.K. die van de n^e orde is ten opzichte van α.

Elke O.K. β die van de n^e orde is t.o.v. α kan dus gesplitst worden in twee termen :

1) een term $\alpha^n k$ die van de n^e orde is t.o.v. α, want $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^n k}{\alpha^n} = k$;

dit deel heet het hoofddeel van de O.K. β t.o.v. de H.O.K. α.

2) een term $\alpha^n \omega$ die van een hogere orde is dan de n^e t.o.v. α; immers $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^n \omega}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{n-1} \omega = 0$.

Bijzonder geval : Is β van de eerste orde t.o.v. α dan kan men schrijven

$$\beta = \alpha (k + \omega) = \alpha k + \alpha \omega$$

Het hoofddeel van β is dan van dezelfde orde als α ; de andere term is van hogere orde.

Voorbeeld : Is $y = x^2 - 5x + 6$ dan is voor $x_1 = 4$ (III, 2)

$$\Delta y = 3 \Delta x + \Delta x^2$$

Kiest men hierbij Δx als H.O.K. dan is Δy O.K. van dezelfde orde als Δx ; $3 \Delta x$ is dan het hoofddeel van Δy.

VIII, 4. Gelijkwaardige of asymptotisch gelijke oneindig kleinen.

Twee oneindig kleinen heten gelijkwaardig of asymptotisch gelijk als zij hetzelfde hoofddeel hebben. Twee gelijkwaardige oneindig kleinen zijn derhalve van dezelfde orde t.o.v. de H.O.K.

Stelling : Nodig en voldoende opdat twee oneindig kleinen zouden asymptotisch gelijk zijn, is dat de limiet van hun verhouding 1 zij.

1) De voorwaarde is nodig :

Zijn β en β_1 asymptotisch gelijke oneindig kleinen, dan is

$$\beta = \alpha^n k + \alpha^n \omega \quad \text{en} \quad \beta_1 = \alpha^n k + \alpha^n \omega_1$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\beta_1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^n k + \alpha^n \omega}{\alpha^n k + \alpha^n \omega_1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{k + \omega}{k + \omega_1} = \frac{k}{k} = 1$$

2) De voorwaarde is voldoende:

Zij $\beta = \alpha^n k + \alpha^n \omega$ en $\beta_1 = \alpha^m k_1 + \alpha^m \omega_1$

dan is $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\beta_1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^n}{\alpha^m} \cdot \frac{k + \omega}{k_1 + \omega_1} = \frac{k}{k_1} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha^n}{\alpha^m} = 1$

Dit laatste is enkel mogelijk als $n = m$ en $k = k_1$.

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

Gevolgen :

1) Zijn twee oneindig kleinen β en β_1 asymptotisch gelijk dan is wegens $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\beta_1} = 1$: $\beta = \beta_1(1+\omega) = \beta_1 + \beta_1 \omega$ waarin ω een O.K. is.

2) Elke O.K. is asymptotisch gelijk aan haar hoofddeel.

Voorbeeld : Wegens $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ is de O.K. $\sin \alpha$ asymptotisch gelijk aan de O.K. α ; men heeft dan ook $\sin \alpha = \alpha (1+\omega)$ waarin ω een O.K. is.

VIII, 5. Het eerste substitutiebeginsel van de oneindig kleinen :

De limiet van de verhouding van twee oneindig kleinen verandert niet wanneer men één of beide vervangt door andere oneindig kleinen die er asymptotisch aan gelijk zijn.

Immers zijn β en γ twee O.K. die asymptotisch gelijk zijn resp. aan β_1 en γ_1 dan is $\beta = \beta_1 (1+\omega)$ en $\gamma = \gamma_1 (1+\omega_1)$ (VIII, 4) waaruit

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta_1(1+\omega)}{\gamma_1(1+\omega_1)} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta_1}{\gamma_1} \times \lim_{\alpha \to 0} \frac{1+\omega}{1+\omega_1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

VIII, 6. Het tweede substitutiebeginsel van de oneindig kleinen.

De limiet van een som van positieve oneindig kleinen waarvan het aantal onbeperkt toeneemt, verandert niet wanneer men deze oneindig kleinen vervangt door andere die er asymptotisch aan gelijk zijn.

Immers zijn $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ positieve oneindig kleinen en $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ positieve oneindig kleinen die er respectievelijk asymptotisch aan gelijk zijn. Verder nemen wij aan dat de som van de oneindig kleinen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$ een eigenlijke limiet heeft, wanneer hun aantal onbeperkt toeneemt terwijl elk van hen naar 0 convergeert.

$$\lim_{n \to \infty} (\beta_1 + \beta_2 + \ldots . \beta_m) = S$$

Wij hebben dan voor $\alpha \longrightarrow 0$ of voor $n \longrightarrow \infty$ (VIII, 4)

$$\lim \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \lim \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \lim \frac{\beta_3}{\gamma_3} = \ldots . = \lim \frac{\beta_m}{\gamma_m} = 1$$

Is nu $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$ de kleinste en $\frac{\beta_m}{\gamma_m}$ de grootste van de verhoudingen $\frac{\beta_i}{\gamma_i}$

dan kunnen wij schrijven, krachtens een stelling uit de Rekenkunde, die hier toepasselijk is omdat alle termen positief zijn:

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} < \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n} < \frac{\beta_n}{\gamma_n}$$

Aangezien nu $\lim \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \lim \frac{\beta_n}{\gamma_n} = 1$ is ook (II, 18)

$$\lim \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n} = 1 \quad \text{of}$$

$$\lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n) = \lim (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_n) = S.$$

VII, 7. Over de methode van de oneindig kleinen.

In de toepassingen van de wiskunde treft men vaak vergelijkingen aan, waarin de limiet van een van de voorkomende veranderlijken moet worden bepaald.

Als in deze vergelijking tevens oneindig kleinen voorkomen zal men vaak deze O.K. vervangen door hun hoofddeel en daarna slechts de O.K. van de laagste orde behouden en deze van hogere orde verwaarlozen.

Deze substituties wijzigen meestal de limiet niet ; want deze komt meestal voor als de limiet van een verhouding van twee O.K. en deze limiet verandert niet omdat de substituties neerkomen op het vervangen van O.K. door andere die er asymptotisch aan gelijk zijn (VIII, 5)

Voorbeeld : Wij beschouwen de functie y gedefinieerd door de betrekking : $(2\sin x - \operatorname{tg}^3 x)\, y = \operatorname{tg} x - x^2$. Wordt nu $\lim_{x \to 0} y$ gevraagd, dan diende dit volgens de methode van de limieten als volgt te worden berekend :

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x^2}{2\sin x - \operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - \frac{x^2}{\sin x}}{2 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin x}} = \frac{\lim \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} - \lim x \lim \frac{x}{\sin x}}{2 - \lim \operatorname{tg}^2 x \lim \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}} = \frac{1}{2}$$

Met de methode van de oneindig kleinen redeneert men als volgt : is x de H.O.K. dan zijn sin x en tg x asymptotisch gelijk aan x en worden dus door x vervangen; $\operatorname{tg}^3 x$ en x^2 zijn dan oneindig kleinen van hogere orde en worden derhalve verwaarloosd. De gegeven betrekking wordt dan als x een oneindig kleine is : $2xy = x$, wij verkrijgen dan evenals hierboven :

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Opmerking : Het is van het allergrootste belang er op te letten dat de O.K. die men in de vergelijking behoudt wel deze zijn van de laagste orde die effectief voorkomen.
Het kan immers voorkomen dat in een vergelijking die bv. schijnbaar O.K. van de eerste orde bevat, deze O.K. na herleiding tegenover elkaar wegvallen, in dit geval is het verwaarlozen van de O.K. van de tweede orde niet geoorloofd.

Par.2. DE DIFFERENTIAAL.

VIII, 8. Het begrip " differentiaal " .

Wij beschouwen de functie $y = f(x)$ die afleidbaar is in het punt x_1 en hebben dan in dit punt : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_1)$ (IV, 1)

Stellen wij $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_1) + \omega$ of $\Delta y = f'(x_1)\Delta x + \omega \Delta x$ (1)

Als nu $\Delta x \to 0$ kiezen wij Δx als H.O.K. ; in elk punt waar $f'(x_1) \neq 0$ is dan Δy een O.K. van dezelfde orde, terwijl ook ω samen met Δx O.K. is.

Uit (1) blijkt dat de aangroeiing Δy uit twee delen bestaat ; het eerste deel $f'(x_1)\Delta x$ is voor $\Delta x \to 0$ het hoofddeel van de O.K. Δy (VIII, 3) Dit eerste deel noemen wij de differentiaal van de functie in het punt x_1 en wij stellen het voor door dy ; derhalve is $dy = f'(x_1)\,\Delta x$ (2)

De differentiaal van een functie in een punt is dus het produkt van de afgeleide in dit punt met de arbitraire aangroeiing van de onafhankelijk veranderlijke.

Past men in het bijzonder de formule(2) toe op de functie $y = x$, dan is hiervoor $f'(x_1) = 1$ (IV, 8) ; voor deze functie is dus $dx = \Delta x$; men zegt dat de differentiaal van de onafhankelijk veranderlijke numeriek gelijk is aan de aangroeiing. Wegens deze laatste betrekking schrijft men (2) meestal als volgt :

$$\boxed{dy = f'(x_1)\,dx} \quad \text{of} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x_1)}$$

VIII, 9. Meetkundige interpretatie van de differentiaal.

Wij beschouwen opnieuw de figuur van IV, 2 en merken hierin op $\overline{P'Q'} = \overline{PR} = \Delta x$ en $\overline{RQ} = \Delta y$. Verder is $tg\,\alpha = f'(x_1) = \frac{\overline{RT}}{\overline{PR}}$ waaruit $\overline{RT} = f'(x_1)\,\Delta x$ en dus $\overline{RT} = dy$.

Merk op de figuur vooral het onderscheid op tussen $\Delta y = dy$:

$$\Delta y = \overline{RQ} \; ; \; dy = \overline{RT}$$

VIII, 10. Differentieerbare functies.

Een functie die afleidbaar is in een punt (eventueel afleidbaar naar links of rechts) heet ook differentieerbaar in dit punt (eventueel differentieerbaar naar links of rechts) . Het ware echter verkeerd te menen dat een functie die in een punt differentieerbaar is, in dit punt een welbepaalde differentiaal bezit ; de differentiaal in een punt hangt wegens $dy = f(x_1)\,\Delta x$ niet alleen af van x_1, maar tevens van de aangroeiing Δx in dit punt.

Een functie die afleidbaar is in een interval heet ook differentieerbaar in dit interval. Deze differentiaal die een functie is van x en Δ x wordt eveneens dy genoteerd , zodat wij dan hebben

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x} \quad \text{of} \quad \boxed{dy = f'(x)\,dx} \quad \text{en} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)} \qquad (4)$$

Aldus is de afgeleide te schrijven als een quotiënt van differentialen ; dit rechtvaardigt de benaming differentiaalquotiënt (IV, 1) en de notatie van Leibniz voor de afgeleiden (IV, 7)

VIII, 11. Differentiaal van een functie van een functie.

Zij y een differentieerbare functie van y en u een differentieerbare functie van x ; de formule voor de afgeleide van een functie van een functie (IV, 14) kan nu worden geschreven :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

en na vermenigvuldiging van beide leden met dx

$$dy = \frac{dy}{du} \times du \quad \text{of} \quad \boxed{dy = f'(u)\,du}$$

Merk op dat de formule (5) volledig analoog is met de formule (4) van VIII, 10. De differentiaal dy kan dus (5) worden berekend onverschillig of u de onafhankelijk veranderlijke is of zelf een functie van een andere veranderlijke.

VIII, 12. Regels voor het differentieren.

Uit de formules (4) en (5) van VIII, 10 en VIII, 11 volgt dat bij elke regel voor het afleiden ook een regel voor het differentiëren behoort.

Uit de afleidingsregels van het eerste deel van deze leergang volgen dan ook de volgende differentiaalformules. Zij gelden onverschillig of u, v, w onafhankelijk veranderlijken zijn of zelf functies van andere veranderlijken.

$$d(u+v-w) = du + dv - dw$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \qquad d(cu) = c\,du$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \qquad d\frac{c}{v} = -\frac{c\,dv}{v^2}$$

$$d\,u^n = n u^{n-1}\,du \qquad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$d\sin u = \cos u\,du \qquad d\cos u = -\sin u\,du$$

$$d\,tg\,u = \frac{du}{\cos^2 u} \qquad d\,cotg\,u = -\frac{du}{\sin^2 u}$$

$$d\,Bg\sin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \qquad d\,Bg\cos u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d\,Bg\,tg\,u = \frac{du}{1+u^2}$$

$$d\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\,du \qquad d\ln u = \frac{du}{u}$$

$$d\,a^u = a^u \ln a\,du \qquad d\,e^u = e^u\,du$$

$$d\,sh\,u = ch\,u\,du\,; \quad d\,ch\,u = sh\,u\,du\,; \quad d\,th\,u = \frac{du}{ch^2 u}$$

$$d\,arg\,sh\,u = d\ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) = \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$d\,arg\,ch\,u = d\ln\left(u \pm \sqrt{u^2-1}\right) = \frac{\pm\,du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$d\,arg\,th\,u = d\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \frac{du}{1-u^2}$$

VIII, 13. Toepassing van de methode van de oneindig kleinen op het rekenen met differentialen.

Het is van een vaak voorkomende vergissing van te menen dat een differentiaal een oneindig kleine is ; de differentiaal van een functie y = f (x) is immers het produkt van de afgeleide met de arbitraire aangroeiing (of de differentiaal) van de onafhankelijk veranderlijke.

Opdat een differentiaal oneindig klein zou zijn, moet dus aan twee voorwaarden worden voldaan :

1) de beschouwde functie moet afleidbaar (of differentieerbaar) zijn ;
2) de aangroeiing (of differentiaal) van de onafhankelijk veranderlijke moet onbeperkt naar nul convergeren .

Is echter aan deze voorwaarden voldaan, dan zijn de aangroeiing Δy en de differentiaal dy oneindig kleinen, en aangezien dy dan het hoofddeel is van Δy (VIII, 8) zijn deze oneindig kleinen asymptotisch gelijk.

In de toepassingen van de Infinitesimaalrekening vervangt men nu vaak de aangroeiing van een functie door haar differentiaal ; dit is voor de praktijk zeer voordelig want dy is veel gemakkelijker te berekenen dan Δy, maar het is niet nauwkeurig zolang men een eindige aangroeiing van x beschouwt.

Weet men echter op voorhand dat de oplossing van een vraagstuk neerkomt op het bepalen van een limiet voor $\Delta x \to o$, dan zal de vervanging van de aangroeiing door de differentiaal deze limiet meestal niet wijzigen (VIII, 7) want het komt dan neer op het verwaarlozen van oneindig kleinen van hogere orde. Een vaak voorkomend spraakgebruik is in dit laatste geval te zeggen dat men aan de onafhankelijk veranderlijke een elementaire aangroeiing heeft gegeven.

Opmerking : Practici vervangen soms Δy door dy, niet enkel als Δx" oneindig klein " is, maar ook als Δx " zeer klein " is ; dit is wiskundig natuurlijk niet correct, maar het levert voor de praktijk vaak een voldoende en gemakkelijk te berekenen benadering.

Voorbeelden :

1) Wij beschouwen een vierkant met zijde x, zodat de oppervlakte uitgedrukt wordt door de functie $y = x^2$; geven wij nu aan de zijde een aangroeiing Δx (of dx) , dan wordt de aangroeiing van de oppervlakte uitgedrukt door

$$\Delta y = (x + dx)^2 - x^2 = 2 x\, dx + dx^2$$

Beschouwen wij slechts een elementaire aangroeiing dx, dan mag de aangroeiing Δy vervangen worden door haar hoofddeel $dy = 2 x\, dx$: merk op dat dit laatste gemakkelijker te berekenen was door rechtstreeks de differentiaal dy te bepalen.

2) Wij beschouwen een bol met straal r, zodat de inhoud uitgedrukt wordt door de functie $V = \frac{4}{3} \pi r^3$; de aangroeiing

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi (r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(3 r^2 dr + 3 r\, dr^2 + dr^3\right)$$

is voor een elementaire aangroeiing van r te vervangen door de differentiaal

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

VIII, 14. Differentialen van hogere orde :

Wij beschouwen de functie $y = f(x)$ en onderstellen dat de opeenvolgende de afgeleiden bestaan, tenminste tot aan een zekere orde. Dan zijn de functies y', y'', y''' differentieerbaar (VIII, 10) en wij hebben :

$dy = y' dx$, $dy' = y'' dx$, $dy'' = y''' dx$ ..... enz. waarbij $dx = \Delta x$ (VIII, 8)

Zoals wij reeds in VIII, 10 hebben opgemerkt is dy geen functie van x alleen, maar een functie van x en dx (of Δx). Wij kunnen derhalve niet spreken van de differentiaal van dy.

Om toch de kunnen zeggen dat dy een differentiaal bezit, moet men dy door middel van een kunstgreep tot een functie van x alleen herleiden.
Met Leibniz spreken wij nu af aan dx (of Δx) steeds dezelfde waarde toe te kennen, onverschillig de beschouwde waarde van x, m.a.w. men behandelt dx als een constante ; deze afspraak is gewettigd, aangezien dx (of Δx) een arbitraire aangroeiing was.

De differentiaal van dy heet dan de differentiaal van de tweede orde of de tweede differentiaal van de functie y en wordt d (dy) of $d^2 y$ genoteerd ; op analoge wijze kunnen wij dan de differentialen van hogere orde dan de tweede definiëren.

Met de genoemde afspraak hebben wij derhalve

$$d(dy) = d^2y = d(y' dx) = dx\, dy' = dx \cdot y'' dx = y'' dx^2$$

$$d(d^2y) = d^3y = d(y'' dx^2) = dx^2 dy'' = dx^2 y''' dx = y''' dx^3$$

en algemeen $$\boxed{d^n y = y^{(n)} dx^n}$$

Er zij met nadruk op gewezen dat bovenstaande formules enkel geldig zijn, wanneer x de onafhankelijke veranderlijke is, want ze zijn gesteund op de eigenschap dat dx (of Δx) arbitrair is ; deze formules zijn derhalve niet zonder meer uit te breiden op een functie van een functie, wat voor de eerste differentiaal wel het geval was. (VIII, 11)

Opmerkingen : 1) Uit de laatste formule leidt men af $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$. Dit rechtvaardigt de notatie van Leibniz uit IV, 19 tevens rechtvaardigt dit ook voor $y^{(n)}$ de benaming differentiaalquotiënt van de n^e orde.

2) Kiest men Δx (of dx) als H.O.K. dan is $d^n y$ O.K. van de n^e orde .

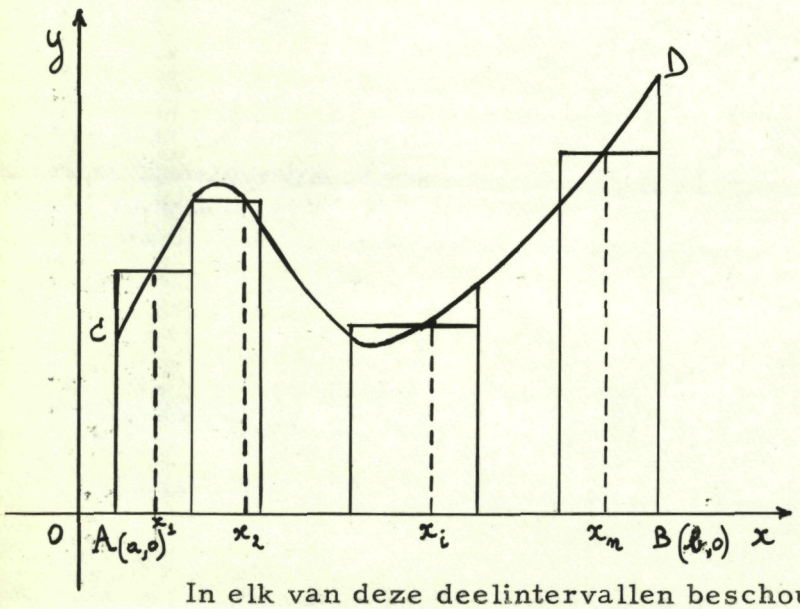
Par.3. DE BEPAALDE INTEGRAAL.

VIII, 15. Oppervlakte van een kromlijnig trapezium.

De integraalrekening is ontstaan met het berekenen van lengten, oppervlakten en inhouden van vlakke en ruimtefiguren, begrensd door kromme lijnen of gebogen opppervlakten.

Het eenvoudigste dezer vraagstukken, waartoe alle andere kunnen herleid worden, is het bepalen van de oppervlakte ingesloten tussen een kromme, de x-as en twee rechten, evenwijdig met de y-as ; een dergelijke figuur heet een kromlijnig trapezium.

Wij beschouwen de functie $y = f(x)$ die wij continu onderstellen in het afgesloten interval $[a, b]$; verder nemen wij voorlopig aan dat de functie in genoemd interval geen negatieve waarden aanneemt ; tenslotte onderstellen wij $a < b$.



Wij beschouwen verder de punten A (a;0) en B (b;0) en construeren in elk dezer punten de evenwijdige met de y-as, die de grafiek van de functie respectievelijk in C en D snijdt. Wij noemen S de oppervlakte van het kromlijnig trapezium ABCD. (* *)

Het interval $[a, b]$ wordt nu verdeeld in n gelijke of ongelijke deelintervallen, met respectieve lengte :

$\Delta x_1 , \Delta x_2 , \Delta x_3 \ldots \Delta x_i \ldots \Delta x_m$.

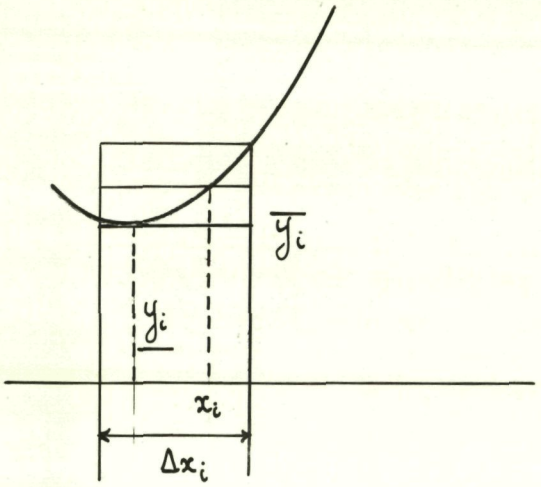
In elk van deze deelintervallen beschouwen wij een totaal willekeurig punt x_i (*) en construeren de rechthoek waarvan Δx_i de basis en $f(x_i)$ de hoogte is ; zij β_i de oppervlakte van deze rechthoek, dan is : $\beta_i = f(x_i)\,\Delta x_i$

(*) Er is dus ook geen bezwaar tegen, het punt x_i bv. in het beginpunt of het eindpunt van het beschouwde deelinterval te nemen.

(**) Het bestaan van deze oppervlakte wordt hierbij intuïtief aangenomen ; een zuiver aritmetische definitie van de bepaalde integraal kan slechts in een leergang op hoger niveau gegeven worden.

De som van de oppervlakten van al deze rechthoeken is dan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$



Aangezien de functie y = f(x) continu is in het interval Δx_i, neemt ze er een kleinste en een grootste waarde aan (III, 8) ; wij stellen deze respectievelijk voor door

$$\underline{y_i} \quad \text{en} \quad \overline{y_i}$$

Het is duidelijk dat $\underline{y_i} \leq f(x_i) \leq \overline{y_i}$ en

$\underline{y_i}\,\Delta x_i \leq f(x_i)\,\Delta x_i \leq \overline{y_i}\,\Delta x_i$ of

$$\underline{y_i}\,\Delta x_i \leq \beta_i \leq \overline{y_i}\,\Delta x_i \qquad (1)$$

Noemen wij nu verder γ_i de oppervlakte van het kromlijnig trapezium met basis Δx_i, dan is tevens :

$$\underline{y_i}\,\Delta x_i < \gamma_i < \overline{y_i}\,\Delta x_i \qquad (2)$$

Aangezien wegens de gemaakte afspraken, alle leden van (1) en (2) positief zijn, leiden wij hieruit af :

$$\frac{\underline{y_i}}{\overline{y_i}} < \frac{\beta_i}{\gamma_i} < \frac{\overline{y_i}}{\underline{y_i}} \qquad (3)$$

Wij laten nu $n \longrightarrow \infty$ en verstaan hieronder dat het aantal deelintervallen onbeperkt aangroeit terwijl de lengte van elk van deze deelintervallen naar nul convergeert. In deze omstandigheden is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\underline{y_i}}{\overline{y_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{y_i}}{\underline{y_i}} = 1 \qquad (4)$$

Hiertoe dient enkel te worden bewezen dat $\left|\frac{\overline{y_i}}{\underline{y_i}} - 1\right|$ kleiner wordt en blijft dan een willekeurig klein positief getal ε t.t.z.

$$\frac{\overline{y_i}}{\underline{y_i}} - 1 < \varepsilon \quad \text{of} \quad \overline{y_i} - \underline{y_i} < \varepsilon \underline{y_i} \qquad (5)$$

Is m de kleinste waarde van y in het interval $[a, b]$ dan zal steeds aan (5) voldaan zijn indien

$$\overline{y_i} - \underline{y_i} < \varepsilon m$$

Dit laatste drukt uit dat de schommeling van de functie in het interval Δx_i kleiner moet zijn dan ε_m ; wegens de stelling van de gelijkmatige continuïteit (III, 8) kan men steeds de deelintervallen van $[a, b]$ voldoende klein kiezen opdat aan deze voorwaarde voldaan zij.

Uit (3) en (4) volgt dan wegens II, 18 $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_i}{\gamma_i} = 1$

Derhalve zijn β_i en γ_i asymptotisch gelijke oneindig kleinen ; uit VIII, 7 volgt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = S$$

Met de aangenomen notatie hebben wij dus :

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \qquad (6)$$

De limiet van deze som noemen wij de bepaalde integraal van de functie $y = f(x)$ genomen tussen de grenzen a en b, en wij stellen deze voor door $\int_a^b f(x)\,dx$

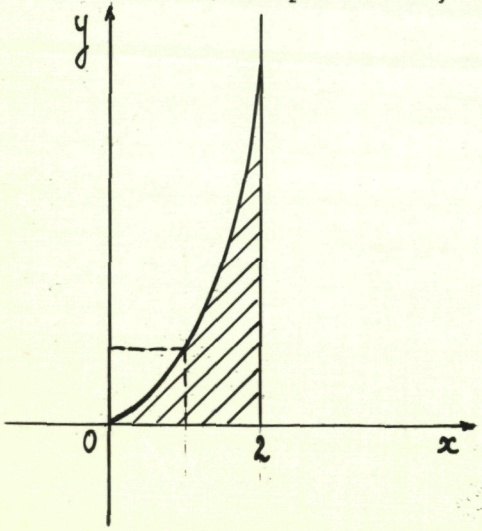
Derhalve is

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i} \qquad (7)$$

Het integraalteken is ontstaan uit de gotische letter S.

Het interval $[a, b]$ heet het integratie-interval; a heet de benedengrens en b de bovengrens ; de veranderlijke x is de integratie-veranderlijke en de functie f(x) is het integrandum.

Voorbeeld . Zij gevraagd de oppervlakte te bepalen van het gebied begrensd door de x-as, de parabool $y = x^2$ en de rechte $x = 2$.



Wij verdelen het interval, (0, 2) in n gelijke deelintervallen met lengte $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ wij kiezen het punt x_i in het eindpunt van deze deelintervallen zodat $x_i = \frac{2i}{n}$.

De gevraagde oppervlakte wordt dan wegens (7) gegeven door

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = 8 \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3}$$

$\frac{dy}{dx} = \cancel{\sin x}$

$2\cos x \, dx.$

dy

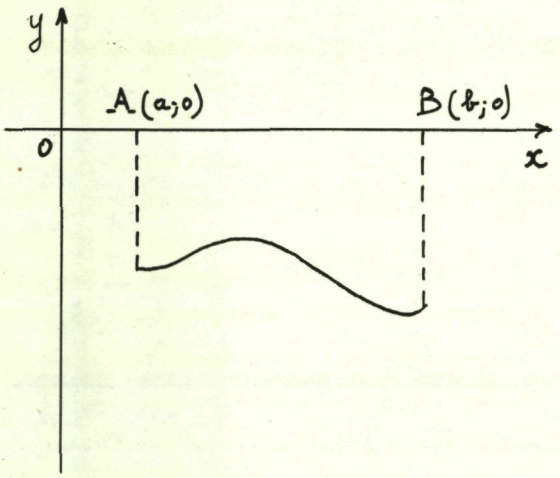
Nu is $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*)

Derhalve is $S = \frac{8}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{4}{3} \lim \frac{2n^2}{n^2} = \frac{8}{3}$

VIII, 16. Uitbreiding van de definitie.

De definitie-formule (7) van VIII, 15 werd opgesteld in de onderstellingen $f(x) \geqslant 0$ en $a<b$; wij zullen ons nu van deze onderstellingen ontdoen.

1) Onderstellen wij $f(x) \leqslant 0$ in het interval $[a, b]$. Beschouwen wij dan de functie $Y = -f(x)$ waarbij $-f(x) \geqslant 0$.



Is opnieuw S de oppervlakte van het kromlijnig trapezium ABCD dan kunnen wij op de functie $Y = -f(x)$ de redenering van VIII, 15 toepassen en dit zal ons geven :

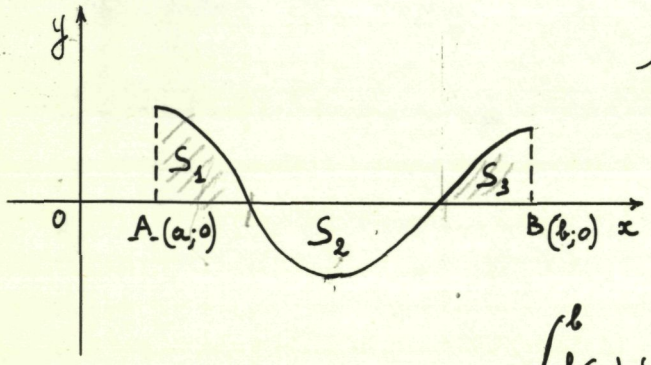
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[-f(x_i)\right] \Delta x_i$$

waaruit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = -S$$

Derhalve bestaat nog steeds de limiet uit het rechterlid van (7) uit VIII, 15 ; wij definiëren deze nog steeds als de bepaalde integraal van de functie f(x) genomen tussen de grenzen a en b. In dit geval hebben wij dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = -S$$



Indien de grafiek van $y = f(x)$ de x-as snijdt binnen het interval $[a;b]$ zal een combinatie van de bovenstaande gevallen ontstaan ; aldus kunnen wij bv. in bijgaande figuur definiëren :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = S_1 - S_2 + S_3$$

(*) Men bewijze zelf deze formule door in de identiteit $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, x achtereenvolgens door 0, 1, 2, 3..... n te vervangen.

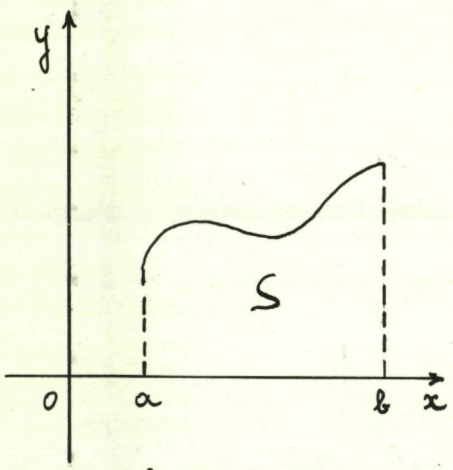
2) Onderstellen wij nu a>b ; dit komt dan hierop neer dat in de voorgaande redeneringen al de waarden van Δx_i negatief worden. Dit doet geen afbreuk aan het bestaan van de limiet uit het tweede lid van de definitieformule van de bepaalde integraal ; alleen verandert nu elke term van de som van teken, dus ook de som zelf alsmede naar limiet, d.i. de bepaalde integraal.

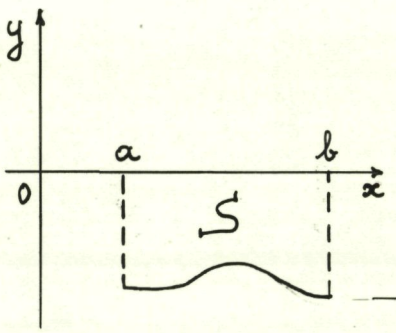
Wij kunnen dus algemeen definiëren :

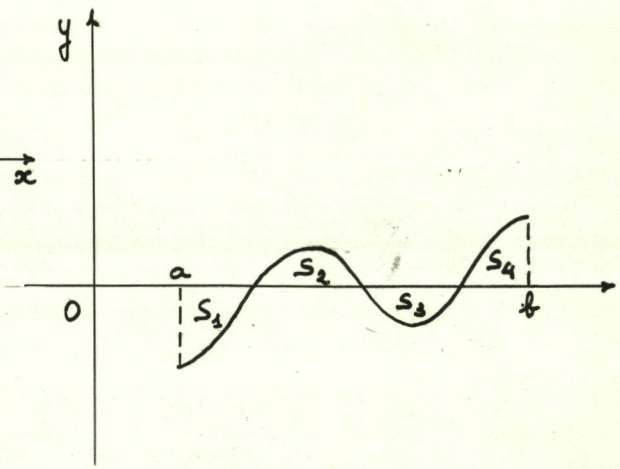
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \qquad (1)$$

en deze definitieformule geldt onder het enig beding dat f(x) in het beschouwde interval continu is.

Wat de meetkundige interpretatie van deze formule betreft zullen, na wat wij hierboven zagen, de volgende voorbeelden wel voor zichzelf spreken :







$$\int_a^b f(x)\,dx = S \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -S \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -S \qquad \int_b^a f(x)\,dx = S \qquad \int_b^a f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

Opmerkingen :

1) De oppervlakte die uitgedrukt wordt door $\int_a^b f(x)\,dx$ hangt af van de aard van de kromme $y = f(x)$ en de keuze van de integratiegrenzen ; dit eenmaal vastgelegd is deze oppervlakte een constante, die dus niet meer afhankelijk is van de integratieveranderlijke x ; stelt men dus die integratieveranderlijke door een andere letter voor, dan verandert zulks de waarde van de bepaalde integraal niet. Derhalve mag men schrijven :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2) Formule (1) van VIII, 16 definieert de bepaalde integraal; het voorbeeld van VIII, 15 wijst er echter reeds op dat deze formule, voor enigzins ingewikkelde functies, niet geschikt is om de waarde van de integraal te berekenen.

3) Is f (x) een continue functie in $[a, b]$ dan definieert formule (1) de bepaalde integraal als een limiet van sommen en het bestaan van deze limiet werd in VIII, 15 en VIII, 16 bewezen door aan te tonen dat deze limiet het maatgetal is van een oppervlak.

Eens dat het existentiebewijs van deze limiet geleverd is, bestaat dus het tweede lid van (1) (en dus ook de bepaalde integraal) zonder aan het begrip oppervlakte gebonden te zijn ; wij zullen dan ook later zien dat men de bepaalde integraal kan interpreteren als een lengte, een inhoud, een arbeid enz.

VIII, 17. Eigenschappen van bepaalde integralen.

a) Verwisseling van de grenzen : Uit VIII, 16 volgt onmiddellijk

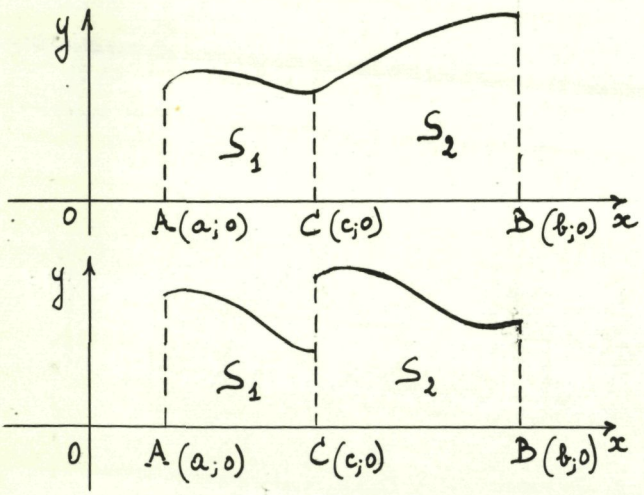
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

b) Splitsing van het integratie-interval : Daar in nevenstaande figuur

$$S = S_1 + S_2$$

heeft men onmiddellijk

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Ga zelf na dat deze formule nog doorgaat wanneer de kromme onder de x-as verloopt

Deze formule gaat nog door wanneer f(x) in c een eindige sprong vertoont.

c) Het buiten het integraalteken brengen van een constante :

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c\,f(x_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} c \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i =$$

$$c \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{of} \qquad \int_a^b c\,f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx .$$

Opmerkingen :

1) Is y = f (x) een even functie (I, 14) dan is $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2) Is y = f(x) een oneven functie (I, 14) dan is $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Men tone dit zelf aan.

VIII, 18. De afgeleide van een bepaalde integraal naar de bovengrens.

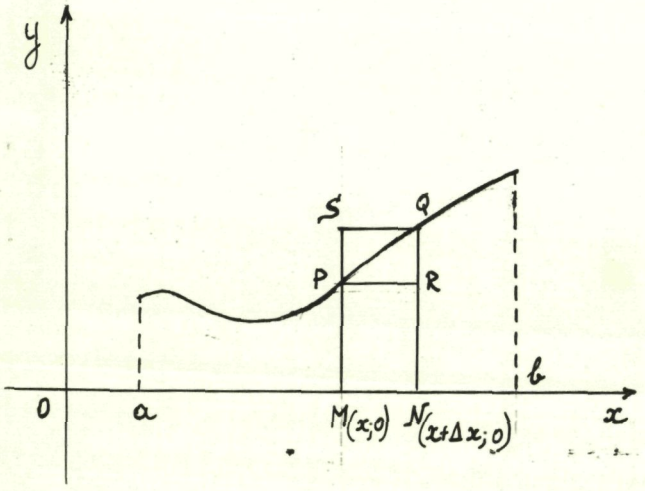
Neemt men als bovengrens van de bepaalde integraal de veranderlijke x in plaats van de constante b, dan wordt de bepaalde integraal een functie van x, voor te stellen door $I_{(x)} = \int_{a}^{x} f(u)\,du$.

Hierbij werd de integratieveranderlijke voorgesteld door u (VIII, 16) ten einde deze van de veranderlijke bovengrens te onderscheiden.

Aldus is deze bepaalde integraal een functie van haar bovengrens ; wij zullen bewijzen dat deze functie afleidbaar is en haar afgeleide bepalen.

Geven wij aan x een aangroeiing Δx dan wordt de aangroeiing voor I (x) :

$$I(x+\Delta x) - I(x) = \int_{a}^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_{a}^{x} f(u)\,du = \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du \quad (\text{VIII}, 17)$$



Wij nemen nu Δx voldoende klein opdat het open interval (x;x + Δ x) geen nulpunt en geen extremum van f (x) zou bevatten ; dan is de functie y = f(x) in genoemd interval monotoon stijgend of dalend en verloopt er helemaal boven of helemaal onder de x-as.

Om de gedachten te bepalen onderstellen wij $\Delta x > 0$, de functie f(x) monotoon stijgend en boven de x-as verlopend in het interval (x;x +Δx) (*)

Het is duidelijk dat de oppervlakte van het kromlijnig trapezium MNPQ dan begrepen is tussen de oppervlakten van de twee rechthoeken MNPR en MNSQ. Aldus :

(*) Men bewijze zelf de stelling in de andere gevallen.

$$f(x)\cdot\Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du < f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$f(x) < \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du < f(x+\Delta x)$$

Aangezien wij de functie f(x) continu hebben ondersteld is :

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x) \qquad (\text{III}, 3)$$

Derhalve is wegens II, 18 :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = f(x)$$

Wij hebben dan tenslotte :

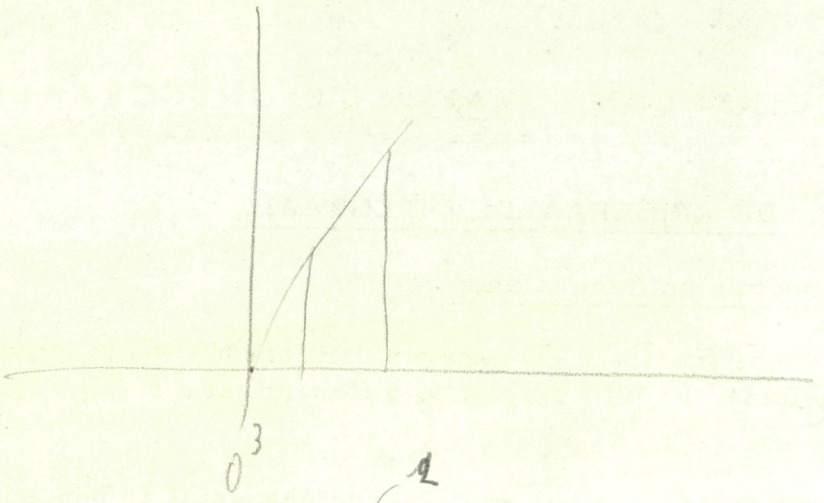
$$\frac{dI}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = f(x) \text{ en } dI = f(x)\,dx$$

De functie $I(x) = \int_a^x f(u)\,du$ heeft dus tot afgeleide de gegeven functie f(x) en tot differentiaal f (x) dx.

OPGAVEN.

1. Bepaal de oppervlakte begrepen tussen de x-as, de grafiek van $y = x^3$ en de rechten x = 1 en x = 2.

2. Bepaal de oppervlakte begrepen tussen de coördinaatassen, de rechte x = 1 en de grafiek van de kromme $y = e^x$.



$$\int_1^2 x^3 \, dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

HOOFDSTUK IX.

DE GRONDBEGINSELEN VAN DE INTEGRAALREKENING.

Par.1. DE ONBEPAALDE INTEGRAAL.

IX, 1. Primitieve functies en integralen.

Is een afleidbare functie F (x) gegeven dan leerden wij in de voorgaande hoofdstukken de afgeleide F' (x) = f(x) en de differentiaal d F (x) = f(x) dx hiervan bepalen.

Wij stellen ons thans voor het omgekeerde vraagstuk te behandelen d.w.z. als de functie f(x) gegeven is, de functies F (x) te bepalen waarvan f(x) de afgeleide of f (x) dx de differentiaal is.

Elk functie F(x) waarvan f(x) de afgeleide is, heet een primitieve functie (kortweg primitieve) of stamfunctie van f(x) ; elke functie F(x) waarvan f(x) dx de differentiaal is heet een integraal van f (x) dx.

De begrippen primitieve functie (of stamfunctie) en integraal dekken elkaar dus volkomen ; spoedig zal echter blijken dat de definitie van integraal (uitgaande dus van het begrip differentiaal) beter geschikt is voor praktische berekeningen.

De eerste vraag die zich nu stelt is ongetwijfeld of, een functie f(x) gegeven zijnde, een dergelijke primitieve functie wel bestaat.

Het antwoord is bevestigend zodra de functie f(x) beschouwd wordt in een interval waarin ze continu is ; in een dergelijk interval bestaat immers de functie I (x) gedefinieerd door

$$I(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

en wij weten dat $\frac{dI}{dx} = f(x)$ en $dI = f(x)\,dx$ (VIII, 17)

Deze functie I (x) is dus een primitieve van f(x) of een integraal van f(x) dx. Doch het is duidelijk dat een gegeven continue functie een onbeperkt aantal primitieven bezit, want is $\frac{dI}{dx} = f(x)$ dan is ook $\frac{d\,(I + C)}{dx} = f(x)$

als C hierin een willekeurige constante voorstelt.

IX, 2. Algemene primitieven en onbepaalde integralen.

Kent men dus een willekeurige primitieve F (x) van f(x), dan is F (x)+C eveneens een primitieve van f(x). De vraag stelt zich nu of men hiermede al de primitieven van f (x) gevonden heeft ; ook deze vraag dient bevestigend beantwoord ; uit de tweede gevolgstelling van V, 7 volgt immers dat elke andere primitieve d.w.z. elke andere functie waarvan f(x) de afgeleide is, van F (x) slechts van een additieve constante kan verschillen.

Daarom heet F (x) + C de algemene primitieve van $f(x)$; wegens het voorkomen van deze arbitraire constante, heet ze ook de onbepaalde integraal van f(x) en wordt $\int f(x)\,dx$ genoteerd.

Men heeft dus, zodra F (x) een primitieve van f (x) voorstelt

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Het symbool $\int f(x)\,dx$ bevat dus impliciet een arbitraire constante die integratieconstante wordt geheten.

De onbepaalde integraal van $f(x)\,dx$ bepalen heet de functie f(x) onbepaald integreren of kortweg integreren.

Deze functie f(x) kan steeds onbepaald geintegreerd worden in de intervallen waar ze continu is ; immers uit het bestaan van de functie I (x) die een bijzondere primitieve is volgt het bestaan van de algemene primitieve. Het zal echter vaak gebeuren dat de algemene primitieve van een elementaire functie (VII, 22) geen elementaire functie is ; deze integraal zelf definieert dan een nieuwe functie.

IX, 3. Integreren en differentiëren.

Uit de definities van IX, 2 volgt dus dat de betrekkingen

$$\boxed{d\,F(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du} \quad (1) \qquad \text{en} \qquad \boxed{\int f(u)\,du = F(u) + C} \quad (2)$$

volkomen gelijkwaardig zijn.

Telkens men dus beschikt over een differentiaalformule van de vorm (1) beschikt men ook over een integraalformule van de vorm (2) . Differentiëren en integreren zijn derhalve inverse bewerkingen.

De differentiaalformules van de vorm (1) zijn wegens VIII , 11 geldig, onverschillig of u de onafhankelijk veranderlijk is of zelf een functie van een andere veranderlijke; derhalve zijn ook de integraalformules die er uit afgeleid worden in beide gevallen geldig. Het is om deze reden dat het voordeliger is de functie F(u) te beschouwen als integraal van haar differentiaal, dan als primitieve van haar afgeleide.

IX, 5. Herleiding van integralen tot fundamenteelintegralen.

Zoals reeds in IX, 3 werd opgemerkt zijn de integraalformules van IX, 4 toepasselijk als u een onafhankelijke veranderlijke voorstelt of zelf een functie is van een andere veranderlijke. Deze opmerking laat vaak toe integralen tot fundamenteelintegralen te herleiden.

Zij bv. gevraagd de functie sin (x+2) onbepaald te integreren, dan kan men schrijven :

$$\int \sin(x+2)\,dx = \int \sin(x+2)\,d(x+2) \quad \text{want } d(x+2) = dx$$

$$= \int \sin u\,du \quad (\text{mits } x+2 = u \text{ te stellen})$$

$$= -\cos u + C = -\cos(x+2) + C.$$

Men zal nochtans in de mate van het mogelijk vermijden de hulpveranderlijke u in te voeren. Aldus in de volgende voorbeelden :

1) $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x\,d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$

2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$

OPGAVEN.

De volgende functies onbepaald integreren.

1) $4x^3$; 2) $\frac{1}{x^2}$; 3) $(2x-3)^2$; 4) $\sqrt{5x-1}$;

5) $\sqrt[3]{2x+3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$; 7) $x\sqrt{1-x^2}$ 8) $\frac{1}{2-3x}$;

9) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$; 10) $\frac{x^2}{1-x^3}$; 11) $\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$; 12) $\cos 2x$;

13) $\sin(2x+5)$; 14) $\operatorname{tg} x$; 15) $\operatorname{cotg} x$; 16) $\frac{1}{\cos^2 2x}$;

17) $\frac{3x}{1+x^2}$; 18) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$; 19) $\cos^3 x \sin x$; 20) a^{2x-1} ;

21) $\frac{e^x}{2e^x+1}$; 22) $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$; 23) $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; 24) $\frac{1}{x^2+4}$;

25) $\frac{1}{x^2+5}$; 26) $\frac{1}{9x^2+4}$; 27) $\frac{1}{7x^2+6}$; 28) $\frac{1}{x^2+2x+2}$;

29) $\frac{1}{4x^2+4x+2}$; 30) $\frac{1}{3x^2+2x+7}$; 31) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$; 32) $\frac{1}{\sqrt{1-12x^2}}$;

33) $\frac{1}{\sqrt{9x^2-1}}$; 34) $\frac{1}{\sqrt{7x^2+1}}$; 35) $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 36) $\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}}$;

37) $x^2 \sec^2 x^3$; 38) $e^{\sin x} \cos x$; 39) $\frac{1}{x \ln x}$;

Par.2. HET BEREKENEN VAN BEPAALDE INTEGRALEN.

IX, 6. De grondformule van de integraal rekening.

Men zou zich kunnen afvragen of het nuttig is van functies onbepaald te integreren. Hierop dient bevestigend geantwoord.

In VIII, 6 hebben wij immers opgemerkt dat de definitieformule van de bepaalde integraal niet voor practische berekeningen geschikt was. Wij zullen thans aantonen dat een bepaalde integraal practisch wel kan berekend worden, zodra men een primitieve van het integrandum kent.

Hiertoe beschouwen wij opnieuw de functie I (x) van VIII, 18. Deze functie is een primitieve van f(x) en kan dus van een willekeurige andere primitieve F(x) slechts van een additieve constante verschillen.

$$I(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x) + C \quad (1)$$

De functie I (x) is echter een welbepaalde functie van x, zodat de constante C uit (1) moet kunnen bepaald worden. Hiertoe stellen wij in (1) x = a ; daar nu de oppervlakte van het kromlijnig trapezium genomen tussen de grenzen a en a klaarblijkend nul is heeft men :

$$I(a) = \int_a^a f(u)\,du = F(a) + C = 0 \quad \text{of} \quad C = -F(a)$$

Aldus wordt (1)

$$\boxed{I(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a)} \qquad (2)$$

Stelt men hierin x = b, dan komt

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a)$$

of als wij de integratieveranderlijke opnieuw door x voorstellen

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad (3)$$

De bepaalde integraal van de continue functie f (x) genomen tussen de grenzen a en b is dus gelijk aan het verschil van de getalwaarden van een willekeurige primitieve van f(x) respectievelijk voor x = b en x = a .

(3) wordt vaak geschreven

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Uit (3) blijkt dus duidelijk dat men een bepaalde integraal kan berekenen zodra men een primitieve functie van het integrandum kent. Het grondvraagstuk van de integraalrekening nl. het berekenen van bepaalde integralen is derhalve herleid tot het onbepaald integreren van functies. In de volgende hoofdstukken zullen wij dit laatste dan ook verder uitdiepen.

Voorbeeld : Zij gevraagd te berekenen $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

Wij zullen eerst de functie $\sqrt{x}$ onbepaald integreren : $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Wegens (3) is dan : $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{14}{3}$.

In de praktijk schrijft men rechtstreeks :

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{14}{3}$$

IX, 7. Oneigenlijke bepaalde integralen.

Wij hebben $\int_a^b f(x)\,dx$ gedefinieerd in de volgende onderstellingen :

1) de functie f(x) is continu in het afgesloten interval $[a, b]$
2) het interval $[a, b]$ is eindig.

In sommige gevallen kan men toch de bepaalde integraal definiëren wanneer aan een dezer voorwaarden niet voldaan is. Men spreekt dan van een oneigenlijke bepaalde integraal.

IX, 8. Oneigenlijke bepaalde integralen met eindig integratie- interval.

Onderstel f(x) continu in het interval $(a, b]$ en bv. discontinu in a ; met $\delta > 0$ berekenen wij de bepaalde integraal van f(x) tussen de grenzen $a + \delta$ en b ; is F (x) een primitieve van f(x) dan is (IX, 6) :

$$\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a+\delta)$$

Deze bepaalde integraal is een functie van δ ; heeft deze functie een eigenlijke limiet voor $\delta \to 0$ dan heet deze limiet de oneigenlijke bepaalde integraal van f(x) tussen de grenzen a en b. Derhalve is dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\delta\to 0} F(a+\delta)$$

Heeft deze functie geen eigenlijke limiet voor $\delta \to$ o, dan stelt het symbool $\int_a^b f(x)\,dx$ geen getal voor.

Is de functie f (x) continu in $[a, b)$ en discontinu voor x = b, dan is , onder voorwaarde dat de limiet eigenlijk is :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} F(b-\delta) - F(a)$$

Men zal nu ook gemakkelijk de oneigenlijk bepaalde integraal definiëren zo f(x) continu is in (a, b) en discontinu in a en b.

Is f (x) discontinu in een inwendig punt c van $[a, b]$ dan definieert men mits de limieten eigenlijk zijn :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Voorbeelden :

1) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ het integrandum is discontinu voor x = o

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0} 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\delta^4 = \lim_{\delta\to 0} 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{\delta}\right) = 4$$

Het is merkwaardig dat het oppervlak zich hier onbeperkt uitstrekt zonder dat de oppervlakte naar oneindig divergeert.

$$2)\ \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to 0} \ln x \Big|_\delta^1 = \ln 1 - \lim_{\delta \to 0} \ln \delta = +\infty$$

IX, 9. Oneigenlijke integralen met oneindig integratie-interval.

Onderstel f (x) continu voor x > a ; met $\mu > a$ heeft men

$$\int_a^\mu f(x)\,dx = F(\mu) - F(a)$$

en deze bepaalde integraal is een functie van μ . Indien deze functie voor $\mu \longrightarrow +\infty$ een eigenlijke limiet heeft, dan heet deze limiet de oneigenlijke bepaalde integraal van f(x) tussen a en + ∞.

Derhalve $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\mu \to +\infty} \int_a^\mu f(x)\,dx = \lim_{\mu \to +\infty} F(\mu) - F(a).$

Op analoge wijze zal men definiëren, mits de limieten eigenlijk zijn :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to -\infty} \int_\mu^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\mu \to -\infty} F(\mu).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\mu \to -\infty \\ \mu' \to +\infty}} \int_\mu^{\mu'} f(x)\,dx = \lim_{\mu' \to +\infty} F(\mu') - \lim_{\mu \to -\infty} F(\mu).$$

Voorbeelden :

$$1)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\mu \to +\infty} \int_0^\mu e^{-x}\,dx = \lim_{\mu \to +\infty} -e^{-x} \Big|_0^\mu = -\lim_{\mu \to +\infty} e^{-x} + e^0 = 1$$

$$2)\ \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\mu \to -\infty} \int_\mu^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\mu \to -\infty} \operatorname{Bgtg} x \Big|_\mu^0 = \operatorname{Bgtg} 0 - \lim_{\mu \to -\infty} \operatorname{Bgtg} \mu = \frac{\pi}{2}$$

OPGAVEN.

1. Bereken de volgende bepaalde integralen :

1) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3) $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$;

4) $\int_1^3 (2x+1)^3\,dx$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x\,dx$; 6) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

2. Bereken de volgende oneigenlijke integralen :

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 3) $\int_0^2 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$;

4) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2x-1)^2}$; 5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; 6) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$;

7) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{x^3}\,dx$; 8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$; 9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$.

3. Toon aan dat 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ eindig is als $n>1$ en oneindig als $n \leq 1$.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$ eindig is als $n<1$ en oneindig als $n \geq 1$.

HOOFDSTUK X.

ALGEMENE INTEGRATIEMETHODES.

X, 1. Voorafgaande opmerking.

Op het eerste zicht zou men denken dat er algemene regels voor het integreren bestaan, analoog met deze die voor het afleiden werden bewezen. Zulks is echter niet waar en er bestaat o.m. geen algemene regel voor het integreren van een produkt of een quotiënt van functies.

Met behulp van een van de drie volgende algemene methodes kan men echter vaak de gegeven integraal zodanig transformeren dat deze herleid is tot een of meer fundamenteelintegralen.

Par.1. HET INTEGREREN DOOR SPLITSING.

X, 2. Transformatie van een onbepaalde integraal door splitsing.

Onderstel $u(x)$, $v(x)$ en $w(x)$ continue functies van x zodat

$$\int u\,dx = U(x) + C \; ; \quad \int v\,dx = V(x) + C \; ; \quad \int w\,dx = W(x) + C.$$

Nu is $d(U + V - W) = dU + dV - dW = (u + v - w)\,dx.$

Wegens IX, 3 dan :

$$\int (u + v - w)\,dx = U + V - W + C = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx,$$

aangezien de integratieconstante arbitrair is. Dus

$$\boxed{\int (u + v - w)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx}$$

De onbepaalde integraal van een algebraïsche som van functies is derhalve gelijk aan de algebraïsche som van de onbepaalde integralen van deze functies.

Al dus kan men elke veelterm in x integreren, doch door toepassing van bepaalde kunstgrepen integreert men met deze methode ook sommige andere functies.

Voorbeelden .

1) $\int (x^4+3x^2-5x+6)\,dx = \int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 6\int dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 6x + C.$

2) $\int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx = \int x\,dx + \int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + x + \ln x + C.$

3) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln C = \ln \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}.$

4) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= -\int \frac{d\cos x}{\cos x} + \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + \ln C$

$= \ln|C \operatorname{tg} x|.$

X, 3. Transformatie van een bepaalde integraal door splitsing.

Door toepassing van de grondformule uit IX, 6 vindt men met behoud van de notaties uit X, 2.

$$\int_a^b (u+v-w)\,dx = \Big[U(x) + V(x) - W(x)\Big]_a^b = U(b) + V(b) - W(b) - U(a) - V(a) + W(a)$$

$$= \Big[U(b) - U(a)\Big] + \Big[V(b) - V(a)\Big] - \Big[W(b) - W(a)\Big]$$

$$= \int_a^b u\,dx + \int_a^b v\,dx - \int_a^b w\,dx.$$

OPGAVEN.

1. De volgende functies onbepaald integreren.

1) $3 + 7\sqrt[3]{x^4}$; 2) $\frac{(x+1)^3}{x^2}$; 3) $\frac{2x+3}{x^2+1}$;

4) $\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $\frac{1+3x^2}{1+x^2}$; 6) $\sin^2\frac{x}{2}$;

7) $tg^2 x$; 8) $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 9) $\frac{1}{\sin x}$;

10) $\frac{1}{\cos x}$; 11) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; 12) $\frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}$;

13) $\left(e^x + e^{-x}\right)^2$; 14) $\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}$; 15) $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

2. De volgende bepaalde integralen berekenen :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$;

3) $\int_{-1}^{1} (x^2+x)^2\, dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cotg^2 x\, dx$.

Par. 2. HET INTEGREREN DOOR SUBSTITUTIE.

X 4. Transformatie van een onbepaalde integraal door substitutie.

Men zal vaak een onbepaalde integraal tot een fundamenteelintegraal kunnen herleiden door overgang op een nieuwe veranderlijke.

Stel inderdaad $x = \varphi(t)$ waarin φ een afleidbare functie van t voorstelt, dan is $dx = \varphi'(t)\, dt$ .....en derhalve

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \int [\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt}$$

Kan men nu de integraal uit het rechterlid in functie van t uitdrukken, dan zal men ook de integraal uit het linkerlid in functie van x berekend hebben als men slechts intervallen beschouwt waarin de functie $x = \varphi(t)$ ondubbelzinnig omkeerbaar is ; hiertoe volstaat het dat deze functie continu en monotoon zij (VII, 3).

Voorbeelden :

1) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ stel $\ln x = t$ of $x = e^t$ en $dx = e^t dt$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{t}{e^t}\, e^t dt = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C .$$

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

2) Soms kunnen verschillende substituties tot het gestelde doel leiden, aldus bv. voor

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{met} \quad -1 < x < 1$$

a) Stel $1-x^2 = t$, dan is $-2x\,dx = dt$ en $x\,dx = -\frac{dt}{2}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Stel $1-x^2 = t^2$ met $t > 0$, dan is $-2x\,dx = 2t\,dt$ en $x\,dx = -t\,dt$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-t\,dt}{t} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

c) Stel $x = \sin t$ met $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ dan is $dx = \cos t\,dt$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cos t\,dt = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Opmerking : Het is vaak overbodig de nieuwe integratie-veranderlijke uitdrukkelijk in te voeren ; doet men dit niet, dan is men in feite herleid tot de methode van X, 8. Aldus had men beide bovenstaande voorbeelden als volgt rechtstreeks kunnen behandelen.

1) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \frac{dx}{x} = \int \ln x\, d\ln x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

2) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

X, 5. Transformatie van een bepaalde integraal door substitutie.

Als men een onbepaalde integraal door de substitutie $x = \varphi(t)$ berekent, moet men achteraf terug de hulpveranderlijke t in functie van x uitdrukken.

Voor bepaalde integralen zullen de berekeningen echter veel korter uitvallen, indien men in de nieuwe integraal ook de substitutie op de integratiegrenzen uitvoert, zodat men dan niet naar de oorspronkelijke veranderlijke moet terugkeren.

Het spreekt echter vanzelf dat de integratiegrenzen van de nieuwe integraal ondubbelzinnig moeten bepaald zijn, derhalve mag de substitutiebetrekking $x = \varphi(t)$ met de waarde a en b van x slechts één waarde van t laten overeenstemmen. Dit zal het geval zijn als de functie $x = \varphi(t)$ ondubbelzinnig omkeerbaar is voor alle waarden van x in $[a, b]$.

Indien aldus met de waarden a en b van x de waarden α en β van t corresponderen, heeft men :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt}$$

Voorbeeld : $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

Stel hierin $x = \sin t$, dan is $dx = \cos t\,dt$.

De functie $x = \sin t$ is ondubbelzinnig omkeerbaar zo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; dan is $t = \text{Bg sin } x$. (IV, 12). Voor $x = -1$ is $t = -\frac{\pi}{2}$ en voor $x = 1$ is $t = \frac{\pi}{2}$ derhalve :

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t.\cos t\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (X, 2)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sin(-\pi)}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

OPGAVEN.

1. De volgende functies onbepaald integreren .

1) $(ax+b)^n$; 2) $\frac{1}{(a+x)^3}$; 3) $\frac{1}{a^2+b^2x^2}$;

4) $\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$; 5) $(3x+2)^2$; 6) $x\sqrt{x^2+1}$;

7) $\sqrt{ax+b}$; 8) $\frac{1}{x \ln x}$; 9) $\frac{1}{x\sqrt{\ln x - 1}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}}$; 11) $x\,e^{-x^2}$; 12) $\dfrac{e^{\operatorname{Bg}\operatorname{tg} x}}{1+x^2}$;

13) $\dfrac{x}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$; 14) $\dfrac{x^3}{x^4+1}$; 15) $\dfrac{a^{\operatorname{Bg}\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Bereken de volgende bepaalde integralen.

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x}$; 2) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

3) $\displaystyle\int_0^a \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2}$; 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$

Par.3. PARTIELE INTEGRATIE.

X, 6. Transformatie van een onbepaalde integraal door partiële integratie.

Zijn u en v twee afleidbare functies van x dan is

$$d(uv) = u\,dv + v\,du \qquad \text{(VIII, 12)}$$

Door onbepaalde integratie van beide leden

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{of}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Beschikt men over een methode om $\int v\,du$ te berekenen dan is hiermede ook $\int u\,dv$ berekend.

Voorbeelden :

1) $\int \ln x\,dx$ wij stellen $\ln x = u$, $x = v$ dan is $du = \frac{dx}{x}$ en

$$\int \ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x}$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C = x \ln \frac{x}{e} + C.$$

Men zal er zich echter aan gewennen de partiële integratie toe te passen zonder de hulpfuncties u en v uitdrukkelijk in te voeren.

2) $\int x e^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$

3) $\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx.$

Na een tweede partiële integratie komt nu :

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x\, dx\right)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C = (2-x^2)\cos x + 2x \sin x + C.$$

Aldus kunnen wij door n opeenvolgende partiële integraties de functies $x^n \sin x$ en $x^n \cos x$ onbepaald integreren .

4) $\int \sin x\, e^x dx = \int \sin x\, de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx \text{ ; waaruit}$$

$$2\int \sin x\, e^x dx = e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int \sin x\, e^x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

X, 7. Transformatie van een bepaalde integraal door partiële integratie.

Uit X, 6 volgt

$$\int u\, dv + \int v\, du = \int (u\, dv + v\, du) = \int (uv' + vu')\, dx = uv$$

Hieruit volgt dat uv een primitieve functie is van $u\,dv + v\,du$.
Uit de grondformule van IX, 6 volgt dan :

$$\int_a^b u\, dv + \int_a^b v\, du = u(b)v(b) - u(a)v(a) = uv\Big|_a^b \quad \text{of}$$

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

Men zal echter vaak eerst de onbepaalde integraal berekenen en daarna de grondformule van IX, 6 toepassen.

OPGAVEN.

1. De volgende functies onbepaald integreren.

1) $x \ln x$; 2) $x^5 \ln x$; 3) $\mathrm{Bg} \sin x$;

4) $\mathrm{Bg} \cos x$; 5) $\mathrm{Bg}\, \mathrm{tg}\, x$; 6) $x^3 \cos x$;

7) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$; 8) $(\ln x)^2$ 9) $\dfrac{\mathrm{Bg} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}\, x$;

10) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$; 12) $x^4 e^x$;

13) $x \,\mathrm{tg}^2 x$; 14) $x\, \mathrm{Bg}\, \mathrm{tg}\, x$; 15) $(x \ln x)^2$;

16) $x \cos^2 x$; 17) $e^{\mathrm{Bg} \sin x}$.

2. Bereken de volgende bepaalde integralen :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx$;

3) $\displaystyle\int_1^e \ln x \, dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx$.

3. Bewijs de volgende reductieformules :

1) $\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$;

2) $\int \cos^m x\,dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\,dx$;

3) $\int x^m \sin x\,dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx$;

4) $\int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx$.

$$\int x \cos^2 x \, dx.$$

$$= \int x \left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x}{2} dx + \frac{1}{2}\int x \cos 2x \, dx$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int \cos 2x \, d x^2$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2x \, x^2 - \frac{1}{4}\int x^2 d\cos 2x$$

$$- \frac{1}{4}\int$$

HOOFDSTUK XI.

BIJZONDERE INTEGRATIEMETHODES.

XI, 1. Voorafgaande opmerking.

Onder bijzondere integratiemethodes verstaan wij methodes die niet toepasselijk zijn op functies van welkdanige aard ook , maar slechts op sommige vrij algemene functieklassen.

Par.1. HET INTEGREREN VAN RATIONALE FUNCTIES.

XI, 2. Voorafgaande bewerkingen.

Wij beschouwen de functie f (x) die rationaal is in de veranderlijke x (I, 12) ; indien deze functie geheel is, dan werd de integratie reeds in X, 2 uitgevoerd ; wij moeten ons dus nog enkel bezig houden met de integratie van gebroken rationale functies.

Een gebroken rationale functie $R(x)$ kan nu steeds geschreven worden als het quotiënt van twee gehele rationale functies ; wij onderstellen verder dat zulks geschied is.
Is de noemer van deze functie een éénterm, dan is de integratie onmiddellijk (X, 2) ; wij nemen dus verder aan dat de noemer van deze functie een veelterm is.

Alvorens tot de integratie over te gaan, onderwerpen wij de rationale breuk R (x) aan de volgende bewerkingen :

1) Eventuele verwijdering van de ophefbare discontinuïteiten :

Indien teller en noemer van R(x) factoren gemeen hebben wordt de breuk eerst vereenvoudigd ; wij krijgen dan R (x) onder de gedaante $R(x) = \frac{T(x)}{N(x)}$

waarin T(x) en N(x) geen gemene factoren meer bezitten.

2) Eventuele afsplitsing van een gehele veelterm :

Als de graad van T (x) niet lager is dan deze van N(x) dan kunnen wij door algebraïsche deling van R (x) een veelterm G (x) afsplitsen ; deze veelterm is een constante als T (x) en N(x) van dezelfde graad zijn ; men heeft dan :

$$R(x) = \frac{T(x)}{N(x)} = G(x) + \frac{P(x)}{N(x)} .$$

De veelterm G(x) kan onmiddellijk geïntegreerd worden ; er blijft dan een onvereenvoudigbare rationale breuk $\frac{P(x)}{N(x)}$ over, waarvan de graad van de teller lager is dan deze van de noemer.

3) Ontbinding van de noemer in factoren van de eerste en de tweede graad.

Men bewijst in de hogere Algebra dat elke gehele veelterm in x, kan ontbonden worden in een produkt van lineaire en kwadratische factoren in x; de lineaire factoren beantwoorden hierbij aan de reële, de kwadratische factoren aan de toegevoegd imaginaire nulpunten van de veelterm.
Sommige dezer factoren kunnen herhaalde malen voorkomen.

Past men dit toe op de noemer N(x) dan kan men dus steeds schrijven :

$$N(x) = A(x-\alpha)^m (x-\beta)^n \ldots\ldots (x^2+p_1 x+q_1)^r (x^2+p_2 x+q_2)^t$$

waarin α, β . . . . . de reële nulpunten zijn van N(x) , A de eerste coëfficiënt van N (x) m, n, r, t. . ..... natuurlijke getallen en waarbij de kwadratische factoren een negatieve discriminant hebben.

Opgemerkt zij dat deze ontbinding neerkomt op het bepalen van de nulpunten van N(x) d. i. op het oplossen van een algebraïsche vergelijking.
Slaagt men er niet in N(x) aldus te ontbinden, dan faalt de methode in de praktijk.

4) Splitsing van $\frac{P(x)}{N(x)}$ in partieelbreuken.

De breuk $\frac{P(x)}{N(x)}$ kan steeds op één en slechts op één manier gesplitst worden in partieelbreuken van de volgende vorm :

$$\frac{P(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^m}$$

$$+ \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots\ldots + \frac{B_n}{(x-\beta)^n}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{a_1 x+b_1}{x^2+p_1 x+q_1} + \frac{a_2 x+b_2}{(x^2+p_1 x+q_1)^2} + \ldots + \frac{a_r x+b_r}{(x^2+p_1 x+q_1)^r}$$

$$+\frac{c_1 x+d_1}{x^2+p_1 x+q_1}+\frac{c_2 x+d_2}{(x^2+p_2 x+q_2)^2}+\ldots\ldots+\frac{c_t x+d_t}{(x^2+p_2 x+q_2)^t}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hierbij kunnen de constanten A_i , B_i , a_i , b_i , c_i , d_i ... door de methode van de onbepaalde coëfficiënten gevonden worden.

Na deze voorafgaande bewerkingen is de integratie van elke rationale functie wegens X, 2 herleid tot de berekening van integralen van de volgende typen :

$$I_n=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{J}_n=\int\frac{(ax+b)\,dx}{(x^2+px+q)^n}\ ;$$

waarin n een natuurlijk getal is en alle andere letters behalve x constanten voorstellen.

XI, 3. Het integreren van de type-integralen.

1) Integralen van het type I_n :

a) $n=1$: $I_1=\int\frac{dx}{x-\alpha}=\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=\ln|x-\alpha|+C$

b) $n>1$: $I_n=\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n}=\int(x-\alpha)^{-n}\,d(x-\alpha)$

$$=\frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{1}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}}+C$$

2) Integralen van het type $\mathcal{J}_n$:

Men kan steeds schrijven :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2 \quad \text{want } 4q-p^2>0$$

$$\mathcal{J}_n=\int\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx+\int\frac{\left(b-\frac{pa}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + c\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = a\,J_n + c\,J_n,$$

mits $b - \frac{ap}{2} = c$ te stellen

J_n is derhalve gesplitst in twee integralen die als volgt kunnen berekend worden :

a) $1^\circ.\ n=1 : J_1 = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C$

$2^\circ.\ n>1 : J_n = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int (x^2+px+q)^{-n}\,d(x^2+px+q) =$

$$\frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + C.$$

b) Met de substitutie $x + \frac{p}{2} = t$ komt er

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2 + k^2]^n} = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n}$$

$1^\circ\ n=1 : J_1 = \int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{k}\,\mathrm{Bg\,tg}\,\frac{t}{k} + C.$

$$2^\circ\ n>1 : J_n = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{t^2+k^2-t^2}{(t^2+k^2)^n}\,dt = \frac{1}{k^2}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}} - \frac{1}{k^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+k^2)^n}$$

$$= \frac{1}{k^2}J_{n-1} - \frac{1}{2k^2}\int t\,\frac{d(t^2+k^2)}{(t^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}J_{n-1} - \frac{1}{2k^2(1-n)}\int t\,d\left[\frac{1}{(t^2+k^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}J_{n-1} - \frac{1}{2k^2(1-n)}\cdot\frac{t}{(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{1}{2k^2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{t}{2k^2(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{1}{k^2}\left[1 - \frac{1}{2(n-1)}\right]J_{n-1}$$

$$= \frac{t}{2k^2(n-1)(t^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)k^2}\,J_{n-1}.$$

Aldus is de berekening van J_n herleid tot deze van J_{n-1}. Past men $(n-1)$ maal deze recursieformule toe dan kan men de berekening van J_n herleiden tot deze van J_1

Opmerking : Aangezien bij de integratie van rationale functies slechts transcendente integralen van de vorm $\ln u$ en $\mathrm{Bg\,tg}\,u$ voorkomen, kunnen wij besluiten dat dit de enige transcendente functies zijn die een rationale afgeleide hebben.

XI, 4. Voorbeelden : Na ontbinding van de veelterm N (x) uit de noemer kunnen de volgende gevallen zich voordoen :

a) de noemer bevat alleen reële factoren van de eerste graad en geen enkele van deze factoren is herhaald :

b) de noemer bevat alleen reële factoren van de eerste graad maar een of meer van die factoren zijn herhaald.

c) de noemer bevat, met of zonder factoren van de eerste graad, factoren van de tweede graad die niet meer kunnen ontbonden worden en waarvan geen enkele herhaald is.

d) de noemer bevat, met of zonder factoren van de eerste graad, factoren van de tweede graad, die niet meer kunnen ontbonden worden en waarvan één of meer herhaald zijn.

a) $\int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}\,dx$

Splitst men het integrandum in partieelbreuken, dan vindt men

$$\frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)} = -\frac{2}{(x+3)} + \frac{2}{(x-2)} + \frac{1}{(x+2)}$$

$$\int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}\,dx = -\int \frac{2\,dx}{x+3} + \int \frac{2\,dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -2\ln|x+3| + 2\ln|x-2| + \ln|x+2| + C.$$

$$= \ln\left|\frac{(x+2)(x-2)^2}{(x+3)^2}\right| + C.$$

b) $\int \frac{2x^2\,dx}{(x+2)^2(x-2)}$

Na splitsing in partieelbreuken komt nu

$$\frac{2x^2}{(x+2)^2(x-2)} = -\frac{2}{(x+2)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x+2)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-2)}$$

$$\int \frac{2x^2\,dx}{(x+2)^2(x-2)} = -\int \frac{2\,dx}{(x+2)^2} + \int \frac{\frac{3}{2}\,dx}{x+2} + \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{x-2}$$

$$= \frac{2}{x+2} + \frac{3}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + \ln C$$

$$= \frac{2}{x+2} + \ln C\sqrt{|(x+2)^3(x-2)|}.$$

c) $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx$

Splitsing in partieelbreuken, gevolgd door integratie geeft

$$\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x-1} + \int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1}$$

$$= 2\ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \ln C$$

$$= \ln\left[C(x-1)^2(x^2+x+1)\right]$$

d) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Na splitsing in partieelbreuken vindt men

$$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + C$$

XI, 5. Gebruik van andere methodes.

Het opzoeken van de nulpunten van N(x) en de splitsing in partieelbreuken vereisen vaak veel werk ; om dit werk te verlichten zal men zo mogelijk trachten een gepaste substitutie op de integratieveranderlijke te ontdekken of de gevraagde integraal door partiële integratie om te vormen.

Voorbeelden :

1) $I = \int \frac{4x^2-6x-1}{(2x-1)^3}\,dx$

In plaats van de algemene methode te gebruiken stellen wij $2x-1=t$ waaruit

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-t-3}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{2t+3}{4t^2} + C$$

$$= \ln\sqrt{|2x-1|} + \frac{4x+1}{4(2x-1)^2} + C.$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int \cos bx \, e^{ax} \, dx$$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int \sin bx \, e^{ax} \, dx$$

Dermogen c

Cal $P = U \cdot I$

$A = U \cdot I \cdot t$

$= R \cdot I^2 \cdot t$

$Q = \frac{1}{4,18} U I t$ cal

Kg. Vg.

$P = \frac{P_m}{2}$

2) $I = \int \frac{(1+x^2)\,dx}{1-x^2+x^4}$ berekent met het gemakkelijkst door een substitutie

$$I = \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)+x^2} = \int \frac{\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}$$

Stel men $\frac{x}{1+x^2} = t$ dan is $dt = d\left(\frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}dx$ waaruit

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = Bg\,tg\,t + C = Bg\,tg\,\frac{x}{1-x^2} + C.$$

OPGAVEN.

1. De volgende functies onbepaald integreren.

a) 1) $\frac{1}{x^2+x-2}$; 2) $\frac{4}{4x^2-1}$; 3) $\frac{2(x+1)}{x^2+10x+24}$;

4) $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$; 5) $\frac{17x-9}{x^3+2x^2-3x}$; 6) $\frac{x^3+1}{x^2-4}$;

7) $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$; 8) $\frac{x^2}{x^6-9}$; 9) $\frac{1}{2x^2-5x+2}$;

b) 1) $\frac{6}{(3x-1)^2(3x-2)}$; 2) $\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$; 3) $\frac{x^4+1}{x^3(x-1)}$;

4) $\frac{1}{x^4-2x^3+x^2}$; 5) $\frac{x^3+2}{(x-1)^4}$; 6) $\frac{x^2}{(x^2-3)^2}$;

c) 1) $\frac{6}{x^3+1}$; 2) $\frac{3x+4}{x^2-2x+4}$; 3) $\frac{x^2+x-1}{(x-1)(x^2-2x+2)}$;

4) $\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$; 5) $\frac{x^3}{3x^3+3x^2+x+1}$; 6) $\frac{1}{x^4+1}$;

d) 1) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$; 2) $\frac{x^3}{(x^2+3)^2}$; 3) $\frac{8x}{(2x+1)(4x^2+1)^2}$;

4) $\dfrac{4x^2-2x+1}{(4x^2+2x+1)^2}$; 5) $\dfrac{x^4-12x+9}{x^2(x^2-2x+3)^2}$; 6) $\dfrac{1}{(x^2+4)^3}$.

2. Bereken de volgende oneigenlijke integralen.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x^2}$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$.

Par.2. HET INTEGREREN VAN IRRATIONALE FUNCTIES.

XI, 6. Algemene opmerkingen.

Onder de fundamenteelintegralen (IX, 4) komen enkele integralen van irrationale functies voor

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{Bg}\sin u + C = -\operatorname{Bg}\cos u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln C\left(u+\sqrt{u^2+1}\right); \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln C\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|.$$

$$\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \qquad \text{als m een gebroken getal is.}$$

Voor deze laatste integraal hebben wij b.v.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + C = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + C.$$

Voor het integreren van irrationale functies zal men meestal trachten, door een gepaste substitutie, de integraal te transformeren tot de integraal van een rationale functie; deze laatste wordt dan geïntegreerd met de methodes van XI, par. 1.

Opgemerkt zij nochtans dat het niet steeds mogelijk is een dergerlijke substitutie te vinden ; het gebeurt dan ook vaak dat de integraal van een irrationale functie niet door elementaire functies kan worden uitgedrukt. (IX, 2) Wij beperken ons hier derhalve tot de gevallen waarin de gepaste substitutie op eenvoudige wijze kan gevonden worden.

XI, 7. Eerste geval : Het integrandum is een rationale functie van x en van gebroken machten van x.

Zij dus $\int R\left(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma} \ldots\right) dx$ waarin α, β, γ gebroken voorstellen.

Als nu n het K.G.V. is van de noemers van deze gebroken getallen, dan stelt $x = t^n$ Hieruit volgt :

$x^{\alpha} = t^{n\alpha} = t^{\alpha'}$ (waarin α een geheel getal is) en $dx = n t^{n-1} dt$.

Aldus is men herleid tot het berekenen van de integraal van een rationale functie.

Voorbeeld : $I = \int \frac{x^{\frac{1}{6}} + 1}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{5}{4}}} dx$.

Men stelt $x^{\frac{1}{12}} = t$ of $x = t^{12}$ met $t > 0$ zodat $dx = 12 t^{11} dt$.

$$I = \int \frac{t^2 + 1}{t^{14} + t^{15}} \cdot 12 t^{11} dt = 12 \int \frac{t^2+1}{t^3 + t^4} dt = 12 \int \frac{t^2+1}{t^3(t+1)} dt.$$

Na integratie volgens de methode van par. 1. komt :

$$I = 12\left[2 \ln t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - 2 \ln(t+1)\right] + C$$

$$= \ln\left[x^2 \left(x^{\frac{1}{12}} + 1\right)^{-24}\right] + 12 x^{\frac{1}{12}} - 6 x^{\frac{1}{6}} + C.$$

XI, 8. Tweede geval : Het integrandum is een rationale functie van x en van gebroken machten van een lineaire functie van x.

Zij dus $\int R\left[x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta} \ldots\right] dx$ waarin $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gebroken getallen zijn.

Zij opnieuw n het K.G.V. van de noemers van deze gebroken getallen; men stelt dan $ax + b = t^n$ waaruit :

$(ax+b)^{\alpha} = t^{n\alpha} = t^{\alpha'}$ (met α' geheel) ; $x = \frac{t^n - b}{a}$; $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

Men is opnieuw herleid tot het berekenen van de integraal van een rationale functie.

Voorbeeld : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\left(1 + \sqrt[3]{x-2}\right)}$

Men stelt $\sqrt[6]{x-2} = t$ of $x-2 = t^6$ met $t>0$, zodat $dx = 6t^5\,dt$.

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 6(t - \operatorname{Bg}\operatorname{tg} t) + C,$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x-2} - \operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt[6]{x-2}\right) + C.$$

XI, 9. Derde geval : Het integrandum is een rationale functie van x en van gebroken machten van een quotient van twee lineaire functies van x .

Zij dus $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right] dx$ waarin $\alpha, \beta \ldots$

gebroken getallen zijn.

Is n het K.G.V. van de noemers van deze gebroken getallen, dan stelt men $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

Men zal gemakkelijk aantonen dat men opnieuw komt tot het integreren van een rationale functie ; men vindt immers :

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} \;;\; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha} = t^{n\alpha} = t^{\alpha'} \;;\; dx = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}.$$

Voorbeeld :

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \text{hierin is} \quad -1 \leq x < 1.$$

Stel $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$ of $\frac{1+x}{1-x} = t^2$ (met $t>0$) en $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$; $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt$.

$$I = \int \frac{4t^2\,dt}{(t^2+1)^2} = -2\int t\,d\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = -\frac{2t}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{Bg}\operatorname{tg} t - \frac{2t}{t^2+1} + C$$

$$= 2\operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1+x}{1-x}+1} + C = 2\operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(1-x) + C$$

$$= 2\operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{wegens } 1-x>0)$$

Opmerking : Zoals reeds in XI, 5 voor rationale functies werd opgemerkt is ook hier het gebruik van de algemene methode niet steeds de kortste weg die naar het gestelde doel leidt ; aldus had men bovenstaande integraal ook als volgt kunnen berekenen.

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (\text{mits } -1 < x < 1) \quad (*)$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Bg}\sin x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) = \operatorname{Bg}\sin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Op het eerste zicht zou men zeggen dat beide methodes tot een verschillend resultaat hebben geleid ; dit verschil is echter maar schijnbaar, want men kan gemakkelijk nagaan dat de twee functies

$$2\operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} \quad \text{en} \quad \operatorname{Bg}\sin x - \sqrt{1-x^2}$$

als afgeleide de functie $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ hebben ; deze twee functies zijn dus primitieve functies van $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en ze kunnen dus slechts van een additieve constante verschillen ; de algemene primitieve van $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ kan derhalve onder de twee voorgekomen vormen worden geschreven.

Men kan dit eveneens nagaan door rechtstreeks de volgende identiteit te bewijzen :

$$2\operatorname{Bg}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{Bg}\sin x + \frac{\pi}{2} = \pi - \operatorname{Bg}\cos x \quad \text{voor } -1 \leq x < 1$$

XI, 10. Vierde geval : Het integrandum is een rationale functie van x en van $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Zij dus $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Als a = 0, dan is men herleid tot XI, 8. Wij beschouwen dus de gevallen $a > 0$ en $a < 0$

1) $a > 0$; dan kan men steeds schrijven

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \sqrt{a}\sqrt{x^2+px+q}$$

Deze substituties $\sqrt{x^2+px+q} = t - x$ (1) of $\sqrt{x^2+px+q} = t + x$ (2) (**)

herleiden dan de integraal tot deze van een rationale functie.

(*) Door toepassing van de oneigenlijke integralen gelden de resultaten ook in $[-1, 1]$.

(**) Men kan rechstreeks $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(t-x)$ stellen.

Nemen wij b.v. de substitutie (1), dan komt inderdaad :

$$x^2 + px + q = t^2 - 2tx + x^2 \; ; \quad x = \frac{t^2 - q}{p + 2t} \; ;$$

$$\sqrt{x^2 + px + q} = t - \frac{t^2 - q}{p + 2t} = \frac{t^2 + pt + q}{p + 2t}$$

$$dx = \frac{(p + 2t)2t - (t^2 - q)2}{(p + 2t)^2}\, dt = 2\,\frac{t^2 + pt + q}{(p + 2t)^2}\, dt$$

Voorbeeld : $I \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - x + 1}}\, dx.$

Stel $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ of $x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}$ met $t - x > 0$ dan komt :

$$x + 3 = \frac{t^2 - 1}{2t - 1} + 3 = \frac{t^2 + 6t - 4}{2t - 1} \; ; \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = t - \frac{t^2 - 1}{2t - 1} = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1} \; ;$$

$$dx = \frac{(2t - 1)2t - (t^2 - 1)2}{(2t - 1)^2} = 2\,\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\, dt$$

$$I = \int \frac{t^2 + 6t - 4}{2t + 1} \times \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} \times 2\,\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\, dt = 2 \int \frac{t^2 + 6t - 4}{(2t - 1)^2}\, dt$$

Stelt men nu 2 t - 1 = u (men kan ook splitsen in partieelbreuken) , dan vindt men :

$$I = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1} + \frac{7}{2} \ln(2t - 1) + C = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{7}{2} \ln\left(2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right) + C \quad (*)$$

2) $a < 0$

De drieterm $ax^2 + bx + c$ moet nu twee ongelijke reële nulpunten hebben die wij door α en β voorstellen ; immers was dit niet het geval, dan zou deze drieterm negatief zijn voor elke waarde van x en het integrandum ware in geen enkel interval gedefinieerd. Dan is echter

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

(*) Men moet niet $\ln|2t - 1|$ nemen want $2t - 1 = 2x - 1 + \sqrt{(2x - 1)^2 + 3} > 0$

Noemen wij nu α het kleinste nulpunt van de drieterm. Het integrandum is dan enkel gedefinieerd voor waarden van x die tot het interval (α, β) behoren. Men schrijve dan :

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$$

De substituties $\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\beta-x}\,.\,t$ (1) of $\sqrt{\beta-x} = \sqrt{x-\alpha}\,.\,t$

herleiden opnieuw de integraal tot deze van een rationale functie.

Immers met de substitutie (1) komt wegens $\alpha \leq x \leq \beta$ en $t \geq 0$

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{(\beta-x)^2 t^2} = (\beta-x)t \; ; \text{ en } x = \frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{(1+t^2)\,2\beta t - (\alpha+\beta t^2)\,2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{2t(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Voorbeeld : $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-2)(3-x)}}$ met $2 < x < 3$

Stel $\sqrt{x-2} = t\sqrt{3-x}$ dan komt

$$x = \frac{3t^2+2}{1+t^2} \; ; \; \sqrt{(x-2)(3-x)} = t(3-x) = \frac{t}{1+t^2} \; ; \; dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$I = \int \frac{1+t^2}{3t^2+2}\cdot\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{2\,dt}{3t^2+2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{Bg tg}\sqrt{\frac{3t}{2}} + C = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{Bg tg}\sqrt{\frac{3(x-2)}{2(3-x)}} + C.$$

Belangrijk bijzonder geval : Een vaak voorkomende integraal is van de vorm

$$I = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

en deze kan als volgt vlugger worden geïntegreerd dan met de algemene methode.

$$I = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2an}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(n-\frac{bm}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Nu is $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int (ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}\,d(ax^2+bx+c) = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$

Wat de integraal $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ betreft kan men de vorm $ax^2 + bx + c$

steeds herleiden tot een som of een verschil van twee kwadraten (zie Algebra) en aldus komen tot een van de fundamenteelintegralen (IX, 4)

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{of} \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}}$$

Voorbeeld : $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$= \int (x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+2x+2) - \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+2x+2} - \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

XI, 11. Vijfde geval : Binomiale integralen.

Men noemt bionomiale integraal, elke integraal van de gedaante

$$I = \int (a x^{\alpha} + b x^{\beta})^{\gamma}\,dx$$

waarin a en b willekeurige van nul verschillende getallen zijn en α, β, γ rationale exponenten waarvan minstens één gebroken.

Is $\alpha = \beta$ dan is de integratie onmiddellijk ; wij onderstellen verder dat $\alpha \neq \beta$ en kunnen dan steeds schrijven :

$$(ax^{\alpha} + bx^{\beta})^{\gamma} = x^{\alpha\gamma}(a + bx^{\beta-\alpha})^{\gamma} = x^{m}(a + bx^{n})^{p}$$

Hierin $\alpha\gamma = m$, $\beta - \alpha = n$; $\gamma = p$

Wij substitueren nu : $x^n = t$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}}\,dt$,

Zodat $I = \int t^{\frac{m}{n}} (a+bt)^p \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m-n+1}{n}} (a+bt)^p dt$

of als men $\frac{m-n+1}{n}$ door q voorstelt :

$$I = \frac{1}{n} \int t^q (a+bt)^p dt.$$

Deze integraal kan nu met behulp van ele mentaire functies worden uitgedrukt in de volgende drie gevallen :

1) Is p geheel, dan is men herleid tot het eerste geval (XI, 7)
2) Is q geheel, dan is men herleid tot het tweede geval (XI, 8)
3) Is p + q geheel, dan kan men schrijven :

$$I = \frac{1}{n} \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^q dt$$

en men is herleid tot het derde geval (XI, 9)

Voorbeeld : $I = \int \left(x^{\frac{9}{2}} - x^{\frac{15}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} dx = \int \left(x^{\frac{9}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} \left(1-x^3\right)^{-\frac{4}{3}} dx = \int x^{-6} \left(1-x^3\right)^{-\frac{4}{3}} dx$

Stellen wij $x^3 = t$, $x = t^{\frac{1}{3}}$, $dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$

$$I = \int t^{-2} (1-t)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{8}{3}} (1-t)^{-\frac{4}{3}} dt$$

Nu is $p + q = -\frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -4$ een geheel getal, zodat wij schrijven

$$I = \frac{1}{3} \int t^{-4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{4}{3}} dt$$

Wij zijn herleid tot een integraal uit het derde geval (XI, 9)
Men substitueert nu :

$$\frac{1-t}{t} = z^3 \text{ waaruit } t = \frac{1}{1+z^3} ; \quad dt = -\frac{3z^2 dz}{(1+z^3)^2}$$

$$I = -\frac{1}{3} \int (1+z^3)^{-4} z^{-4} \frac{3z^2}{(1+z^3)^2} dz = -\int \frac{(1+z^3)^2}{z^2} dz$$

$$= \frac{1}{z} - z^2 - \frac{1}{5} z^5 + C = \frac{9x^6 - 3x^2 - 1}{5x^5 \sqrt[3]{1-x^3}} + C$$

OPGAVEN .

De volgende functies onbepaald integreren :

1.1) $\dfrac{x - x^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2}}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{2 - 5x^2}}$; 5) $x\sqrt{x^2 + 2}$; 6) $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x^3 + 1}}$;

2.1) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}}}{x - x^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\dfrac{x - x^{\frac{2}{3}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}}$;

3.1) $\sqrt{5x + 4}$; 2) $x^2\sqrt[3]{x - 1}$; 3) $x(x - 1)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x + 2}}$; 5) $\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2x + 3}}$; 6) $\dfrac{1 - \sqrt[3]{x - 3}}{1 - \sqrt{x - 3}}$

4.1) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$; 3) $\sqrt[3]{\dfrac{x + 2}{x^4 - 2x^3}}$;

5.1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 3}}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9x + 96}}$; 5) $\dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 8x - 7}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 15}}$; 8) $\sqrt{x^2 - x + 1}$; 9) $\sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}}$;

10) $\sqrt{1 - x^2}$; 11) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; 12) $\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$;

13) $\dfrac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$; 14) $\dfrac{1}{x^4\sqrt{1 + x^2}}$; 15) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$;

6.1) $\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^3$; 2) $\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$; 3) $x^5\left(1 + x^6\right)^{\frac{1}{3}}$

4) $x^{\frac{5}{4}}\left(2 - x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(x^3 + x^6\right)^{\frac{4}{3}}$; 6) $\left(2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Par. 3. HET INTEGREREN VAN GONIOMETRISCHE FUNCTIES.

XI, 12. Algemene opmerkingen.

De tabel van de fundamenteelintegralen (IX, 4) bevat enkele integralen van goniometrische functies :

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C \qquad \int \cos u\, du = \sin u + C .$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{cotg} u + C .$$

Hierbij kunnen wij onmiddellijk voegen :

$$\int \operatorname{tg} u\, du = -\int \frac{d\cos u}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C ; \int \operatorname{cotg} u\, du = \int \frac{d\sin u}{\sin u} = \ln|\sin u| + C$$

Wij beperken ons verder hoofdzakelijk tot het geval dat het integrandum een rationale functie is van sin x en cos x.

XI, 13. Algemene methode.

Men kan $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ steeds transformeren in de integraal van een rationale functie door de substitutie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

Men heeft dan immers met $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\,\mathrm{Bg}\operatorname{tg} t , \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} .$$

Voorbeeld :

$$I = \int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\frac{3-3t^2}{1+t^2} + \frac{8t}{1+t^2}\right)} = -\int \frac{2\,dt}{(3t+1)(t-3)}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|3t+1| - \frac{1}{5}\ln|t-3| + \ln C = \ln C \sqrt[5]{\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|} .$$

Opmerking : Zeer vaak kan het gebruik van bijzondere methodes sneller tot het gestelde doel leiden dan de algemene methode ; men gebruike dus slechts de substitutie $tg \frac{x}{2} = t$ wanneer geen van de volgende bijzondere methodes van toepassing is.

XI, 14. Eerste bijzondere methode : de substituties sin x = t en cos x = t.

Integralen van de vorm $\begin{cases} \int R(\sin x)\cos x\,dx = \int R(\sin x)\,d\sin x \text{ en} \\ \int R(\cos x)\sin x\,dx = -\int R(\cos x)\,d\cos x \end{cases}$

kunnen blijkbaar door de substituties sin x = t en cos x = t , getransformeerd worden tot integralen van rationale functies.

Voorbeeld .

$$I = \int \frac{\sin 2x + \cos x}{2\sin x - 1}\,dx = \int \frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1}\cos x\,dx = \int \frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1}\,d\sin x$$

$$= \int \frac{2t+1}{2t-1}\,dt = t + \ln|2t-1| + C = \sin x + \ln|2\sin x - 1| + C .$$

IX, 15. Tweede bijzondere methode : de substitutie tg x = t.

Integralen van de vorm $\int R(tg\,x)\,dx$ kunnen door de substitutie tg x = t tot integralen van rationale functies worden herleid.

Men heeft dan immers met $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$x = Bg\,tg\,t \quad \text{en} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Het is hierbij niet noodzakelijk dat het integrandum expliciet in functie van tg x uitgedrukt zij ; aldus zijn b.v. $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, sin x cos x rationale functies van tg x , nl. :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} \; ; \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} \; ; \quad \sin x \cos x = \frac{tg\,x}{1+tg^2 x} .$$

Voorbeeld :

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{2t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,Bg\,tg\,(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,Bg\,tg\,(\sqrt{2}\,tg\,x) + C .$$

XI, 16. Derde bijzondere methode : gebruik van de eerste formules van Simpson.

Is het integrandum een produkt van sinussen of cosinussen of van sinussen en cosinussen, dan kan men dit met behulp van de formules

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

omzetten in sommen van sinussen en cosinussen ; men integreert dan verder door splitsing.

Voorbeeld :

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C .$$

XI, 17. Integratie van de functies $\sin^n x$ en $\cos^n x$ met n geheel.

a) n is oneven : men bevindt zich dan in het geval van XI, 14 en stelt dus $\sin x = t$ of $\cos x = t$

b) n is even en positief men kan tg x = t stellen (XI, 15) , doch men zal bij voorkeur met partiële integratie werken, of gebruik maken van de formules $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

c) n is even en negatief : men stelt tgx = t of cotg x = t.

Voorbeelden :

1) $$I = \int \sin^3 x \, dx = -\int \sin^2 x \, d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x) \, d\cos x$$

$$= -\int dt + \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

2) $\underline{I} = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{d}{1+t}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

3) 1e methode.

$I = \int \cos^4 x\, dx = \int \cos^3 x\, d\sin x = \cos^3 x \sin x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

$= \cos^3 x \sin x + 3\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x\, dx - 3I$

$4I = \cos^3 x \sin x + \frac{3}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$ of

$I = \int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\left[\cos^3 x \sin x + \frac{3\sin x \cos x}{2} + \frac{3x}{2}\right] + C$

2e methode.

$I = \int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + \int \cos 2x\, d(2x) + \int \cos^2 2x\, dx\right]$

$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 4x}{8} + \sin 2x + \frac{3x}{2}\right] + C$

Met de formules van de goniometrie toont men gemakkelijk aan dat beide resultaten overeenstemmen.

4) $\underline{I} = \int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)^2\, d\operatorname{tg} x$

$= \int (\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1)\, d\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C.$

XI, 18. Integratie van de functie $\sin^m x \cos^m x$, met m en n geheel.

a) m of n is oneven ; men stelt $\sin x = t$ of $\cos x = t$ (XI, 14)

b) m en n zijn even en positief ; men kan tg x = t stellen (XI, 15) doch men zal bij voorkeur met partiële integratie werken, of gebruik maken van de formules :

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$.

c) m en n zijn even en niet beide positief : men stelt tg x = t (XI, 15)

Opmerkingen :

1) Is m of n positief en even, dan kan men $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ of $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ stellen en aldus de integraal herleiden tot een som van integralen behandeld in XI, 17.

2) Ook als m en n oneven zijn en beide negatief is de substitutie tgx = t voordelig.

3) De integralen van XI, 17 en XI, 18 kunnen ook met recursieformules worden berekend (zie aanhangsel) .

Voorbeelden :

1) $$I = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x \, d\cos x$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

2) $$I = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x \, d \sin 2x = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C$$

3) $$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, d\,tg\,x = \int \left(\frac{1+tg^2 x}{tg\,x}\right)^2 d\,tg\,x$$

$$= \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2}\, dt = \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C = \frac{tg^3 x}{3} + 2\,tg\,x - cotg\,x + C$$

XI, 19. Integratie van irrationale functies van sin x en cos x.

Men kan dergelijke integralen door de substituties $tg\frac{x}{2} = t$, $\sin x = t$, $\cos x = t$ of tg x = t herleiden tot de integraal van een irrationale functie van t.
Is deze laatste integreerbaar met een van de methodes van par. 2. dan kan de integratie volledig worden uitgevoerd.

Voorbeeld :

$$I = \int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\sin^2 x + \sin x \cos x + 2\cos^2 x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2}} \quad \text{voor } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Met de substitutie tg x = t komt

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 2}} = \ln\left(2t + 1 + 2\sqrt{t^2+t+2}\right) + C \quad \text{(Methode van XI, 10)}$$

$$= \ln\left(2\operatorname{tg} x + 1 + 2\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2}\right) + C.$$

XI, 20. Goniometrische substituties bij het integreren van irrationale functies.

Bij integralen van de vorm

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \; ; \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx \; ; \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx.$$

zal men vaak respectievelijk stellen

$$x = a\sin t \text{ of } x = a\cos t \; ; \quad x = a\operatorname{tg} t \text{ of } x = a\operatorname{cotg} t \; ; \quad x = a\sec t \text{ of } x = a\operatorname{cosec} t,$$

aldus is men herleid tot het integreren van een rationale functie van sin t en cos t.

Voorbeeld :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \; ; \quad \text{Stel } x = \operatorname{tg} t \text{ met } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \quad \text{dan komt}$$

$$I = \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)^3}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t \sec^3 t} = \int \cos t\,dt = \sin t + C$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Opmerking : In de algebra wordt aangetoond dat een drieterm van de tweede graad steeds kan geschreven worden onder de vorm van een som of een verschil van twee kwadraten.
Derhalve zijn ook de functies $R\left(x\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ (XI, 10) integreerbaar door een goniometrische substitutie.

OPGAVEN.

De volgende functies onbepaald integreren ;

a)1) $\dfrac{1}{4 + 3\cos x}$; 2) $\dfrac{1}{3 + 5\cos x}$; 3) $\dfrac{1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$;

4) $\dfrac{1}{2\sin x - \cos x + \sqrt{5}}$; 5) $\dfrac{\cos x}{2\cos x + 3}$; 6) $\dfrac{1}{2\cos x + \sin x - 1}$;

b)1) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$; 2) $\dfrac{\sin 2x - \cos x}{\sin^2 x + 3\sin x}$; 3) $\dfrac{\cos 2x \sin 2x}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x}$;

c)1) $\operatorname{tg}^3 x$; 2) $\operatorname{tg}^4 x$; 3) $\dfrac{1}{4\cos^2 x - \sin^2 x}$;

4) $\dfrac{1}{3\cos^2 x + 8\sin^2 x + 1}$; 5) $\dfrac{1}{\sin^2 x - \sin x \cos x - 6\cos^2 x}$;

d)1) $\cos 5x \cos 4x$; 2) $\sin 5x \sin 3x$; 3) $\cos x \cos 2x \cos 3x$;

e)1) $\cos^5 x$; 2) $\sin^7 x$; 3) $\sin^4 x$;

4) $\sin^6 x$; 5) $\dfrac{1}{\sin^3 x}$; 6) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$;

f)1) $\sin^3 x \cos^4 x$ 2) $\sin^4 x \cos^2 x$; 3) $\dfrac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}$;

4) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$; 5) $\dfrac{\sin^5 x}{\cos x}$; 6) $\dfrac{8\cos^6 x}{\sin^5 x}$;

g)1) $\sqrt{\dfrac{2 - \cos x}{2 + \cos x}}\sin x$; 2) $\cos x \sqrt{\cos^2 x - 3\sin^2 x}$; 3) $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3}}$;

h)1) $\dfrac{1}{(4 - x^2)^{3/2}}$; 2) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{(1 - x^2)^3}}$; 3) $x\sqrt{4 - 9x^2}$;

4) $\dfrac{1}{x^2(1 + x^2)^{3/2}}$; 5) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 6) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

HERHALINGSOPGAVEN. (*)

De volgende functies onbepaald integreren :

1) $\dfrac{e^{tg\,x}}{\cos^4 x}$; 2) $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$; 3) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$;

4) $\dfrac{(Bg\,tg\,x)^2}{1+x^2}$; 5) $x\,e^x \cos x$; 6) $\sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{x^2}}$;

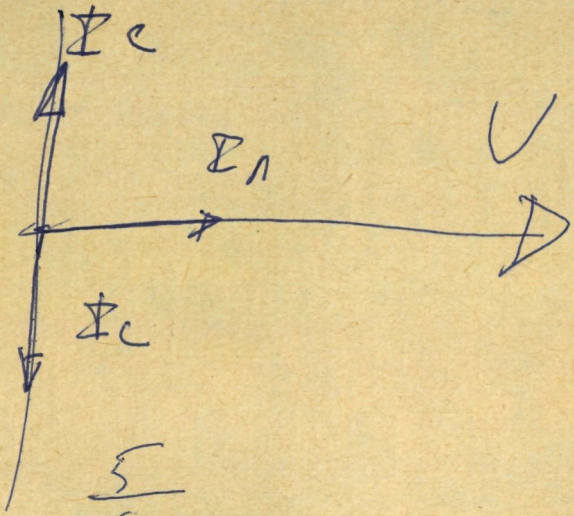
7) $\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\dfrac{x}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$; 9) $\dfrac{4+\cos x}{4-5\cos x}$;

10) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$; 11) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$; 12) $\dfrac{2\sin x + \cos x + 1}{2\cos x + \sin x + 1}$;

13) $3x^2\,Bg\,tg\,x$; 14) $x\,e^{\sqrt{x}}$; 15) $\cos x\sqrt{\cos 2x}$;

16) $\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; 17) $\ln\dfrac{x-2}{x-1}$; 18) $\dfrac{x^3}{x^4+x^2+1}$.

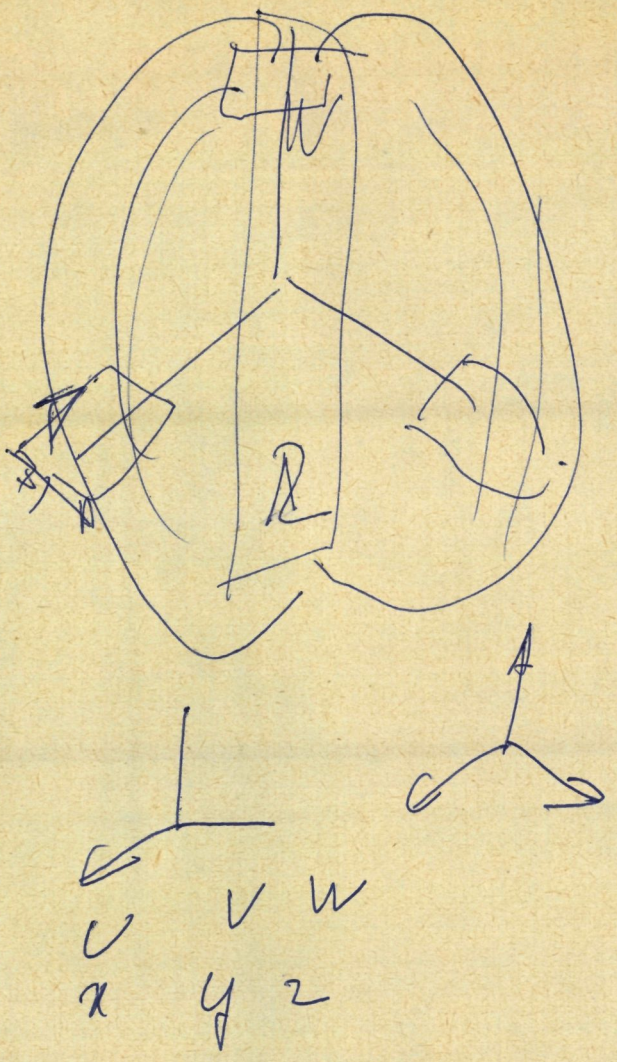
(*) Om gemakkelijk de klasse terug te vinden tot dewelke de verschillende types van integralen behoren raadplege men het bijvoegsel van deze leergang : " Enkele integralen en hun uitkomsten " door Dr. Ed. Henzen en Lic. R. Louwagie.



$\frac{5}{6}$

$\frac{6}{5}$

$\underline{x} = \quad U = \underline{x}\sqrt{\quad + (\quad - \frac{1}{\omega c}$


u v w
x y z

HOOFDSTUK XII.

DE FORMULES VAN TAYLOR EN MACLAURIN.

XII, 1. De stelling van Taylor. (*)

Wij beschouwen de functie y = f (x) en onderstellen deze n maal afleidbaar in het interval $[o, h]$; verder gaan wij uit van de betrekking (IX, 6)

$$f(h) - f(o) = \int_o^h f'(x)\,dx \qquad (1)$$

Wij bekomen nu achtereenvolgens door partiële integratie

$$\int_o^h f'(x)\,dx = -\int_o^h f'(x)\,d(h-x) = -(h-x)f'(x)\Big|_o^h + \int_o^h (h-x)\,df'(x) = hf'(o) + \int_o^h (h-x)f''(x)\,dx$$

$$\int_o^h (h-x)f''(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_o^h f''(x)\,d(h-x)^2 = -\frac{1}{2}(h-x)^2 f''(x)\Big|_o^h + \frac{1}{2}\int_o^h (h-x)^2\,df''(x) = \frac{h^2}{2}f''(o) + \frac{1}{2}\int_o^h (h-x)^2 f'''(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int_o^h (h-x)^2 f'''(x)\,dx = -\frac{1}{3!}\int_o^h f'''(x)\,d(h-x)^3 = -\frac{1}{3!}(h-x)^3 f'''(x)\Big|_o^h + \frac{1}{3!}\int_o^h (h-x)^3\,df'''(x) = \frac{h^3}{3!}f'''(o) + \frac{1}{3!}\int_o^h (h-x)^3 f^{IV}(x)\,dx$$

Indien wij aldus n-1 maal partieel integreren en telkens de gevonden integralen door hun uitgewerkte waarde vervangen vinden wij tenslotte

$$f(h) = f(o) + h f'(o) + \frac{h^2}{2!}f''(o) + \frac{h^3}{3!}f'''(o) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(o) + R_n \qquad (2)$$

De term R_n heet de sluitterm ; deze is gelijk aan

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_o^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx$$

XII, 2. Transformatie van de sluitterm :

Het is over het algemeen niet gemakkelijk de sluitterm in de boven - staande vorm te berekenen. Zoals weldra uit de toepassingen zal blijken is het echter meestal voldoende een bovengrens van deze sluitterm te bepalen.

(*) John Brook TAYLOR : Engels wiskundige ; 1695-1731.

Hiertoe verdelen wij het interval $[0, h]$ in m delen met lengte Δx_i en beschouwen in elk dezer deelintervallen een willekeurig punt x_i . Aangezien wij de functie $f(x)$ n maal afleidbaar onderstelden in het interval $[0,h]$ is $f^{(n)}(x)$ in dit interval continu (*) en heeft er dus krachtens de stelling van Weierstrass (III, 8) een kleinste en een grootste waarde ; zijn deze respectievelijk w en W, dan is

$$w \leq f^{(n)}(x_i) \leq W$$

Om de gedachten te bepalen onderstellen wij nu $h>0$;(toon zelf aan dat de stelling doorgaat voor $h < 0$) dan is $h - x_i > 0$ en $\Delta x_i > 0$ zodat wij mogen schrijven

$$w\,(h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i \leq (h-x_i)^{n-1} f^{(n)}(x_i)\,\Delta x_i \leq W\,(h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i$$

Na optelling van de overeenkomstige leden van deze ongelijkheden voor de m deelintervallen

$$w \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1} f^{(n)}(x_i)\,\Delta x_i \leq W \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i$$

Laat nu $m \to \infty$ in de zin dat het aantal deelintervallen onbeperkt aangroeit terwijl elk dezer intervallen naar nul convergeert;dan is krachtens II, 18 :

$$w \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1} f^{(n)}(x_i)\,\Delta x_i \leq W \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} (h-x_i)^{n-1}\,\Delta x_i$$

en krachtens de definitie van de bepaalde integraal (VIII, 16) is dit

$$w \int_0^h (h-x)^{n-1}\,dx \leq \int_0^h (h-x)^{n-1} f^{(n)}(x)\,dx \leq W \int_0^h (h-x)^{n-1}\,dx$$

$$-w\,\frac{(h-x)^n}{n}\Big|_0^h \leq \int_0^h (h-x) f^{(n)}(x)\,dx \leq -W\,\frac{(h-x)^n}{n}\Big|_0^h$$

$$\frac{w h^n}{n} \leq (n-1)!\,R_n \leq \frac{W h^n}{n}$$

$$w \leq \frac{n!}{h^n} R_n \leq W$$

Derhalve is $\frac{n!}{h^n} R_n$ gelegen tussen de grootste en de kleinste waarde die $f^{(n)}(x)$ in $[0, h]$ kan aannemen.
Krachtens het gevolg van de stelling van Bolzano-Cauchy (III, 8) is er minstens één inwendig punt c van het interval $[0,h]$ waarvoor

---

(*) Is $f(x)$ n maal afleidbaar in $[0, h]$ dan is $f^{(n)}(x)$ in dit interval gedefinieerd en voor een elementaire functie ook continu (VII , 22) Voor eventuele toepassing op niet-elementaire functies is de continuïteit van $f^{(n)}(x)$ een bijkomende onderstelling.

$$f^{(n)}(c) = \frac{n!}{h^n} R_n \quad \text{of} \quad R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c) \qquad (3)$$

Deze belangrijke bijzondere vorm van de sluitterm heet de sluitterm van Lagrange.

XII, 3. De formule van Maclaurin (*)

Stellen wij in het voorgaande $\frac{c}{h} = \theta$ of $c = \theta h$; aangezien $\frac{c}{h} < 1$ is θ dan een niet nader bepaald getal waarvoor $0 < \theta < 1$.
De formule (2) van XII, 1 wordt dan als wij rekening houden met de formule (3) van XII, 2 :

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \frac{h^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\theta h) \qquad (4)$$

Schrijven wij nu x in plaats van h, dan is

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)} \qquad (5)$$

Men noemt dit : de functie $f(x)$ ontwikkelen volgens de formule van Maclaurin ; deze ontwikkeling laat toe de functie te vervangen door een veelterm in x, vermeerderd met een sluitterm die een niet nader bepaald getal van het interval (0, 1) bevat. De ontwikkeling geldt enkel als $f(x)$ n maal afleidbaar is in het interval $[0, x]$.

XII, 4. De formule van Taylor.

Passen wij de formule (4) van XII, 3 toe op de functie $F(h) = f(x_0 + h)$ dan is $F^{(i)}(h) = f^{(i)}(x_0 + h)$, $F^{(i)}(0) = f^{(i)}(x_0)$ en $F^{(n)}(\theta h) = f^{(n)}(x_0 + \theta h)$. Derhalve

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)} \qquad (6)$$

Deze formule geldt slechts wanneer $f(x)$ n maal afleidbaar is in $[x_0, x_0 + h]$.

Vaak schrijft men nu Δx in plaats van h zodat (6) ook kan geschreven worden :

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta . \Delta x)} \qquad (7$$

(*) Colin MACLAURIN , Schots wiskundige , 1698-1746.

Stelt men $x_0 + \Delta x = x$ of $\Delta x = x - x_0$ dan kan (7) ook geschreven worden

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta(x-x_0)] \quad (8)$$

Men noemt dit : de functie $f(x)$ ontwikkelen volgens de formule van Taylor in de omgeving van x_0 ; deze ontwikkeling geldt als de functie $f(x)$ n maal afleidbaar is in $[x_0, x]$.

Opmerkingen :

1) Stelt men in (8) $x_0 = 0$, dan vindt men de formule (5) van Maclaurin terug.

2) Voor n = 1 vinden wij de middelwaardestelling van Lagrange terug.

3) Aangezien wij $f^{(n)}(x)$ continu onderstelden is

$$\lim_{\Delta x \to 0} f^{(n)}(x_0 + \theta h) = f^{(n)}(x_0).$$

Stellen wij dus $f^{(n)}(x_0 + \theta h) = f^{(n)}(x_0) + \omega$,

dan is ω O.K. samen met h (VIII, 1) en (6) kan geschreven worden :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^n \omega}{n!} \quad (9)$$

XII, 5. Enkele belangrijke ontwikkelingen.

1) Ontwikkeling van de exponentiële functie :

Voor $f(x) = e^x$ is $f^{(n)}(x) = e^x$ in elk interval (VII, 18)

Derhalve is $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ en $f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$

In elk interval geldt derhalve de volgende ontwikkeling van Mac Laurin :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

Anderzijds is ook

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x \ln a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x \ln a)^n}{n!} e^{\theta x \ln a}$$

2) Ontwikkeling van de functies y = cos x en y = sin x :

Voor f (x) = cos x is $f^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ in elk interval (IV, 19).

Derhalve is

$$f(0) = 1\,;\ f'(0) = 0\,;\ f''(0) = -1\,;\ f'''(0) = 0\,;\ \ldots\ f^{(n-1)}(0) = \cos\frac{(n-1)\pi}{2}$$

$$f^{(n)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

In elk interval geldt derhalve de volgende ontwikkeling van Maclaurin

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cos\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{x^n}{n!}\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Men zal ook gemakkelijk aantonen dat in elk interval geldt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin\frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{x^n}{n!}\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

3) Ontwikkeling van de logaritmische functie

De functie y = ln x is niet gedefinieerd voor x = 0 en kan derhalve niet in reeks van Maclaurin ontwikkeld worden. Daarom ontwikkelen wij de functie $f(x) = \ln(x+1)$ die voor $x > -1$ onbeperkt afleidbaar is ; dit laatste komt neer op de ontwikkeling van de functie f(x) = ln x in een omgeving van het punt x = 1.

Men vindt gemakkelijk de volgende ontwikkeling van Maclaurin geldig voor $x > -1$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

4) De binomiaalformule.

Wij beschouwen de functie $f(x) = (1+x)^m$

Is m een natuurlijk getal dan is $f(x)$ in elk interval onbeperkt afleidbaar en de formule van Maclaurin voert tot het binomium van Newton terug.

Is m geen natuurlijk getal dan is de functie slechts onbeperkt afleidbaar voor $x \neq -1$. Men heeft dan

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}\ ;\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f'(0) = m\,; \quad f''(0) = m(m-1)\,; \quad f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

$$f^{(n)}(\theta x) = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

Derhalve geldt voor $x > -1$ de volgende ontwikkeling van Mac Laurin :

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m(1+\theta x)^{m-m} \quad (*)$$

XII, 6. Practisch gebruik van de reeksontwikkelingen van Taylor en Mac Laurin.

Onderstel dat de functie y = f (x) gegeven wordt en gevraagd voor een bepaalde waarde van x de getalwaarde van y te berekenen. Zulks gaat meestal zonder moeite, zolang f(x) een gehele rationale functie is, want de voorkomende bewerkingen herleiden zich dan tot een eindig aantal optellingen aftrekkingen, vermenigvuldigingen en machtsverheffingen; lastiger wordt het wanneer men te doen heeft met een gebroken rationale of een irrationale functie, omdat dan ook delingen en worteltrekkingen voorkomen ; voor transcendente functies is het rechtstreeks uitvoeren van deze berekeningen vaak onmogelijk. (Het spreekt vanzelf dat men voor de meest voorkomende functies gebruik kan maken van numerieke tabellen, maar deze werden zelf aan de hand van reeksontwikkelingen opgesteld.)

Heeft men echter de functie ontwikkeld in een reeks van Taylor (en liefst in een reeks van Maclaurin omdat zulks het eenvoudigst is) dan heeft men de functie gesplitst in een gehele rationale functie en een sluitterm . Teneinde de berekeningen uitvoerbaar te maken of toch minstens op belangrijke wijze te vereenvoudigen wordt nu vaak deze sluitterm verwaarloosd.

Het spreek vanzelf dat men dan een fout heeft gemaakt en deze fout is nl. gelijk aan de sluitterm ; nu kent men deze sluitterm niet, want hij bevat een niet nader bepaald getal θ, waarvan men slechts weet dat het tot het open interval (0, 1) behoort. Het gebeurt nu echter zeer vaak dat men voor deze sluitterm een maximum-waarde kan bepalen, zodat men dan een bovengrens heeft gevonden voor de gemaakte fout.

Is in de experimentele wetenschappen, deze fout kleiner dan de waarnemingsfout, dan mag men ze zonder meer verwaarlozen ; wat de zuiver wiskundige kant van de zaak betreft is het duidelijk dat de reeksontwikkelingen van Taylor en Maclaurin slechts dan kunnen van dienst zijn, wanneer deze maximum fout onbeperkt afneemt zo het aantal termen steeds groter wordt genomen ; is in dit niet het geval, dan is de formule niet bruikbaar (zie hierover nog meer in Hoofdstuk XIX)

(*) Het symbool $\binom{m}{n}$ wordt hier gebruikt voor de uitdrukking $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}$; is m een natuurlijk getal dan is $\binom{m}{n} = C^n_m$ bekend uit de combinatieleer.

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

Voorbeelden :

1. Bepaal het getal e met vier nauwkeurige decimelen

Stellen wij x = 1 in de ontwikkeling van e^x in XII, 5 dan komt

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta}}{n!}$$

Wegens $0 < \theta < 1$ is $e^{\theta} < e < 3$ $(\overline{II}, 6)$ en $R_n = \frac{e^{\theta}}{n!} < \frac{3}{n!}$

Het is duidelijk dan R_n onbeperkt afneemt bij toenemende n ; aangezien men nu e met vier nauwkeurige decimalen wenst te berekenen, mag de bovengrens van de fout hoogstens 0, 00005 bedragen ; wij moeten derhalve de reeksontwikkeling voortzetten tot $R_n < \frac{3}{n!} < 0,00005$ of $n! > 60.000$; hieraan is voldaan voor n = 9.

Hieruit : $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2 + \frac{28961}{40320} = 2,7182$

2. Bereken sin 0, 1

Stellen wij x = 0, 1 in de ontwikkeling van sin x in XII, 5

$$\sin 0,1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3.3!} + \frac{1}{10^5.5!} - \frac{1}{10^7.7!} + \cdots + \frac{1}{10^n.n!} \sin\left(\frac{\theta}{10} + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\text{met } |R_n| = \frac{1}{10^n.n!} \left|\sin\left(\frac{\theta}{10} + \frac{n\pi}{2}\right)\right| < \frac{1}{10^n.n!}$$

Het is duidelijk dat $|R_n|$ onbeperkt afneemt bij toenemende n ; voor n = 7 bv. hebben wij :

$$\sin 0,1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3.3!} + \frac{1}{10^5.5!} - \frac{1}{10^7.7!} \sin\left(\frac{\theta}{10} + \frac{7\theta}{2}\right)$$

Wordt hierbij de sluitterm weggelaten dan is de bovengrens van de fout : $|R_7| < \frac{1}{10^7.7!} = \frac{1}{5040 \times 10^7} < \frac{1}{5.10^{10}} = 0,000\,000\,000\,02$

Wij bekomen derhalve sin 0, 1 met tien nauwkeurige decimalen :

$$\sin 0,1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3.3!} + \frac{1}{10^5.5!} = \frac{1\,198\,001}{1.2\,000\,000} = 0,0998334166$$

3. Bereken ln 1,25

Stellen wij x = 0,25 in de ontwikkeling van ln (1 + x) (XII, 5)

$$\ln 1{,}25 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(4+\theta)^n}$$

$$R_n = \frac{1}{n(4+\theta)^n} < \frac{1}{n.4^n} \text{ zodat } |R_n| \text{ onbeperkt afneemt bij toenemende n.}$$

Nemen wij bv. n = 4 , dan hebben wij :

$$\ln 1{,}25 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} - \frac{1}{4(4+\theta)^n}$$

Wordt hierbij de sluitterm weggelaten dan is de bovengrens van de fout :

$$|R_4| < \frac{1}{4.4^4} = \frac{1}{1024} < 0{,}001 \text{ ; of } 0{,}001 \text{ n.k. hebben wij dus:}$$

$$\ln 1{,}25 = \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{192} = \frac{43}{192} = 0{,}2239$$

Aangezien wij de sluitterm moesten aftrekken is de gevonden waarde te groot ; derhalve

$$0{,}2229 < \ln 1{,}25 < 0{,}2239$$

4. Bij een temperatuur van t° is de hoogte van de kwikkolom van een barometer h_t.

Herleid deze hoogte tot 0° zonder een deling uit te voeren.

In de natuurkunde toont men aan dat de hoogte h_0 uitgedrukt wordt door de formule $h_0 = \frac{h_t}{1+\alpha t}$, waarin $\alpha = 0{,}00018$ de uitzettingscoëfficient is van kwik.

Wij stellen $\alpha t = x$ en ontwikkelen $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in reeks van Maclaurin ; hiertoe stellen wij n = - 1 in de binomiaalreeks van XII, 5 en vinden aldus voor x > -1

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

Aangezien in de gegeven omstandigheden $x > 0$ is $|R_n| = \frac{x^n}{(1+\theta x)^{n+1}} < x^n$ en voor $x < 1$ neemt $|R_n|$ onbeperkt af bij toenemende n.

Breken wij bv. de reeks af na de tweede term dan is $\frac{1}{1+x} = 1 - x$ waarbij de fout kleiner is dan x^2.

Met de oorspronkelijke notatie wordt dit $h_0 = h_t(1 - \alpha t)$ met als maximum fout : $h_t(\alpha t)^2 = h_t(0{,}00018\,t)^2$

Nu zijn $h_t = 800$ mm en $t = 35°$ praktisch maximumwaarden, zodat de maximum-waarde voor de fout wordt $800 \text{ mm} \times (0{,}00018 \times 35)^2 < 0{,}04$ mm.

Deze fout is nu kleiner dan de waarnemingsfout bij de meeste aflezingen.

XII, 7. Het gebruik van de afgeleiden van hogere orde bij het bepalen van extrema.

In VI, 8 werd opgemerkt dat men geen besluit kan trekken inzake het al dan niet voorkomen van een extremum in het punt x_0 indien $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.

Onderstellen wij nu verder dat met $\delta > 0$, $f(x)$ in het interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ drie maal afleidbaar zij ; met $0 < h < \delta$ hebben wij dan volgens (6) van XII, 4.

$$\begin{cases} f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0 + \theta h) \\ f(x_0 - h) = f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_0 - \theta h) \end{cases}$$

en aangezien $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ komt er

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^3}{3!} f'''(x_0 + \theta h) \text{ en } f(x_0 - h) - f(x_0) = -\frac{h^3}{3!} f'''(x_0 - \theta h)$$

Nemen wij nu h voldoende klein opdat f''' in het interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ niet van teken verandere ; dan heeft $f(x_0 + h) - f(x_0)$ in dit interval het teken van $f'''(x_0)$ en $f(x_0 - h) - f(x_0)$ heeft het tegengesteld teken van $f'''(x_0)$.

Is dan $f'''(x_0) > 0$ dan is $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ en $f(x_0 - h) - f(x_0) < 0$; de functie $f(x)$ is dan in het punt x_0 linksstijgend en rechtsstijgend en is derhalve stijgend in het punt x_0 (VI, 3) ; op analoge wijze toont men aan dat de functie dan in het punt x_0 dalend is als $f'''(x_0) < 0$.
In deze gevallen is er dus geen extremum in het punt x_0, wel een buigpunt met buigraaklijn evenwijdig met de x-as.

Is nu echter $f'(x_o) = f''(x_o) = f'''(x_o)$ dan kan uit het voorgaande geen besluit worden getrokken. Is nu echter $f(x)$ vier maal afleidbaar in het interval $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ dan vindt men na ontwikkeling in reeks van Taylor en rekening houdend met $f'(x_o) = f''(x_o) = f'''(x_o) = 0$

$$f(x_o+h) - f(x_o) = \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x_o + \theta h) \text{ en } f(x_o - h) - f(x_o) = \frac{h^4}{4!} f^{IV}(x_o - h)$$

Nemen wij opnieuw h voldoende klein opdat $f^{IV}(x)$ in het interval $[x_o - h; x + h]$ niet van teken verandere, dan hebben $f(x_o+h) - f(x_o)$ en $f(x_o - h) - f(x_o)$ het teken van $f^{IV}(x_o)$.

Is nu $f^{IV}(x_o) > 0$ dan is $f(x_o + h) - f(x_o) > 0$ en $f(x_o - h) - f(x) > 0$; de functie is dan in het punt x_o linksdalend en rechtsstijgend en vertoont derhalve in het punt x_o een minimum ; op analoge wijze toont men aan dat de functie dan in het punt x_o een maximum vertoont zo $f^{IV}(x_o) < 0$.

Was nu daarenboven $f^{IV}(x_o) = 0$ dan zou men opnieuw geen besluit kunnen trekken en de ontwikkeling van Taylor zou met een nieuwe term moeten aangevuld worden. Aldus verder gaande komt men tot de volgende conclusie:

Onderstel de functie f (x) n maal afleidbaar in een omgeving van het punt x_o ; onderstel verder dat de (n-1) eerste afgeleiden nul zijn in het punt x_o; terwijl $f^{(n)}(x_o) \neq 0$

1) is n even dan vertoont de functie een minimum in het punt x_o als $f^{(n)}(x_o) > 0$ en een maximum als $f^{(n)}(x_o) < 0$;

2) is n oneven dan vertoont de functie geen extremum in het punt x_o, maar een buigpunt waarin de buigraaklijn evenwijdig is met de x-as.

Opmerking : Een analoge theorie kan worden opgesteld voor het bepalen van de buigpunten (VI, 9).

Voorbeeld : Wij hernemen het voorbeeld van VI, 6 voor het onderzoek in het punt $x_o = 0$; wij vonden aldaar

$$y = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 \quad \text{met} \quad f'(0) = f''(0) = 0$$

Men heeft nu $f'''(x) = 120(6x^2 - 9x + 2)$ dus $f'''(0) = 240$.

Hieruit besluiten wij dat de functie voor x = o geen extremum vertoont maar een buigpunt met buigraaklijn evenwijdig met de x-as . Dit bevestigt tevens het rechtstreeks onderzoek van VI, 5.

XII, 8. Toepassing op de numerieke oplossing van vergelijkingen.

In de toepassingen van de wiskunde stuit men vaak op vergelijkingen die niet kunnen opgelost worden met de methodes van de elementaire algebra of goniometrie. In de meeste gevallen kan men echter een benaderde waarde van de oplossingen berekenen door de volgende methode, bekend als de methode van de opeenvolgende benaderingen of iteratiemethode van Newton.(*)

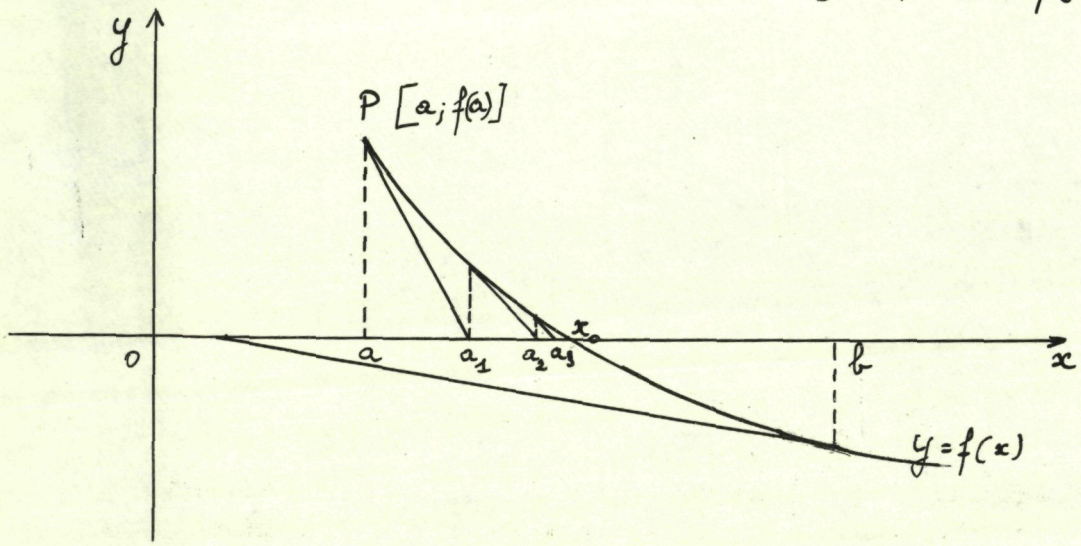
Zij de vergelijking $f(x) = 0$; wij onderstellen een interval $[a, b]$ te hebben bepaald waarin voldaan is aan de volgende voorwaarden ;

1) $f(x)$ is tweemaal afleidbaar in $[a, b]$;
2) $f(a)$ en $f(b)$ hebben verschillend teken ;
3) $f'(x)$ en $f''(x)$ behouden hetzelfde teken in $[a, b]$.

Aangezien de functie continu is in $[a, b]$ heeft ze een nulpunt in dat interval (III , 8) en aangezien de functie monotoon is (VI , 3) is er slechts één nulpunt; wij stellen dat nulpunt voor door x_0.

In de praktijk zal men de nulpunten van $f(x)$ lokaliseren door een ruwe schets te maken van de functie $f(x)$; men bepaalt dan twee punten a en b zó dat $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben en neemt $[a, b]$ voldoende klein dat $f'(x)$ en $f''(x)$ er een vast teken hebben. (**)

Aangezien nu $f''(x)$ een vast teken heeft in $[a, b]$ terwijl $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben, moet een van beide het teken hebben van $f''(x)$; om de gedachten te bepalen onderstellen wij (zoals in bijgaande figuur) dat dit $f(a)$ zij.



(*) Isaac NEWTON, Engels wis- en natuurkundige (1642-1725) ; was met Leibniz de grondlegger van de Infinitesimaalrekening.

(**) Dit is onmogelijk als de kromme een extremum of een buigpunt vertoont voor $x = x_0$; in dit geval echter is x_0 ook een nulpunt van $f'(x) = 0$ of $f''(x_0) = 0$.

Krachtens de gestelde voorwaarden kan $f(x)$ als volgt ontwikkeld worden in een reeks van Taylor geldig in $[a, b]$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''\left[a + \theta(x-a)\right]$$

Voor $x = x_0$ wordt dit, aangezien $f(x_0) = 0$:

$$f(a) + (x_0 - a) f'(a) + \frac{(x_0-a)^2}{2!} f''\left[a + \theta(x_0 - a)\right] = 0 \quad (1)$$

De raaklijn in het punt $P\left[a;\ f(a)\right]$ heeft als vergelijking

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a).$$

Noemen wij nu a_1 het snijpunt van deze raaklijn met de x-as, dan is

$$a_1 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \longrightarrow \boxed{a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}} \quad (2)$$

Wij zullen nu aantonen dat a_1 tussen a en x_0 ligt ; uit (2) volgt immers dat $f'(a) = -\frac{f(a)}{a_1 - a}$ en als wij dit invullen in (1) dan komt ;

$$f(a) - \frac{x_0 - a}{a_1 - a} f(a) + \frac{(x_0-a)^2}{2!} f''\left[a + \theta(x_0 - a)\right] = 0$$

$$\frac{x_0 - a}{a_1 - a} - 1 = \frac{(x_0-a)^2}{2!} \cdot \frac{f''\left[a + \theta(x_0-a)\right]}{f(a)} \quad (3)$$

Krachtens de gemaakte afspraken is nu het tweede lid van (3) positief ; derhalve is

$$\frac{x_0 - a}{a_1 - a} > 1 \quad (4)$$

Is $x_0 > a$ dan is $a_1 > a$ en uit (4) volgt dan

$x_0 - a > a_1 - a$ of $x_0 > a_1$ hieruit $x_0 > a_1 > a$

Is $x_0 < a$ dan toont men gemakkelijk $x_0 < a_1 < a$.

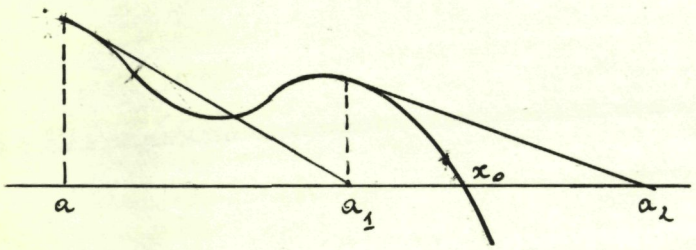
a_1 is derhalve een betere benadering dan a voor x_o ; maar a_1 voldoet aan alle voorwaarden die oorspronkelijk aan a waren gesteld ; derhalve kan men uit a_1 een getal a_2 bepalen dat tussen a_1 en x_o ligt door de formule :

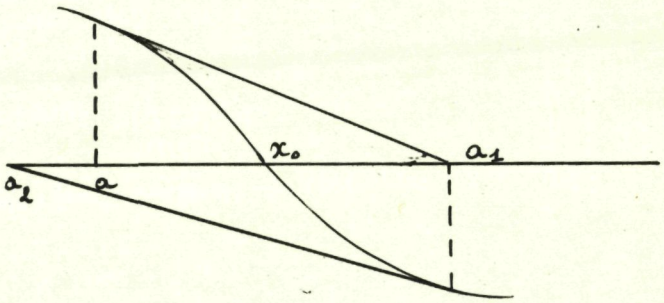
$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

Aldus verder doorgaande kan men steeds dichter de wortel x_o benaderen ; men kan ten andere bewijzen dat de oneindig voortlopende rij $a, a_1, a_2, \ldots\ldots$ in inf onbeperkt naar x_o convergeert. Praktisch eindigt men als men met de gebruikte benadering $f(a_n) = 0$ vindt.

De voorgaande bewerkingen zijn meetkundig duidelijk geïnterpreteerd in de figuur van blz 73 . Hierin ziet men o.m. dat men geen betere benadering bekomt met de raaklijn in het punt $[b; f(b)]$ te nemen, omdat het teken van $f''(x)$ niet heeft.

Dat de methode ook niet noodzakelijk leidt tot betere benaderingen als $f'(x)$ of $f''(x)$ nul worden in $[a, b]$ wordt door de volgende figuren geïllustreerd.

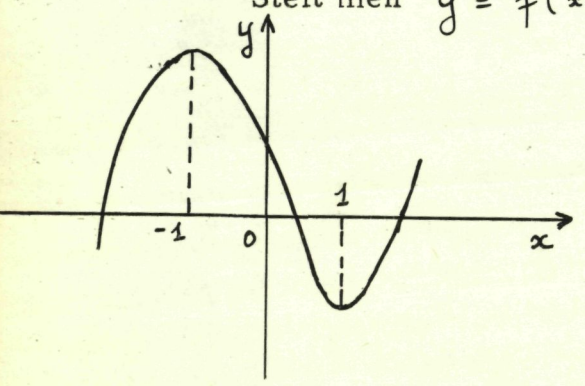




Voorbeelden :

1) Bereken de grootste wortel van de vergelijking $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Stelt men $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ dan is $y' = 3x^2 - 3$ en $f''(x) = 6x$



Een grove schets van de grafiek toont aan dat de functie drie nulpunten heeft waarvan het grootste > 1.

Nu is $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ en $f(2) = 3$

Aangezien : $f''(x) > 0$ in $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

nemen wij a = 2 ; wij hebben dan achtereenvolgens :

$$a_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{9} = \frac{5}{3} = 1,667$$

$$a_2 = \frac{5}{3} - \frac{f\left(\frac{5}{3}\right)}{f'\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{5}{3} - \frac{\frac{17}{27}}{\frac{16}{3}} = \frac{223}{144} = 1,549$$

$$a_3 = 1,549 - \frac{f(1,549)}{f'(1,549)} = 1,549 - \frac{0,070}{4,198} = 1,549 - 0,017 = 1,532.$$

Men vindt $f(1,532) = 0$ zodat $x_0 = 1,532$

2) Los de volgende vergelijking op : $x + \sin x = 1$.

Stel $f(x) = x + \sin x - 1$, dan is $f'(x) = 1 + \cos x$ en $f''(x) = -\sin x$.

Aangezien $f'(x) \geq 0$ is de functie steeds stijgend en heeft derhalve slechts één nulpunt.

Nu is $f(0,5) = 0,5 + \sin 0,5 - 1 = -0,02057 < 0$

en $f(1) = 1 + \sin 1 - 1 > 0$

Het nulpunt ligt dus in het interval $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ en aangezien $f''(x)$ negatief in dit interval kiezen wij a = 0,5.

$$a_1 = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 + \frac{0,02057}{1,87758} = 0,51096$$

$$a_2 = 0,51096 - \frac{f(0,51096)}{f'(0,51096)} = 0,51096 + \frac{0,00004}{1,87228} = 0,51098.$$

Men vindt $f(0,51098) = 0$ zodat $x_0 = 0,51098$.

OPGAVEN.

1. Ontwikkel de functies $y = \text{sh } x$ en $y = \text{ch } x$ volgens de formule van Maclaurin en bereken $\text{sh } 1$ en $\text{ch } \frac{1}{2}$.

2. Bereken e^2, $\sqrt[3]{e}$ en $\frac{1}{\sqrt{e}}$ met drie nauwkeurige decimalen.

3. Bereken cos 0,2 en ln 1,1.

4. a) Toon in de binomiaalreeks aan dat voor $m<1$ en $x>0$ de fout niet groter is dan de eerste verwaarloosde term;

b) Leid hieruit af dat men voor $x>0$ en voldoende klein, practisch mag schrijven :

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2} \; ; \quad \sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{x}{3} \; ; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{x}{2} \; .$$

Bepaal telkens het maximum bedrag van de fout .

5. a) Ontwikkel $f(x) = \sqrt{4+x}$ in reeks van Maclaurin en bereken $\sqrt{4,05}$;

b) Ontwikkel $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ in reeks van Maclaurin en bereken $\sqrt[3]{1,2}$;

Bereken in beide gevallen het maximum bedrag van de fout , zo men gebruik maakt van de eerste vier termen van de ontwikkeling.

6. Bereken met behulp van de binomiaalreeks de benaderde waarden van $\sqrt{150}$, $\sqrt{201}$, $\sqrt[3]{50}$ en $\sqrt[3]{130}$ met vijf nauwkeurige decimalen.

7. Bereken de benaderde waarden van de wortels van de volgende vergelijkingen

1) $x^3 + 3x^2 + 6 = 0$;
2) $3x^3 - 4x - 5 = 0$;
3) $4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$;
4) $x^4 - 6x + 1 = 0$;
5) $x^4 + x^3 + 1 = 0$;
6) $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$;
7) $\sin x = x$;
8) $x + \sin x - \frac{\pi}{3} = 0$;
9) $2x = \ln \frac{1}{x}$;
10) $x^2 + \ln x = 0$.

8. Schets de grafiek van de volgende functies en bereken de benaderde waarde van het kleinste positieve nulpunt.

1) $y = x - 2\sin x$; 2) $y = \operatorname{tg} x - x$; 3) $y = x - \cos x$;

4) $y = x - \ln x - 2$; 5) $y = \ln x - \frac{1}{x}$; 6) $y = e^x + x$.

9. a) Voor welke waarden van m snijdt de rechte $y = mx$ de kromme $y = \ln x$?

b) Bereken de coördinaten van de snijpunten van $y = \ln x$ en de rechten $y = -x$; $10y = x$ en $ey = x$.

10. Bereken de coördinaten van de snijpunten van de krommen

a) $y = e^x$ en $xy = 1$; b) $y = \ln x$ en $y = e^{-7}$.

HOOFDSTUK XIII

EXPLICIETE FUNCTIES VAN MEER DAN EEN VERANDERLIJ

Par. 1. ALGEMEENHEDEN.

XIII, 1. Tweedimensionale puntenverzamelingen.

In I, 2 werd een één-éénduidige correspondentie opgesteld tussen de punten van een as en de reële getallen.

Bepaalt men de punten van een vlak met behulp van hun cartesische coördinaten, dan kan blijkbaar ook een één-éénduidige correspondentie worden opgesteld tussen de punten van een vlak en de groepen van twee reële getallen.

Een verzameling van punten in een vlak heet een tweedimensionale puntenverzameling ; ter uitbreiding van de afspraak uit I, 2 zullen wij dan ook spreken van een tweedimensionale puntenverzameling voor een verzameling van getallenkoppels.

Een tweedimensionale puntenverzameling heet begrensd als er een cirkelomtrek kan worden aangewezen, zodanig dat alle punten van de verzameling binnen deze cirkelomtrek gelegen zijn. Kan dit niet, dan heet de verzameling onbegrensd.

Een omgeving van een gegeven punt $(x_0 ; y_0)$ is de verzameling van alle punten die gelegen zijn binnen een cirkelomtrek met middelpunt in het beschouwde punt en straal δ d.w.z. de verzameling van de punten (x, y) waarvan de coördinaten voldoen aan de betrekking

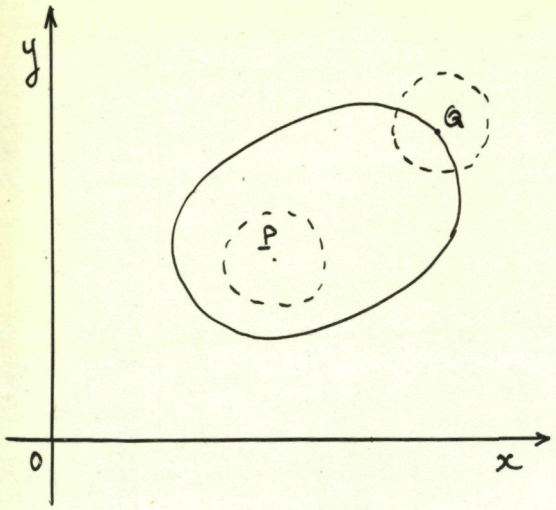
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

De straal δ van de omgeving wordt vaak niet nader bepaald.

XIII, 2. Gebieden vanæn vlak.

Een tweedimensionale puntenverzameling heet een gebied wanneer twee willekeurige van haar punten kunnen verbonden worden door een gebroken lijn waarvan alle punten tot de verzameling behoren.

Een gebied kan begrensd of onbegrensd zijn.



Een punt P heet een inwendig punt van een gebied, wanneer een omgeving van P kan worden aangewezen waarvan alle punten tot het gebied behoren ; een punt Q heet een randpunt van een gebied, wanneer elke omgeving van Q punten bevat die wel en punten die niet tot het gebied behoren.

Zo de meetkundige plaats van de randpunten van een gebied bestaat uit één of meer krommen, dan vormen deze de randlijn van het gebied.

Een begrensd gebied dat al zijn randpunten bevat heet een afgesloten gebied ; een begrensd gebied dat niet al zijn randpunten bevat en ook een onbegrensd gebied heet een open gebied. (*)

XIII, 3. Functies van twee veranderlijken.

Zij V een verzameling van louter verschillende getallenkoppels ; zo met ieder element (x;y) van V op ondubbelzinnige wijze één getal z correspondeert, dan heet z een functie van x en y, gedefinieerd op de verzameling V. Men schrijft hiervoor $z = f(x,y)$, $z = F(x,y)$, $z = \varphi(x,y)$.

Zoals in I, 8 kan men empirische en wiskundige functies onderscheiden ; wij zullen verder uitsluitend over wiskundige functies spreken, zodat de betrekking tussen de functie z en de argumenten x en y dan uitgedrukt is door een formule.

De verzameling V waarop de functie gedefinieerd is, is dan de tweedimensionele puntenverzameling waarvan de coördinaten aan de formule een betekenis geven. Meestal bestaat deze verzameling uit één of meer gebieden.

Voorbeelden :

1) De functie $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ is gedefinieerd voor $x^2 + y^2 \leq 1$
Het definitiegebied is de afgesloten cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal 1.

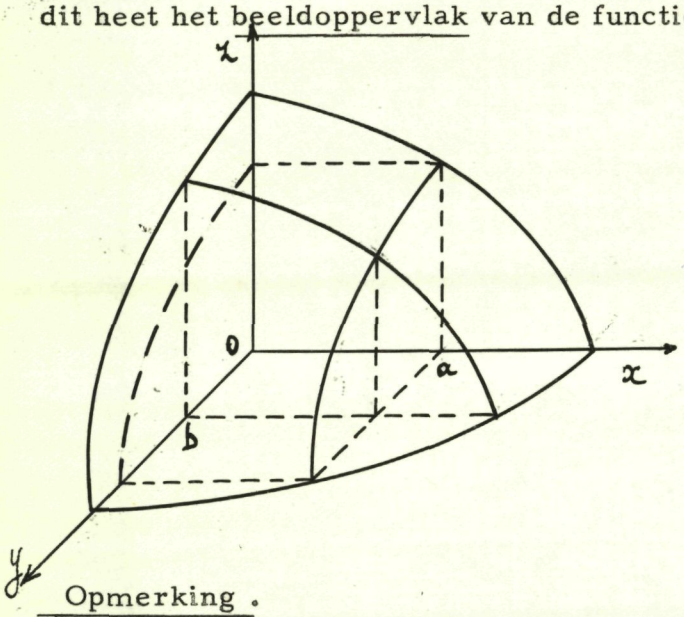
2) De functie $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ is gedefinieerd voor $x^2 + y^2 < 1$

Het definitiegebied is de open cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal 1.

(*) Een gebied dat geen enkel randpunt bevat heet soms volledig open.

XIII, 4. Grafische voorstelling van een functie van twee veranderlijke.

Is $z = f(x,y)$ dan kan men de drie bij elkaar horende getallen x, y en z vertolken als de coördinaten van een punt in een drie-dimensionaal assenstelsel. De meetkundige plaats van deze punten is dan meestal een oppervlak; dit heet het beeldoppervlak van de functie.



Stelt men x = a in de betrekking z = f (x, y) , dan stelt het stelsel

x= a z = f (x, y)

de snijlijn voor van het beeldoppervlak en het vlak x = a ; de projectie van deze snijlijn op het y 0 z vlak is dan de grafische voorstelling van de functie van één veranderlijke z = f (a, y) . Een analoge opmerking geldt voor y = b.

Opmerking .

Evenals in het eerste deel voor functies van één veranderlijke werd gedaan zal men zelf gemakkelijk voor een functie van twee veranderlijken de volgende begrippen definiëren:

1) expliciete en impliciete functies ;
2) eenwaardige en meerwaardige functies ;
3) algebraïsche en transcendente functies ;
4) rationale en irrationale functies ;
5) gehele en gebroken functies ;
6) goniometrische, cyclometrische, exponentiële en logaritmische functies.
7) elementaire functies.

XIII, 5. Limiet van een functie van twee veranderlijken.

Wij beschouwen de functie $z = f(x,y)$ die gedefinieerd is in een omgeving van het punt (a;b), behalve misschien in dit punt zelf. Wij laten nu de veranderlijken x en y een willekeurige oneindig voortlopende rij doorlopen:

$$x : x_1 , x_2 , x_3 , \ldots \ldots x_n \text{ in inf.}$$

$$y : y_1 , y_2 , y_3 , \ldots \ldots y_n \text{ in inf.}$$

die slechts aan de volgende beperkingen zijn onderworpen :

1) alle punten (x_n, y_n) behoren tot de beschouwde omgeving waarin de functie gedefinieerd is ;

2) $\lim x_n = a$ en $\lim y_n = b$

Wegens het functionaal verband $z = f(x,y)$ zal nu ook z een oneindig voortlopende rij doorlopen, en zoals in II, 7 kunnen drie gevallen onderscheiden worden:

a) De rij die z doorloopt convergeert steeds (d.w.z. ongeacht de rijen doorlopen door x en y) naar de eigenlijke limiet c.

Men zegt dan dat c de limiet is van z als x en y onbeperkt tot a en b naderen en men schrijft

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} z = c$$

b) De rij die z doorloopt divergeert steeds naar ∞ (eventueel $-\infty$ of $+\infty$) men schrijft dan

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} z = \infty$$

Dit heet opnieuw een <u>oneigenlijke limiet</u>.

c) Als geen van beide voorgaande gevallen zich voordoet is de limiet niet gedefinieerd.

Het is intuïtief duidelijk dat de eigenschappen van de limieten van sommen, produkten enz . die wij reeds voor functies van één veranderlijke hebben aanvaard, op functies van twee veranderlijken kunnen uitgebreid worden.

Hieruit volgt dat men steeds heeft voor de elementaire functie $z = f(x,y)$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)$$

mits $f(a,b)$ niet zinledig is.

XIII, 6. Aangroeiing van een functie van twee veranderlijken.

Zij P (x_1, y_1) een punt van het gebied waarop de functie gedefinieerd is, wij geven nu aan x en y de willekeurige aangroeiingen Δx en Δy onder het enig beding dat het punt $Q(x_1 + \Delta x; y_1 + \Delta y)$ nog tot het definitiegebied van de functie behoort.

De overeenstemmende aangroeiing van de functie z is dan gegeven door

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$$

en wij noemen dit de volledige of totale aangroeiing van z.

Geven wij echter aan x de aangroeiing Δx terwijl wij y constant houden, dan is de aangroeiing van z gegeven door

$$\Delta_x z = f(x_1 + \Delta x, y_1) - f(x_1, y_1)$$

Geven wij aan y de aangroeiing Δy terwijl wij x constant houden, dan is de aangroeiing van z gegeven door

$$\Delta_y z = f(x_1, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$$

Deze aangroeiingen heten de gedeeltelijke of partiële aangroeiingen van z genomen naar x of y.

XIII, 7. Continuïteit van een functie van twee veranderlijken.

a) Continuïteit in een punt :

Wij beschouwen functie $z = f(x, y)$ die gedefinieerd is in een omgeving van het punt $(x_1 ; y_1)$ (dus ook in dit punt zelf).

Wij geven nu aan x en y de aangroeiingen Δx en Δy zo dat het punt $(x_1 + \Delta x ; y_1 + \Delta y_1)$ nog tot de beschouwde omgeving behoort. De functie heet continu in het punt (x_1, y_1) als met de oneindig kleine aangroeiingen Δx en Δy ook een oneindig kleine aangroeiing Δz correspondeert , d.w.z. wanneer voldaan is aan de voorwaarde

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1) \right] = 0 \qquad (1)$$

Deze laatste voorwaarde kan worden geschreven:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = f(x_1, y_1)$$

en als wij $x_1 + \Delta x = x$ en $y_1 + \Delta y = y$ stellen

$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}} f(x,y) = f(x_1, y_1)$$

Een functie $z = f(x,y)$ is derhalve continu in een punt $(x_1; y_1)$ wanneer aan de volgende voorwaarden voldaan is ;

1) de functie is gedefinieerd in een omgeving van dit punt (dus ook in het punt zelf);

2) de functie heeft een welbepaalde eigenlijke limiet als x onbeperkt tot x_1 en y onbeperkt tot y_1 nadert;

3) deze limiet is gelijk aan de functiewaarde in het punt $(x_1; y_1)$.

b) Continuïteit in een gebied :

Een functie heet continu in een gebied wanneer ze continu is in elk punt van dit gebied.

Voor de eventuele randpunten van het gebied wordt hierbij slechts de continuïteit ondersteld als x en y hun limiet benaderen langs inwendige punten van het gebied.

Opmerking : In XIII, 5 werd opgemerkt dat voor elke elementaire functie $\lim_{\substack{x \to x_1 \\ y \to y_1}} f(x,y) = f(x_1, y_1)$ mits $f(x_1, y_1)$ niet zinledig

Een elementaire functie is dus continu in elk gebied waarop ze gedefinieerd is.

XIII, 8. Uitbreiding op drie en meer veranderlijken.

Al het voorgaande, met uitzondering vande grafische voorstelling, kan gemakkelijk uitgebreid worden op functie van drie en meer veranderlijken.

OPGAVEN.

Bepaal de gebieden waarop de volgende functies gedefinieerd zijn :

1) $z = \dfrac{x+1}{x+y}$;

2) $z = \dfrac{3}{x^2+y^2}$;

3) $z = x\sqrt{y-2}$;

4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}}$;

5) $z = \sqrt{\dfrac{x+1}{y-1}}$;

6) $z = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+y^2-1}}$;

7) $z = \sqrt{1-x^2-4y^2}$;

8) $z = \sqrt{x^2-y-2x}$

9) $z = \ln(x+y)$;

10) $z = \ln\dfrac{x}{2y}$;

11) $z = \operatorname{cotg}(3x+y)$;

12) $z = \operatorname{Bgsin} xy$.

Par. 2. AFGELEIDEN EN DIFFERENTIALEN VAN DE EERSTE ORDE.

XIII, 9. Partiële afgeleiden.

Het begrip " afgeleide " kan niet zonder meer op een functie van twee veranderlijken worden uitgebreid.

Beschouwen wij echter de functie $z = f(x,y)$ in het punt $P(x_1, y_1)$ dat tot het definitiegebied van de functie behoort. Houden wij hierin y constant, dan wordt $z = f(x, y_1)$ een functie van x alleen ; indien deze functie afleidbaar is (IV, 1) dan zeggen wij dat de functie $z = f(x,y)$ partieel afleidbaar is naar x in het punt P en deze afgeleide heet de partiële afgeleide naar x van de functie $f(x,y)$ in het punt P.

Onder constant houden van x definieert men op analoge wijze de partiële afleidbaarheid en de partiële afgeleide naar y in het punt P.

Krachtens IV, 1 zijn de partiële afgeleiden in P dus gedefinieerd door :

$$f'_x(x_1,y_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x, y_1) - f(x_1,y_1)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_1,y_1) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1, y_1+\Delta y) - f(x_1,y_1)}{\Delta y}$$

Deze partiële afgeleiden kunnen gemakkelijk geïnterpreteerd worden als de richtingscoëfficienten van de snijlijnen van het beeldoppervlak van $z = f(x,y)$ en de vlakken $y = y_1$ en $x = x_1$ (XIII, 4) .

De aldus gedefinieerde partiële afgeleiden zijn functies van de coördinaten van P; wij beschouwen ze nu in een willekeurig punt (x, y) waar de functie $z = f(x,y)$ partieel afleidbaar is naar x en y ; de partiële afgeleiden zijn dan functies van x en y, en wij noemen ze de partieel afgeleide functies of kortweg de partiële afgeleiden van f (x, y) naar x en naar y. Deze partiële afgeleiden zijn dus gedefinieerd door (IV, 6)

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

XIII, 10. Notatie vande partiële afgeleiden.

De partiële afgeleiden van de functie z = f (x, y) worden genoteerd :

1) In de notatie van Lagrange : $f'_x(x,y)$ en $f'_y(x,y)$.

2) In de notatie van Cauchy : $D_x f(x,y)$ en $D_y f(x,y)$ of $D_x z$ en $D_y z$

3) In de notatie van Leibniz : $\frac{d_x z}{dx}$ en $\frac{d_y z}{dy}$

4) In de notatie van Jacobi (*) $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ of $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$

De notatie van Leibniz wordt opnieuw verder gerechtvaardigd (XIII, 12) ; wat de notatie van Jacobi betreft, dient er op gewezen dat dit een zuiver symbolisch notatie is; men mag de uitdrukkingen $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ niet als een breuk opvatten en evenmin een afzonderlijke betekenis hechten aan de symbolen ∂x, ∂y en ∂z.

XIII, 11. Het berekenen van de partiële afgeleiden.

Uit de definitie volgt onmiddellijk dat wij de partiële afgeleiden van $z = f(x, y)$ naar x en naar y zullen bekomen, door toepassing van dezelfde regels als bij afleiding van een functie van één veranderlijke, waarbij echter respectievelijk y en x als constant worden beschouwd.

Voorbeelden :

1) $z = x^3 - 3x^2y + y^3$; $D_x z = 3x^2 - 6xy$; $D_y z = -3x^2 + 3y^2$.

2) $z = x^y$; $D_x z = y x^{y-1}$; $D_y z = x^y \ln x$.

XIII, 12. Partiële differentialen .

Wij beschouwen opnieuw de functie $z = f(x, y)$ die partieel afleidbaar is naar x en y in het punt $P(x, y)$; wij hebben danwegens definitie

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Stellen wij nu

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \omega_1 \qquad \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \omega_2 \text{ of } \begin{cases} \Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \omega_1 \Delta x \\ \Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \omega_2 \Delta y \end{cases}$$

Als nu Δx en $\Delta y \to 0$ kiezen wij Δx en Δy als H.O.K. ; in elk punt waar $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$ zijn dan $\Delta_x z$ en $\Delta_y z$ van dezelfde orde als Δx en Δy terwijl ook ω_1 en ω_2 samen met Δx en Δy O.K. zijn.

(*) Karl JACOBI : Duits wiskundige , 1804-1851.

De aangroeiingen $\Delta_x z$ en $\Delta_y z$ bestaan dan uit twee delen, waarvan het eerste het hoofddeel i s (VIII, 3) ; zoals in VIII, 8 (*) en VIII, 10 noemen wij deze hoofddelen de partiële differentialen naar x en y van de functie z = f (x, y) en stellen ze voor door $d_x z$ en $d_y z$.

Derhalve $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ en $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$.

Zoals in VIII, 8 kunnen wij opnieuw gemakkelijk aantonen dat de differentialen van de onafhankelijk veranderlijken numeriek gelijk zijn aan de aangroeiingen ; wij hebben dus $\Delta x = dx$ en $\Delta y = dy$ en kunnen bovenstaande formules derhalve schrijven :

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad \text{en} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \text{ ; tevens } \frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ en } \frac{d_y z}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Uit deze formules ziet men dat men de partiële differentialen bekomt door vermenigvuldiging van de partiële afgeleiden met dx en dy.

Voorbeeld : $z = x^y$; $d_x z = y x^{y-1} dx$; $d_y z = x^y \ln x \, dy$.

XIII, 13. De totale differentiaal.

Wij beschouwen steeds de functie z = f (x, y) en onderstellen de partiële afgeleiden continu in het punt (x, y) ; de totale aangroeiing van z kunnen wij dan schrijven

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \quad (1)$$

Op de functie f(x, y) beschouwd als functie van x alleen passen wij nu de middelwaardestelling toe : (V, 5)

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \Delta x f'_x (x + \vartheta . \Delta x, y) \quad (2)$$

Wij doen hetzelfde op de functie $f(x+\Delta x, y)$ beschouwd als functie van y alleen :

(*) In VIII, 8 werd eerst de differentiaal in een bepaald punt gedefi n ieerd en daarna de differentiaal in het algemeen ; wij hebben gemeend hier onmiddellijk de algemene differentiaal te mogen definiëren.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = \Delta y\, f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) \qquad (3)$$

Na substitutie van (3) en (2) in (1) komt er :

$$\Delta z = \Delta x f'_x(x+\theta\Delta x, y) + \Delta y f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) \qquad (4)$$

Aangezien wij echter de partiële afgeleiden continu hebben ondersteld is wegens XIII, 7 :

$$\lim_{\Delta x \to 0} f'_x(x+\theta\Delta x, y) = f'_x(x,y) \text{ en } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) = f'_y(x,y)$$

Derhalve stellen wij dan

$$f'_x(x+\theta\Delta x, y) = f'_x(x,y) + \omega_1 \; ; \; f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) = f'_y(x,y) + \omega_2 \qquad (5)$$

waarin ω_1 en ω_2 samen met Δx en Δy naar 0 convergeren.

Na substitutie van (5) in (4) krijgen wij

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \omega_1 \Delta x + \omega_2 \Delta y \qquad (6)$$

Voor zover nu $f'_x(x,y)$ en $f'_y(x,y) \neq 0$, zijn voor Δx en $\Delta y \to 0$ de eerste twee termen van het 2e lid van (6) O.K. van dezelfde orde als Δx en Δy, terwijl de laatste twee termen O.K. zijn van hogere orde.

De som van deze eerste twee termen noemen wij de totale differentiaal of kortweg de differentiaal van de functie z en stellen deze voor door de notatie dz. Derhalve :

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y \qquad (7)$$

Gebruik makend van de notatie van Jacobi en rekening houdend dat x en y onafhankelijke veranderlijken zijn (dus $\Delta x = dx$ en $\Delta y = dy$) wordt (7)

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy} \qquad (8)$$

Een functie die in een punt continue partiële afgeleiden heeft is dus differentieerbaar in dit punt.

Men kan ook schrijven (XIII, 12) : $dz = d_x z + d_y z$.

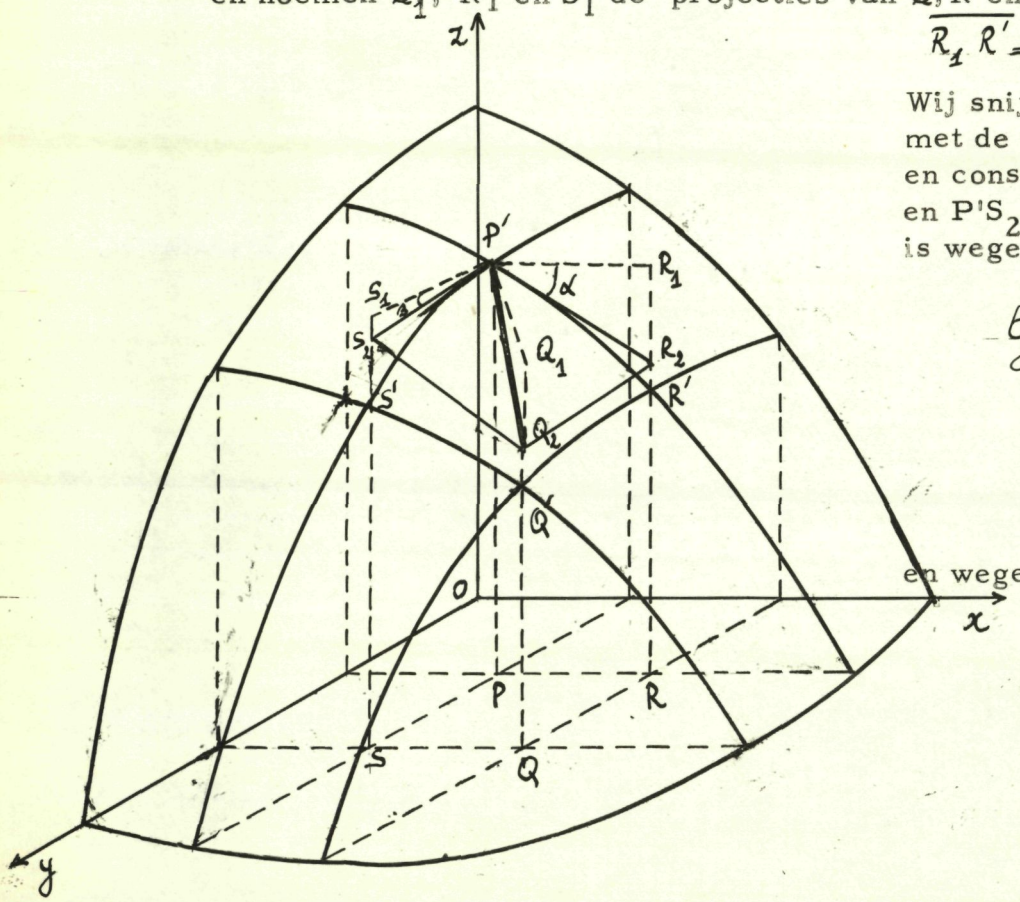
De totale differentiaal is derhalve de som van de partiële differentialen.

XIII, 14. Meetkundige interpretaties.

Op bijgaande figuur beschouwen wij het beeldoppervlak van de functie $z = f(x,y)$. In het $x0y$ vlak beschouwen wij de punten $P(x_1,y_1)$, $Q(x_1+\Delta x\,;\, y_1+\Delta y)$, $R(x_1+\Delta x, y_1)$ en $S(x_1, y_1+\Delta y)$ die alle tot het definitiegebied van de functie behoren, en noemen P', Q', R', S' de overeenstemmende punten van het beeldoppervlak ; aldus is $\Delta x = \overline{PR}$ en $\Delta y = \overline{P}$

Wij construeren het vlak door P' en evenwijdig met het x0y vlak en noemen Q_1, R_1 en S_1 de projecties van Q, R en S op dit vlak ; dan is

$$\overline{R_1R'} = \Delta_x z \,,\ \overline{S_1S'} = \Delta_y z \,,\ \overline{Q_1Q'} = \Delta z$$



Wij snijden het beeldoppervlak met de vlakken $y = y_1$ en $x = x_1$ en construeren de raaklijnen $P'R_2$ en $P'S_2$ aan deze snijlijnen ; nu is wegens IV, 2 en XIII, 9

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{R_1R_2}}{\overline{P'R_1}} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{en}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{S_1S_2}}{\overline{P'S_1}} = \frac{\partial f}{\partial y} \,;$$

en wegens VIII, 9 en XIII, 12

$$\overline{R_1R_2} = d_x z$$

en

$$\overline{S_1S_2} = d_y z$$

De twee raaklijnen in P' bepalen een vlak dat het raakvlak in dit punt aan het beeldoppervlak heet ; zij nu Q_2 het snijpunt van dit raakvlak met Q Q' dan is

$$\overrightarrow{P'Q_2} = \overrightarrow{P'R_2} + \overrightarrow{P'S_2} \quad \text{en} \quad \text{proj.}\,\overline{P'Q_2} = \text{proj.}\,\overline{P'R_2} + \text{proj.}\,\overline{P'S_2}$$

$$\text{of} \quad \overline{Q_1Q_2} = \overline{R_1R_2} + \overline{S_1S_2} = d_x z + d_y z$$

Derhalve is $\overline{Q_1 Q_2} = dz$ (XIII, 12)

XIII. 15. Gebruik van de totale differentiaal.

De totale differentiaal van een functie van twee veranderlijken bezit eigenschappen die analoog zijn met deze van de differentiaal van een functie van één veranderlijke (VIII, 13) Voor $\Delta x \to 0$ en $\Delta y \to 0$ is de differentiaal dz immers het hoofddeel van de aangroeiing Δz , wat hierop neerkomt dat Δz en dz dan asymptotisch gelijke oneindig kleinen zijn.

Men mag dus opnieuw Δz vervangen door de differentiaal dz, indien men slechts elementaire aangroeiingen van de onafhankelijke veranderlijken x en y beschouwt ; zoals in VIII, 13 reeds uiteengezet levert dit practisch veel voordelen op, omdat de differentiaal veel gemakkelijker te berekenen is dan de aangroeiing.

Voorbeeld : Wij beschouwen een cilinder met hoogte h en straal r ; het volume van de cilinder is dan $V = \pi r^2 h$

Geven wij aan r en h de aangroeiingen dr en dh dan is de aangroeiing ΔV.

$$\Delta V = \pi (r + dr)^2 (h + dh) - \pi r^2 h$$

$$= \pi \left[r^2 dh + 2rh\,dr + 2r\,dr\,dh + h\,dr^2 + dr^2 dh \right]$$

Als wij nu slechts elementaire aangroeiingen van r en h beschouwen dan kunnen wij de O.K. van hogere orde verwaarlozen en derhalve ΔV vervangen door haar hoofddeel : $\pi \left(r^2 dh + 2rh\,dr \right)$

Dit laatste is echter niets anders dan dV ; wij hadden dit veel gemakkelijker kunnen berekenen uit (8) nl.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial h} dh + \frac{\partial V}{\partial r} dr = \pi r^2 dh + 2\pi rh\,dr.$$

XIII, 16. Afgeleide van een samengestelde functie.

Wij keren nog even terug naar de formule (8) van XIII, 13. Deze formule werd opgesteld in de onderstelling dat x en y onafhankelijk veranderlijken waren ; nu kan nochtans aangetoond worden dat deze formule geldig blijft indien x en y op hun beurt functies zijn van andere veranderlijken.

Wij zullen deze formule bewijzen in het geval dat x en y afleidbare functies zijn van één veranderlijke t, zodat z dan een samengestelde functie van t wordt (I, 16) . De aangroeiing Δz kan dan nog steeds onder de vorm (6) van XIII, 13 worden geschreven, aangezien voor het bewijs van (6) nog niet gebruik werd gemaakt van het feit dat x en y onafhankelijk veranderlijken waren.

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta y + \omega_1\,\Delta x + \omega_2\,\Delta y$$

en na deling van beide leden door Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\Delta y}{\Delta t} + \omega_1\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + \omega_2\,\frac{\Delta y}{\Delta t}\,.$$

Laten wij nu $\Delta t \longrightarrow 0$, dan zal ook $\Delta x \to 0$ en $\Delta y \to 0$, omdat x en y afleidbare functies van t zijn ; krachtens XIII, 13 zal dan ook $\omega_1 \to 0$ en $\omega_2 \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}}$$

of na vermenigvuldiging van beide leden met dt

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy}$$

Opmerking : Keren wij nu terug naar de notatie die in het eerste deel voor samengestelde functies van één veranderlijke werden gebruikt.

Wij beschouwen de functie $y = f(u, v)$ waarin u en v functies zijn van een onafhankelijk veranderlijke x; dan is krachtens het bovenstaande

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{dv}{dx} \quad \text{en} \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

Met behulp hiervan kan men o.m. de formules voor de afgeleiden van de samengestelde functies $u + v$, uv, $\frac{u}{v}$, u^v terugvinden.

Aldus b.v. voor $y = u^v$

$$\frac{dy}{dx} = v\,u^{v-1}\,\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} = u^v\left(\frac{u}{v}\,Du + \ln u\, Dv\right) \text{ (zie VII, 24)}$$

XIII, 17. Practische berekening van partiële afgeleiden en van totale differentialen.

Om de totale differentiaal van een functie van twee veranderlijken te berekenen, kan men eerst de partiële afgeleiden berekenen zoals in XIII, 11 aangetoond en daarna formule (8) van XIII, 13 toepassen ; dit is echter meestal niet de kortste weg.

In XIII, 16 werd immers bewezen dat de formule $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. geldt onverschillig of x en y onafhankelijk veranderlijken zijn , ofwel zelf functies van een zelfde veranderlijke t ; in dit laatste geval is z echter een functie van één veranderlijke t, en kan men dz berekenen met behulp van de regels van Hoofdstuk IV en VII. Men zal dan ook meestal eerst de totale differentiaal op deze wijze berekenen en hierop dan de partiële afgeleiden aflezen.

Voorbeeld : $z = Bg\ tg \frac{y}{x}$.

Eerste methode :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(- \frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$dz = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

Tweede methode :

$$d\ Bg\ tg \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} d\left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

Hierop lezen wij nu af : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

XIII, 18. Uitbreiding tot drie en meer veranderlijken.

De voorgaande theorie kan gemakkelijk uitgebreid worden op drie en meer veranderlijken.
Is bv. $u = f(x, y, z,)$ dan zijn de partiële afgeleiden resp. $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, en de partiële differentialen zijn resp. $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u}{\partial z} dz$.

De totale differentiaal is dan $du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$,

en deze laatste formule is geldig onverschillig of x, y en z onafhankelijk of afhankelijk veranderlijken zijn.

OPAGEVEN :

Bepaal de partiële afgeleiden en de totale differentiaal van de volgende functies :

1) $z = x \sin y + y \sin x$; 2) $z = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; 3) $z = \ln \frac{\cos x}{\cos y}$;

4) $z = (x+y)\, e^{xy}$; 5) $z = \operatorname{Bg}\operatorname{tg} \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$; 6) $z = \sin x^y$;

7) $z = (\sin x)^y$; 8) $u = \frac{xy}{z}$; 9) $u = \frac{e^z x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Par.2. AFGELEIDEN EN DIFFERENTIALEN VAN HOGERE ORDE.

XIII, 19. Partiële afgeleiden van de tweede orde.

Zij z = f (x, y) een functie die partieel afleidbaar is naar x en y. Deze partiële afgeleiden zijn opnieuw functies van x en y, en kunnen derhalve op hun beurt partiële afgeleiden naar x en y bezitten ; deze laatste heten de partiële afgeleiden van de tweede orde van de functie z = f (x, y)

Aangezien de twee partiële afgeleiden van de eerste orde naar x en naar y kunnen afgeleid worden , heeft de functie z = f (x, y) derhalve vier partiële afgeleiden van de tweede orde ; deze worden als volgt genoteerd :

1) In de notatie van Lagrange : $(f'_x)'_x = f''_{xx}$; $(f'_x)'_y = f''_{xy}$; $(f'_y)'_x = f''_{yx}$; $(f'_y)'_y = f''_{yy}$.

2) In de notatie van Cauchy :
$$\begin{cases} D_x(D_x z) = D^2_{xx} z\,; & D_y(D_x z) = D^2_{yx} z\,; \\ D_x(D_y z) = D^2_{xy} z\,; & D_y(D_y z) = D^2_{yy} z\,. \end{cases}$$

3) In de notatie van Jacobi :
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,; & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,; \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,; & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,. \end{cases}$$

Deze vier partiële afgeleiden zijn echter meestal niet verschillend ; in elk gebied waar de gemengde partiële afgeleiden f''_{xy} en f''_{yx} continu zijn is voldaan aan de betrekking

$$\boxed{f''_{xy} = f''_{yx}}$$

Deze eigenschap draagt de naam van de symmetrie-eigenschap van de gemengde partiële afgeleiden ; ze drukt uit dat de volgorde van de afleidingen naar x en y onwisselbaar is.

Alhoewel deze symmetrie-eigenschap voor de hand ligt is het bewijs enigzins omslachtig ; wij zullen dan ook van dit bewijs afzien en ons vergenoegen met de controle op een voorbeeld.

Voorbeeld :

$$z = e^y + y^x \; ; \; \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = e^y + x y^{x-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x (\ln y)^2 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = y^x \cdot \frac{1}{y} + \ln y \cdot x y^{x-1} = y^{x-1}(1 + x \ln y) \; ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1} + x y^{x-1} \ln y = y^{x-1}(1 + x \ln y) \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y + x(x-1) y^{x-2} .$$

XIII, 20. Partiële afgeleiden van hogere orde dan de tweede.

Het is duidelijk dat de partiële afgeleiden van de tweede orde uit XIII, 19 opnieuw kunnen afleidbaar zijn naar x en naar y ; aldus bekomt men de partiële afgeleiden van de derde orde van de functie $z = f(x, y)$
Dezezijn ten getalle van acht; wegens de symmetrie-eigenschap van de gemengde partiële afgeleiden zijn er meestal slechts vier verschillende ;
wij schrijven ze hier in de notatie van Jacobi :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \; ; \; \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \; ;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \; ; \; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \; ;$$

Aldus voortgaande kan men de partiële afgeleiden van de n^e orde van de functie $z = f(x, y)$ definiëren ; zij zijn over 't algemeen ten getalle van 2^n doch meestal zijn er slechts $n + 1$ verschillend.

XIII, 21. Differentialen van hogere orde.

De differentiaal $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ van de functie $z = f(x,y)$ is een functie van x, y, dx en dy ; om te kunnen zeggen dat dz op zijn beurt een differentiaal bezit, spreken wij opnieuw af, zoals in VIII, 14 dx en dy als constanten te beschouwen, zodat dz dan herleid is tot een functie van x en y alleen.

De totale differentiaal van dz heet dan differentiaal van de tweede orde van de functie z en wordt d (dz) of $d^2 z$ genoteerd ; op analoge wijze kunnen wij dan de differentialen van hogere orde dan de tweede definieren. Wij hebben :

$$d(dz) = d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dy$$

en vermits meestal $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

Op analoge wijze zou men vinden :

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3 .$$

Zoals in VIII, 14 moeten wij er op wijzen dat deze formules enkel geldig zijn wanneer x en y onafhankelijk veranderlijken zijn, want ze zijn gesteund op de eigenschap dat dx en dy arbitrair zijn ; deze formules zijn derhalve niet zonder meer uit te breiden op het geval dat x en y op hun beurt functies zijn (wat voor de eerste differentiaal wel het geval was) .

Voorbeeld .

$$z = ax^2 y - xy^3 \;;\; dz = (2axy - y^3)\,dx + (ax^2 - 3xy^2)\,dy \;;$$

$$d^2 z = 2ay\,dx^2 + 2(ax - 3y^2)\,dx\,dy - 6xy\,dy^2$$

$$d^3 z = 6a\,dx^2\,dy - 18y\,dx\,dy^2 - 6x\,dy^3 \;;\; d^4 z = -24\,dx\,dy^3 \;;\; d^5 z = d^6 z = \ldots = 0$$

Opmerking : Dit alles kan uitgebreid worden op functies van meer dan twee veranderlijken.

OPGAVEN :

1. Bereken de partiële afgeleiden van de tweede orde van de volgende functies en controleer de symmetrie-eigenschap van de gemengde partiële afgeleiden :

1) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $z = x^{x+y}$;

3) $z = Bg\,tg\,(x^2 - xy)$; 4) $z = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

2. Bepaal d^2z en $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ uit $z = e^{x^2+y^2}$.

3. Bepaal $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ uit $u = \frac{x^{2y}}{a^2 - z^2}$.

Par. 3. EXTREMA VAN EEN FUNCTIE VAN TWEE VERANDERLIJKEN.

XIII, 14. Definitie.

Men zegt dat de functie $z = f(x, y)$ in het punt $P(x_o, y_o)$ een maximum vertoont wanneer een gebied kan worden aangewezen, waarin de functie gedefinieerd is en dat het punt P als inwendig punt bevat, zodat $f(x_o, y_o)$ de grootste functiewaarde is die in dit gebied voorkomt.

Is onder dezelfde voorwaarden $f(x_o, y_o)$ de kleinste functiewaarde die in dit gebied voorkomt, dan zegt men dat de functie $z = f(x, y)$ in het punt P een minimum vertoont.

XIII, 15. Het bepalen van de extrema.

Wij onderstellen dat de functie $z = f(x, y)$ in het punt $P(x_o, y_o)$ een extremum vertoont ; verder onderstellen wij dat de functie in het punt P partieel afleidbaar zij naar x en y (voor functies van één veranderlijke werden ook de extrema opgezocht in punten waar de functie niet afleidbaar was (VI, 7) doch wij zullen dit hier niet doen) .

Houden wij nu y constant dan wordt $z = f(x, y_0)$ een functie van x alleen ; uit de definitie volgt dat deze functie voor $x = x_0$ een extremum moet vertonen ; een nodige voorwaarde hiertoe is dat de afgeleide nul zij in dit punt (VI, 5) ; deze afgeleide is echter niets anders dan de partiële afgeleide van z naar x. Op analoge wijze kan men aantonen dat de partiële afgeleide van z naar y moet nul zijn.

Opdat de functie $z = f(x, y)$ in het punt $P(x_0, y_0)$ een extremum zou vertonen is de voorwaarde $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ derhalve nodig. Zoals voor functies van één veranderlijke (VI, 5) is deze voorwaarde echter niet voldoende ; theoretische overwegingen waarop wij hier niet verder kunnen ingaan tonen aan dat daarbij de voorwaarde : $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - \left[f''_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0$ vereist is ; het extremum is dan een maximum als $f''_{xx}(x_0, y_0)$ of $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ en een minimum als $f''_{xx}(x_0, y_0)$ of $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$

Voorbeeld : Bepaal de extrema van de functie $z = (x - y + 3)^2 + (x - 2y + 8)^2$.

$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y + 11$; $\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 5y - 19$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5$

Oplossing van het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y + 11 = 0 \\ -3x + 5y - 19 = 0 \end{cases}$ geeft $x = 2$, $y = 5$.

Aangezien $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4(5 \cdot 2 - 9) > 0$ is dit een extremum en wegens $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ is het een minimum.

HOOFDSTUK XIV.

AFGELEIDEN EN DIFFERENTIALEN VAN FUNCTIES DIE NIET EXPLICIET GEDEFINIEERD ZIJN.

Par. 1. IMPLICIETE FUNCTIES VAN ÉÉN VERANDERLIJKE.

XIV. 1. Het differentieren van een vergelijking met twee onbekenden.

a) Inleidend voorbeeld : Wij beschouwen de vergelijking met twee onbekenden $y^2 - 4xy + 3x^2 - 4 = 0$ (1) die twee eenwaardige functies van x definieert. (I, 13). Deze functies kunnen onder de expliciete vorm $y = 2x \pm \sqrt{x^2+4}$ (2) worden gebracht. Substitueert men (2) in (1) dan komt

$$\left(2x \pm \sqrt{x^2+4}\right)^2 - 4x\left(2x \pm \sqrt{x^2+4}\right) + 3x^2 - 4 \equiv 0 \qquad (3)$$

en deze laatste betrekking is een identiteit.

Stellen wij nu $z = y^2 - 4xy + 3x^2 - 4$ (4) dan is z wegens (2) een samengestelde functie van x alleen, en wegens (3) is deze functie identiek nul. Derhalve zijn ook dz en $\frac{dz}{dx}$ identiek nul.

Krachtens de regel voor het differentieren van samengestelde functies (XIII, 16) is

$$dz = (-4y + 6x)\,dx + (2y - 4x)\,dy \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dx} = -4y + 6x + (2y - 4x)\frac{dy}{dx}$$

Derhalve is ook :

$$(-4y + 6x)\,dx + (2y - 4x)\,dy = 0 \quad (5) \quad \text{en} \quad -4y + 6x + (2y - 4x)\,y' = 0 \quad (6)$$

Van (5) zegt men dat men de vergelijking (1) gedifferentieerd heeft ; van (6) kan men zeggen dat men de vergelijking (1) heeft afgeleid.

b) Algemeen geval : Wij beschouwen de vergelijking met twee onbekenden $f(x,y) = 0$ (1) en onderstellen dat deze één of meer differentieerbare functies y van x definieert ;
Zij $y = \varphi(x)$ (2) een van deze functies ; het is voldoende dat deze functie bestaat zonder dat het noodzakelijk is ze onder expliciete vorm te kunnen schrijven.

Denken wij ons nu (2) in (1) gesubstitueerd, dan komt $f\left[x, \varphi(x)\right] = 0$ (3) en deze laatste betrekking is een identiteit.

Stellen wij verder $z = f(x, y)$ (4) dan is **x** wegens (2) een samengestelde functie van x alleen en wegens (3) is deze functie identiek nul. Derhalve zijn ook dz en $\frac{dz}{dx}$ nul.

Krachtens de regel voor het differentiëren van samengestelde functies (XIII, 16) is

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \qquad \text{en} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Derhalve is ook :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0 \quad (5) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0. \quad (6)$$

Van (5) zegt men dat men de vergelijking (1) gedifferentieerd heeft ; van (6) kan men ook zeggen dat men de vergelijking (1) heeft afgeleid.

Opmerking : Krachtens de regels voor de afgeleide van een som is het duidelijk dat men niet $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ afzonderlijk moet bepalen, maar dat men de vergelijking term voor term mag differentieren of afleiden ; om dezelfde reden is het niet noodzakelijk de vergelijking eerst op nul te herleiden, maar mag men de differentiaal van beide leden gelijkstellen.

Voorbeelden :

1) Wij beschouwen de algemene vergelijking van de tweede graad met twee onbekenden :

$$A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2D x + 2E y + F = 0.$$

Differentiëren van deze vergelijking geeft :

$$2A x\,dx + 2B(x\,dy + y\,dx) + 2C y\,dy + 2D\,dx + 2E\,dy = 0 \quad \text{of}$$

$$(Ax + By + D)\,dx + (Bx + Cy + E)\,dy = 0$$

2) $y \sin(x+y) = x + y + 1$ afleiden van deze vergelijking geeft :

$$y' \sin(x+y) + y(1+y')\cos(x+y) = 1 + y' \quad \text{of} \quad y'\left[\sin(x+y) + y\cos(x+y) - 1\right] = 1 - y\cos(x+y)$$

XIV, 2. Bepaling van de afgeleide van de eerste orde.

Wij beschouwen opnieuw de vergelijking $f(x,y)=0$ (1) die één of meer afgeleidbare functies y van x definieert ; differentiëren of afleiden van deze vergelijking geeft (XIV, 1) :

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0 \qquad \text{of} \qquad f'_x + y' f'_y = 0$$

Hieruit volgt onmiddellijk :

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}} \qquad (2)$$

Men heeft vanzelfsprekend ook $dy = -\dfrac{f'_x}{f'_y}\,dx$.

Opmerkingen :

1) Om y' te bepalen kan men ofwel f'_x en f'_y berekenen en (2) toepassen ofwel de gegeven vergelijking afleiden en hieruit y' berekenen.

2) Deze methode bepaalt y' meestal niet in functie van x alleen zoals bij expliciete functies, maar in functie van x en y.

Voorbeelden : Wij hernemen de voorbeelden van XIV, 1. Men vindt onmiddellijk

1) $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}$$

2) $$y' = \frac{1 - y\cos(x+y)}{\sin(x+y) + y\cos(x+y) - 1}$$

Gevolg : De vergelijking van de raaklijn in het punt $(x_0;y_0)$ van de kromme met vergelijking $f(x,y)=0$ is :

$$y - y_0 = -\left(\frac{f'_x}{f'_y}\right)_0 (x - x_0) \qquad \text{of}$$

$$(y - y_0)\left(f'_x\right)_0 + (x - x_0)\left(f'_y\right)_0 = 0$$

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

XIV, 3. Bepaling van de afgeleiden van hogere orde.

Uit de vergelijking $f(x,y) = 0$ (1) werd in XIV, 2 de vergelijking $f'_x + y' f'_y = 0$ (2) afgeleid. Het eerste lid van (2) is nu andermaal een samengestelde functie van x alleen ; door afleiden van (2) kan nu y'' worden bepaald.

$$f''_{xx} + y' f''_{xy} + y'' f'_y + y'(f''_{yx} + y' f''_{yy}) = 0 .$$

Hieruit volgt als wij de gemengde partiële afgeleiden continu onderstellen (XIII, 19) :

$$y'' = - \frac{f''_{xx} + 2y' f''_{xy} + y'^2 f''_{yy}}{f'_y} \qquad (3)$$

Houden wij nu nog rekening met (2) dan wordt (3) :

$$y'' = - \frac{f''_{xx} (f'_y)^2 - 2 f''_{xy} \cdot f'_x \cdot f'_y + f''_{yy} (f'_x)^2}{(f'_y)^3} \qquad (4)$$

Men kan andermaal y'' uit (4) bepalen of in elk afzonderlijk geval de vergelijking (2) afleiden.

Door verdere afleiding kan men ook de afgeleiden van hogere orde dan de tweede bepalen.

Voorbeeld : $y^3 - 3xy + x^3 = 0$ (Folium van Descartes) (*)

Eerste methode : Stellen wij $f(x,y) = y^3 - 3xy + x^3$, dan is

$$f'_x = -3y + 3x^2 ; \quad f'_y = 3y^2 - 3x ; \quad f''_{xx} = 6x ; \quad f''_{xy} = -3 ; \quad f''_{yy} = 6y .$$

$$y' = \frac{-3y + 3x^2}{-(3y^2 - 3x)} = \frac{x^2 - y}{x - y^2} .$$

(*) René DESCARTES (Renatus CARTESIUS) : frans wijsgeer en wiskundige (1596-1650) ; grondlegger van de Analytische meetkunde.

$$y'' = -\frac{6x(3y^2-3x)^2 - 2(-3)(-3y+3x^2)(3y^2-3x) + 6y(-3y+3x^2)^2}{(3y^2-3x)^3}$$

$$= 2\,\frac{xy(y^3+x^3-3xy)+xy}{(x-y^2)^3} = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$$

$y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}$

Tweede methode :

$$3y^2y' - 3(xy'+y) + 3x^2 = 0 \quad \text{of} \quad y'(y^2-x) - (y-x^2) = 0$$

$$y''(y^2-x) + y'(2yy'-1) - (y'-2x) = 0 \quad \text{of} \quad y'' = -2\,\frac{yy'^2 - y' + x}{y^2-x}$$

Houdt men rekening met de gegeven vergelijking en de gevonden waarde van y' dan vindt men ook na enige berekeningen.

$$y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$$

XIV, 4. Extrema van impliciete functies.

Zij gevraagd de analytische extrema van de impliciet gedefinieerde functie $f(x,y) = 0$ te bepalen. Deze worden gevonden door oplossing van de vergelijking

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = 0 \quad \text{of} \quad f'_x = 0 \quad \text{mits} \quad f'_y \neq 0.$$

De oplossingen van het stelsel $f(x,y) = 0$, $f'_x(x,y) = 0$ kunnen derhalve extrema zijn ; om dit na te gaan zal men het teken van de tweede (eventueel hogere) afgeleide bepalen.

XIV, 5. Singuliere punten.

Als de coordinaten van een punt $P(x_0 ; y_0)$ voldoen aan

$$f(x,y) = f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$$

dan heet dit punt een singulier punt voor de grafiek van de functie.
In dit geval herleidt zich y' tot de schijnbaar onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ en wij trachten deze onbepaaldheid op te heffen met de regel van de l'Hospital (V, 9) . Met toepassing van XIII, 16 komt aldus :

$$y'_0 = -\lim_{x\to x_0}\frac{f'_x}{f'_y} = -\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{df'_x}{dx}}{\dfrac{df'_y}{dx}} = -\lim_{x\to x_0}\frac{f''_{xx}+y'f''_{xy}}{f''_{yx}+y'f''_{yy}}$$

Wij beperken ons tot het geval dat deze laatste limiet door rechtstreekse limietovergang kan bepaald worden ; dan is

$$y'_0 = -\frac{(f''_{xx})_0 + y'_0(f''_{xy})_0}{(f''_{yx})_0 + y'_0(f''_{yy})_0}$$

Wegens $f''_{xy} = f''_{yx}$ (XIII, 19) kan y' dan berekend worden uit de vierkantsvergelijking :

$$y'^2_0(f''_{yy})_0 + 2y'_0(f''_{xy})_0 + (f''_{xx})_0 = 0$$

Naar gelang het teken van de discriminant $D = (f''_{xy})_0^2 - (f''_{yy})_0(f''_{xx})_0$ kunnen zich deze gevallen voordoen :

1) $D > 0$: de kromme heeft in het beschouwde punt twee onderscheiden raaklijnen ; het singulier punt heet een knooppunt .
2) $D = 0$; de raaklijnen van beide takken vallen samen, het singulier punt heet een keerpunt.
3) $D < 0$: de kromme heeft geen raaklijn in het beschouwde punt ; het singulier punt heet een geïsoleerd punt of kluizenaar.

Opmerking : Is $(f''_{yy})_0 = 0$ dan heeft de kromme in het singulier punt klaarblijkend een raaklijn evenwijdig met de y-as.

Voorbeeld : Bepaal de analytische extrema van de functie gedefinieerd door $y^3 - 3xy + x^3 = 0$, en onderzoek haar singulariteiten.

De partiële afgeleiden werden reeds in XIV, 3 bepaald.

Nu is $f'_x = 0$ voor $y = x^2$; dit geeft na substitutie in de gegeven vergelijking , $x = 0$ en $x = \sqrt[3]{2}$.

1) $x = \sqrt[3]{2} \longrightarrow y = \sqrt[3]{4}$. Hiervoor is $f'_y \neq 0$; dit punt is een extremum en wel een maximum wegens $y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3} = \frac{2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3} = -2 < 0$

2) $x = 0 \longrightarrow y = 0$; Hiervoor is $f'_y = 0$; de oorsprong is dus een singulier punt en de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen zijn de wortels van de vkv.

$$0.y'^2 - 6y' + 0 = 0.$$

De oorsprong is dus een knooppunt voor deze kromme en de raaklijnen in dit punt vallen in de coördinaatassen

OPGAVEN.

1. Toon aan dat de subraaklijn in een punt van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ onafhankelijk is van de kleine as. Rechtvaardig hieruit de meetkundige constructie van de raaklijn in een punt van deze ellips.

2. Bepaal de lengte van de raaklijn en de normaal van de ellips $x^2 + 2y^2 = 8$ in de punten waarvan de abscis gelijk is aan de abscis van een brandpunt.

3. Bepaal de subraaklijn en de subnormaal alsmede de lengte van de raaklijn en de normaal in elk punt van de parabool $y^2 - 2px = 0$.

4. Bepaal de eerste en de tweede afgeleide van de volgende impliciet gedefinieerde functies.

1) $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; 2) $y^2 + xy + x^2 = 1$;

3) $y^3 - 3x^2y + 2x^3 = 8$; 4) $\frac{2}{3}x^3 + 3ax^2y = 9a^3y^3$;

5) $xe^y - y - 1 = 0$; 6) $\sin xy - mx = 0$;

7) $(x-y)y^n = x + y$; 8) $y^x = x^y$.

5. Bepaal de analytische extrema en onderzoek de eventuele singulariteiten van de volgende impliciet gedefinieerde functies.

1) $y^3 - x^2 = 0$; 2) $x^2 + y^2 = x^3$;

3) $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$; 4) $x^3 = (y-x-1)^2$;

5) $(x^2+y^2) = 4x^2 + y^2$; 6) $(x^2+y^2)(x^2+y^2-2x) = y^2$.

Par. 2. IMPLICIETE FUNCTIES VAN MEER DAN EEN VERANDERLIJKE.

XIV, 6. Het differentiëren van een vergelijking met meer dan twee onbekenden.

Wij beschouwen de vergelijking met drie onbekenden $f(x,y,z)=0$ (1) en onderstellen dat deze een of meer differentieerbare functies z van x en y definieert.
Zij $z = \varphi(x,y)$ (2) een van die functies ; het is voldoende dat deze functie bestaat zonder dat het noodzakelijk is ze onder expliciete vorm te kunnen schrijven.

Denken wij ons nu (2) in (1) gesubstitueerd , dan komt $f[x,y,\varphi(x,y)] = 0$ (3) en deze laatste betrekking is een identiteit.

Stellen wij verder $u = f(x,y,z)$ (4) dan is u wegens (2) een samengestelde functie van x en y alleen en wegens (3) is deze functie identiek nul. Derhalve zijn ook de partiële afgeleiden van u naar x en y gelijk aan nul ; krachtens de regel voor het afleiden van samengestelde functies (XIII, 16) is dit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (5)$$

Van (5) zegt men dat men de vergelijking (1) partiëel heeft afgeleid.

Nu, is $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ (XIII, 13) of rekening houdend met (5)

$$dz = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\,dy$$ en tenslotte

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0 \qquad (6)$$

Het eerste lid van (6) is de totale differentiaal van de functie u.
Van (6) zegt men dat men de vergelijking (1) heeft gedifferentieerd.

Voorbeeld : $z^3 + 3(ax + by)z + c^3 = 0 \quad (1)$

a) Door partiële afleiding naar x en y komt :

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3az + 3(ax+by)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ of } (z^2+ax+by)\frac{\partial z}{\partial x} + az = 0$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 3bz + 3(ax+by)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ of } (z^2+ax+by)\frac{\partial z}{\partial y} + bz = 0$$

b) Door differentiëren van de gegeven vergelijking komt :

$$3z^2\,dz + 3(ax+by)\,dz + 3(a\,dx + b\,dy)z = 0 \quad \text{of}$$

$$(z^2 + ax + by)\,dz + az\,dx + bz\,dy = 0.$$

XIV, 7. Het bepalen van de partiële afgeleide en de differentiaal van de eerste orde.

Wij beschouwen opnieuw de vergelijking $f(x, y, z) = 0 \quad (1)$ van XIV, 6

Om $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en dz te bepalen kan men twee wegen inslaan:

a) de vergelijking (1) partiëel afleiden ; met (5) vindt men dan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z} \quad \text{waaruit}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{f'_x}{f'_z}dx - \frac{f'_y}{f'_z}dy.$$

b) de vergelijking (1) differentiëren ; uit (6) vindt men dan

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z}dx - \frac{f'_y}{f'_z}dy \quad \text{waaruit} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} \text{ en } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}$$

Voorbeeld : Wij passen beide methodes toe op het voorbeeld van XIV, 6.

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{z^2+ax+by}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{z^2+ax+by}$ waaruit

$$dz = -\frac{az\,dy + bz\,dx}{z^2 + ax + by}$$

b) $dz = -\dfrac{az\,dy + bz\,dx}{z^2 + ax + by}$ waaruit

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{az}{z^2 + ax + by} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{bz}{z^2 + ax + by}$$

Opmerkingen :

1) Door verder afleiden of differentieren van (5) of (6) vindt men de partiële afgeleiden en differentialen van hogere orde.

2) Deze theorie kan uitgebreid worden op functies van drie en meer veranderlijken.

OPGAVEN :

Bepaal $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en dz voor de volgende functies :

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (ellipsoïde)

2. $x^3 - 3xyz + y^3 + z^3 = 0$.

Par.3. PARAMETRISCH GEDEFINIEERDE FUNCTIES.

XIV, 8. Afgeleiden van parametrisch gedefinieerde functies.

Onderstellen wij dat y als functie van x gedefinieerd zij door de parametrische vergelijkingen $y = \varphi(t)$ en $x = \psi(t)$.

Dan is $dy = \varphi'(t)\,dt$ en $dx = \psi'(t)\,dt$ en

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi'(t)\,dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{Dy}{Dx},$$

waarin D een afleiding naar t aanduidt.

Passen wij deze laatste formule toe op de functie y', dan komt :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{Dy'}{Dx} = \frac{D\frac{Dy}{Dx}}{Dx} = \frac{Dx\,D^2y - Dy\,D^2x}{(Dx)^3}.$$

en zo verder voor de afgeleiden van hogere orde dan de tweede.

Gevolg : De vergelijking van de raaklijn in een punt $\left[x_0 = \varphi(t_0)\ ;\ y_0 = \psi(t_0)\right]$ van de grafiek van een parametrisch gedefinieerd functie is

$$(y - y_0)\,\psi'(t_0) - (x - x_0)\,\varphi'(t_0) = 0$$

Voorbeeld :

Wij beschouwen de gewone cycloïde die parametrisch gedefinieerd is door devergelijkingen : x = r (t - sin t) , y = r (1 - cos t).

Men vindt onmiddellijk :

$$y' = \frac{Dy}{Dx} = \frac{r \sin t}{r(1-\cos t)} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$$

$$y'' = \frac{Dy'}{Dx} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}}{r(1-\cos t)} = -\frac{1}{4r \sin^4 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{r(1-\cos t)^2}$$

De vergelijking van de raaklijn aan de cycloïde in een punt bepaald door de parameter t is dan (gezien er hier geen dubbelzinnigheid is dringt de notatie t_0 zich niet op) :

$$y - r(1-\cos t) = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \left[x - r(t - \sin t)\right]$$

$$\text{of } y + x \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = r\left(2 - t \operatorname{cotg} \frac{t}{2}\right)$$

De vergelijking van de normaal is dan :

$$y - r(1-\cos t) = -\operatorname{tg} \frac{t}{2} \left[x - r(t - \sin t)\right]$$

$$\text{of } \quad y + x \operatorname{tg} \frac{t}{2} = rt \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

De subraaklijn en de subnormaal zijn dan respectievelijk $(\overline{VI}, 2)$

$$S_r = -\frac{y}{y'} = -\frac{r(1-\cos t)}{\operatorname{cotg} \frac{t}{2}} = -2r \operatorname{tg} \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$S_n = yy' = r(1-\cos t) \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = r \sin 2t$$

Tenslotte vinden wij voor de lengte van de raaklijn en de normaal in elk punt $(\overline{VI}, 2)$

$$PR = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2} = 2r \left| \sin \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|$$

$$PN = |y| \sqrt{1 + y'^2} = 2r \left| \sin \frac{t}{2} \right|$$

OPGAVEN.

1. Bepaal de eerste en de tweede afgeleide van de volgende parametrisch gedefinieerde functies ; stel de vergelijking op van de raaklijn en de normaal in elk punt van de grafiek van deze functies ; bepaal ook in elk van deze punten de subraaklijn , de subnormaal en de lengte van de raaklijn en de normaal.

1) $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^3 - 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \frac{t}{1-t^3} \\ y = \frac{1+t}{t^2} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\,tg\,t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = e^t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 9) $\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t) \\ y &= a(\sin t - t\cos t) \end{aligned}$

2. Wat wordt de vergelijking $(1-x^2)\,y'' - xy' = 0$ wanneer men hierin $x = \sin t$ substitueert en t als nieuwe onafhankelijk veranderlijke kiest.

3. Zelfde vraag voor de vergelijking $x^2 y'' + xy' + 1 = 0$ met de substitutie $x = e^t$.

Par. 4. OVERGANG OP POOLCOORDINATEN.

XIV, 9. Berekening van de afgeleiden bij overgang op poolcoördinaten.

Zij $y = f(x)$ of $F(x,y) = 0$ en gaan wij over op poolcoördinaten met de formules $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. De gegeven betrekking gaat dan over in

$$\rho\sin\theta = f(\rho\cos\theta) \quad \text{of} \quad F[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta] = 0;$$

deze laatste is de poolvergelijking van de grafiek van de gegeven functie en deze definieert ρ in functie van θ. Derhalve is :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\rho \sin\theta)}{d(\rho\cos\theta)} = \frac{(\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta)\,d\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\,d\theta} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\,\frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}}{d(\rho\cos\theta)} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^3}$$

Voorbeeld : Bereken de afgeleiden van de functie y impliciet gedefinieerd door de vergelijking van de lemniscaat $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)^2 = 0$ bij overgang op poolcoördinaten.

De poolvergelijking vande kromme is

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \quad \text{of} \quad \rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

$$\rho = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\,, \quad \rho' = -\frac{a\sqrt{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,; \quad \rho'' = -a\sqrt{2}\,\frac{1+\cos^2 2\theta}{\sqrt{\cos^3 2\theta}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta} = \frac{-\frac{a\sqrt{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta + a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta}{-\frac{a\sqrt{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta - a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta}$$

$$= -\frac{\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}{\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta} = -\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} = -\operatorname{cotg} 3\theta$$

In plaats van de gevonden waarden voor ρ, ρ' en ρ'' in te vullen in de formule voor y'' is het eenvoudiger y'' als als volgt rechtstreeks te berekenen :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{3}{\sin^2 3\theta}}{-\frac{a\sqrt{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta - a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta} = -\frac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{a\sqrt{2}\sin^3 3\theta}$$

Opmerking : Als de poolvergelijking van de kromme oplosbaar is naar ρ, dan kan men de betrekkingen $x = \rho\cos\theta$ en $y = \rho\sin\theta$ waarin ρ in functie van θ is uitgedrukt, beschouwen als een parametrische voorstelling van de kromme.

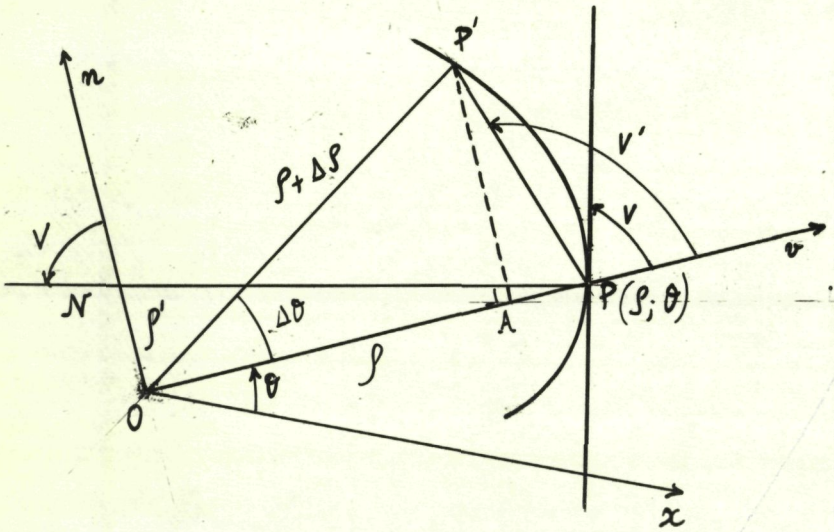
Aldus ziet men in bovenstaand voorbeeld dat

$$x = \rho\cos\theta = a\cos\theta\sqrt{2\cos 2\theta}\,,\quad y = \rho\sin\theta = a\sin\theta\sqrt{2\cos 2\theta}$$

een parametrische voorstelling van de lemniscaat uitmaakt.

Met een dergelijke parmetrische voorstelling kan men te werk gaan als in par. 3.

XIV, 10. Raaklijn en normaal in poolcoördinaten.



Zij P $(\rho;\theta)$ een punt van een kromme met gegeven poolvergelijking, ρ wordt, zoals steeds, gemeten op de as v, positief gericht van 0 naar P. In 0 kiezen wij verder een as n, loodrecht op v en zo georiënteerd dat de positieve zin van v na wenteling over de gerichte hoek $\frac{\pi}{2}$ met de positieve zin van n samenvalt.

Onderstellen wij dat de kromme in P een welbepaalde raaklijn bezit en zij V een van de hoeken van v en een as waarvan die raaklijn de drager is. (*)

Wij geven nu aan θ een aangroeiing $\Delta\theta$ en komen aldus tot het punt P' $(\rho+\Delta\rho\,;\ \theta+\Delta\theta)$ op de kromme ; tenslotte is P'A loodrecht op v.

Op bijgaande figuur is nu

$$\operatorname{tg} V' = \frac{\overline{AP'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{PO}+\overline{OA}} = \frac{(\rho+\Delta\rho)\sin\Delta\theta}{-\rho+(\rho+\Delta\rho)\cos\Delta\theta} = \frac{(\rho+\Delta\rho)\sin\Delta\theta}{\rho(\cos\Delta\theta-1)+\Delta\rho\cos\Delta\theta}$$

(*) Het heeft geen belang welke positieve zin men op die as kiest, aangezien de hoek V bepaald is door zijn tangens.

$$tg\,V = \lim_{\Delta\theta\to 0} tg\,V' = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{(\rho+\Delta\rho)\,\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{-\rho\,\frac{2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} + \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}\cos\Delta\theta} = \frac{(\rho+0).1}{-\rho.0+\rho'.1}$$

$$\boxed{tg\,V = \frac{\rho}{\rho'}} \qquad (1)$$

Zij dan N het snijpunt van n en de normaal in P; de hoek van n en de normaal is dan blijkbaar gelijk aan V, zodat

$$tg\,V = \frac{\rho}{ON} \qquad \text{of} \qquad \boxed{\overline{ON} = \rho'}$$

Deze laatste eigenschap laat toe de normaal en dus ook de raaklijn op eenvoudige wijze te tekenen.

Opmerkingen :

1) Staat de raaklijn loodrecht op de voerstraal, dan is $\lim_{\Delta\theta\to 0} tg\,V' = \infty$ of $\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} = \rho' = 0$; valt de raaklijn samen met de voerstraal dan is

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} tg\,V' = 0 \quad \text{of} \quad \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} = \infty$$

2) De voorgaande uiteenzetting geldt slechts voor $\rho \neq 0$ d.w.z. als P niet in de pool ligt. Is $\rho = 0$ voor $\theta = \alpha$ dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de pool (XIV, 9)

$$y' = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta} = \frac{\rho'\sin\alpha}{\rho'\cos\alpha} = tg\,\alpha.$$

De raaklijn is dan de rechte $\theta = \alpha$.

OPGAVEN.

1. Bereken y' en y'' voor de volgende functies bij overgang op poolcoördinaten :

1) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; 2) $(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$;

3) $(x^2 + y^2) = x(x^2 - 3y^2)$; 4) $(x^2 + y^2)(x - 1) = xy$.

2. Toon aan dat de hoek van de voerstraal en de raaklijn in elk punt van de logaritmische spiraal $\rho = e^{a\theta}$ constant is.

3. Bereken de hoek van de voerstraal en de raaklijn in elk punt van de spiraal van Archimedes $\rho = a\theta$ en de hyperbolische spiraal $\rho = \frac{a}{\theta}$.

Par. 5. TOEPASSING OP DE GRAFISCHE VOORSTELLING VAN FUNCTIES.

XIV, 11. Algemene opmerking.

In VI, 19 werd de methode aangewezen om de grafiek te schetsen van expliciete functies in cartesische coördinaten.

De berekeningen van de afgeleiden die in par. 1, 3 en 4 van dit hoofdstuk werden uitgevoerd, kunnen ons nu helpen om ook de grafiek te schetsen van functies die niet expliciet in cartesische coördinaten gedefinieerd zijn.

Wij zullen hierbij geen algemene theorieën behandelen, doch trachten de werkwijze duidelijk te maken aan de hand van enkele uitgewerkte voorbeelden.

XIV, 12. Grafiek van een parametrisch gedefinieerd functie.

Zij $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Rekening houdend met de resultaten van par. 3 zal men te werk gaan als in VI, 19 . Nochtans zal men voor het stijgen en dalen van y niet het teken van y' onderzoeken, want dit drukt het stijgen of dalen uit van y bij stijgende x. Men onderzoekt het teken van Dx en Dy wat het stijgen en dalen uitdrukt van x en y bij stijgende t.

Eerste voorbeeld : Het folium van Descartes.

De vergelijking van het folium is $y^3 + x^3 - 3xy = 0$, doch als wij $y = tx$ stellen vinden wij de parametrische voorstelling

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad , \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \; .$$

1) x en y zijn gedefinieerd voor $t \neq -1$; voor $t = 0$ is $x = y = 0$.

Er zijn geen horizontale of verticale asymptoten ; een schuine asymptoot is bepaald door :

$$m = \lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1+t^3}{3t} = -1$$

$$n = \lim_{t \to -1} (y - mx) = \lim_{t \to -1} \frac{3(t^2+t)}{1+t^3} = \lim_{t \to -1} \frac{3t}{t^2-t+1} = -1$$

De rechte $y - x + 1 = 0$ is dus een schuine asymptoot

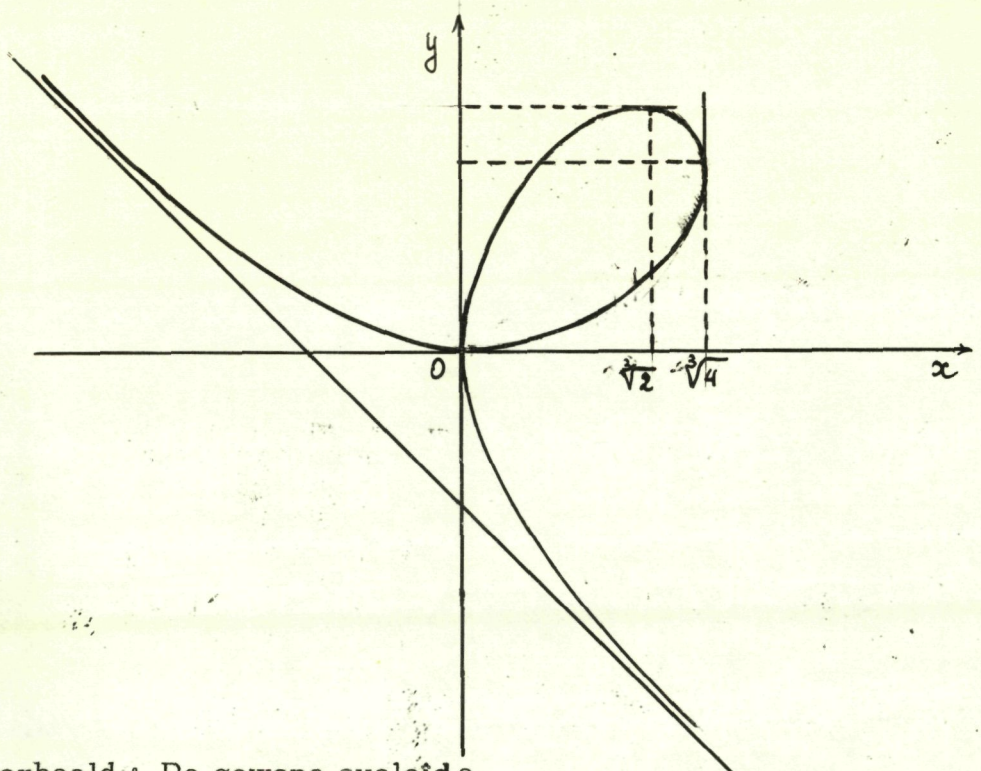
2) $Dx = 3 \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$; $\qquad Dy = 3 \dfrac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}$

$Dx = 0$ als $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\quad Dy = 0$ als $t = 0$ of $t = \sqrt[3]{2}$.

3) $y' = \dfrac{Dy}{Dx} = \dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$; $\qquad y'' = \dfrac{Dy'}{Dx} = \dfrac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}$

4) Tabel

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x	0	↗	$+\infty / -\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$ max	↘	$\sqrt[3]{2}$	↘	0
y	0	↘ ∪	$-\infty / +\infty$	↘	0 min	↗ ∪	$\sqrt[3]{2}$	↗ ∩	$\sqrt[3]{4}$ max	↘ ∩	0
Dx	0	$+$	$+\infty / +\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
Dy	0	$-$	$-\infty / -\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y'	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty / -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y''	$+\infty$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+\infty / +\infty$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$



Tweede voorbeeld : De gewone cycloïde.

Hier is $x = r(t - \sin t)$ $y = r(1 - \cos t)$

1) x en y zijn gedefinieerd voor alle waarden van t ; y is een periodieke functie met periode 2π ; neemt t toe met 2π dan neemt x toe met $2\pi r$.

Wij onderzoeken dus het verloop in het interval $[0, 2\pi]$.

Voor t = 0 is x = 0 en y = 0 ; voor $t = 2\pi$ is $x = 2\pi r$ en y = 0.

Er zijn klaarblijkend geen asymptoten.

2) $Dx = r(1 - \cos t)$; $Dy = r \sin t$

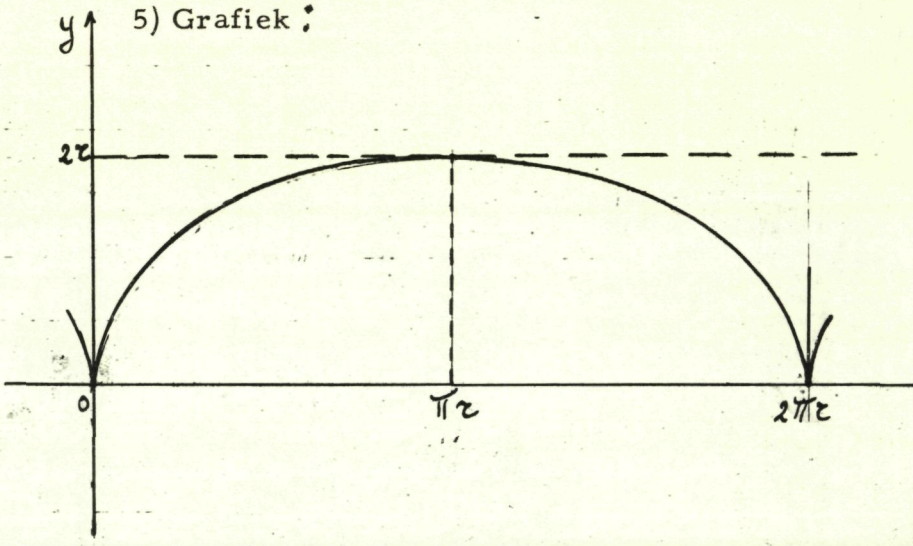
$Dx = 0$ voor $t = 0$ en $t = 2\pi$; $Dy = 0$ voor $t = 0, \frac{\pi}{2}$ en π.

3) $y' = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$; $y'' = -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}$ (XIV, 8)

4) Tabel :

t	0		π		2π
x	0	↗	πr	↗	$2\pi r$
y	0	↗∩	max $2r$	∩↘	0
Dx	0	+	+	+	0
Dy	0	+	0	-	0
y'	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$
y''	$-\infty$	-	-	-	$-\infty$

5) Grafiek :



Derde Voorbeeld :

1) $x = t g t$; $y = 3 \sin t + 4 \sin^3 t$

x en y zijn periodieke functies van t, zodat wij de volledige kromme bekomen als t een interval met lengte 2π doorloopt.
Men zal gemakkelijk inzien dat de twee coördinaatassen ook assen van symmetrie voor de grafiek zijn. Het zal derhalve volstaan voor t het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ te beschouwen en daarna de kromme te spiegelen in de twee coördinaatassen.

x is niet gedefinieerd voor $t = \frac{\pi}{2}$ en $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} x = \infty$;

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = 7$, zodat $y = 7$ een horizontale asymptoot is.
Er zijn geen andere asymptoten en het enig snijpunt met de assen is x=y=0 voor t = 0

2) $Dx = \frac{1}{\cos^2 t}$; $Dy = 3 \cos t \left(1 + 4 \sin^2 t\right)$

Dx heeft geen nulpunten ; $Dy = 0$ voor $t = \frac{\pi}{2}$

$y' = 3 \cos^3 t \left(5 - 4 \cos^2 t\right)$

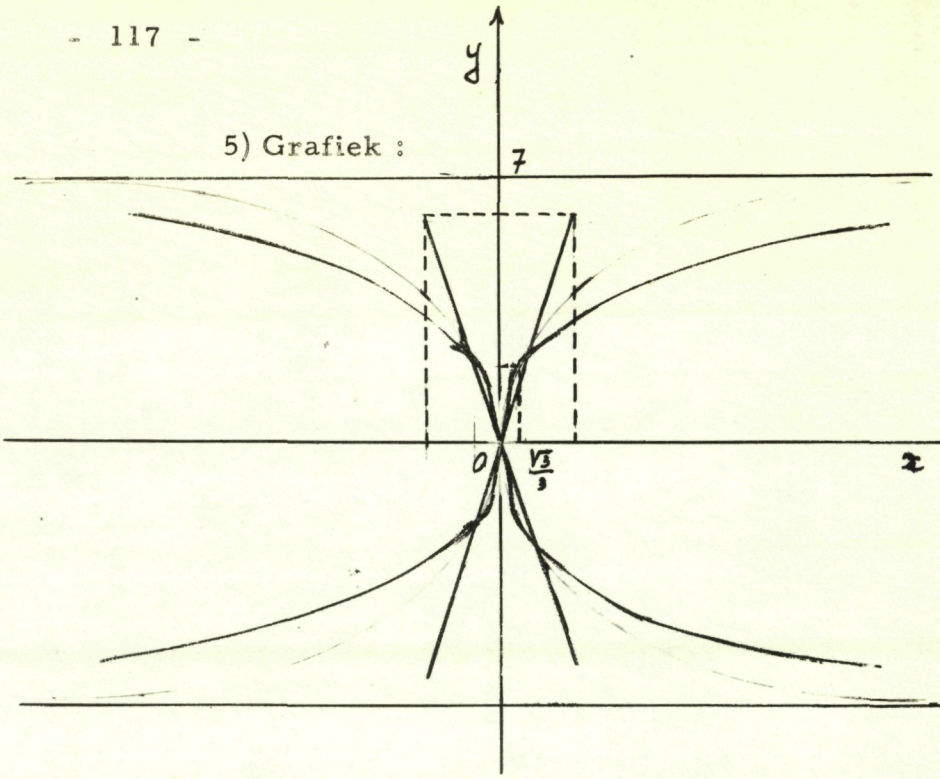
$Dy' = 15 \cos^2 t \sin t \left(4 \cos^2 t - 3\right)$; $y'' = 15 \cos^4 t \sin t \left(4 \cos^2 t - 3\right)$

$y'' = 0$ voor $t = \frac{\pi}{6}$

4) Tabel

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	$+\infty / -\infty$
y	0	↗	2	↗	7
Dx	1	+	$\frac{4}{3}$	+	$+\infty / +\infty$
Dy	3	+	$3\sqrt{3}$	+	0
y'	3	+	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$	+	0
y''	0	+	0	-	0

5) Grafiek :



XIV, 13. Grafiek van een functie in poolcoördinaten.

Zij $\rho = f(\theta)$ de voor te stellen functie. Men zou y' kunnen berekenen (XIV, 9) en hieruit het stijgen en dalen van y onderzoeken ; het zal echter meestal eenvoudiger zijn het stijgen en dalen van ρ te onderzoeken aan de hand van ρ'.

In de buigpunten is $y'' = 0$ of $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$ (XIV, 9).
Men kan aantonen dat de kromme haar holle zijde naar de pool keert als
$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' > 0$ en haar bolle zijde als $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' < 0$.

Dit is meestal eenvoudiger dan het onderzoek van y''.

De eventuele asymptoten worden gevonden voor $\rho \to \infty$.

Eerste voorbeeld : De hyperbolische spiraal

De poolvergelijking is $\rho = \frac{a}{\theta}$ $(a > 0)$.

1) ρ is gedefinieerd voor $\theta > 0$; $\lim_{\theta \gtrdot 0} \rho = +\infty$; $\lim_{\theta \to +\infty} \rho = 0$.

$$\lim_{\theta \gtrdot 0} y = \lim_{\theta \to 0} \rho \sin\theta = \lim_{\theta \gtrdot 0} \frac{a \sin\theta}{\theta} = a$$

$$\lim_{\theta \to 0} x = \lim_{\theta \to 0} \rho \cos\theta = \lim_{\theta \to 0} \frac{a \cos\theta}{\theta} = +\infty .$$

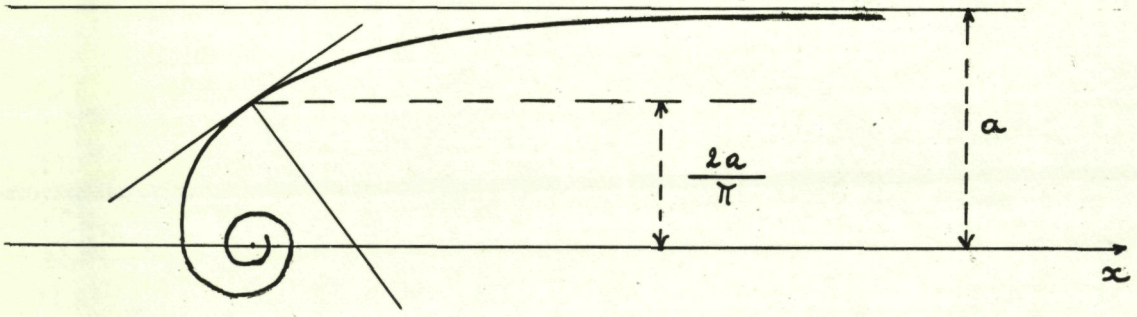
De rechte y = a is derhalve een horizontale asymptoot.

2) $\rho' = -\frac{a}{\theta^2} < 0$

3) $\rho'' = \frac{2a}{\theta^3}$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{a^2}{\theta^2} > 0 .$

ρ is steeds dalend en de grafiek keert steeds haar holle zijde naar de pool ; de kromme draait een onbeperkt aantal malen om de pool zonder deze te bereiken ; de pool heet daarom een asymptotisch punt van de kromme .

4) Grafiek :



Voor een enigzins nauwkeurige schets zal men de punten construeren die overeenstemmen met de poolhoeken $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, enz.

Aldus is voor $\theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \rho = \frac{2a}{\pi}$ en $\rho' = -\frac{4a}{\pi^2}$ wat in de grafiek werd uitgevoerd.

Tweede Voorbeeld : De vierbladige rozet.

De cartesische vergelijking van de kromme is

$$(x^2 + y^2)^3 = 4 x^2 y^2 .$$

Gaan wij over op poolcoördinaten, dan komt

$$\rho^6 = 4 \rho^4 \sin^2\theta \cos^2\theta ,$$

wat uiteenvalt in $\rho = 0$ en $\rho^2 = \sin^2 2\theta$.

$\rho = 0$ stelt de pool voor ; wij mogen deze vergelijking verwaarlozen, want ook $\rho^2 = \sin^2 2\theta$ gaat door de pool.

1) ρ is gedefinieerd voor alle θ ; ρ^2 is een periodieke functie van θ met periode $\frac{\pi}{2}$, zodat het zal volstaan het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ te beschouwen (*) ; in dit interval is $\rho = \sin 2\theta$ (**)

Voor $\theta = 0$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ is $\rho = 0$; de rechten $\theta = 0$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ zijn bijgevolg de raaklijnen in de pool.

Er zijn geen asymptoten , want ρ kan niet naar oneindig divergeren.

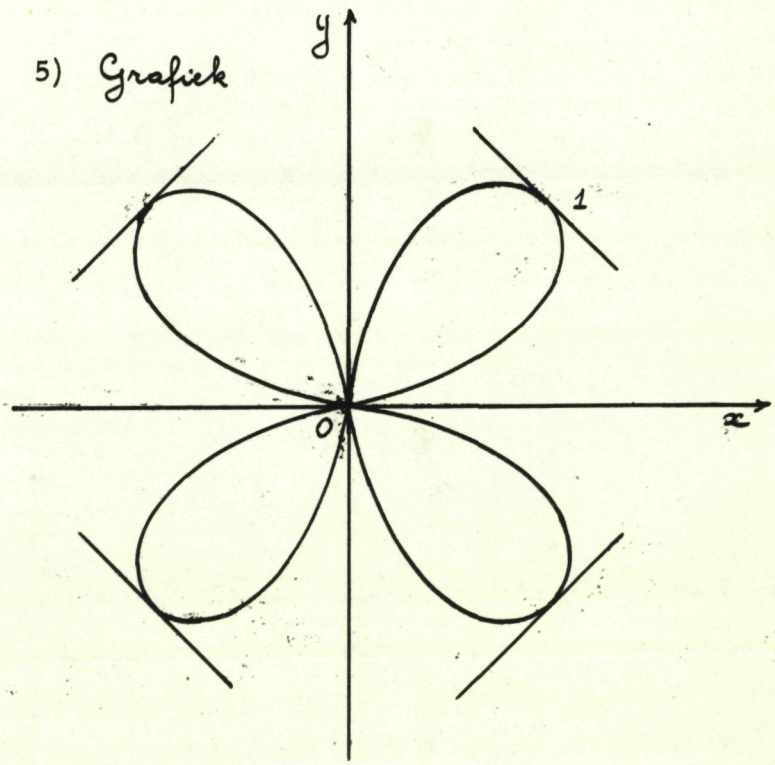
2) $\rho' = 2\cos 2\theta$; $\rho' = 0$ voor $\theta = \frac{\pi}{4}$.

3) $\rho'' = -4\sin 2\theta$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 5\sin^2 2\theta + 8\cos^2 2\theta > 0$.

4) Tabel.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	↗	max. 1	↘	0
ρ'	2	+	0	−	−2
$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''$	+	+	+	+	+

5) Grafiek



(*) Men zou zich zelfs kunnen beperken tot $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ zo men rekening houdt met het feit dat y = x een as van symmetrie is.

(**) Men zou hier kunnen overgaan op de parametrische voorstelling $x = \rho\cos\theta = \sin 2\theta\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta = \sin 2\theta\sin\theta$.

Doe het als oefening!

Derde voorbeeld : $(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$

1) Overgang op poolcoördinaten geeft $\rho^4 \cos^2 2\theta = 2\rho^2$
wat uiteenvalt in $\rho = 0$ en $\rho^2 \cos^2 2\theta = 2$; $\rho = 0$
stelt de pool voor en dit is een geïsoleerd punt van de grafiek.

$\rho^2 = \frac{2}{\cos^2 2\theta}$ is een periodieke functie met periode $\frac{\pi}{2}$;
wij beperken ons dus tot het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

merken wij verder op dat y = x een as van symmetrie is voor de grafiek, dan tekenen wij deze in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en spiegelen ze daarna in de genoemde as van symmetrie.

In het interval $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ is $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2\theta}$ gedefinieerd voor $\theta \neq \frac{\pi}{4}$;
voor $\theta = 0$ is $\rho = \sqrt{2}$ en $\lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \rho = +\infty$.

Kl aarblijkend is $\lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} y = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} x = +\infty$ zodat er geen horizontale of verticale asymptoot is ; voor een eventuele schuine asymptoot is (VI, 18) :

$$m = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \frac{y}{x} = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \frac{\rho \sin\theta}{\rho \cos\theta} = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\theta = 1.$$

$$n = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} (y - mx) = \lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} (\rho \sin\theta - \rho \cos\theta) =$$

$$\lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\theta - \cos\theta)\sqrt{2}}{\cos 2\theta} = -\lim_{\theta \nearrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta} = -1$$

De rechte y = x - 1 is dus een schuine asymptoot voor de grafiek

2) $\rho' = \frac{2\sqrt{2}\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}$; $\rho' = 0$ voor $\theta = 0$.

3) $\rho'' = 4\sqrt{2}\,\frac{\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta}{\cos^3 2\theta}$

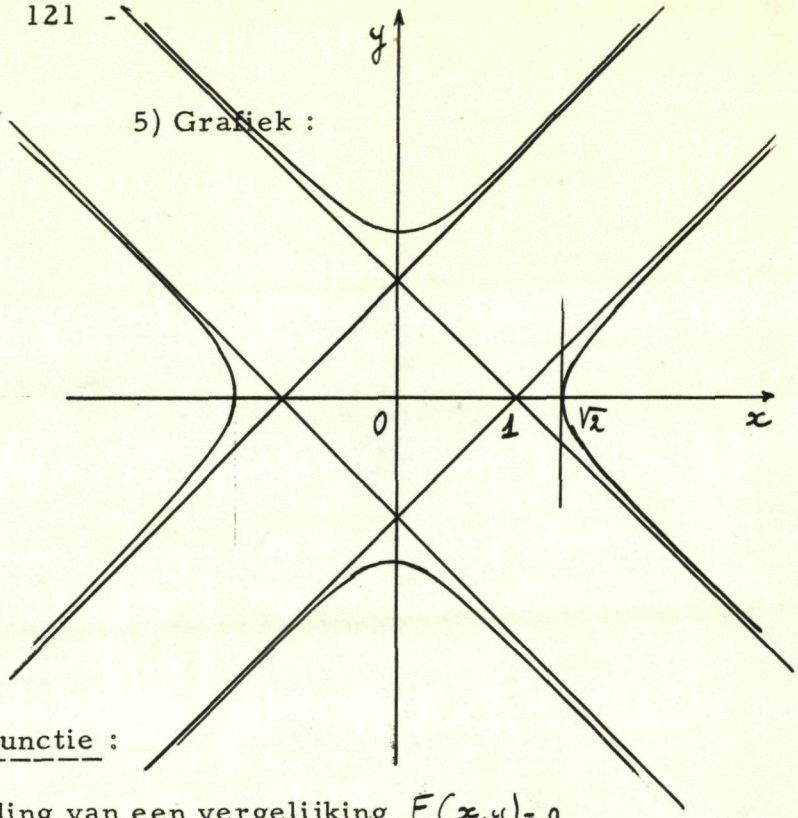
$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{2}{\cos^2 2\theta} + \frac{16\sin^2 2\theta}{\cos^4 2\theta} - \frac{8(\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta)}{\cos^4 2\theta}$$

$$= -\frac{6}{\cos^2 2\theta} < 0.$$

4) Tabel.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	$\sqrt{2}$	↗ ⌣	$+\infty$
ρ'	0	+	$+\infty$
$\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''$	-	-	$-\infty$

5) Grafiek :



XIV, 14. Grafiek van een impliciete functie :

Om de grafische voorstelling van een vergelijking $F(x,y)=0$ te schetsen zal men dit trachten te doen aande hand van de totnogtoe behandelde methodes. Men zal dus trachten ofwel

1) De vergelijking op te lossen naar y (of x) en de functie onder expliciete vorm te schrijven (methode van VI, 19)
2) Een niet te ingewikkelde parametrische voorstelling van de functie op te sporen (methode van XIV, 12)
3) De poolvergelijking van de kromme opstellen (methode van XIV, 13)

Leidt zulks niet tot een bevredigende oplossing, dan kan de grafiek worden opgesteld door rechtstreeks onderzoek van de impliciete functie ; opgemerkt zij nochtans dat dit onderzoek meestal niet eenvoudig is en spoedig aanleiding geeft tot ingewikkelde berekeningen. Wij willen dit laatste toch aan de hand van een paar voorbeelden illustreren.

Eerste voorbeeld : Het folium van Descartes.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1) Voor $x = 0$ is $y = 0$.

Er zijn geen verticale asymptoten ; bij deling door y^3 komt immers

$$\frac{x^3}{y^3} + 1 - \frac{3x}{y^2} = 0;$$

dit is onmogelijk als y divergeert naar ∞ zonder dat x zulks doet,

Voor de horizontale en schuine asymptoten berekenen wij $\lim \frac{y}{x}$ (VI, 18); na deling door x^3 komt

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} = 0 \text{; na limietovergang geeft dit}$$

$$1 + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0 \quad \text{of} \quad m = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = -1.$$

Schrijven wij nu de gegeven vergelijking

$$y + x = \frac{3xy}{x^2 - xy + y^2}\text{, dan is (VI, 18):}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(y+x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3xy}{x^2-xy+y^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}} = -1$$

De rechte $y + x + 1 = 0$ is dus een schuine asymptoot.

2) $y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$; $y'' = \frac{2xy}{(x-y^2)^3}$ (XIV, 3)

Voor $x = y = 0$ is $f'(x) = f'(y) = 0$; dit geeft in de oorsprong een singulier knooppunt met de coördinaatassen als raaklijn (XIV, 5).

Voor $x = \sqrt[3]{2}$ en $y \sqrt[3]{4}$ is $f'(x) = 0$ dit punt is een maximum (XIV, 5)

Voor $x = \sqrt[3]{4}$ en $y = \sqrt[3]{2}$ is $f'_y = 0$; in dit punt is de raaklijn evenwijdig met de y-as.

Aan de hand van deze gegevens komt men tot de grafiek van het eerste voorbeeld van XIV, 12.

Tweede voorbeeld : $x^3 + 3x^2y - 3y^2 = 0$.

1) Voor $x = 0$ is $y = 0$; er zijn geen verticale asymptoten.

Voor de andere asymptoten is

$$1 + 3\frac{y}{x} - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x} = 0 \quad \text{of} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = -\frac{1}{3}$$

Uit de vgl. van de kromme volgt nu $\left(y + \frac{1}{3}x\right) = \frac{y^2}{x^2}$,

en dus $n = \lim_{x\to\infty}\left(y + \frac{1}{3}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{9}$

De rechte $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ is dus een schuine asymptoot.

2) $f'_x = 3x^2 + 6xy$; $f'_y = 3x^2 - 6y$; $y' = \frac{x^2 + 2xy}{2y - x^2}$;

$f''_{xx} = 6(x+y)$; $f''_{xy} = 6x$; $f''_{yy} = -6$.

$$y'' = \frac{6(x+y)9(x^2-2y)^2 - 2.6x \cdot 9(x^2+2xy)(x^2-2y) - 6.9(x^2+2xy)^2}{27(x^2-2y)^3}$$

$$= \frac{2\left(-x^5 + 4xy^2 + 4y^3 - 3x^4y - x^4 - 4x^3\right)}{(2y-x^2)^3}$$

$$= \frac{2\left[-x^2(x^3+3x^2y) - x(x^3+3x^2y) - x^3y + 4y^3 + 4xy^2\right]}{(2y-x^2)^3}$$

$$= \frac{2\left[-y(x^3+3x^2y) + xy^2 + 4y^3\right]}{(2y-x^2)^3} = \frac{2(y^3+xy^2)}{(2y-x^2)}$$

3) $f'_x = 0$ voor $x = 0$ en $x = -2y$.

Voor x = 0 is y = 0 en $f'_y = 0$; de oorsprong is dus een singulier punt.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn zijn de wortels van (XIV, 5) ;

$$6y_o'^2 + 2y_o' \cdot 0 + 0 = 0$$

$y_o' = 0$ is dus een dubbele wortel ; de oorsprong is een keerpunt en de x-as is de keerraaklijn .

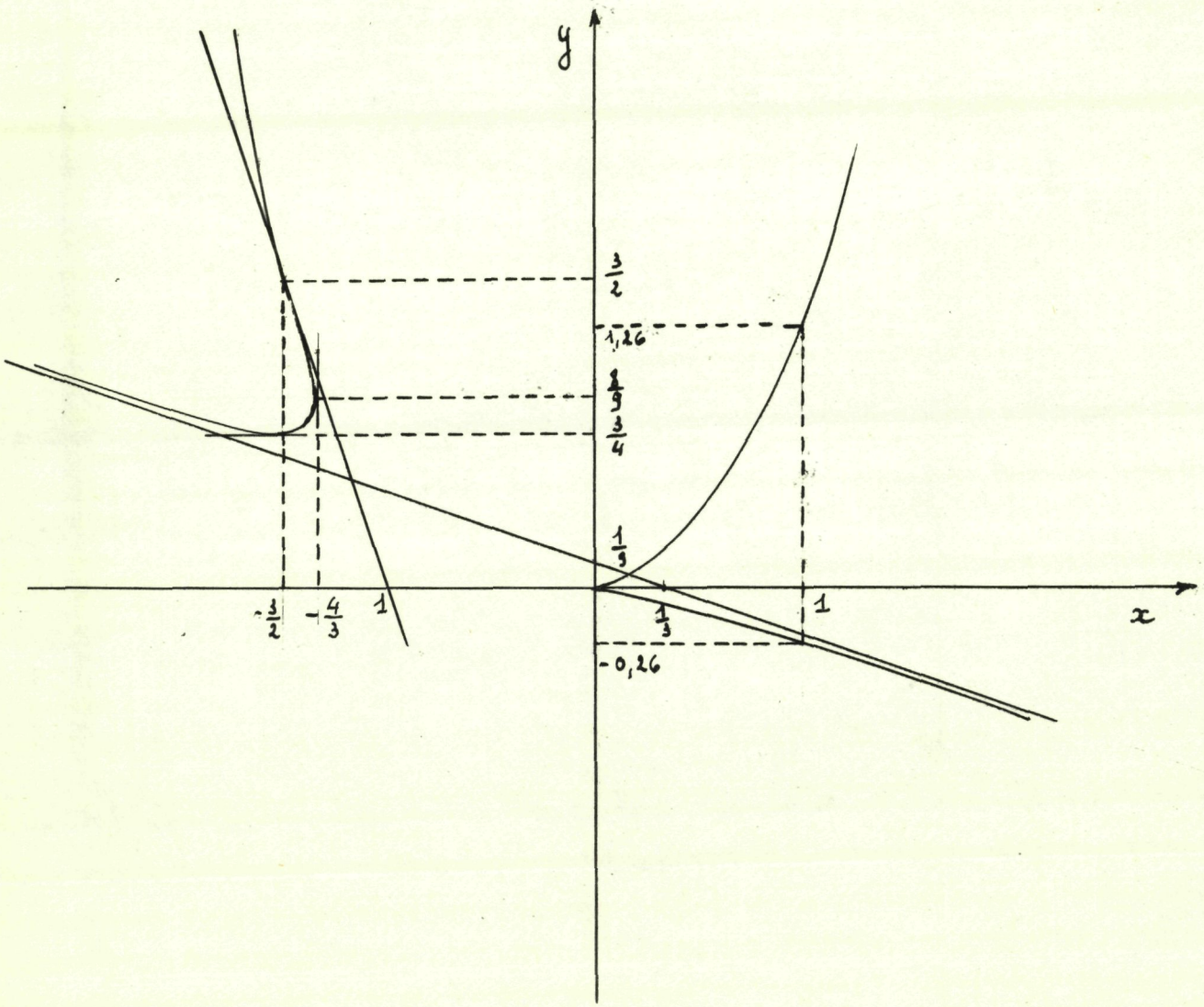
Voor $x = -2y$ is $y = \frac{3}{4}$ en $x = -\frac{3}{2}$; deze waarden gesubstitueerd in y'' geeft $y'' = \frac{9}{8} > 0$; het beschouwde punt is dus een minimum.

$f'_y = 0$ voor $2y = x^2$; dit geeft $x = -\frac{4}{3}, y = \frac{8}{9}$ .In dit punt is de raaklijn evenwijdig met de y-as.

Tenslotte is $y'' = 0$ voor $x = -y$; dit geeft $y = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$

en dit punt is een buigpunt ; de richtingscoëfficiënt van de buigraaklijn is $y' = -3$.

Men bepaalt nu nog enkele punten van de grafiek door aan x bepaalde waarden toe te kennen (op de tekening uitgevoerd voor x = 1) ;
men vindt tenslotte de volgende grafische voorstelling:



OPGAVEN.

1. Schets de grafiek van de functies die parametrisch als volgt gedefinieerd zijn:

1) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \cos t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = e^t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{t^2} \\ y = \dfrac{t}{1-t} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^2-t} \\ y = \dfrac{t-2}{t^2+t} \end{cases}$

2. Schets de grafiek van de volgende functies door $y = t\,x$ te stellen en hieruit een parametrische voorstelling af te leiden.

1) $y^3 - xy^2 - 2x^2 = 0$

2) $x^3 + y^3 + (x - y)^2 = 0$

3. Schets de grafiek van de volgende krommen waarvan de poolvergelijking gegeven is :

1) $\rho = a\theta$; 2) $\rho = e^{a\theta}$; 3) $\rho = \ln\theta$;

4) $\rho = \operatorname{tg}\theta$; 5) $\rho = 1 + \cos\theta$; 6) $\rho = 2\cos\theta + 3$;

7) $\rho = \sin\dfrac{\theta}{2}$; 8) $\rho = \sin^3\theta$; 9) $\rho = 1 + \cos 4\theta$;

10) $\rho = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$; 11) $\rho = \dfrac{1}{1-2\cos\theta}$; 12) $\rho = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

13) $\rho = \frac{\sin^2\theta + 1}{\sin\theta}$; 14) $\rho = \frac{2 + \cos\theta}{\cos\theta}$; 15) $\rho = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

4. Schets de grafiek van de volgende functies door overgang op poolcoördinaten:

1) $(x^2 + y^2)^3 = y^4$; 2) $(x^2 + y^2)^3 = x^2$;

3) $4y^2 - 5x^2 - 30x - 25 = 0$; 4) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 3(x^2 + y^2)$;

5) $(x^2 + y^2)(x - 2)^2 = 4y^2$; 6) $(x^2 + y^2)(x - 1)^2 = 4x^2$

5. Schets de grafiek van de lemniscaat $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$

1) door overgang op poolcoördinaten ;
2) door een parametrische voorstelling met de poolhoek als parameter ;
3) door rechtstreeks onderzoek van de gegeven vergelijking.

6. Onderzoek rechtstreeks de grafiek van de volgende vergelijkingen :

1) $y^3 - x^3 + 3xy = 0$;

2) $(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$;

3) $x^3 - 3xy^2 + 2y^2 = 0$.

HOOFDSTUK XV.

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

Par.1. ALGEMEENHEDEN.

XV, 1. Definities.

Wij beschouwen een betrekking van de vorm $F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ (1) waarin $y', y'' \ldots$ respectievelijk de eerste, tweede..... afgeleiden van y naar x voorstellen. Een dergelijke betrekking heet een gewone differentiaalvergelijking (*) of kortweg een differentiaalvergelijking. (afgekort dvgl.)

Indien de hoogste orde van de afgeleiden die in (1) voorkomen n is, dan heet (1) een dvgl. van de n^e orde.

Elke functie die identiek aan de betrekking (1) voldoet heet een integraal van de dvgl. De grafische voorstelling van deze integralen heten de integraalkrommen van (1).

Een dvgl. integreren is al haar integralen bepalen. De betrekking die de meest algemene integraal van (1) definieert heet de integraalvergelijking of algemene integraal van (1).
Elke integraal die uit de algemene integraal kan worden afgeleid door specialisatie van de integraalconstanten heet een particuliere integraal van (1).

Voorbeelden :

1) $(1 + y'^2)x - 2yy' = 0$ is een dvgl. van de eerste orde ;
de functie $y = \frac{x^2 + 1}{2}$ is hiervan een integraal (ga dit zelf na).

2) $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$ is een dvgl. van de derde orde ; de functie
$y = e^{x} + e^{-x} + e^{3x}$ is hiervan een integraal (ga dit zelf na).

(*) Zulks in tegenstelling met de zogenaamde partiële differentiaalvergelijkingen waarin functies van meer dan één veranderlijke met hun partiële afgeleiden voorkomen ; dergelijke differentiaalvergelijkingen vallen buiten het bestek van deze leergang.

XV, 2. Het ontstaan van een differentiaalvergelijking.

Voorbeelden.

1) Wij beschouwen de verzameling van alle cirkelomtrekken door de oorsprong en waarvan het middelpunt in de x-as ligt ; de algemene vergelijking van deze schaar cirkelomtrekken is $x^2 + y^2 = 2Rx$ (1); deze vgl. hangt af van één parameter.

Leidt men (1) af, (XIV, 1) dan komt $2x + 2yy' = 2R$ (2)
Eliminatie van R tussen (1) en (2) geeft : $y^2 - x^2 = 2xyy'$ (3)

(3) is een dvgl. van de eerste orde ; zij heet de dvgl. van de beschouwde schaar cirkelomtrekken ; (1) is de integraalvergelijking van deze schaar.

2) De algemene vgl. van alle cirkelomtrekken met straal 1 is $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ (4); deze vgl. hangt af van twee parameters.

Leidt men (4) tweemaal af, dan komt :

$(x-a) + (y-b)\,y' = 0$ (5) ; $1 + (y-b)\,y'' + y'^2 = 0$ (6)

Eliminatie van a en b tussen (4) (5) en (6) leidt tot de dvgl. van de tweede orde :

$$(y'^2 + 1)^3 = y''^2 \qquad (7)$$

Algemeen geval :

Algemeen beschouwen wij een krommenschaar met vgl. $\mathcal{F}(x, y, C_1, C_2, \ldots . C_n) = 0$ (8) afhankelijk van n parameters. Door (8) n maal af te leiden (XIV, 1) bekomt men een stelsel van n+ 1 vergelijkingen ; eventuële eliminatie van deze n parameters voert tot een dvgl. van de n^e orde ; deze is de dvgl. van de beschouwde krommenschaar.

In de praktijk komt het er echter op aan van de differentiaalvergelijking terug naar de integraalvergelijking op te klimmen.

OPGAVEN .

Bepaal de differentiaalvergelijking van :
1) de rechten van het vlak ;
2) de cirkelomtrekken met middelpunt in de x-as ;
3) de cirkelomtrekken gaande door de oorsprong ;
4) de parabolen met symmetrie-as evenwijdig met de y-as ;
5) de raaklijnen van de cirkelomtrek $x^2 + y^2 = 1$,
6) de raaklijnen van de parabool $y^2 = 4x$;

7) de ellipsen waarvan de assen in de coördinaat assen vallen ;
8) de orthogonale hyperbolen waarvan de asymptoten in de coördinaatassen vallen ;
9) de middelpuntskegelsneden met middelpunt in de oorsprong.

Par. 2. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE ORDE.

XV, 3. Algemeenheden inzale dvgln. van de eerste orde en de eerste graad.

Een dvgl. van de eerste orde heet van de eerste graad, wanneer y' er slechts in de eerste graad in voorkomt. De algemene vorm van een dergelijke dvgl. is $M + N y' = 0$ waarin M en N functies zijn van x en y .

Een dergelijke dvgl. wordt meestal met differentialen geschreven (vandaar de naam differentiaalvergelijking); zij is immers gelijkwaardig met

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{of} \quad M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1)$$

Het voordeel van de schrijfwijze (1) is dat men niet hoeft te preciseren welke van de beide veranderlijken het argument en welke de functie is.

Wij zullen de dvgl. (1) leren integreren in de volgende gevallen :

1) Type I : Exacte differentiaalvergelijkingen.
2) Type II : Dvgln. waarin de veranderlijken kunnen gescheiden worden.
3) Type III : Homogene differentiaalvergelijkingen.
4) Type IV : Lineaire differentiaalvergelijkingen.
5) Differentiaalvergelijkingen die tot een van de voorgaande types kunnen worden teruggebracht.

XV, 4. Exacte differentiaalvergelijkingen.

De dvgl. $M\,dx + N\,dy = 0$ (1) van XIV, 3 heet een exacte differentiaalvergelijking wanneer het eerste lid van deze dvgl. een totale differentiaal is (XIII, 6), d.w.z. wanneer er een functie $F(x,y)$ bestaat zodanig dat $M\,dx + N\,dy = dF$ (2)

In dit geval is de integraalvergelijking van (1) klaarblijkend $F(x,y) = C$

Anderzijds heeft men dan echter dat : $dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy$ (3)

Identificatie van (2) en (3) geeft dan : $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ (4)

Onderstellen wij M en N partieel afleidbaar, dan volgt uit (4)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (5)$$

waaruit wegens $\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ (XIII, 19) volgt : $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$ (6)

Is dus (1) een exacte dvgl. dan is aan de voorwaarde (6) voldaan.

Omgekeerd is nu echter de voorwaarde (6) voldoende opdat (1) een exacte dvgl. zij.

Om dit te bewijzen zullen wij aantonen dat, indien aan (6) voldaan is, een functie F (x, y) kan worden bepaald waarvan het eerste lid van (1) de totale differentiaal is, t.t.z. een functie F (x, y) die voldoet aan de voorwaarden :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N.$$

M moet dan de partiële afgeleide van F naar x zijn, d.w.z. de afgeleide die gevonden wordt door het constant houden van y. De functie F (x, y) zal dan ook omgekeerd een primitieve zijn van M, als wij bij het integreren y als een constante beschouwen ; de integratieconstante die bij dit integreren voorkomt kan derhalve een functie zijn van y .

Derhalve : $F(x,y) = \int M\,dx = f(x,y) + \varphi(y)$ (7)

Wij moeten nu verder $\varphi(y)$ zodanig bepalen dat ook voldaan zij aan de voorwaarde $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Hiertoe leiden wij (7) af naar y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'(y) \quad \text{of} \quad \varphi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} = N - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Indien nu aan (6) voldaan is kunnen wij aantonen dat $N - \frac{\partial f}{\partial y}$ een functie is van y alleen ; dit zal bewezen zijn indien wij aantonen dat ze constant is t.o.v. x, d.i. als haar partiële afgeleide naar x nul is.

Dit is nu inderdaad het geval want wegens (6) en (7) is

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(M - \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$$

Derhalve kan de functie $\varphi(y)$ gevonden worden door integratie van (8)

$$\varphi(y) = \int \left(N - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

(6) is dus de nodige en voldoende voorwaarden : opdat (1) een exacte dvgl. zij. Deze voorwaarde heet het criterium van Euler. (*)

Voorbeeld : $(4x^3 + 10xy^3 - 3y^4)\,dx + (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4)\,dy = 0$.

Hier is $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 30xy^2 - 12y^3$ zodat de gegeven dvgl. een exacte is. De integraalvergelijking is dus van de vorm $F(x,y) = C$ mits

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 10xy^3 - 3y^4 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4 \qquad (2)$$

Na integratie van (1) t.o.v. x komt

$$F(x,y) = x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + \varphi(y) \qquad (3)$$

Leiden wij (3) af naar y, dan komt, rekening houdend met (2)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 15x^2y^2 - 12xy^3 + \varphi'(y) = 15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4.$$

waaruit $\varphi'(y) = 5y^4$ en $\varphi(y) = y^5$.

Derhalve $F(x,y) = x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5$.

De integraalvergelijking is dus : $x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 = C$.

XV, 5. Dvgln. in dewelke de veranderlijken kunnen gescheiden worden.

Indien in de dvgl. $M\,dx + N\,dy = 0$, $M = f_1(x)$ en $N = f_2(y)$ dan zegt men dat de veranderlijken gescheiden zijn ; de algemene integraal is dan klaarblijkend :

(*) Leonhard EULER : Zwitsers wiskundige (1707-1783).

50

$$q_{(2)} = \left[M - \frac{Sl}{\delta n} \right] \cdot \ln$$

$$\int f_1(x)\,dx + \int f_2(y)\,dy = C.$$

Is de dvgl. van de vorm $X_1 Y_1\,dx + X_2 Y_2\,dy = 0$ waarin X_1 en X_2 functies zijn van x alleen en Y_1 en Y_2 functies van y alleen, dan wordt deze na deling van beide leden door $X_2 Y_2$: $\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{Y_1}{Y_2}\,dy = 0$ (mits $X_2 Y_2 \neq 0$)

In deze laatste dvgl. zijn de veranderlijken dan opnieuw gescheiden.

Voorbeeld. $x^3\,dy + y^3\,dx = y\,dx - x\,dy$.

Deze dvgl. kan achtereenvolgens geschreven worden :

$$(y^3 - y)\,dx + (x^3 + x)\,dy = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dx}{x^3+x} + \frac{dy}{y^3-y} = 0.$$

Na splitsing in partieëlbreuken en integratie vindt men :

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx + \int\left(\frac{1}{2(y+1)} - \frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

De integraalvergelijking is derhalve :

$$\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\ln|y+1| + \tfrac{1}{2}\ln|y-1| - \ln|y| = \ln\sqrt{C}.$$

$$\frac{|x|\,(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{|y|\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = C^{\frac{1}{2}} \quad \text{of} \quad x^2(y^2-1) = C y^2 (x^2+1).$$

XV, 6. Homogene differentiaalvergelijkingen.

De dvgl. $M\,dx + N\,dy = 0$ heet homogeen, wanneer ze kan gebracht worden onder de vorm $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Zulks is o.m. het geval wanneer M en N homogene functies zijn van dezelfde graad in x en y.

Een homogene dvgl. kan steeds tot het geval van XV, 5 worden teruggebracht door de substitutie y = ux. Wij hebben dan immers $dy = u\,dx + x\,du$ en de dvgl. wordt :

$$u\,dx + x\,du = \varphi(u)\,dx \;;\; [u - \varphi(u)] = -x\,du$$

Is $u - \varphi(u) = 0$ dan is $du = 0$, waaruit $u = C$ of $y = Cx$

Is $u - \varphi(u) \neq 0$ dan komt $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$

en de veranderlijken zijn gescheiden.

$$\frac{dx}{x(x^2+1)} + \frac{dy}{y(y^2-1)} = C$$

Voorbeeld : $x\,dy + y\,dx = 2x\,dx$

Wij stellen $y = ux$ zodat $dy = u\,dx + x\,du$ en de dvgl. wordt : $x(u\,dx + x\,du) + ux\,dx = 2x\,dx$ of $2\frac{dx}{x} + \frac{du}{u-1} = 0$

Na integratie komt :

$$2\ln|x| + \ln|u-1| = \ln C \quad \text{of} \quad x^2(u-1) = C \quad \text{of} \quad x(y-x) = C$$

XV, 7. Integratie van dvgln. van het type $dy = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)dx$.

Eerste geval : $a b_1 - a_1 b = 0$

Wij kunnen dan stellen $a_1 = ma$ en $b_1 = mb$ zodat de dvgl. wordt :

$$dy = \varphi\left[\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+c_1}\right]dx = \Phi(ax+by)\,dx$$

Stellen wij verder $ax + by = u$ met $a\,dx + b\,dy = du$ dan komt:

$$\frac{du - a\,dx}{b} = \Phi(u)\,dx \quad \text{of} \quad \frac{du}{a + b\,\Phi(u)} = dx.$$

In deze laatste dvgl. zijn de veranderlijken gescheiden.

Tweede geval : $a b_1 - a_1 b \neq 0$

Wij stellen $x = u + h$ en $y = v + k$ waarin h en k constanten voorstellen ; zodat de dvgl. wordt :

$$dv = \varphi\left(\frac{au + bv + ah + bk + c}{a_1u + b_1v + a_1h + b_1k + c_1}\right)du$$

Nu bepalen wij de constanten h en k zodanig dat $\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$

Wegens $a b_1 - a_1 b \neq 0$ heeft dit laatste stelsel één en slechts één oplossing ; de dvgl. wordt dan $dv = \varphi\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)du$ en deze is homogeen.

Voorbeeld : $(4x - 5y + 13)\,dy = (2x - 3y + 7)\,dx$

Wij stellen $x = u + h$ en $y = v + k$ en bekomen voor de dvgl.

$$\frac{(4-5t)\,dt}{5t^2-7t+2} = \frac{4-5t}{(t-1)(5t-2)}$$

$$\frac{4-5t}{(t-1)(5t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{5t-2}$$

$$4-5t = A(5t-2) + B(t-1)$$

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

$(4u - 5v + 4h - 5k + 13)\,dv = (2u - 3v + 2h - 3k + 7)\,du$

Oplossing van het stelsel $\left.\begin{matrix} 4h - 5k + 13 = 0 \\ 2h - 3k + 7 = 0 \end{matrix}\right\}$ geeft $h = -2\ ;\ k = 1$

Men is derhalve herleid tot de integratie van de homogene dvgl.

$$(4u - 5v)\,dv = (2u - 3v)\,du$$

De algemene integraal hiervan is (reken dit zelf na) : $(5v - 2u^2)(v - u) = C$

Keert men terug naar de veranderlijken x en y, dan wordt dit : $(5y - 2x - 9)^2 (y - x - 3) = C$.

XV, 8. Lineaire differentiaalvergelijkingen.

De dvgl. van de eerste orde $F(x, y, y') = 0$ heet lineair, wanneer de functie F van de eerste graad is in y en y'. De algemene lineaire dvgl. van de eerste orde is dus van de vorm

$$y' + Py = Q \quad \text{of} \quad dy + Py\,dx = Q\,dx \qquad (1)$$

Hierin zijn P en Q functies van x alleen.

Wij zullen deze dvgl. integreren met de methode van Johannes Bernoulli (*).

Hiertoe stellen wij $y = uv$ (2) waarin u en v twee voorlopig onbekende functies van x voorstellen, die enkel moeten voldoen aan de voorwaarde (2).

Na substitutie van (2) in (1) komt :

$$u\,dv + v\,du + Puv\,dx = Q\,dx \quad \text{of} \quad u(dv + Pv\,dx) + v\,du = Q\,dx \qquad (3)$$

Aan de functies u en v werd totnogtoe slechts één voorwaarde opgelegd, nl. dat hun produkt y is. Derhalve mogen wij één van deze functies vrij kiezen. Wij kiezen nu de functie v zodanig dat de coëfficient van u in (3) nul wordt, d. w. z. wij kiezen een functie v die voldoet aan

$$dv + Pv\,dx = 0 \qquad (4) \qquad \text{d. i.} \quad v = e^{-\int P dx} \qquad (5)$$

Hiermede gaat (3) over in : integraal Const = 0

(*) De BERNOULLI's waren een Zwitserse familie die op de drie generaties niet minder dan acht eminente wiskundigen voortbrachten. De beroemdsten onder hen zijn de gebroeders Jacob BERNOULLI (1654-1705) en Johannes BERNOULLI (1667-1748) . Samen met Euler bouwden zij de door Leibniz en Newton ontdekte maar nog vrij primitieve infinitesimaalrekening verder uit ; zij waren aldus de voorlopers van Lagrange, Cauchy en Weierstrass, die de infinitesimaalrekening in haar huidige vorm zouden brengen.

$e^{-\int P dx}\, du = Q\,dx$ of $du = Q\, e^{\int P dx}\, dx$ (6) en $u = \int Q e^{\int P dx} dx + C$ (7)

De algemene integraal, van (1), is dus krachtens (5) en (7) :

$$y = uv = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + C\right)$$

Opmerking : De lineaire dvgln. kunnen ook geïntegreerd worden met de zogenaamde methode van Lagrange of methode van de variatie van de integratieconstante. Deze bestaat hierin van eerste de dvgl. $dy + P y\, dx = 0$ te integreren ; deze geeft $y = C e^{-\int P dx}$.

In deze laatste functie beschouwt men nu C als een functie van x en bepaalt deze op zodanige wijze dat y aan de dvgl. (1) voldoet. De methode van Lagrange geeft ten andere aanleiding tot precies dezelfde integraties als de methode van Bernoulli ; wij zullen dit hieronder aan de hand van een voorbeeld illustreren.

Voorbeeld : $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 5\sin^4 x$ of $dy - y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 5\sin^4 x\,dx$ (1)

Met $y = uv$ (2) gaat (1) over in

$u(dv - v\,\mathrm{tg}\,x\,dx) + v\,du =$

$5\sin^4 x\,dx$ (3)

Wij kiezen nu voor v de eenvoudigste functie die voldoet aan

$dv - v\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$ (4)

d.i. $\ln v + \ln\cos x = 0$

of $v\cos x = 1$ (5)

Hiermede gaat (3) over in

$\frac{du}{\cos x} = 5\sin^4 x\,dx$ (6)

of $u = \sin^5 x + C$

De algemene integraal van (1) is dus

$y = uv = \frac{\sin^5 x + C}{\cos x}$.

Wij integreren eerst de dvgl.

$dy - y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = 0$ (4)

d.i. $\ln y + \ln\cos x = 0$

of $y\cos x = C$ (5)

Wij beschouwen hierin C als een functie van x en bepalen deze zodanig dat (5) aan (1) voldoet.

Door differentiëren van (5) komt

$\cos x\,dy - y\sin x\,dx = dC$

$$dy - y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \frac{dC}{\cos x}\,.$$

Substitueren wij dit in (1)

$\frac{dC}{\cos x} = 5\sin^4 x\,dx$ (6)

of $C = \sin^5 x + C_1$

De alg. integraal van (1) is dus

$y = \frac{C}{\cos x} = \frac{\sin^5 x + C_1}{\cos x}$.

XV, 9. De differentiaalvergelijking van Jacob BERNOULLI.

Deze is van de vorm $y' + Py = Qy^n$ waarin P en Q functies zijn van x alleen. Deze dvgl. kan tot een lineaire herleid worden door de substitutie $z = y^{1-n}$ (toon dit zelf aan). Men kan deze dvgl. echter ook rechtstreeks integreren met een van de methodes voor de lineaire dvgln.

Voorbeelden :

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -x^3y^4$ of $\frac{1}{y^4} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy^3} = -x^3$ (1)

Stel $z = \frac{1}{y^3}$ dan is $dz = -\frac{3dy}{y^4}$ en de dvgl. wordt

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = -x^3 \text{ of } \frac{dz}{dx} - \frac{3z}{x} = 3x^3.$$

Deze laatste dvgl. is lineair. Haar algemene integraal is (bepaald ze zelf) :

$$z = x^3(3x + C)$$

De algemene integraal van (1) is derhalve :

$$\frac{1}{y^3} = x^3(3x + C) \quad \text{of} \quad y = \frac{1}{x\sqrt[3]{3x + C}}.$$

2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x$ (1) of $x\,dy + y\,dx = a\,xy^2 \ln x\,dx$

Stel $y = uv$ dan komt

$$u(x\,dv + v\,dx) + x\,v\,du = a\,x\,u^2v^2 \ln x\,dx \quad (2)$$

Wij bepalen nu opnieuw een functie v die voldoet aan

$$x\,dv + v\,dx = 0 \qquad \text{d.w.z.} \qquad v = \frac{1}{x}$$

Hiermede wordt (2) $du = \frac{a\,u^2 \ln x}{x}\,dx$, waaruit

$$-\frac{1}{u} = \frac{a(\ln x)^2 + C}{2} \quad \text{of} \quad u = -\frac{2}{a(\ln x)^2 + C}.$$

Dit geeft $y = -\dfrac{2}{x\left[a(\ln x)^2 + C\right]}$ of $xy\left[a(\ln x)^2 + C\right] + 2 = 0$.

XV, 10. Dvgln. van de eerste orde en van hogere graad.

Is in de dvgl. van de eerste orde $F(x, y, y') = 0$ de functie F van hogere graad in y' dan kan men proberen de functie F te ontbinden in factoren die van de eerste graad zijn in y' en aldus de dvgl. te splitsen in dvgln. die van de eerste orde en de eerste graad zijn.

Voorbeeld : $x^2 y'^2 + 2xy y' - 3y^2 = 0$ (1)

Men kan (1) schrijven in de vorm $(xy' - y)(xy' + 3y) = 0$

De dvgl. (1) valt dus uiteen in $xy' - y = 0$ en $xy' + 3y = 0$.
waarvan de algemene integralen resp. zijn $y = Cx$ en $yx^3 = C$.

De algemene integraal van (1) is derhalve : $(y - Cx)(yx^3 - C) = 0$.

XV, 11. De differentiaalvergelijking van Clairaut. (*)

Men noemt dvgl. van Clairaut de dvgl. van de eerste orde met algemene vorm :

$$y = xy' + \varphi(y') \qquad (1)$$

De dvgl. (1) wordt eerst afgeleid en dit geeft

$$y' = y' + xy'' + \varphi'(y')\,y'' \text{ of } y''\left[x + \varphi'(y')\right] = 0 \qquad (2)$$

(2) valt nu uiteen in $\begin{cases} y'' = 0 & (3) \text{ en} \\ x + \varphi'(y') = 0 & (4) \end{cases}$

(3) is een dvgl. met algemene integraal $y' = C$; overgebracht in (1) geeft dit :

$$y = Cx + \varphi(C) \qquad (5)$$

(*) Alexis Claude CLAIRBAUT : Frans wiskundige 1713-1763.

en dit is de algemene integraal van (1) ; zij stelt een rechtenschaar voor.

(1) en (4) definiëren parametrisch een integraal van de vergelijking van Clairaut ; deze integraal is geen particuliere integraal, aangezien ze niet uit de algemene integraal kan worden afgeleid door specialisatie van de integratieconstante.
Deze integraal heet een singuliere integraal.

Voorbeeld : $y = xy' + y'^2$ (1)

Na afleiding komt $y' = y' + xy'' + 2y'y''$ of $y''(x + 2y') = 0$. (2)

Uit $y'' = 0$ volgt $y' = C$ (3) en de algemene integraal van (1) is

$$y = Cx + C^2 \quad (5)$$

De singuliere integraal is parametrisch voorgesteld door $\begin{cases} y = xy' + y'^2 \\ x + 2y' = 0 \end{cases}$

Na eliminatie van y' is dit $y = -\frac{x^2}{4}$

De singuliere integraal stelt een parabool voor waarvan alle rechten van (5) raaklijnen zijn. Men noemt ze de omhullende van deze rechtenschaar.

OPGAVEN ;

1. Integreer de volgende differentiaalvergelijkingen :

a) 1) $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy = 0$;

2) $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + 2\left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}\right) = 0$;

3) $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2y + 2y^3)\,dy = 0$;

4) $(3x^2 - y^2)\,dx = 2xy\,dy$;

5) $\cos xy\,(x\,dy + y\,dx) - \sin x\,dx + \sin y\,dy = 0$;

6) $e^y(\cos x\,dx + \sin x\,dy) + e^x(\sin y\,dy - \cos y\,dx) = 0$;

7) $\frac{y^2}{1+x^2}\,dx + \left(\operatorname{Bg}\operatorname{tg} y + 2y\,\operatorname{Bg}\operatorname{tg} x + \frac{y}{1+y^2}\right)dy = 0;$

8) $\frac{(2x+y)\,dy - (2y+x)\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}} + 2\,\operatorname{Bg}\sin\frac{y}{x}\,dx = 0.$

b)

1) $xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0;$

2) $(x+xy^2)\,dy - 3\,dx = 0;$

3) $\sqrt{1-y^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dy;$

4) $\sqrt{1+y^2}\,dx - (1-x^2)\,dy = 0;$

5) $\sin y\,dx + e^x\,dy = 0;$

6) $(1+x^2)\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0;$

7) $(x^2-yx^2)\,dy + (y^2+xy^2)\,dx = 0;$

8) $(1+y^2)\,x\,dx + (y^2+xy^2)\,dy = 0;$

9) $yx\,dy - (1-y^2)\,dx = 0;$

10) $y(4x^2-9)\,dy - 6\,dx = 0;$

11) $y(4+9x^2)\,dy - dx = 0;$

12) $y\,e^{2x}\,dx - (1+e^{2x})\,dy = 0.$

c)

1) $(x+y)\,dx + x\,dy = 0;$

2) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0;$

3) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx;$

4) $(9y+10x)\,dx + (5y+7x)\,dy = 0;$

5) $xy^2\,dy = (x^3-y^3)\,dx;$

6) $(x^2-2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0;$

7) $(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy;$

8) $(2\sqrt{st}-s)\,dt + t\,ds = 0;$

9) $x\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = y\cos\frac{y}{x} - x;$

10) $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx).$

d)

1) $dy = (2x+y)^2\,dx;$

2) $dy = (y+x)^3\,dx;$

3) $dy = \cos(x+y)\,dx;$

4) $dy = \operatorname{tg}^2(y-x)\,dx;$

5) $(y-3x)\,dy + (y-3x+2)\,dx = 0;$

6) $(2x+y+1)\,dx + (4x+2y-1)\,dy = 0;$

7) $(2y+x+1)\,dx = (2x+4y+3)\,dy$; 8) $(3y-7x+7)\,dx + (7y-3x+3)\,dy = 0$;

9) $(7y + x + 2)\,dx = (3x + 5y + 6)\,dy$;

10) $(2x + 3y - 8)\,dx - (x + y - 3)\,dy = 0$;

11) $(2x + y - 3)^2\,dy = (x + 2y)^2\,dx$.

e) 1) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ 2) $\frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}$;

3) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{e^x}$; 4) $\frac{dy}{dx} - \frac{1+2x}{x^2}\,y = 1$;

5) $\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$; 6) $\frac{ds}{dt} + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$;

7) $x(1-x^2)\,dy + (2x^2-1)\,y\,dx = ax^3\,dx$; 8) $(1+x^2)\,dy - xy\,dx = a\,dx$;

9) $(1+x^2)\,y' = \operatorname{Bg}\operatorname{tg} x - y$; 10) $y'(1+x^2) + xy = \sin x\sqrt{1+x^2}$;

11) $y' + 2y\operatorname{cotg} x + \sin 2x = 0$; 12) $(1+\sin x)(y'\cos x + y) = 2x\cos^2 x$.

f) 1) $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$; 2) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2$;

3) $3y^2\,dy = (ay^3 + x + 1)\,dx$; 4) $x\,dy - y(y\ln x + 1)\,dx = 0$;

5) $y' - y\cos x = y^2\cos^3 x$; 6) $y' + y = y^2(\sin x - \cos x)$.

g) 1) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$; 2) $y^2 - (xy'\ln x)^2 = 0$;

3) $y'^2 - \frac{a}{x+1} = 0$; 4) $3y'^2 - 2y' - y = 0$.

h) 1) $y = xy' + \frac{1}{y'^2}$; 2) $y = xy' + \sin y'$.

Par. 3. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE TWEEDE ORDE .

XV, 12. Algemeenheden.

Wat het integreren van dvgln. van hogere orde betreft zullen wij ons hier houden aan deze van de tweede orde. De algemene vorm van deze dvgln. is $F(x, y, y', y'') = 0$ en wij zullen ons hierbij voorlopig tot de volgende eenvoudige gevallen beperken :

1) In de functie F komen y en y' niet expliciet voor ;

2) In de functie F komt y niet expliciet voor ;

3) In de functie F komt x niet expliciet voor ;

4) De functie F is homogeen in y, y' en y'' ;

XV, 13. Eerste geval.

Indien y en y' niet expliciet in F voorkomen, dan is de dvgl. van de vorm $F(x, y'') = 0$; onderstellen wij deze opgelost naar y'', dan komt $y'' = f(x)$. Men heeft onmiddellijk :

$$y' = \int f(x)\,dx \quad \text{en} \quad y = \int dx \int f(x)\,dx$$

Voorbeeld : $y'' = \sin x - x\cos x$.

$$y' = \int (\sin x - x\cos x)\,dx = -2\cos x - x\sin x + C_1$$

$$y = \int (-2\cos x - x\sin x + C_1)\,dx = x\cos x - 3\sin x + C_1 x + C_2 .$$

XV. 14. Tweede Geval.

Indien y niet expliciet in F voorkomt, dan is de dvgl. van de vorm $F(x, y', y'') = 0$. Stelt men $y' = p$, dan is $y'' = p'$ en de dvgl. wordt van de vorm $F(x, p, p') = 0$. Deze laatste dvgl. is van de eerste orde en indien men ze kan integreren, levert ze p (of y') in functie van x; een nieuwe integratie laat dan eventueel toe y te berekenen .

Voorbeeld : $x^2 y'' + x y' - \dfrac{x^2 + 1}{x} = 0$.

Stel y ' = p dus y'' = p', dan wordt de dvgl.

$$x^2 p' + xp - \frac{x^2+1}{x} = 0.$$

Deze laatste is een lineaire dvgl. van de eerste orde ; haar algemene integraal is (XV, 8)

$$p = y' = \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{C_1}{x}$$

Hieruit : $$y = x + \frac{1}{x} + C_1 \ln|x| + C_2 .$$

XV, 15. Derde Geval.

Indien x niet expliciet in F voorkomt, dan is de dvgl. van de vorm F (y, y', y'') = 0. Stelt men opnieuw y' = p, dan is

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \times \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

Aldus gaat de dvgl. dan over in F (y, p, p $\frac{dp}{dy}$) = 0 die van de eerste orde is in p en y. Kan men deze dvgl. integreren dan vindt men p in functie van y ; eventuele integratie van p = $\frac{dy}{dx}$ levert dan y in functie van x.

Voorbeeld : y'' = yy'.

Wij stellen y' = p en dus $y'' = p \frac{dp}{dy}$, zodat de dvgl. wordt

$p \frac{dp}{dy} = py$ en dus uiteenvalt in p = 0 en dp = ydy.

De eerste geeft y = C en de tweede

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2+C}{2} \quad \text{of} \quad \frac{2\,dy}{y^2+C} = dx$$

Is C > 0, dan stelt men $C = C_1^2$ en men vindt na integratie

$$x + C_2 = \frac{2}{C_1} \operatorname{Bg\,tg} \frac{y}{C_1} \quad \text{of} \quad y = C_1 \operatorname{tg} \frac{(x+C_2)C_1}{2}.$$

Is C < 0, dan stelt men $C = -C_1^2$ en men vindt na integratie

$$x + C_2 = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{y-C_1}{y+C_1} \right| \quad \text{of} \quad \frac{y-C_1}{y+C_1} = e^{C_1(x+C_2)}$$

Is C = 0 dan komt $-\frac{2}{y} = x + C_2$ of $y = -\frac{2}{x+C_2}$.

Opmerking : Indien naast x, ook y' niet expliciet in de dvgl. voorkomt, dan is de dvgl van de vorm $F(y, y'') = 0$; onderstellen wij deze opgelost naar y'', dan komt $y'' = f(y)$.

Vermenigvuldigt men beide leden met $2\,dy = 2y'\,dx$,

dan komt $2y'y''\,dx = 2f(y)\,dy$ of $d(y'^2) = 2f(y)\,dy$.

Na integratie geeft dit $y'^2 = 2\int f(y)\,dy$,

wat een dvgl. van de eerste orde is.

Deze methode , die vaak in de praktijk gebruikt wordt, heeft echter geen wezenlijk voordeel op de substitutie y' = p.

XV, 16. Vierde geval.

Indien de functie F homogeen is in y, y' en y'', dan stelt men $y = e^{\int u\,dx}$. De dvgl. van de tweede orde gaat dan over in een dvgl. van de eerste orde in u en x. Men heeft dan immers

$$y' = u\,e^{\int u\,dx} = uy$$

$$y'' = uy' + yu' = u^2y + yu' = y(u^2 + u')$$

Voorbeeld : $y'' + 2xy' + x^2y = 0$.

Stelt men $y = e^{\int u\,dx}$ dan gaat de dvgl. over in $du + (u+x)^2\,dx = 0$.

Deze wordt geintegreerd door $u + x = t$ te stellen (XV, 7)

Men vindt $C\,e^{2x} = \dfrac{t+1}{t-1}$ of $u = -x - 1 + \dfrac{2C_1 e^{2x}}{C_1 e^{2x} - 1}$;

Dan is $\int u\,dx = -\dfrac{x^2}{2} - x + \ln\left(C_1 e^{2x} - 1\right) + \ln C_2$.

De algemene integraal van de gegeven dvgl. is dan

$$y = e^{\int u\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2} - x + \ln\left(C_1 e^{2x} - 1\right) + \ln C_2}$$

$$= C_2\left(C_1 e^{2x} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2} - x}$$

$$= \left(Ae^{2x} + B\right) e^{-\frac{x^2}{2} - x} = Ae^{-\frac{x^2}{2} + x} + Be^{-\frac{x^2}{2} + x}$$

In de laatste schrijfwijze stellen A en B de integratieconstanten voor.

OPGAVEN :

a) 1) $y'' + x \sin x = 0$; 2) $y''\sqrt{1-x^2} = 1$; 3) $y''(1+x)^2 = 1$;

4) $y'' = x^3 e^x$; 5) $y'' = \sin x + x\cos x$; 6) $y'' - \frac{x}{1+x^2} = \text{Bgtg}\, x$.

b) 1) $y'' - y'^2 = 0$; 2) $y'^2 + 2y'' = 0$; 3) $xy'' + y' = 0$;

4) $xy'' - y' = x^2 e^x$; 5) $y'y'' = \sqrt{1+y'^2}$; 6) $xy'' = \sqrt{1+y'^2}$.

c) 1) $y^3 y'' = 1$; 2) $y'' - a^2 y = 0$; 3) $y'' + a^2 y = 0$;

4) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$; 5) $yy'' - y'^2 = y^3 y'$; 6) $yy'' = y^2 + y'^2$;

7) $y^2 y' y'' = 1$; 8) $yy'' = y'^2 + y^4$; 9) $yy'' + y'^2 = 1$.

d) 1) $yy'' = xy'^2$; 2) $x^2 y y'' = (xy' + y)^2$;

3) $9y'' - 12xy' + 4x^2 y = 0$; 4) $y'' + 8xy' + 16x^2 y = 0$.

HOOFDSTUK XVI.

MEETKUNDIGE TOEPASSINGEN.

Par. 1. OPPERVLAKTE VAN VLAKKE FIGUREN. (Kwadraturen)

XVI, 1. Kwadratuur van een kromlijnig trapezium.

In VIII, 15 zagen wij dat de oppervlakte van het kromlijnig trapezium begrepen tussen de beeldlijn van de continue functie $y = f(x)$, de x-as en de rechten $x = a$ en $x = b$ $(a < b)$ uitgedrukt wordt door de bepaalde integraal van de functie $f(x)$ genomen tussen de grenzen a en b ; d.w.z.

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

indien $F(x)$ een primitieve functie is van $f(x)$

Voorbeeld : Kwadratuur van de ellips

Wij beschouwen de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en bepalen de oppervlakte van het gebied gelegen in het eerste kwadrant ; wegens de symmetrieën in de ellips is dit een vierde van de totale oppervlakte.

In het eerste kwadrant is $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ waaruit

$$\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Stel nu $x = a \sin\varphi$ (XI, 20) dan komt :

$$\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi}\; a\cos\varphi\,d\varphi = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi$$

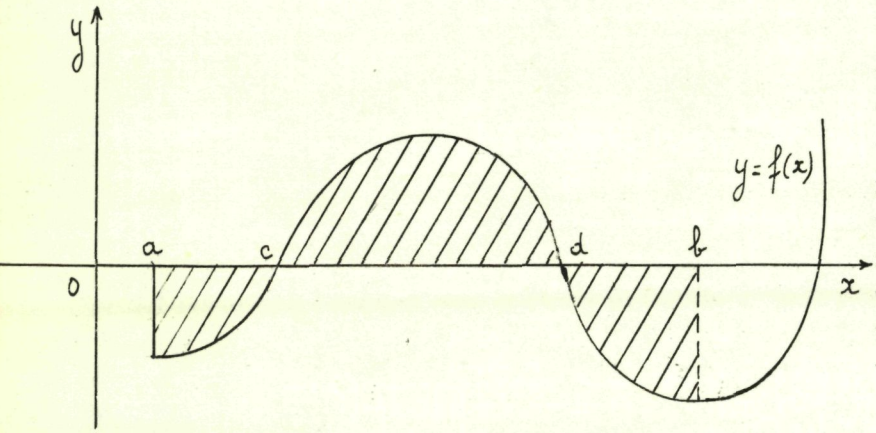
$$\frac{S}{4} = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\varphi + 1)\,d\varphi = \frac{ab}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\,d(2\varphi) + \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{ab}{4}\Big[\sin 2\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab}{2}\Big[\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

Hieruit : $S = \pi ab$

XVI, 2. Opmerkingen :

1) Indien f(x) binnen het beschouwde interval negatief wordt, drukt de bepaalde integraal van a tot b de algebraïsche som uit van de oppervlakten van verschillende kromlijnige trapezia ; hierbij zullen de gebieden boven de x-as positief en de gebieden onder de x-as negatief gerekend worden (VIII, 16)



Wil men derhalve een aritmetische uitdrukking van de oppervlakte van het gebied begrepen tussen de x-as, de rechten x = a en x = b en de beeldlijn van $y = f(x)$ dan zal men er zorg voor dragen het teken van de bepaalde integraal om te keren in de intervallen waar $f(x) < 0$.

Aldus in bovenstaande figuur :

$$S = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^b f(x)\,dx .$$

2) Indien f(x) discontinu is in sommige punten van het interval (a, b) of indien een van de grenzen van het interval naar ∞ divergeert, dan kan de oppervlakte eventueel gevonden worden bij middel van een limietovergang. (IX, 8 en IX, 9)

XVI, 3. Geval van parametrische vergelijkingen .

Is de functie gedefinieerd door een stel parametrische vergelijkingen

$$y = \varphi(t) \qquad x = \psi(t)$$

dan wordt de oppervlakteformule

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt$$

indien t_1 en t_2 de waarden van t zijn die met de waarden a en b van x overeenstemmen.

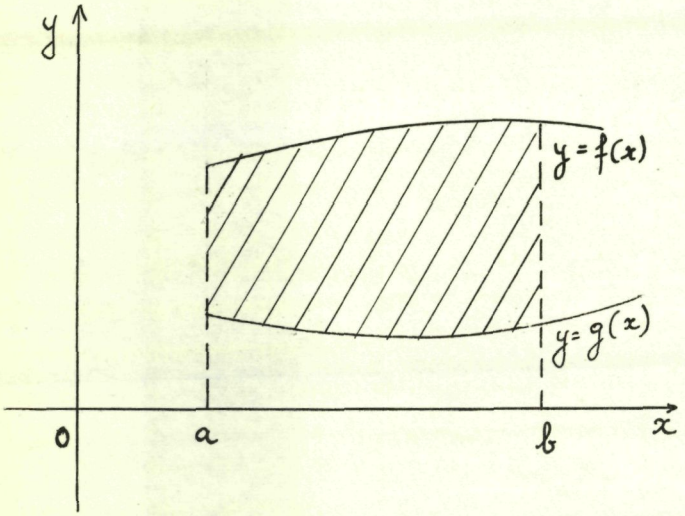
Voorbeeld : Kwadratuur van een tak van de cycloïde

$$x = r(t - \sin t) \qquad y = r(1 - \cos t) \qquad dx = r(1 - \cos t)\,dt$$

$$S = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r^2(1-\cos t)^2\,dt = r^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = r^2\left[\frac{3t}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right] = 3\pi r^2$$

XVI, 4. Kwadratuur van een normaalgebied.

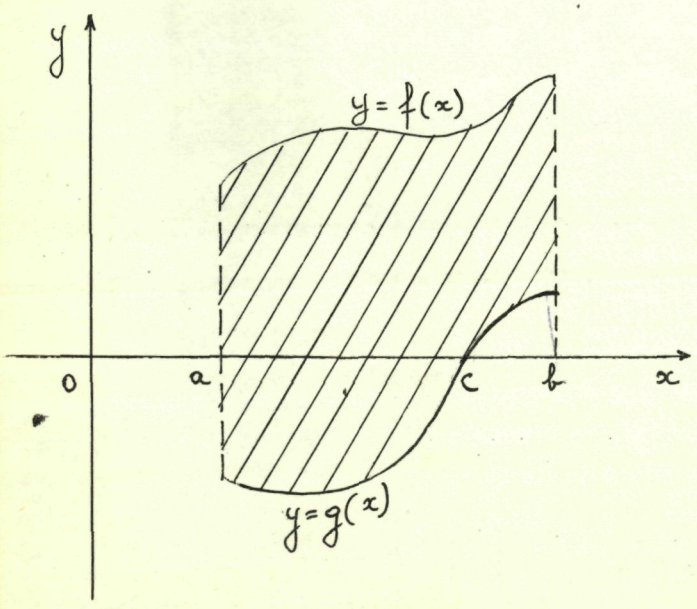


Wij beschouwen in het interval (a, b) twee continue functies y = f (x) en y = g (x) met de eigenschap dat f(x) ≥ g (x) in elk punt van dit interval.

Het gebied begrepen tussen de beeldlijnen van de beide functies en de rechten x = a en x = b heet dan een normaalgebied t.o.v. de x-as.

Het is nu duidelijk dat de oppervlakte van een dergelijk normaalgebied kan beschouwd worden als het verschil van de oppervlakten van twee kromlijnige trapezia, d.w.z.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx \qquad (1)$$



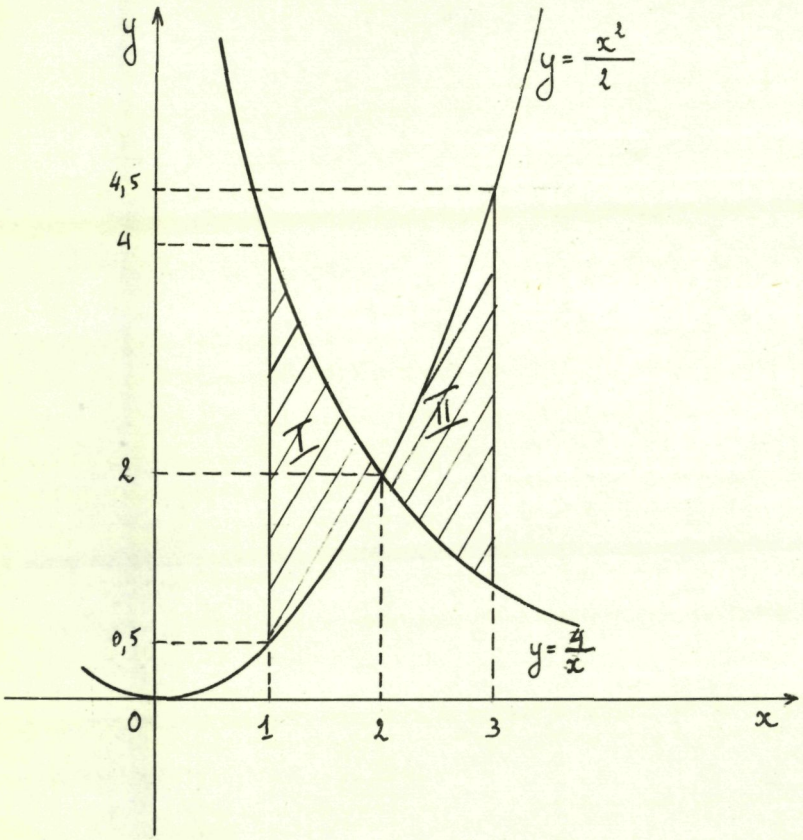
Opmerkingen :

1) De formule (1) drukt aritmetisch de oppervlakte van het normaalgebied uit, onder het enig beding dat f(x) ≥ g(x), zelfs indien de beeldlijnen van deze functies geheel of gedeeltelijk onder de x-as verlopen: aldus heeft men b.v. in bijgaande figuur.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx - \int_c^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx.$$

2) Een gebied dat geen normaalgebied is t.o.v. de x-as, kan vaak door hulplijnen in normaalgebieden verdeeld worden, men moet dan afzonderlijk de kwadratuur van deze normaalgebieden uitvoeren.

Voorbeeld : Kwadratuur van het gebied begrensd door de parabool $y = \frac{x^2}{2}$, de hyperbool $y = \frac{4}{x}$, en de rechten x = 1 en x = 3



De rechte x = 2 verdeelt het gebied in twee normaalgebieden, waarvan wij de oppervlakte door I en II aanduiden.

$$\underline{I} = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= 4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{7}{6}$$

$$\underline{II} = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_2^3 - 4 \ln x \Big|_2^3 = \frac{19}{6} + 4 \ln \frac{2}{3}$$

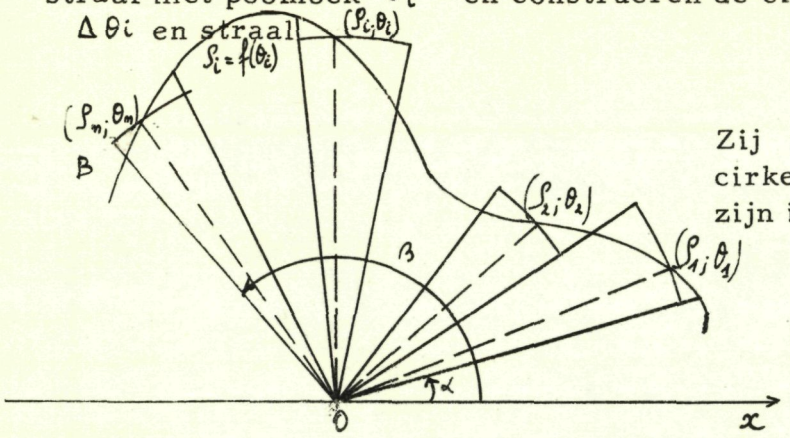
$$S = \underline{I} + \underline{II} = 2 + 4 \ln \frac{4}{3}.$$

XVI, 5. Kwadratuur in poolcoördinaten.

Zij $\rho = f(\theta)$ de poolvergelijking van een vlakke kromme en onderstel de functie $\rho = f(\theta)$ continu in het interval (α, β).
Wij stellen ons voor de oppervlakte te bepalen van een poolsector AOB begrepen n tussen de beeldlijn van de kromme en de voerstralen : $\theta = \alpha$ en $\theta = \beta$

Wij verdelen hiertoe de hoek AOB in n gelijke of ongelijke delen met respectieve maatgetallen : $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ . . . . $\Delta\theta_i$ . . . $\Delta\theta_n$.

In elk van deze hoeken beschouwen wij een totaal willekeurige voerstraal met poolhoek θ_i en construeren de cirkelsector met middelpuntshoek $\Delta\theta_i$ en straal $\rho_i = f(\theta_i)$



Zij β_i de oppervlakte van deze cirkelsector, dan is (de hoeken zijn immers uitgedrukt in radialen).

$$\beta_i = \rho_i^2 \frac{\Delta\theta_i}{2} = \frac{1}{2}\left[f(\theta_i)\right]^2 \Delta\theta_i$$

De som van de oppervlakten van deze cirkelsectoren is dan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\theta_i)\right]^2 \Delta\theta_i$$

Is nu γ_i de oppervlakte van de poolsector met middelpuntshoek $\Delta\theta_i$ dan kan men bewijzen (*) dat γ_i en β_i asymptotisch gelijke oneindig kleinen zijn indien $n \longrightarrow \infty$ (**) Uit VIII, 7 volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = S$$

Derhalve : $$S = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[f(\theta_i)\right]^2 \Delta\theta_i$$

Wegens (3) van VIII, 15 is dit nu $$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta}$$

Opmerking : Aangezien het integrandum steeds positief is, geeft bovenstaande integraal mits $\alpha < \beta$ steeds de aritmetische waarde van de oppervlakte van de beschouwde poolsector.

(*) Men bewijze dit zelf met de methode van VIII, 15.

(**) Zoals in VIII, 15 verstaan wij hieronder dat het aantal verdelingen van de hoek AOB onbeperkt toeneemt, terwijl elk dezer deelintervallen naar nul convergeert.

Voorbeeld : Kwadratuur van de cardioïde $\rho = a(1-\cos\theta)$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$$ (zie XVII, 3)

OPGAVEN :

1. Bepaal de oppervlakte van de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$. ($S = \pi R^2$)
2. Bewijs dat de oppervlakte van een paraboolsegment (d.w.z. het gebied begrensd door de parabool $y^2 = 2px$ en de rechte $x = a$) gelijk is aan de twee derde van de oppervlakte van de rechthoek met zelfde basis en zelfde hoogte.
3. Bepaal de oppervlakte van het kromlijnig trapezium begrensd door de x-as, de hyperbool $xy = 1$ en de rechten $x = 1$ en $x = 7$. ($S = \ln 7$)
4. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as en de kromme met vergelijking $9y - 3x^2 + x^3 = 0$ tussen de abscissen 0 en 6 ($S = 13,5$)
5. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de coördinaatassen en de kromme met vergelijking $x^2 y + x + y = 1$. ($S = \frac{\pi - 2\ln 2}{4}$)
6. Bepaal de oppervlakte begrensd door de sinusoïde en de x-as binnen één periodeinterval. ($S = 4$)
7. Bepaal de oppervlakte van de lus gevormd door de kromme $y^2 = x^2(x+3)$ ($S = \frac{24\sqrt{3}}{5}$)
8. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de x-as en de kromme $y = x \ln x$. ($S = \frac{1}{4}$)
9. Bepaal de oppervlakte begrensd door de kromme met vergelijking $y(x^2 + x+1) = 1$ en haar asymptoot . ($S = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$)
10. Bepaal de oppervlakte begrensd door de kromme $y^2(4 - x) = x^3$ (cissoïde van Diocles) en haar asymptoot . ($S = 12\pi$)
11. Bepaal de oppervlakte begrensd door de kromme $y^2(2 - x) = 2 + x$ en haar asymptoot . ($S = 4\pi$)
12. Bepaal de oppervlakte van de regelmatige astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\left(S = \frac{3}{8}\pi a^2\right)$
13. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de kubische parabool $y=x^3$ en de rechte $y = 2x$ ($S = 2$)
14. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabolen $y^2 = 2px$ en $x^2 = 2py$ ($S = \frac{4p^2}{3}$)
15. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabolen $y = x^2 - 4x$ en het boven de x-as gelegen stuk van de parabool $y^2 = 5x$ ($S = 25$)
16. Bepaal de totale oppervlakte van de lemniscaat $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$. ($S = 2a^2$)
17. Bepaal de oppervlakte beschreven door een voerstraal van de spiraal van Archimedes $\rho = a\theta$ gedurende de tweede winding. ($S = \frac{28}{3}\pi^3 a^2$)
18. Bepaal de oppervlakte van de lus gevormd door het folium van Descartes. ($S = \frac{3}{2}$)

Par. 2. INHOUD VAN OMWENTELINGSLICHAMEN.
(Cubaturen)

XVI, 6. Inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van een kromlijnig trapezium om de x-as.

Wij verwijzen naar de figuren van VIII, 15 en maken gebruik van de notaties van genoemd nummer ; wij stellen ons thans voor de inhoud te bepalen van het lichaam ontstaan door wenteling van het kromlijnig trapezium ABCD om de x-as.

Noemen wij nu δ_i de inhoud van de cilinder ontstaan door het wentelen om de x-as van de rechthoek waarvan Δx_i de basis en $f(x_1)$ de hoogte is ; dan is $\delta_i = \pi \left[f(x_i)\right]^2 \Delta x_i$.

De som van de inhouden van deze cilinders is dan :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\right]^2 \Delta x_i$$

Zij verder ε_i de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen om de x-as van het kromlijnig trapezium met basis Δx_i . Wij kunnen dan opnieuw gemakkelijk aantonen dat δ_i en ε_i asymptotisch gelijk oneindig kleinen zijn voor $n \longrightarrow \infty$ (*) . Uit VIII, 7 volgt dan :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = I_x$$

Derhalve : $$I_x = \pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\right]^2 \Delta x_i$$

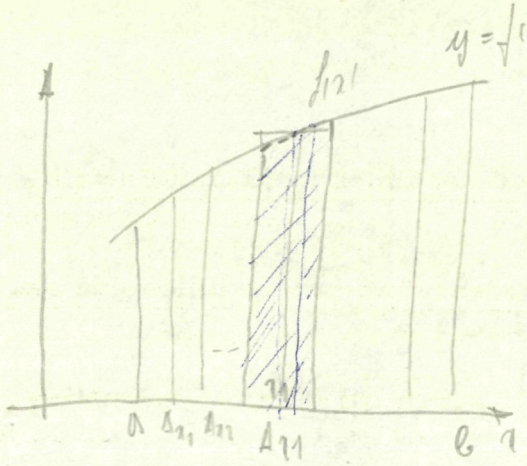
Wegens de definitie van de bepaalde integraal (VIII, 15 en 16) is dit nu :

$$\boxed{I_x = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx}$$

Opmerkingen :

1) Aangezien het integrandum steeds ≥ 0 is, geeft bovenstaande integraal mits $a < b$ steeds de aritmetische waarden van de inhoud van het omwentelingslichaam ; dit is dus tevens het geval wanneer de grafiek van de functie $f(x)$ binnen het interval (a, b) onder de y-as verloopt ; het onderscheid van XVI, 2 dient hier dus niet meer te worden gemaakt.

(*) Men bewijze dit zelf met de methode van VIII, 16.
De betekenis van $n \to \infty$ is dezelfde als in VIII, 15.



B_1 = volumul cilindrului $\pi f^2(x_i) \cdot \Delta x_i$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_i = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) \Delta_i$$

B_1, f_1 = mărimi legate de cel trunch. trapez.

B_i ca f_i asympt. = 0. K

$$\lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_i = \lim \sum_{i=1}^{n} f_i = V_x$$

$$V_x = \pi \int_a^b |f(x)|^2 dx = \boxed{\pi \int_a^b y^2 dx}$$

2) Voor parametrisch gedefinieerde krommen heeft men : $I = \pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t)\, \psi'(t)\, dt$.

Voorbeeld : Bepaal de inhoud van de omwentelingsellipsoïde ontstaan door het wentelen van de ellips $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ om de x-as.

$$I_x = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}\, dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x \Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a \right) = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

Stel men hierin a = b, dan vindt men de gekende formule voor de inhoud van de bol.

OPGAVEN.

1. Bepaal de inhoud van het stuk van de omwentelingsparaboloïde ontstaan door het wentelen om de x-as van het gebied begrepen tussen de x-as, de parabool $y^2 = 2px$ en de rechte x = a. Toon aan dat deze inhoud de helft is van de inhoud van de cilinder met zelfde grondvlak en hoogte. ($I_x = \pi pa^2$)

2. Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen om de y-as van het gebied begrepen tussen de y-as, de parabool $y^2 = 2px$ en de rechte y = a. $\left(I_y = \frac{\pi a^5}{10p^2} \right)$

3. Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen om de x-as van een gebied begrensd door de x-as en een boog van de sinusoïde y = sin x. $\left(I_x = \frac{\pi^2}{2} \right)$

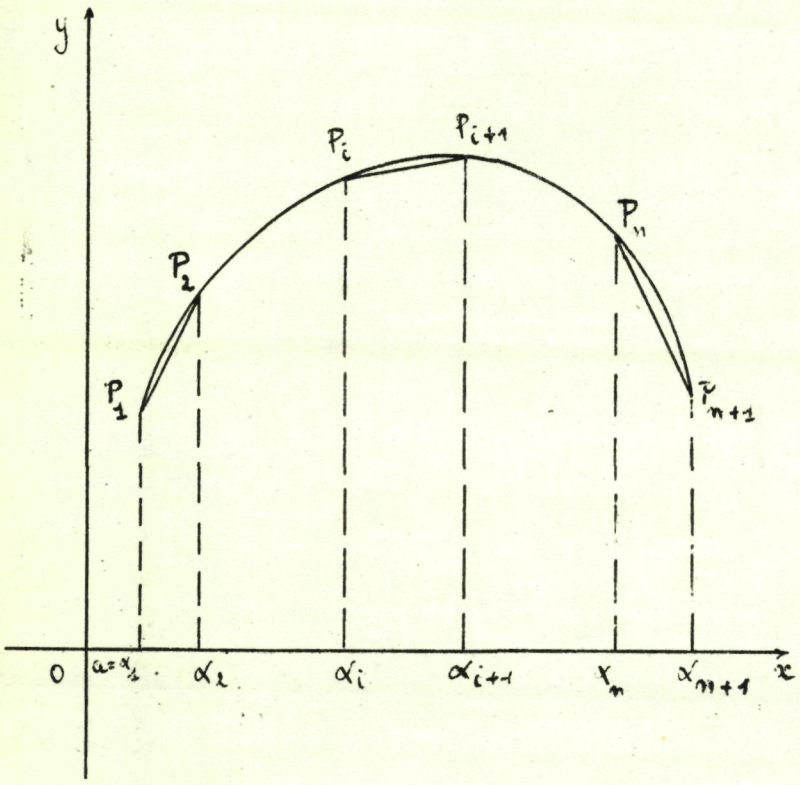
4. Bepaal de inhoud van de ring ontstaan door het wentelen van de cirkel $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ (a > R) om de y-as ($I_y = 2\pi^2 aR^2$)

5. Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen om de x-as van een gebied begrensd door de x-as en een tak van de cycloïde x = r(t - sin t) y = r (1 - cos t). ($I_x = 5\pi^2 r^3$)

6. Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van de regelmatige astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ om de x-as. $\left(I_x = \frac{32}{105}\pi a^3 \right)$.

Par. 3. LENGTE VAN KROMMEBOGEN (Rectificaties)

XVI, 7. Lengte van een boog van een vlakke kromme in cartesische coördinaten.



Zij y = f(x) een functie die in het interval [a, b] aan de voorwaarden van Rolle voldoet (V, 1).
Wij stellen ons thans voor de lengte te bepalen van het stuk van de grafiek van deze functie begrepen tussen de punten die respectievelijk de abscissen a en b hebben.

Wij verdelen opnieuw het interval a, b in n gelijke of ongelijke deelintervallen, met respectieve lengte

$$\Delta x_1 , \Delta x_2 , \dots \Delta x_i \dots \Delta x_n$$

en noemen $a = x_1 , \alpha_2 \dots \alpha_i , \alpha_{i+1} , \dots x_n , x_{n+1} = b$

de abscissen van de verdelingspunten.

Zij verder P_i het punt van de kromme met abscis α_i en beschouwen wij de in de krommeboog ingeschreven veelhoekige lijn $P_1P_2 \dots \dots P_iP_{i+1} \dots \dots P_nP_{n+1}$. De lengte van de krommeboog $P_1 P_{n+1}$ is bij definitie de limiet van de lengte van deze veelhoekige lijn wanneer $n \to \infty$ (in de betekenis hieraan in VIII, 15 gegeven)

De lengte van het lijnstuk $P_i P_{i+1}$ is nu $P_i P_{i+1} = \sqrt{(\alpha_{i+1} - x_i)^2 + [f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)]^2}$

Aangezien echter de functie f(x) aan de voorwaarden van Rolle voldoet is hierop de middelwaardestelling van Lagrange (V, 4) toepasselijk d.w.z. :

$$f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i) = (\alpha_{i+1} - x_i) f'(x_i) = f'(x_i) \Delta x_i ,$$

waarin x_i een inwendig punt is van het interval $(\alpha_i ; \alpha_{i+1})$. Aldus wordt

$$P_i P_{i+1} = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\sqrt{1 + f'^2(x_i)} = \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\ \Delta x_i .$$

De lengte van de ingeschreven veelhoekige lijn is dan :

$$\sum_{i=1}^{n} P_i P_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\ \Delta x_i$$

Stellen wij nu door s de lengte voor van de beschouwde krommeboog, dan is krachtens de definitie van de bepaalde integraal (VIII, 15 en 16)

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx}$$

Opmerkingen : 1) Aangezien het integrandum $\sqrt{1 + y'^2}$ steeds positief is en wij $a < b$ onderstelden, geeft bovenstaande integraal steeds de aritmetische waarde van de lengte van de vlakke krommeboog.

2) Voldoet de functie $y = f(x)$ tussen de vaste grens x_o en de veranderlijke grens $x\ (x_o < x)$ aan de voorwaarden van Rolle, dan wordt de lengte van haar grafiek tussen deze grenzen uitgedrukt door de formule :

$$s = \int_{x_o}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

Deze betrekking definieert s als een functie van haar bovengrens x ; de afgeleide en de differentiaal van deze functies zijn dus wegens VIII, 18

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}\ ; ds = \sqrt{1 + y'^2}\ dx ; ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx ; ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} .$$

Voorbeeld : Bepaal de lengte van het stuk van de semi-cubische parabool $y^2 = x^3$ in het interval $(0, 5)$;

Deze kromme is symmetrisch t.o.v. de x-as en slechts gedefinieerd voor $x \geq 0$; wij nemen hier de positieve bepaling van y d.w.z. de functie $y = \sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\ dx = \frac{4}{9} \int_0^5 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9x}{4}\right) = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^5$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8} - 1\right) = \frac{335}{27} .$$

XVI, 8. Geval van parametrische vergelijkingen.

Is de kromme gedefinieerd door de vergelijkingen $y = \varphi(t)$ $x = \psi(t)$ dan is (XIV, 8)

$$y' = \frac{Dy}{Dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

en de rectificatieformule wordt mits $t_1 < t_2$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left[\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right]^2}\, \psi'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt$$

Voorbeeld : Rectificatie van een tak van de cycloïde :

$$x = r(t - \sin t),\quad y = r(1 - \cos t);\quad Dx = r(1 - \cos t);\quad Dy = r \sin t.$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(Dx)^2 + (Dy)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) = -4r \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8r$$

XVI, 9. Rectificatie in poolcoördinaten.

Met $x = \rho \cos \theta$ en $y = \rho \sin \theta$ en als wij ρ als nieuwe functie en θ als nieuwe onafhankelijke veranderlijk kiezen, is wegens XIV, 9 :

$$y' = \frac{\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta}{\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta} \quad \text{en} \quad 1 + y'^2 = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2}$$

De rectificatieformule wordt alsdan

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{\rho^2 + \rho'^2}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2}}\, (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)\, d\theta$$

$$\boxed{s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta}$$

Voorbeeld : Rectificatie van de cardioïde $\rho = a(1 - \cos \theta)$

Hier is $\rho' = a \sin \theta$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta}\, d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$

Deze laatste integraal werd reeds berekend in het vb. van XVI, 1 zodat s = 8a.

XVI, 10. Lengte van een boog van een ruimtekromme.

Zijn y = f (x) en z = φ (x) de vergelijkingen van een ruimtekromme, dan kan men zoals voor een vlakke kromme aantonen dat de rectificatieformule gegeven wordt door :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Zo de kromme gedefinieerd is met behulp van de parametrische vergelijkingen x = f (t) , $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$ wordt dit :

$$s = \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

Voorbeeld : Bepaal de lengte van een winding van de schroeflijn $x = a\cos t$

$$y = a\sin t \ , \ z = \frac{h}{2\pi} t .$$

Men heeft :

$$Dx = -a\sin t, \quad Dy = a\cos t, \quad Dz = \frac{h}{2\pi}$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\, dt = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

OPGAVEN :

1. Bepaal de lengte van de omtrek van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = R^2$ ($S = 2\pi R$)

2. Bepaal de lengte van de regelmatige astroïde. (s = 6 a)

3. Bepaal de lengte van het stuk van de parabool $y^2 = 2px$ begrepen tussen de top en de rechte door het brandpunt evenwijdig met de topraaklijn aangebracht. $\left(s = \frac{p}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]\right)$

4. Bepaal de lengte van een boog van de kettinglijn $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,ch\frac{x}{a}$ tussen 0 en x.
Toon nu aan dat de lengte van deze boog evenredig is met de oppervlakte van het kromlijnig trapezium door deze boog bepaald. $\left(S = a\sqrt{y^2 - a^2} = as\right)$

5. Bepaal de lengte van de boog van de kromme met vergelijking $y = 2\ln(4 - x^2)$ tussen de grenzen - 1 en + 1 (s = 4 ln3 - 2).

6. Bepaal de lengte van de exponentiële kromme $y = e^x$ tussen de grenzen 0 en 1. $\left(s = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln\left[(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)\right] \right)$

7. Bepaal de lengte van de logaritmische kromme $y = \ln x$ tussen de grenzen 1 en $\sqrt{3}$. $\left[s = 2 - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{6} - \sqrt{3}) \right]$

8. Bereken de lengte van een winding van de logaritmische spiraal $\rho = e^{a\theta}$ waarbij θ varieert van 0 tot 2π. $\left[s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\left(e^{2\pi} - 1\right) \right]$

9. Bereken de lengte van de eerste winding van de spiraal van Archimedes $\rho = a\theta$

10. Bereken de lengte van een boog van de ruimtekromme $y = \frac{x^3}{a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$, vanaf de oorsprong tot een punt met abscis x (s = x + z)

11. Bepaal de lengte van de snijlijn van de parabolische cilindervlakken $y = x^2$ en $z = x^2$ tussen de abscissen 0 en 4. $\left[s = 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}) \right]$

Par. 4. OPPERVLAKTE VAN OMWENTELINGSLICHAMEN.

(Complanaties)

XVI, 11. Oppervlakte van het oppervlak ontstaan door het wentelen van een vlakke kromme om de x-as.

Wij verwijzen naar de figuur van XVI, 17 en maken gebruik van de notatie's van genoemd nummer ; wij stellen ons thans voor de oppervlakte te bepalen van het oppervlak ontstaan door het wentelen van boog P_1P_{n+1} om de x-as. Bij definitie is dit de limiet van de oppervlakte van het oppervlak ontstaan door het wentelen om de x-as van de ingeschreven veelhoekige lijn wanneer $n \longrightarrow \infty$.

Het lijnstuk $P_i P_{i+1}$ beschrijft bij wenteling om de x-as het ronde oppervlak van een afgeknotte kegel ; de oppervlakte hiervan is $\pi\left[f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i)\right] \times P_iP_{i+1}$

Houdt men nu rekening met de waarde van $P_i P_{i+1}$ berekend in XVI, 7 dan is deze oppervlakte

$$\pi\left[f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i)\right] \times \sqrt{1+f'^2(x_i)}\ \Delta x_i$$

waarin x_i een inwendig punt is van het interval $(\alpha_i ; \alpha_{i+1})$

De oppervlakte van het oppervlak ontstaan door het wentelen van de ingeschreven veelhoekige lijn is derhalve

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i) \right] \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \quad \Delta x_i$$

Aldus komt :

$$S_x = \pi \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i) \right] \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \quad \Delta x_i$$

Nu zijn de uitdrukkingen

$$\beta_i = \left[f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i) \right] \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \quad \Delta x_i$$

$$\gamma_i = 2 f(x_i) \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \quad \Delta x_i$$

asymptotisch gelijk voor $n \longrightarrow \infty$

Immers $\lim_{n \to \infty} \frac{\beta_i}{\gamma_i} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i)}{2 f(x_i)} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{f(\alpha_{i+1})}{f(x_i)} + \frac{f(\alpha_i)}{f(x_i)} \right]$ (*)

$$= \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.$$

wegens de continuïteit van de functie f (x) . Tenslotte is dus

$$S_x = 2\pi \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sqrt{1 + f'^2(x_i)} \quad \Delta x_i .$$

Krachtens de definitie van de bepaalde integraal heeft men derhalve

$$\boxed{S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx}$$

Opmerkingen :

1) Het integrandum van bovenstaande integraal heeft het teken van y ; verloopt dus de grafiek van y = f (x) in het interval $[a, b]$ gedeeltelijk onder de x-as, dan moet zoals in XVI, 2. het integratie-interval worden gesplitst teneinde de aritmetische waarde van S_x te bepalen.

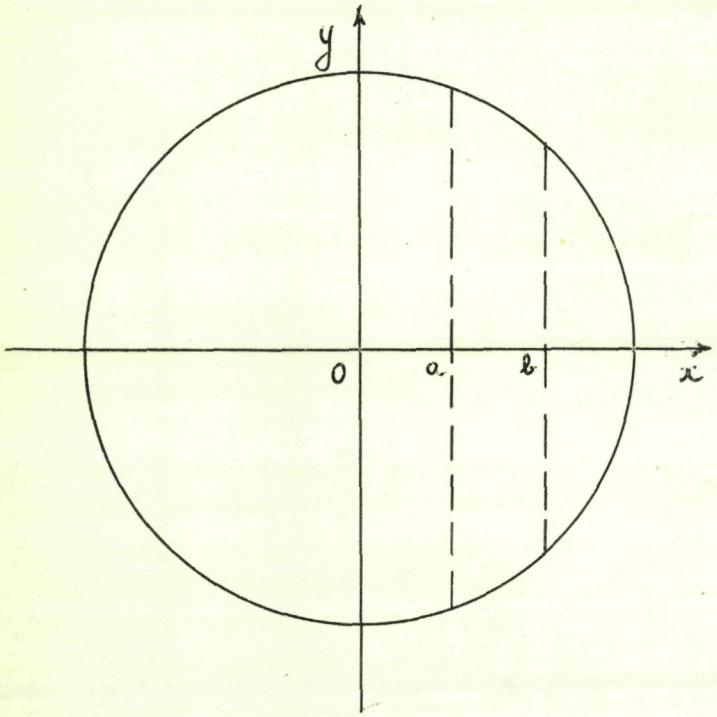
2) Bij de parametrische gedefinieerde krommen y = $\varphi(t)$, x= ψ (t) wordt bovenstaande formule

---

(*) Men kan bewijzen dat deze limieten 1 zijn met behulp van de stelling van de gelijkmatige continuiteit (cfr VIII, 15)

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \sqrt{\psi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt.$$

Voorbeeld : Bepaal de ronde oppervlakte van een bolsegment.



Zij $x^2+y^2 = R^2$ de vergelijking van de cirkelomtrek die door wenteling om de x-as het bolvlak doet ontstaan.

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^b y\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = 2\pi \int_a^b R\,dx = 2\pi R(b-a)$$

Om de oppervlakte van het bolvlak te bepalen stellen wij hierin a = -R en b = R en vinden aldus de bekende oppervlakteformule $4\pi R^2$ terug.

OPGAVEN :

1. De oppervlakte bepalen van het oppervlak dat beschreven wordt door wenteling om de x-as van een lijnstuk behorend tot de rechte 5x + 12 y = 60 en begrensd door de coördinaatassen. De uitkomst toetsen aan deze bekomen door gebruik van de formule voor de ronde oppervlakte van een kegel. $\left(S_x = 65\pi\right)$

2. De oppervlakte bepalen van het oppervlak dat beschreven wordt door wenteling om de x-as van een lijnstuk behorend tot de rechte 8 x + 15 y = 120 en begrensd door de punten met abscis 6 en 12. De uitkomst toetsen aan deze bekomen door gebruik van de formule voor de ronde oppervlakte van een afgeknotte kegel. $\left(S_x = \frac{1088\pi}{25}\right)$

3. Bepaal de oppervlakte van het segment van de omwentelingsparaboloïde ontstaan door het wentelen om de x-as van het stuk van de parabool $y^2 = 4x$ tussen de grenzen 0 en 3.

4. Bepaal de oppervlakte van de omwentelingsellipsoïde ontstaan door het wentelen van de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$ om de x-as $\left[S_x = \frac{8\pi}{9}\left(9 + 4\pi\sqrt{3}\right)\right]$

5. Bepaal de oppervlakte van de ring ontstaan door het wentelen van de cirkelomtrek $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ $(a > R)$ om de y-as $(S_y = 4\pi^2 a R)$

$\sqrt{64 - 3x^2}$

6. Bepaal de oppervlakte van het lichaam ontstaan door het wentelen van de regelmatige astroïde om de x-as. ($S_x = \frac{12}{5}\pi a^2$)

7. Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van een tak van de gewone cycloide om de x-as. $\left(S_x = \frac{64}{3}\pi a^2 \right)$

Par. 5. AANRAKING EN OSCULATIE VAN KROMMEN.

XVI, 12. Definitie.

Wij beschouwen twee krommen met respectieve vergelijking

$$y = f(x) \quad \text{en} \quad Y = F(x)$$

en onderstellen dat de functies $f(x)$ en $F(x)$ $n+1$ maal afleidbaar zijn in de omgeving van een punt x_0.

Wij zeggen dat de twee krommen in een gemeenschappelijk punt $P(x_0; y_0)$ een contact van de n^e orde hebben als de afgeleiden van de functies $f(x)$ en $F(x)$ tot en met de n^e orde in het punt x_0 gelijk zijn, terwijl de $(n+1)^e$ afgeleide van deze functies in dit punt verschillend zijn ; de voorwaarde voor een contact van de n^e orde zijn derhalve

$$f(x_0) = F(x_0);\ f'(x_0) = F'(x_0);\ f''(x_0) = F''(x_0) \ldots;\ f^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(x_0)$$

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq F^{(n+1)}(x_0)$$

De volgende beschouwingen kunnen deze definitie rechtvaardigen.

Zij $x_0 + h$ een punt van de beschouwde omgeving, dan kunnen wij krachtens de gemaakte onderstellingen, de functies $f(x)$ en $F(x)$ als volgt in een reeks van Taylor ontwikkelen (XII, 4) :

$$y = f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(x_0) + \omega\right]$$

$$Y = F(x_0+h) = F(x_0) + \frac{h}{1!}F'(x_0) + \frac{h^2}{2!}F''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[F^{(n+1)}(x_0) + \omega'\right]$$

Als nu de twee krommen een contact van de n^e orde hebben is dus

$$Y - y = F(x_0+h) - f(x_0+h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0) + \eta\right] \qquad (1)$$

waarin $\eta = \omega' - \omega$

Laten wij nu h naar nul convergeren en kiezen wij h als H.O.K. Uit XII, 4 weten wij dat dan ook ω en ω' oneindig klein zijn, zodat dan ook η een oneindig kleine is. Maar wij kunnen schrijven :

$$Y - y = F(x_0+h) - f(x_0+h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\underbrace{\left[F^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)\right]}_{\neq 0} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\eta$$

Uit VIII, 3 blijkt dan dat Y - y O.K. wordt van de $(n+1)^e$ orde.

Opmerkingen.

1) Aangezien η samen met h naar nul convergeert, kan men h steeds voldoende klein kiezen opdat de uitdrukking tussen de kantige haakjes van (1) een vast teken zou hebben in de beschouwde omgeving van x_0. Dan verandert h^{n+1} van teken samen met h als n even is, maar niet als n oneven is. Derhalve verandert dan ook Y-y van teken samen met h als n even is, maar niet als n oneven is.

Als twee krommen in het punt P een contact van even orde hebben, dan doorsnijden zij elkander in dit punt ; hebben zij in het punt P een contact van oneven orde, dan doorsnijden zij elkaar niet in dit punt.

2) Als $f(x_0) = F(x_0)$ en $f'(x_0) \neq F'(x_0)$ dan hebben de twee krommen in het beschouwde punt een eenvoudige doorsnijding ; bij uitbreiding kunnen wij dan zeggen dat zij een contact van de 0^e orde hebben.

XVI, 13. Osculerende krommen.

Zij P een punt van een gegeven kromme. Anderzijds beschouwen wij een schaar krommen waarvan de vergelijking tot een gegeven type behoort en een zeker aantal onafhankelijke parameters bevat. De kromme van de schaar die met de gegeven kromme in het punt P het contact van de hoogste orde bezit heet de osculerende kromme van de gegeven kromme in het punt P.

Krachtens de eigenschap van XVI, 12 zal de osculerende kromme dus in P een inniger contact hebben met de gegeven kromme, dan elke andere kromme van de schaar.

Als de vergelijking van de krommenschaar afhankelijk is van n+1 parameters, dan zullen deze parameters voor de osculerende bepaald worden door een stelsel van n+1 vergelijkingen ; deze vergelijkingen ontstaan door in het beschouwde punt de functiewaarden en de n eerste afgeleiden gelijk te stellen. De osculerende kromme zal dan met de gegeven kromme meestal een contact van de n^e orde vertonen.

Opmerking : Is in het beschouwde punt ook de $(n+1)^e$ afgeleide gelijk, dan is er tussen de gegeven kromme en haar osculerende een contact dat minstens van de $(n+1)^e$ orde is; in dit geval zegt men dat er overosculatie plaats grijpt.

XVI, 14. De osculerende rechte.

Zij $y = f(x)$ de vergelijking van de kromme en beschouwen wij de algemene vergelijking van de rechte $Y = m x + n$. Deze laatste is afhankelijk van twee parameters ; die parameters kunnen dus voor de osculerende rechte in P $(x_0;y_0)$ bepaald worden door de voorwaarden

$$y_0 = Y_0 \quad \text{en} \quad y'_0 = Y'_0 \quad \text{of}$$

$$y_0 = m x_0 + n \quad \text{en} \quad y'_0 = m \qquad \text{waaruit} \quad n = y_0 - x_0 y'_0$$

De vergelijking van de osculerende rechte is dus

$$Y = y'_0 x + y_0 - x_0 y'_0 \quad \text{of} \quad Y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$$

De osculerende rechte is dus niets anders dan de raaklijn in P ; zij bezit er met de kromme een contact van de eerste orde mits $y'' \neq Y''$.

Opmerking : Men heeft hier $Y'' = 0$; is dus $y'' = 0$ dan bezit de raaklijn met de kromme in P een contact van de tweede orde mits $y''' \neq 0$; dit is het geval voor een gewone buigraaklijn.

XVI, 15. De osculerende cirkelomtrek.

Zij $y = f(x)$ de vergelijking van de kromme en beschouwen wij de algemene vergelijking van de cirkelomtrek

$$(x - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Deze laatste is afhankelijk van drie parameters ; die parameters kunnen dus voor de osculerende cirkel in P $(x_0 ; y_0)$ bepaald worden door de voorwaarden :

$$y_0 = Y_0 \;,\; y'_0 = Y'_0 \quad \text{en} \quad y''_0 = Y''_0 \qquad (2)$$

Door afleiding van (1) komt echter

$$(x - \alpha) + (Y - \beta) Y' = 0 \qquad (3)$$

$$1 + Y'^2 + (Y - \beta) Y'' = 0 \qquad (4)$$

De vergelijkingen (1), (3) en (4) geven dan als men rekening houdt met (2)

$$\begin{cases} (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = R^2 & (5) \\ (x_0 - \alpha) + (y_0 - \beta)\, y'_0 = 0 & (6) \\ 1 + y'^2_0 + (y_0 - \beta)\, y''_0 = 0 & (7) \end{cases}$$

Dit laatste stelsel laat nu toe de parameters van de osculerende cirkelomtrek te bepalen.

Uit (7) volgt immers mits $y'' \neq 0$ d.w.z. mits P geen buigpunt is van de kromme

$$y_0 - \beta = -\frac{1 + y'^2_0}{y''_0} \quad \text{en} \quad \beta = y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}$$

Uit (6) volgt dan :

$$x_0 - \alpha = (\beta - y_0)\, y'_0 = \frac{(1 + y'^2_0)\, y'_0}{y''_0} \quad \text{en} \quad \alpha = x_0 - \frac{(1 + y'^2_0)\, y'_0}{y''_0}$$

En dan tenslotte uit (5)

$$R^2 = \frac{(1 + y'^2_0)^2\, y'^2_0 + (1 + y'^2_0)^2}{y''^2_0} = \frac{(1 + y'^2_0)(1 + y'^2_0)^2}{y''^2_0} = \frac{(1 + y'^2_0)^3}{y''^2_0}$$

waaruit $R = \left| \frac{(1 + y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{y''_0} \right|$

De parameters van de osculerende cirkelomtrek in een algemeen punt $P(x, y)$ van een kromme worden dus gegeven door de betrekkingen:

$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''} \quad ; \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \quad ; \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} .$$

XVI, 16. Opmerkingen :

1) De cirkel die begrensd wordt door de osculerende cirkelomtrek in een punt van een kromme heet ook de osculatiecirkel van de kromme in dit punt.

2) De osculerende cirkelomtrek heeft met de kromme een contact van de tweede orde mits $y_0'' \neq y_0'''$; in dit geval zal de osculerende cirkelomtrek de kromme in het raakpunt doorsnijden.

3) De osculerende cirkelomtrek in een punt P van een kromme heeft klaarblijkend in P dezelfde raaklijn als de kromme; derhalve ligt het middelpunt van de osculerende cirkelomtrek op de normaal in P van de kromme. Dit laatste kan men ten andere rechtstreeks inzien door de coördinaten van dit middelpunt in de vergelijking van de normaal te brengen.

4) Is de kromme niet gedefinieerd door een expliciete vergelijking van de vorm $y = f(x)$ dan kan de formule voor de straal van de osculatie - cirkel als volgt worden omgerekend :

a) de functie is impliciet gedefinieerd door een vergel ijking $f(x, y) = 0$; rekening houdend met XIV, 3 komt dan :

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \left| - \frac{\left[1+\left(\frac{f'_x}{f'_y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \left(f'_y\right)^3}{f''_{xx}\,(f'_y)^2 - 2\,f''_{xy}\,f'_x\,f'_y + f''_{yy}\,(f'_x)^2} \right|$$

$$= \frac{\left[(f'_x)^2 + (f'_y)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left| f''_{xx}\,(f'_y)^2 - 2\,f''_{xy}\,f'_x\,f'_y + f''_{yy}\,(f'_x)^2 \right|}$$

b) de functie is parametrisch gedefinieerd door de vergelijkingen $x = \varphi(t)$ en $y = \psi(t)$; rekening houdend met XIV, 8 komt dan :

$$R = \left| \frac{\left[1+\left(\frac{Dy}{Dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} (Dx)^3}{Dx\,D^2y - Dy\,D^2x} \right| = \frac{\left[(Dx)^2 + (Dy)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left| Dx\,D^2y - Dy\,D^2x \right|}$$

c) de functie is gedefinieerd in poolcoördinaten door de vergelijking $\rho = f(\theta)$; rekening houdend met XIV, 9 komt dan

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta} \right)^2 = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2}$$

$$R = \left| \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}} (\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta)^3}{\left[(\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}} (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')} \right| = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}$$

De berekeningen zijn echter vaak eenvoudiger als men van deze formule geen gebruik maakt, doch y' en y'' berekent en hieruit R afleidt.

XVI, 17. De kromming en de kromtestraal.

Men zegt dat een cirkelomtrek een des te grotere kromming heeft naarmate zijn straal kleiner is. De kromming van een cirkelomtrek wordt dan ook gedefinieerd als het omgekeerde van zijn straal.

Aangezien nu de osculerende cirkelomtrek van een kromme in een punt, de cirkel is die het meest innig contact heeft met de kromme in dit punt, noemt men de kromming van de osculerende cirkelomtrek ook de kromming van de gegeven kromme in het beschouwde punt. Deze kromming is derhalve gelijk aan $\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

De osculatiecirkel van een kromme in een gegeven punt heet daarom ook de kromtecirkel van de kromme in dit punt ; de straal van deze osculatiecirkel heet de kromtestraal van de kromme in dit punt ; het middelpunt van deze osculatiecirkel heet het krommingsmiddelpunt :

Men kan de kromming nu ook als een relatief getal opvatten en deze dus definiëren door de betrekking

$$C = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

De getalwaarde van C laat dan toe tevens de zin van de kromming te bepalen ; immers waar C dan het teken heeft van y'' volgt uit VI, 6 en VI, 9 :

1) In een interval waar de kromme haar holle zijde naar boven keert is de kromming positief en omgekeerd ;
2) In een interval waar de kromme haar bolle zijde naar boven keert is de kromming negatief en omgekeerd ;
3) In een buigpunt waar de functie tweemaal afleidbaar is, is de kromming nul (het omgekeerde is niet waar) .

Ook de kromtestraal kan dan als een relatief getal worden opgevat nl.

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

De kromtestraal wordt dan als positief of negatief beschouwd naar gelang de kromme haar holle of bolle zijde naar boven keert.

XVI, 18. Enkele uitgewerkte voorbeelden.

1. Bepaal de osculerende cirkelomtrek in een willekeurig punt van de parabool $y^2 = 2px$.

Hier is $y' = \frac{p}{y}$ en $y'' = -\frac{py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3}$.

$$\alpha = x - \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} \cdot \frac{p}{y} = x + \frac{y^2+p^2}{p} = 3x + p$$

$$\beta = y + \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2} = -\frac{2xy}{p}$$

$$R = \left| -\frac{y^3}{p^2}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right| = \frac{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}{p^2} = \sqrt{\frac{(2x+p)^3}{p}}$$

Merkt men op dat $\sqrt{y^2+p^2} = PN$ de lengte is van de normaal (VI, 2) dan is ook $R = \frac{PN^3}{p^2}$

2. Bepaal de kromtestraal van de grafiek van $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ in het punt waar y een maximum vertoont.

Wij vonden reeds dat in dit punt (XIV, 5)

$x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$, $y' = 0$, $y'' = -2$

Derhalve is $R = \frac{1}{-2} = -0,5$.

3. Bereken de kromtestraal in een willekeurig punt van de tak van de gewone cycloïde waarvoor $0 < t < 2\pi$

Wij vonden reeds (XIV, 8) : $y' = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}$, $y'' = -\frac{1}{2(1-\cos t)^2}$

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

$$R = -\left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \times r(1-\cos t)^2 = -\left(\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \times 4r\sin^4\frac{t}{2} = -4r\sin\frac{t}{2}.$$

Men zal opmerken dat de absolute waarde van de kromtestraal in een punt van de cycloïde het dubbel is van de normaal in dit punt (XIV, 8). Dit laatste wordt nog duidelijker als men de coördinaten van het krommingsmiddelpunt berekent

$$\alpha = r(t-\sin t) + \left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{t}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{t}{2}\, r(1-\cos t)^2 = r(t+\sin t)$$

$$\beta = r(1-\cos t) - \left(1+\operatorname{cotg}^2\frac{t}{2}\right) r(1-\cos t)^2 = -r(1-\cos t) = -y$$

4. Bereken de kromtestraal van de lemniscaat in een willekeurig punt.

De vergelijking van de lemniscaat is $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ en in poolcoördinaten $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ (XIV, 9).

Wij vonden daar eveneens dat

$$y' = -\operatorname{cotg} 3\theta \quad \text{en} \quad y'' = -\frac{3\sqrt{\cos 2\theta}}{a\sqrt{2}\sin^3 3\theta},$$

zodat voor $\sin 3\theta \geq 0$

$$R = -\frac{\left(1+\operatorname{cotg}^2 3\theta\right)^{\frac{3}{2}}\sin^3 3\theta\, a\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = -\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = -\frac{2a^2}{3\rho} = -\frac{2a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}.$$

OPGAVEN.

1. Bepaal de osculatiecirkel van de kromme $y = x^{\frac{3}{2}}$ in het punt met abscis $\frac{4}{7}$.

2. Bereken de straal van de osculatiecirkel in elk punt van de kettinglijn $y = \operatorname{ch} x$ en toon aan dat die straal gelijk is aan de normaal in het beschouwde punt.

3. Toon aan dat de krommingsmiddelpunten voor de extrema van $y = \sin x$ in de x-as liggen.

4. Bepaal de kromtestraal van de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ in de toppen.

5. In de middelpuntskegelsnede $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ stelt men $\frac{b^2}{a} = p$; is nu PN de lengte van de normaal in een punt P van de kromme dan wordt de straal van de osculatiecirkel in dit punt gegeven door $R = \frac{PN^3}{p}$ (vgl. XVI,18 voor de parabool).

6. Bepaal de kromtestraal in een punt van het folium van Descartes :
   a) gebruik makend van de vergelijking $x^3 + y^3 = 3xy$
   b) gebruik makend van de parametervoorstelling

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad , \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \; .$$

   Toon aan dat beide methodes tot hetzelfde resultaat leiden.

7. Bepaal de kromtestraal in een punt van de astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

8. Bepaal de kromtestraal in een punt van de cirkelevolvente
   $x = a\,(\cos t + t \sin t)$
   $y = a\,(\sin t - t \cos t)$.

9. Bepaal de kromtestraal van de kromme gedefinieerd door de volgende poolvergelijkingen :

1) $\rho = a\theta$; 2) $\rho = \frac{a}{\theta}$; 3) $\rho = e^{a\theta}$;

4) $\rho = a \sin 2\theta$ 5) $\rho = a + b\cos\theta$, 6) $\rho = \frac{1}{1+a\cos\theta}$.

10. Bepaal de kromtestraal van de cardoide :
    a) uit de parametrische vergelijkingen $\begin{cases} x = r\cos\varphi\,(1-\cos\varphi) \\ y = r\sin\varphi\,(1-\cos\varphi) \end{cases}$.
    b) door overgang op poolcoördinaten

Par. 6. MEETKUNDIGE TOEPASSINGEN VAN DE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

XVI, 19. Algemene Opmerkingen.

Wordt een kromme gedefinieerd door een meetkundige eigenschap van de raaklijnen, normalen, kromtestralen, enz. in elk van haar punten, dan leidt de analytische vertolking van deze eigenschap meestal tot een differentiaalvergelijking. De hieruit afgeleide integraalvergelijking is dan de vergelijking van alle krommen die de gegeven meetkundige eigenschap bezitten.

Voorbeelden :

1) Bepaal de krommen waarvan de lengte van de normaal 2 is.

De dvgl. van deze kromme is (VI, 2) $|y|\sqrt{1+y'^2} = 2$ of achtereenvolgens :

$$y^2(1+y'^2) = 4 \; ; \quad y' = \frac{\pm\sqrt{4-y^2}}{y} \; ; \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{4-y^2}} = \pm dx$$

De veranderlijken zijn hiermede gescheiden en na integratie komt nu $\sqrt{4-y^2} = \pm(x+C)$ of $(x+C)^2 + y^2 = 4$.

Dit stelt een bundel cirkel omtrekken voor met middelpunt in de x-as en straal 2.

2) Bepaal de orthogonale banen van de parabolen gaande door de oorsprong en waarvan de x-as van symmetrie is.

Onder orthogonale banen van een krommenschaar verstaat men alle krommen die in hun snijpunten met de gegeven krommen, loodrecht staan op deze laatste.

De algemene vergelijking van de gegeven parabolen is $y^2 = 2px$ en de dvgl. van deze bundel is $y' = \frac{y}{2x}$; dit laatste wil zeggen dat in elk punt (x;y) van een dezer parabolen de raaklijn de richtingscoëfficient $\frac{y}{2x}$ heeft.

Derhalve zal de raaklijn van de orthogonale baan die door (x;y) gaat in dit punt de richtingscoëfficient $-\frac{2x}{y}$ hebben, de dvgl. van deze orthogonale banen is derhalve $y' = -\frac{2x}{y}$.

Als integraalkrommen hiervan vindt men gemakkelijk de bundel ellipsen : $y^2 + 2x^2 = C$.

3) Bepaal de krommen waarvoor de lengte van de kromtestraal in elk punt gelijk is aan de lengte van de normaal in dit punt.

De dvgl. van deze krommen is (XVI, 14)

$$|y|\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{|y''|}$$

of aangezien $1 + y'^2 \neq 0$: $|yy''| = 1 + y'^2$;

Deze laatste dvgl . valt uiteen in $yy'' = 1 + y'^2$ en $-yy'' = 1 + y'^2$;

a) Integratie van de dvgl. $yy'' = 1 + y'^2$

Met y' = p te stellen (XV, 15) komt men tot de dvgl. van de 1e orde

$$\frac{2p\,dy}{1+p^2} = \frac{2\,dy}{y} \qquad \text{waaruit} \quad \ln(1+p^2) = 2\ln|y| + 2\ln C \text{ of}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C^2y^2-1}$$

$$\frac{d(Cy)}{\pm\sqrt{(Cy)^2-1}} = C\,dx \longrightarrow \ln\left(Cy \pm \sqrt{(Cy)^2-1}\right) = Cx + C_1$$

De integraalvergelijking wordt nu opgelost naar y

$$Cy \pm \sqrt{(Cy)^2-1} = e^{Cx+C_1} = Ae^{Cx} \qquad (A = e^{C_1} > 0)$$

De vergelijking is achtereenvolgens gelijkwaardig met

$$\pm\sqrt{(Cy)^2-1} = Ae^{Cx} - Cy\,; \quad (Cy)^2 - 1 = A^2e^{2Cx} + (Cy)^2 - 2ACe^{Cx}$$

Dit geeft tenslotte :

$$y = \frac{A^2e^{2Cx}+1}{2ACe^{Cx}} = \frac{A^2e^{Cx}+e^{-Cx}}{2AC}$$

b) Integratie van de dvgl. $-yy'' = 1 + y'^2$

Stelt men opnieuw y' = p dan komt

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} + \frac{2\,dy}{y} = 0 \qquad \text{of} \quad (1+p^2)y^2 = C^2$$

$$p = \frac{\pm\sqrt{C^2-y^2}}{y}\,; \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{C^2-y^2}} = \pm\,dx \longrightarrow \sqrt{C^2-y^2} = \pm(x+C_1)$$

De integraalvergelijking is tenslotte $(x+C_1)^2 + y^2 = C^2$

en stelt alle cirkelomtrekken voor met middelpunt in de x-as.

XVI, 20. Bepaling van de integratieconstanten.

Wij hebben in dit hoofdstuk de integratie van een dvgl. beschouwd van uit het standpunt van de analyse, d.w.z. dat steeds alle integralen van de beschouwde dvgl. werden bepaald.

In de praktijk gebeurt het echter vaak dat men slechts één enkele van deze integralen nodig heeft, die nl. voldoet aan zekere voorwaarden opgelegd aan de functie of haar afgeleiden : deze voorwaarden heten vaak de beginvoorwaarden van het vraagstuk ; zij laten toe de constanten te bepalen.

Het is duidelijk dat het aantal gegeven beginvoorwaarden dient overeen te stemmen met het aantal te bepalen constanten.

In de technische toepassingen van de integraalrekening zal men hiervan talrijke voorbeelden ontmoeten. Wij beperken ons hier tot voorbeelden van meetkundige aard.

Voorbeelden :

1) Bepaal de kromme die door de oorsprong van het assenkruis gaat en waarvan de lengte van de normaal in elk punt gelijk is aan 2.

De vergelijking van de bundel krommen met normaallengte 2 is (XVI, 19)

$$(x+C)^2 + y^2 = 4$$

Opdat deze kromme door de oorsprong zou gaan moet aan de vgl. voldaan zijn voor x = y = 0, waaruit $C^2 = 4$ of $C = \pm 2$.

Twee krommen voldoen aan de gegeven voorwaarden nl. de cirkelomtrekken met vergelijking : $x^2 + y^2 = \pm 2x$.

2) Bepaal de kromme die aan de volgende voorwaarden voldoet :

a) In elk van haar punten is de kromtestraal gelijk aan de normaal ;
b) De kromme gaat door het punt P (0; 1)
c) De raaklijn in P is evenwijdig met de x-as.

Er zijn twee krommenscharen die aan a) voldoen (XVI, 19)

$$y = \frac{A^2 e^{2Cx} + e^{-2Cx}}{2AC} \quad \text{en} \quad (x+C_1)^2 + y^2 = C^2,$$

waarvoor respectievelijk : $y' = \frac{A^2 e^{2Cx} - e^{-2Cx}}{2A}$ en $(x+C_1) + yy' = 0$

Voor x = 0 moet hierin nu y = 1 en $y' = 0$
Dit geeft in de eerste schaar A = C = 1 (A > 0) en in de tweede $C_1 = 0$, $C^2 = 1$.

Twee krommen voldoen dus aan de gestelde voorwaarden :

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

OPGAVEN :

1. Bepaal alle krommen met constante subnormaal.

2. Bepaal alle krommen met constante subraaklijn.

3. Bepaal de kromme gaande door het punt (0;1) en waarvoor de lengte van de raaklijn 1 is.

4. Toon aan dat elk kromme waarvan alle normalen door een vast punt gaan een cirkelomtrek is.

5. De raaklijn in een punt van een kromme snijdt de x-as in een punt P en de normaal in hetzelfde punt snijdt de y-as in een puntQ. Bepaal de poolvergelijking van alle krommen die in elk van hun punten de eigenschap hebben dat de abscis van P gelijk is aan de ordinaat van Q.

6. Bepaal de kromme gaande door het punt (0;3) en waarvan de lengte van de raaklijn in elk punt gelijk is aan de absolute waarde van de abscis van het punt waar deze raaklijn de x-as snijdt.

7. Bepaal de krommen waarvan de afstand van de oorsprong tot een willekeurige raaklijn gelijk is aan de absolute waarde van de abscis van het raakpunt.

8. Bepaal de krommen waarvoor de oppervlakte begrepen tussen die kromme, een vaste ordinaat, de x-as en een veranderlijke ordinaat evenredig is met de lengte van de boog die deze oppervlakte begrenst.

9. Bepaal de krommen waarvoor de lengte van de boog van een vast punt tot een veranderlijk punt P evenredig zij met vierkantswortel van de abscis van P.

10. Bepaal de kromme door het punt (0;1) en die de volgende eigenschap bezit : wanneer men een willekeurig punt P van deze kromme projecteert op de x-as, dan is de afstand van deze projectie tot de raaklijn in P gelijk aan 1.

11. Bepaal de orthogonale banen van de volgende krommenbundels :
    a) de rechten door de oorsprong ;
    b) de orthogonale hyperbolen waarvan de coördinaatassen de asymptoten zijn ;
    c) de cirkelomtrekken die de x-as in de oorsprong raken ;
    d) de parabolen met brandpunt in de oorsprong en waarvan de x-as de symmetrie -as is.

11. Bepaal de krommen door het punt $(1;2)$ en waarvoor de subtangens in elk punt evenredig is met het kwadraat van de abscis van dit punt.

12. Bepaal alle krommen die de volgende eigenschap bezitten : Trekt men door een punt van de kromme de evenwijdige met de y-as, dan is de oppervlakte van het trapezium begrensd door deze evenwijdige, de coördinaatassen en de raaklijn in het beschouwde punt gelijk aan de oppervlakte-eenheid.

13. Bepaal alle krommen met constante kromtestraal.

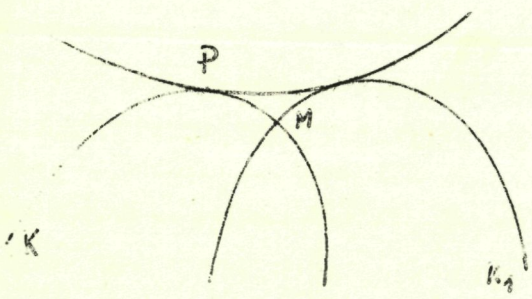
14. Bepaal alle krommen waarvoor de lengte van de kromtestraal in elk punt gelijk is aan het dubbel van de lengte van de normaal in dit punt.

15. Bepaal alle krommen waarvoor de lengte van de kromtestraal in elk punt gelijk is aan het kwadraat van de lengte van de normaal in dit punt.

Par. 7. OMHULLENDEN EN ONTWONDENEN.

XVI, 21. De omhullende van een krommenschaar.

Zij $F(x, y, \eta) = 0 \quad (1)$ de vergelijking van een schaar krommen afhankelijk van een parameter η ; wij onderstellen dat de functie F partieel afleidbaar is naar η



Geven wij nu in (1) aan de parameter twee waarden η en $\eta + \Delta\eta$ dan beantwoorden hieraan twee krommen K en K_1 van de schaar. Zij M een gemeen punt van deze twee krommen.

Laten wij nu $\Delta\eta$ onbeperkt naderen tot nul dan zal het punt M op de kromme K meestal naar een limietstand P convergeren ; P heet een karakteristiek punt van de schaar op de kromme K. De meetkundige plaats van de karakteristieke punten van de schaar heet de omhullende van de schaar.

XVI,11 De vergelijking van de omhullende.

De coördinaten van M zijn de oplossingen van het stelsel

$$F(x, y, \eta) = 0 \quad (1) \quad \text{en} \quad F(x, y, \eta + \Delta\eta) = 0 \quad (2)$$

Dit stelsel is echter gelijkwaardig met het stelsel

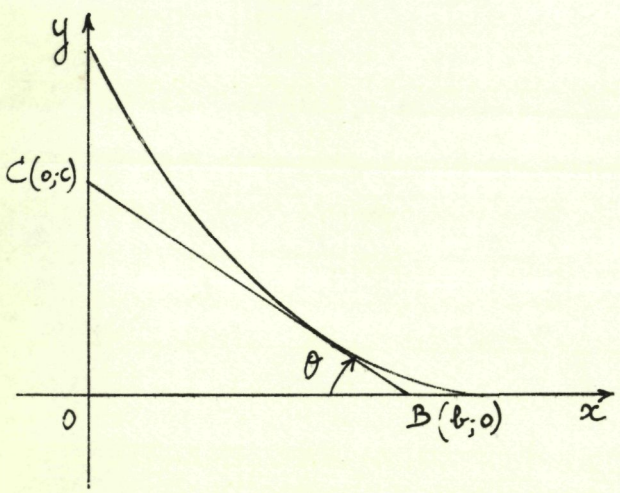
$$\begin{cases} F(x, y, \eta) = 0 & (1) \\ \dfrac{F(x, y, \eta + \Delta\eta) - F(x, y, \eta)}{\Delta\eta} = 0 & (3) \end{cases}$$

Laten wij nu $\Delta\eta$ naar nul convergeren dan blijft (1) ongewijzigd, maar het eerste lid van (3) convergeert naar de partiële afgeleide van de functie F naar η. De coordinaten van de karakteristiek punten zijn dus de oplossingen van het stelsel.

$$F(x, y, \eta) = 0 \quad (1) \qquad F'_\eta(x, y, \eta) = 0 \quad (4)$$

(1) en (4) geven dus voor veranderlijke η een parametervoorstelling van de omhullende van de krommenschaar.

Voorbeeld : Bepaal de omhullende van de rechten waarop de assen een lijnstuk met vaste lengte a afsnijden.



De vergelijking van een dergelijke rechte is

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1 \qquad \text{met} \quad b^2 + c^2 = a^2$$

Stellen wij $b = a\cos\theta$ en $c = a\sin\theta$

dan is de vergelijking van de schaar uitgedrukt in de parameter θ

$$\frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{a\sin\theta} = 1 \quad \text{of}$$

$$x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta.$$

De parametrische vergelijkingen van de omhullende zijn dus

$$\begin{cases} x \sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta \\ x\cos\theta - y\sin\theta = a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}$$

Laten wij dit laatste stelsel op naar x en y, dan komt

$$x = a\cos^3\theta,\quad y = a\sin^3\theta \quad \text{of} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

De omhullende is derhalve een gewone astroïde.

Opmerkingen :

1) Niet alle krommenscharen afhankelijk van één parameter bezitten een eigenlijke omhullende ; het kan gebeuren dat deze omhullende geen enkel of slechts een eindig aantal reële punten bevat.

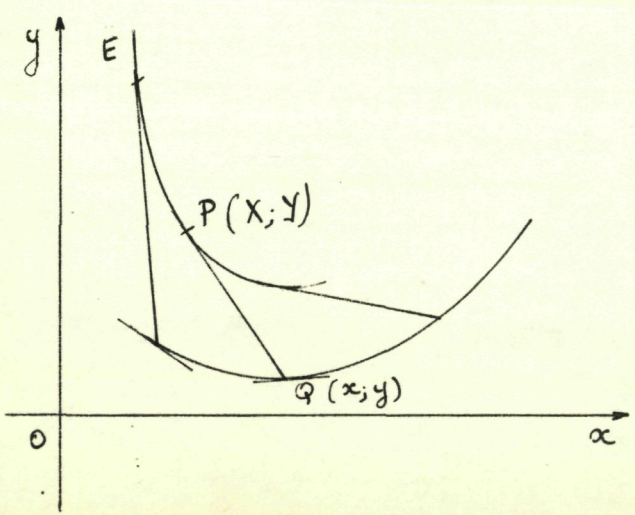
Aldus zal de omhullende van de schaar cirkelomtrekken $x^2 + y^2 = 2Rx$ (XV, 2) herleid zijn tot het punt $x = y = 0$; men kan dit t.a. gemakkelijk ook meetkundig inzien.

2) De omhullende van de integralen van een dvgl. van Clairaut (XV, 11) is klaarblijkend de singuliere integraal van deze dvgl.

3) Als de karakteristieke punten van de krommen van een schaar geen singuliere punten zijn, dan heeft elke kromme van de schaar in haar karakteristieke punten dezelfde raaklijn als de omhullende van de schaar. Deze eigenschap is intuïtief duidelijk, zodat wij van het bewijs afzien.

XVI, 23. De ontwondene van een kromme.

De ontwonde of evolute van een kromme K is de omhullende van de normalen van K ; omgekeerd heet K dan de evolvente of ontwindende van zijn evolute (E)



Zij $y = f(x)$ de vergelijking van de gegeven kromme, dan is de vergelijking van de normaal in een punt $Q(x;y)$ (VI, 2)

$$(Y - y)y' + (X - x) = 0 \qquad (1)$$

Wij kunnen (1) beschouwen als de vergelijking van de schaar normalen van de gegeven kromme, waarbij x als parameter beschouwd wordt.

Afleiding van (1) naar x geeft

$$(Y-y)y'' - y'^2 - 1 = 0 \qquad (2)$$

De coördinaten van het karakteristiek punt op de normaal in P zijn de oplossingen van X en Y uit het stelsel gevormd door (1) en (2)

Dit geeft :

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad ; \quad X = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} .$$

Krachtens de formule van XVI, 14 zijn dit echter de coördinaten van het krommingsmiddelpunt dat bij Q behoort.

De evolute van een kromme is dus de meetkundige plaats van de krommingsmiddelpunten van die kromme.

Men kan dus de evolute van een kromme bepalen als omhullende van haar normalen of als meetkundige plaats van haar krommingsmiddelpunten.

<u>Voorbeeld</u> : Bepaal de evolute van de parabool $y^2 = 2px$

De vergelijking van de normaal in een punt (x, y) is

$$(Y-y)\,p + y\,(X-x) = 0 \qquad (1)$$

Leiden wij dit af naar de parameter x dan komt

$$-py' + y'(X-x) - y = 0 \qquad (2)$$

Aangezien $y' = \frac{p}{y}$ en $y^2 = 2px$ kan (2) geschreven worden.

$$-\frac{p^2}{y} + \frac{p}{y}(X-x) - y = 0$$

$$-p^2 + p(X-x) - 2px = 0$$

$$x = \frac{X-p}{3} \qquad (3)$$

Brengen wij deze waarden van x in (1) dan vinden wij

$$y = \frac{3pY}{2(p-X)} \qquad (4)$$

(3) en (4) gebracht in de betrekking $y^2 = 2px$ geeft de vergelijking van de evolute

$$\frac{9p^2y^2}{4(p-X)^2} = 2p\,\frac{X-p}{3} \quad \text{of} \quad 27py^2 = 8(X-p)^3 \qquad (5)$$

De evolute kan ook bepaald worden als meetkundige plaats van de krommingsmiddelpunten. In XVI, 18 vonden wij immers reeds voor de lopende coördinaten van een krommingsmiddelpunt $X = 3x + p$, $Y = -\frac{2xy}{p}$

Elimineert men hieruit x en y, rekening houdend met $y^2 = 2px$, dan vindt men (5) terug.

De evolute is een semi-cubische parabool met de x-as als as van symmetrie en waarvan het keerpunt in het punt (p;0) ligt.

XVI, 24. Eigenschap van de evolute en de evolvente.

Zij R de kromtestraal van een punt van de evolvente, dan is

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \text{(XVI, 17)}$$

De coördinaten van een punt van de evolute (XVI, 33) kunnen dan geschreven worden (met x als parameter)

$$Y = y + \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ; \quad X = x - \frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Wij stellen ons nu voor de lengte van een stuk van de evolute te bepalen ; hiervoor berekenen wij de afgeleiden van X en Y naar x.

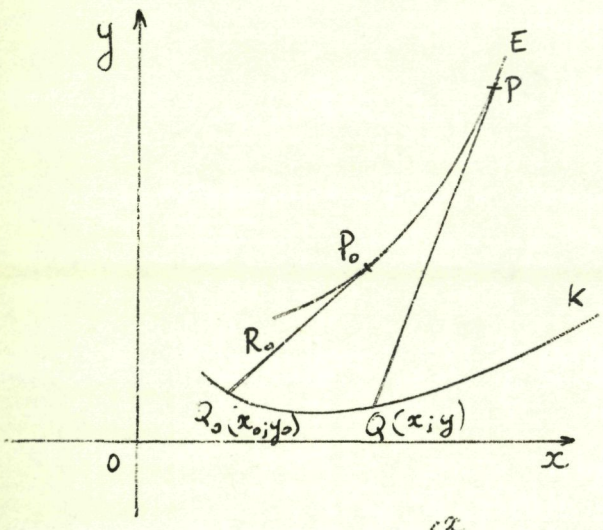
$$Y' = y' + \frac{\sqrt{1+y'^2}\,R' - \frac{Ry'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}$$

$$= y' + \frac{R'}{\sqrt{1+y'^2}} - Ry'\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$X' = 1 - \frac{\sqrt{1+y'^2}\,(Ry'' + y'R') - Ry'\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}$$

$$= 1 - \frac{R y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y' R'}{\sqrt{1+y'^2}} + R y' \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 1 - (1+y'^2) - \frac{y' R'}{\sqrt{1+y'^2}} + y'^2 = - \frac{y' R'}{\sqrt{1+y'^2}}$$



De lengte van de boog P_0P van de evolute, tussen het vast punt P en het veranderlijk punt P is dan : (XVI, 7)

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dx = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{R'^2 + y'^2 R'^2}{1+y'^2}}\, dx$$

$$s = \int_{x_0}^{x} |R'|\, dx = \int_{R_0}^{R} |dR| = |R| - |R_0|$$

De lengte van een rectificeerbare boog van de evolute is dus gelijk aan het verschil van de absolute kromtestralen van de overeenkomstige punten van de evolvente.

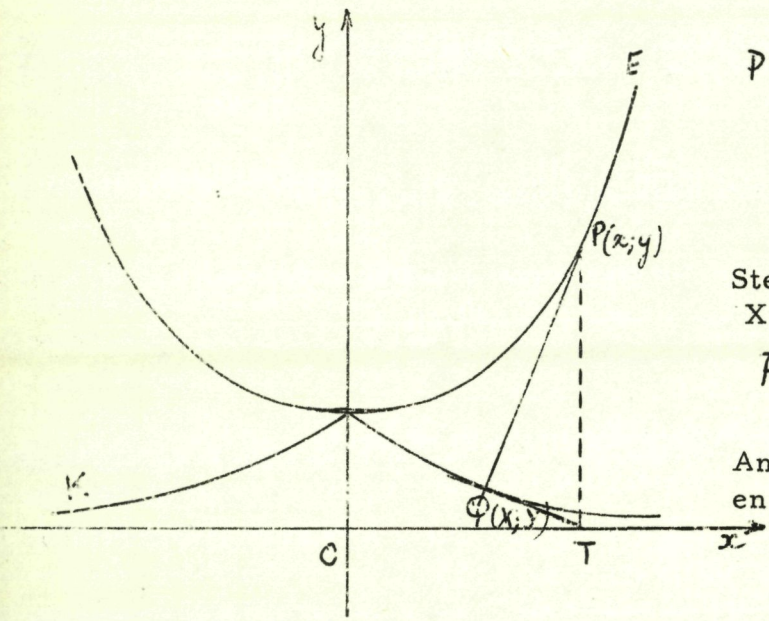
Deze eigenschap kan intuïtief door een eenvoudig beeld worden weergegeven. Stellen wij ons voor dat een draad op de evolute gelegd wordt en in een punt vastgemaakt ; wikkelen wij nu die draad op of af, doch steeds gespannen blijvend dan beschrijft elk van zijn punten een evolvente. Aan deze eigenschap ontlenen de evoluten (ontwondenen) en evolventen (ontwindenden) hun naam.

XVI, 25. Het bepalen van een evolvente.

Uit de eigenschap van XVI, 24 blijkt dat een kromme meestal een onbeperkt aantal evolventen bezit ; de bepaling van alle evolventen van een kromme is een ingewikkeld vraagstuk en leidt meestal tot een niet-oplosbare differentiaalvergelijking.

Praktisch heeft men meestal slechts één evolvente nodig en die kan eventueel bepaald worden uit de eigenschap van XVI, 24 door specialisatie van R_0. Aldus werd in de Analytische meetkunde reeds de vergelijking van de cirkelevolvente opgesteld. Wij geven nu nog een ander voorbeeld.

Voorbeeld : Bepaal de evolvente van de kettinglijn $y = a\,ch\frac{x}{a}$, die door de top van die kettinglijn gaat.



Dan is op bijgaande figuur

$$PQ = bg\,P_0P = \int_0^x \sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}}\,dx$$

$$= a\int_0^x ch\frac{x}{a}\,d\frac{x}{a} = a\,sh\frac{x}{a}$$

Stellen wij de coördinaten van Q door X en Y voor, dan is

$$PQ^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 = a^2 sh^2\frac{x}{a} \quad (1)$$

Anderzijds ligt Q op de raaklijn in P en daar $y' = sh\frac{x}{a}$ is :

$$(Y-y) = sh\frac{x}{a}(X-x) \quad (2)$$

Lossen wij het stelsel gevormd door (1) en (2) op naar X en Y, dan komt

$$X = x - a\,th\frac{x}{a} \qquad Y = \frac{a}{ch\frac{x}{a}}$$

Dit zijn de parametervergelijkingen van de evolvente.

Deze kromme bezit een zeer merkwaardige eigenschap; berekenen wij immers de lengte van de raaklijn in elk punt, dan geeft dit :

$$DY = -\frac{sh\frac{x}{a}}{ch^2\frac{x}{a}} \quad \text{en} \quad DX = 1 - \frac{1}{ch^2\frac{x}{a}} = th^2\frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{DY}{DX} = -\frac{1}{sh\frac{x}{a}}$$

$$l = \left|\frac{Y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = \left|\frac{a}{ch\frac{x}{a}}\left(-sh\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\frac{1}{sh^2\frac{x}{a}}}\right| = a$$

De lengte van de raaklijn in elk punt is dus constant. Mechanisch kan de kromme dus geïnterpreteerd worden als de baan beschreven door het eindpunt van een staaf waarvan het andere eindpunt langs een rechte wordt voortgetrokken. De beschouwde kromme heet daarom een tractrix of treklijn.

OPGAVEN.

1. Bepaal de omhullende van de rechten die op de coördinaatassen twee stukken afsnijden waarvan het produkt constant is.

2. Bepaal de omhullende van de cirkelomtrekken die door de oorsprong gaan en waarvan het middelpunt gelegen is in de parabool $y^2 = 4x$.

3. Bepaal de omhullende van de confocale ellipsen (ellipsen met dezelfde brandpunten)

4. a) Bepaal de omhullende van de rechten die op de coördinaatassen twee stukken afsnijden waarvan de som constant is ;
   b) Bepaal de singuliere integraal van de dvgl. van deze rechten en toon aan dat beide resultaten overeenstemmen.

5. Bepaal de omhullende van de parabolen parametrisch gedefinieerd door $x = v t \cos\theta$, $y = vt \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$

(Dit zijn de banen in het vacuum beschreven door een projectiel dat uit een vast punt met een snelheid v wordt afgeschoten onder een veranderlijke hoek θ met de horizontale)

6. Bepaal de evolute van de kegelsneden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7. Toon aan dat de evolute van een gewone cycloïde een congruente cycloïde is.

8. Bepaal de evolute van de kromme met parametrische vergelijkingen
   $x = a (\cos t + t \sin t)$
   $y = a (\sin t - t \cos t)$
   Was het resultaat op voorhand te bepalen ?

9. Toon aan dat de evolute van de logaritmische spiraal $\rho = e^{a\theta}$ een congruente logaritmische spiraal is.

HOOFDSTUK XVII.

DUBBELINTEGRALEN EN LIJNINTEGRALEN.

Par.1. DUBBELINTEGRALEN.

XVII, 1. Voorafgaande opmerking.

Evenals wij VIII, 15 tot het begrip " bepaalde integraal " zijn gekomen uitgaande van de oppervlakte van een kromlijnig trapezium, zullen wij thans het begrip " dubbelintegraal " stichten door uit te gaan van de inhoud van een lichaam ; omgekeerd zullen de dubbelintegralen dan ook aangewend worden om inhouden te bepalen van lichamen die geen omwentelingslichamen zijn.

XVII, 2. Dubbelintegralen over een normaalgebied t.o.v. de x-as.

In het x0y vlak van een driedimensionaal assenstelsel beschouwen wij een normaalgebied G t.o.v. de x-as, (XVI, 4) begrensd door de rechten x = a en x = b en de krommen $y = y_1(x)$ en $y = y_2(x)$ met $y_2(x) \geq y_1(x)$: dit normaalgebied draagt de naam van integratiegebied.

Wij beschouwen nu de functie $z = f(x,y)$ die wij continu onderstellen in het afgesloten integratiegebied; verder nemen wij voorlopig aan dat deze functie in genoemd gebied geen negatieve waarden aanneemt ; tenslotte onderstellen wij $a < b$.

Wij brengen verder door de rechten x = a en x = b vlakken evenwijdig met de z-as ; door de krommen $y = y_1(x)$ en $y = y_2(x)$ brengen wij oppervlakken evenwijdig met de z-as ; deze vier oppervlakken bepalen met het x 0y - vlak en het beeldvlak van de functie $z = f(x,y)$ een lichaam waarvan wij de inhoud door I voorstellen.

Het interval $[a ; b]$ wordt nu verdeeld in n gelijke of ongelijke deelintervallen met respectieve lengte $\Delta x_1 , \Delta x_2 , \ldots \Delta x_i \ldots \Delta x_n$.

In elk van deze deelintervallen beschouwen wij een totaal willekeurig punt x_i (*) en snijden het beschouwde lichaam met het vlak $x = x_i$. Deze doorsnede is een kromlijnig trapezium met oppervlakte :

(*) In fig. 2 werd x_i gekozen in een eindpunt van een van de deelintervallen.

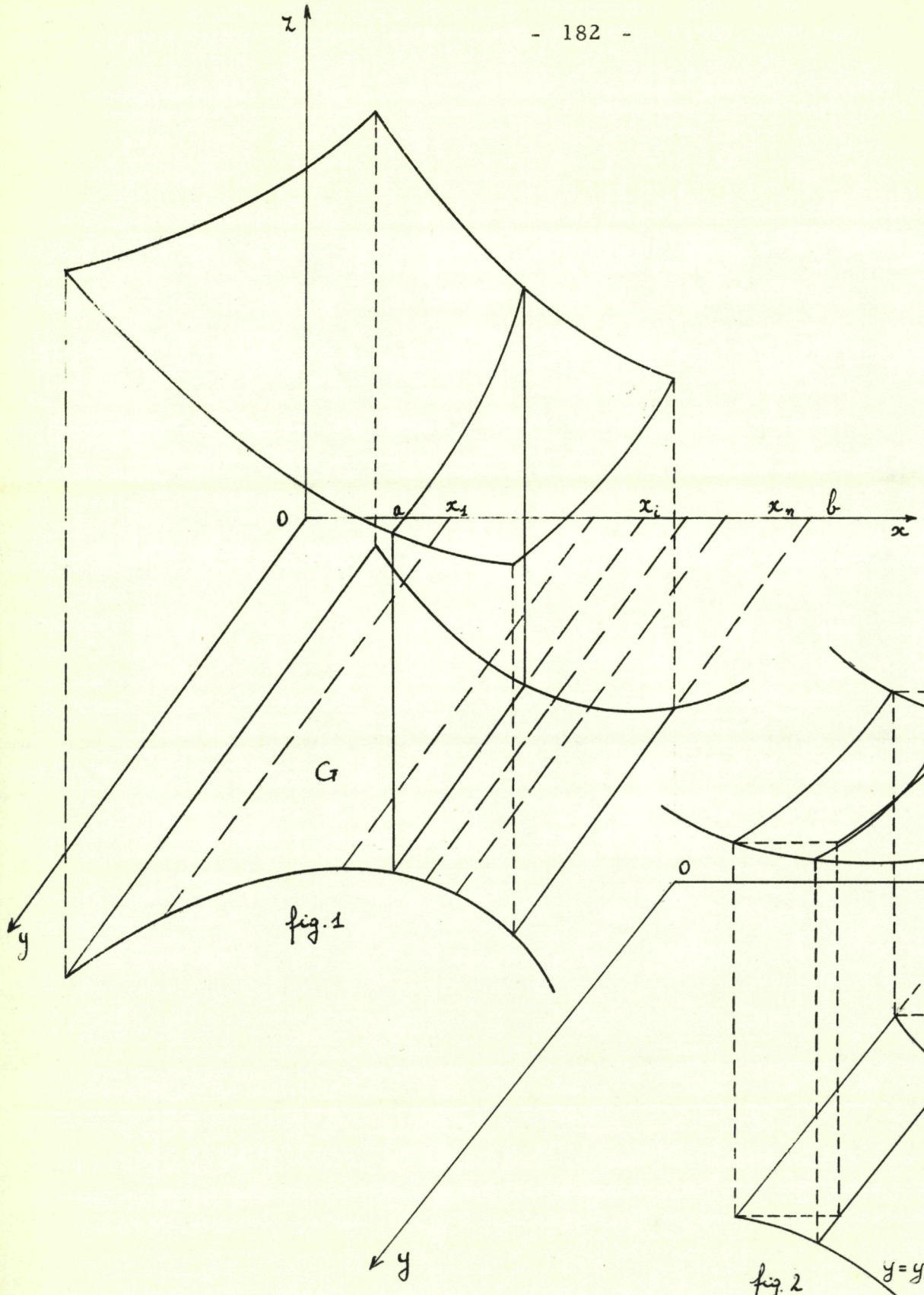


fig. 1

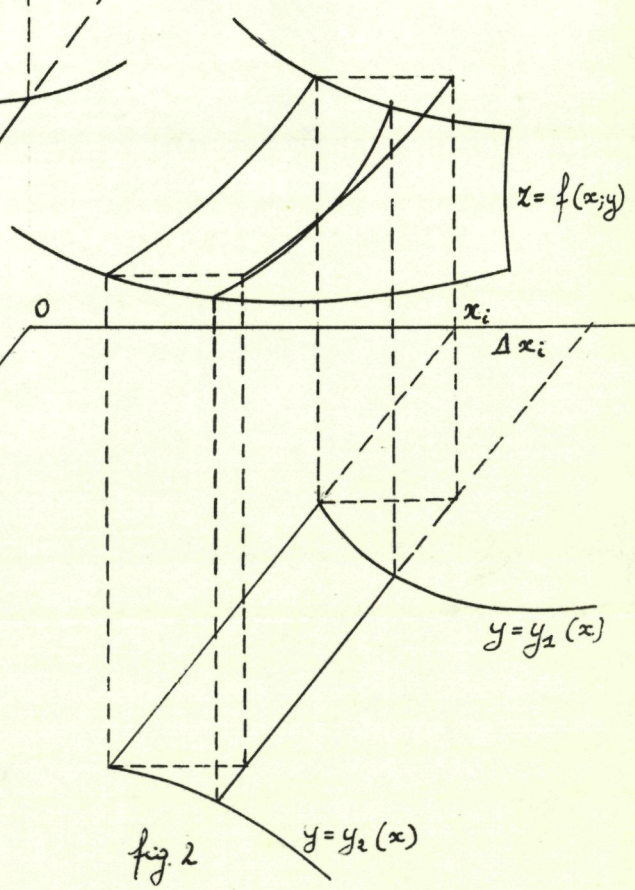


fig. 2

$$\int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y_i)\, dy$$

Deze oppervlakte is vanzelfsprekend een functie van x_i zodat we stellen

$$\int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y_i)\, dy = F(x_i)$$

Er kan bewezen worden dat deze functie continu is, doch wij zullen dit ter vereenvoudiging zonder bewijs aannemen ; op genoemd kromlijnig trapezium als grondvlak construeren wij nu een prismatisch lichaam met hoogte Δx_i ; is β_i de inhoud van dit lichaam, dan is $\beta_i = F(x_i)\, \Delta x_i$.

De som van de inhouden van al deze prismatische lichamen is dan

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\, \Delta x_i$$

Zij nu γ_i de inhoud van het lichaam dat ontstaat door in de eindpunten van het deelinterval Δx_i vlakken loodrecht op de x-as aan te brengen. Door woordelijke herhaling van de redenering uit VIII, 15 kan men nu bewijzen dat β_i en γ_i asymptotisch gelijk oneindig kleinen zijn, wanneer het aantal deelintervallen onbeperkt aangroeit, terwijl de lengte van elk van deze deelintervallen naar nul convergeert.

Uit VIII, 7 volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\, \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = I.$$

Derhalve is

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\, \Delta x_i = \int_a^b F(x)\, dx \qquad (\text{VIII}, 15)$$

Nu is echter eveneens :

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$$

Vervangen wij F(x) door deze integraal en schrijven daarbij y_1 en y_2 voor $y_1(x)$ en $y_2(x)$ dan verkrijgen wij de dubbelintegraal :

$$I = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy\, dx = \iint_G f(x,y)\, dy\, dx$$

Teneinde alle misverstanden te vermijden schrijft men dit meestal

$$\boxed{I = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy}$$

$\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$ is de zogenaamde binnenintegraal van de dubbelintegraal ; zij moet berekend worden bij constante x tussen de grenzen y_1 en y_2 die functies zijn van x.

XVII, 3. Dubbelintegraal over een normaalgebied t.o.v. de y-as

Wij beschouwen nu een normaalgebied G begrensd door de rechten $y = \alpha$ en $y = \beta$ en de krommen $x = x_1(y)$ en $x = x_2(y)$ verder worden al de overeenkomsten van XVII, 2 behouden ; door een volkomen analoge redenering komt men dan tot de inhoudsformule

$$I = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$$

XVII, 4. Dubbelintegraal over een convex gebied.

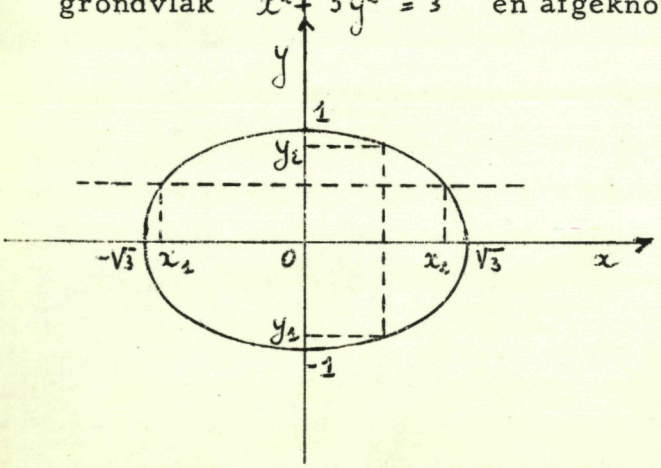
Is het integratiegebied G convex, dan is dit gebied normaal t.o.v. de beide assen, zodat men naar willekeur de formule van XVII, 2 of van XVII, 3 mag gebruiken. Wij hebben in dit geval

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

Men kan in dit geval dus onverschillig eerst naar x of eerst naar y integreren ; men merke echter op dat men in beide gevallen niet integreert tussen dezelfde grenzen.

Is het beschouwde gebied tenslotte geen normaalgebied, dan zal men het zoals in XVI, 4 in normaalgebieden verdelen.

Voorbeeld : Bepaal de inhoud van een afgeknotte elliptische cilinder met grondvlak $x^2 + 3y^2 = 3$ en afgeknot door het vlak $z = x + y + 3$



Wij merken op dat $z > 0$ voor alle waarden van x en y binnen het integratiegebied ; verder is het integratiegebied convex zodat wij naar keus een van de volgende dubbelintegralen mogen berekenen :

$$I_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}} (x+y+3)\,dy \quad \text{of} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{3-3y^2}}^{\sqrt{3-3y^2}} (x+y+3)\,dx$$

Wij vinden inderdaad :

$$I_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \left(xy + \frac{y^2}{2} + 3y\right)\Bigg|_{-\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}} = 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x+3)\sqrt{\frac{3-x^2}{3}}\,dx$$

Stellen wij hierin $x = \sqrt{3}\sin t$ dan komt :

$$I_1 = 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \sqrt{3})\cos^2 t\,dt = 6\left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \sqrt{3}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6\sqrt{3}\,\frac{t}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi\sqrt{3}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} dy \left(\frac{x^2}{2} + xy + 3x\right)\Bigg|_{-\sqrt{3-3y^2}}^{\sqrt{3-3y^2}} = 2\int_{-1}^{1} (y+3)\sqrt{3-3y^2}\,dy$$

Stellen wij hierin $y = \sin t$ dan komt :

$$I_2 = 2\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 3)\cos^2 t\,dt = 2\sqrt{3}\left[-\frac{\cos^3 t}{3} + 3\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3}\,\frac{3t}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi\sqrt{3}$$

<u>Opmerkingen</u> :

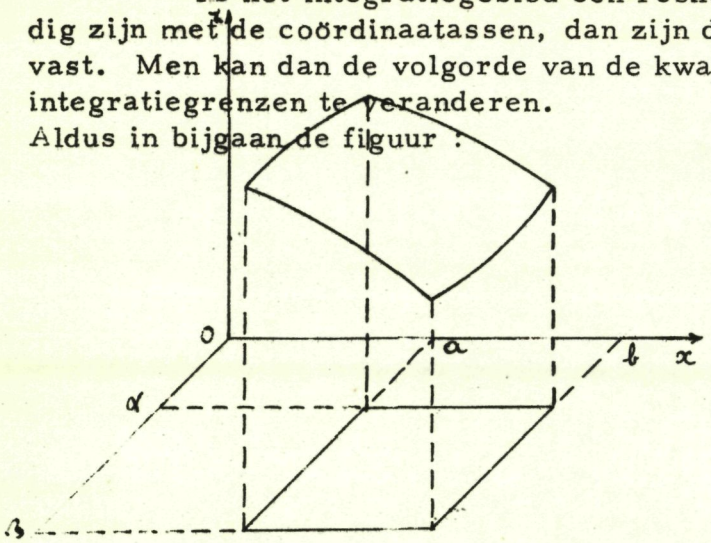
1) Evenals in VIII, 16 zal men gemakkelijk aantonen dat de dubbelintegraal negatief wordt indien $z = f(x,y) < 0$ d.w.z. indien het beeldoppervlak van deze functie onder het xOy vlak verloopt.

2) Voor dubbelintegralen schrijft men ook : $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ of $\int_G f(x,y)\,dG$,

waarin G het normaalgebied voorstelt waarover men integreert.

XVII, 5. Integratie tussen vaste grenzen.

Is het integratiegebied een rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de coördinaatassen, dan zijn de grenzen van beide integraties vast. Men kan dan de volgorde van de kwadraturen omwisselen zonder de integratiegrenzen te veranderen.
Aldus in bijgaan de figuur :



$$I = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Bijzonder geval : Indien bij integratie tussen vaste grenzen de functie het produkt is van een functie van x alleen met een functie van y alleen, dan valt de dubbelintegraal uiteen in een produkt van twee enkelvoudige integralen.

Is immers $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ dan heeft men

$$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta \varphi(x)\psi(y)\,dy = \int_a^b dx\,\varphi(x) \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta \psi(y)\,dy \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

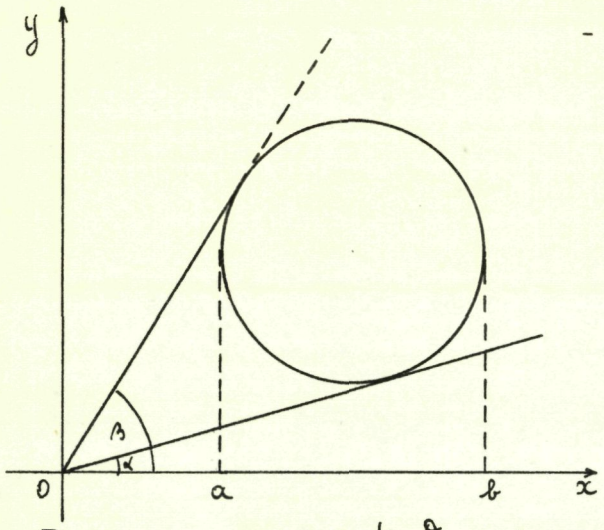
Voorbeeld :
$$\int_\alpha^\beta \int_a^b xy\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta y\,dy \cdot \int_a^b x\,dx = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(b^2-a^2)}{4}$$

XVII, 6. Overgang op poolcoördinaten.

Wij onderstellen een convex integratiegebied en berekenen de dubbelintegraal
$$I = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$$
door het integratiegebied in poolcoördinaten te definiëren met de overgangsformules $x = \rho \cos\theta$, (1) en $y = \rho \sin\theta$ (2)

$B = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$. Wij beschouwen eerst de binnenintegraal

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE



Aangezien deze integraal moet berekend worden bij constante x komt door het differentiëren van (1) en (2)

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta &= 0 \\ \sin\theta\, d\rho + \rho \cos\theta\, d\theta &= dy \end{aligned}\right\}$$

waaruit $dy = \rho \dfrac{d\theta}{\cos\theta}$

Daar nu $y = x \operatorname{tg}\theta$ is $f(x,y) = F(x,\theta)$ zodat

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{F(x,\theta)\rho}{\cos\theta}\, d\theta$$

waarin θ_1 en θ_2 berekend worden uit $y_1 = x \operatorname{tg}\theta_1$ en $y_2 = x \operatorname{tg}\theta_2$

Daarmede wordt nu

$$I = \int_a^b dx \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{F(x,\theta)\rho}{\cos\theta}\, d\theta$$

Aangezien wij integreren over een convex gebied mag de volgorde van de kwadraturen worden gewijzigd mits de grenzen aan te passen. (XVII, 4)

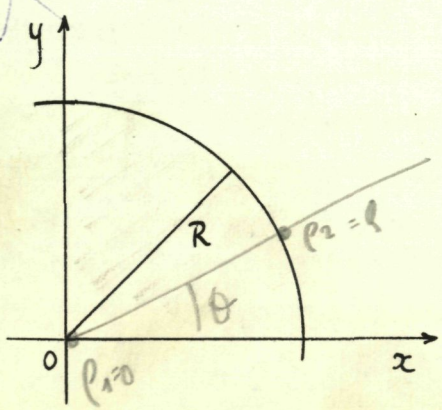
$$I = \int_a^b dx \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{F(x,\theta)}{\cos\theta}\, \rho\, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{x_1}^{x_2} \frac{F(x,\theta)}{\cos\theta}\, \rho\, dx$$

De nieuwe binnenintegraal is nu te nemen bij constante θ.

Aangezien $x = \rho\cos\theta$ is nu hier $dx = \cos\theta\, d\rho$ en $F(x,\theta) = \varphi(\rho,\theta)$

$$I = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \frac{\varphi(\rho,\theta)\cos\theta}{\cos\theta}\, d\rho = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, \varphi(\rho,\theta)\, d\rho .$$

Voorbeeld : Integreer de functie $y = e^{-(x^2+y^2)}$ over een kwart-cirkel met middelpunt 0 en straal R.



Men heeft $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2}$ zodat

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho =$$

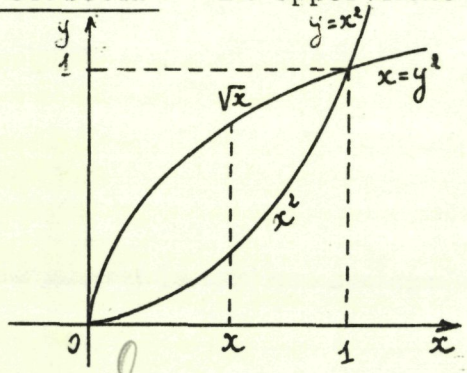
$$\vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-R^2}\right)$$

XVII, 7. Oppervlakte uitgedrukt door een dubbelintegraal.

Indien men de functie z = 1 integreert over een gebied G, dan is het maatgetal van de inhoud van het cilindervlak met grondvlak G en de hoogte 1 tevens het maatgetal van de oppervlakte van G. Derhalve bv. voor een convex gebied.

$$\boxed{S_G = \iint_G dx\, dy}$$

Voorbeeld : De oppervlakte van het gebied begrensd door de parabolen



$$y = x^2 \quad \text{en} \quad x = y^2$$

wordt uitgedrukt door de dubbelintegraal.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx =$$

$$\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

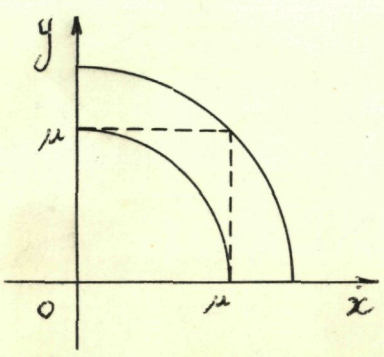
XVII, 8. Oppervlakte van de kromme van Gauss.

De oppervlakte begrepen tussen de klokkromme van Gauss (VII, 21) en haar asymptoot wordt gegeven door de oneigenlijke integraal

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{\mu \to +\infty} \int_0^{\mu} e^{-x^2} dx$$

onder voorwaarde dat deze laatste limiet eigenlijk is (IX, 9).

Het is niet mogelijk de algemene primitieve van e^{-x^2} met behulp van bekende functies uit te drukken, zodat $\int_0^{\mu} e^{-x^2} dx$ niet kan berekend worden met de formule van IX, 9.



Wij zullen dan ook een andere weg inslaan; wij integreren de functie $e^{-(x^2+y^2)}$ over een vierkant met zijde μ en waarvan twee zijden langs de coordinaatassen vallen ; dit geeft (XVII, 5) :

$$\int_0^\mu dx \int_0^\mu e^{-(x^2+y^2)}\,dy = \int_0^\mu dx \int_0^\mu e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dy = \int_0^\mu e^{-x^2}dx \cdot \int_0^\mu e^{-y^2}dy = \left[\int_0^\mu e^{-x^2}dx\right]^2$$

Integreren wij anderzijds deze functie over kwart-cirkels met middelpunt 0 en respectievelijk stralen μ en $\mu\sqrt{2}$; wegens XVII, 6 geeft dit respectievelijk

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\mu^2}\right) \text{ en } \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\mu^2}\right)$$

; aangezien nu $e^{-(x^2+y^2)} > 0$

volgt hieruit

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\mu^2}\right) < \int_0^\mu dx \int_0^\mu e^{-(x^2+y^2)}\,dy < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\mu^2}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\mu^2}\right) < \left[\int_0^\mu e^{-x^2}dx\right]^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\mu^2}\right)$$

Laten wij nu $\mu \longrightarrow +\infty$ dan is

$$\lim_{\mu\to+\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-\mu^2}\right) = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\mu^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

en derhalve wegens II, 18

$$\lim_{\mu\to+\infty} \left[\int_0^\mu e^{-x^2}dx\right]^2 = \frac{\pi}{4}$$

Tenslotte volgt hieruit :

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^\mu e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

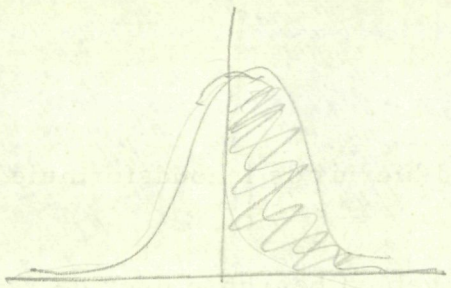
De oppervlakte begrepen tussen de kromme van Gauss en haar asymptoot is dus

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Dit is een van de merkwaardigste resultaten voor de toepassingen van de wiskunde.

OPGAVEN.

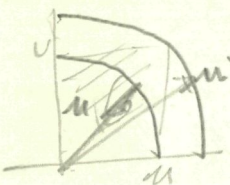
1. Toon aan dat de inhoud van een recht afgeknot prisma met rechthoekig grondvlak , gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak vermenigvuldigd met de afstand van de middelpunten van de grond- en bovenvlak.



$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{u \to +\infty} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^u e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



$$Z = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad \iint_Z dx\,dy = \int_0^u dx \int_0^u e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy =$$

$$= \int_0^u dx \int_0^u \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\text{cost}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_0^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_0^u e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\iint_Q e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\, d\rho =$$

2. Bepaal de inhoud van de ellipsoïde en vind hieruit de inhoudsformule voor de omwentelingsellipsoïde en de bol terug. $\left(I = \frac{4\pi abc}{3}\right)$.

3. Integreer de functie $z = 3x + 2y$ over het gebied begrensd door de rechte $y = x$ en de parabool $y = x^2$. $\left(I = \frac{23}{60}\right)$

4. Integreer de functie $z = xy$ over het gebied begrensd door de parabolen $y = x^2$ en $x = y^2$. $\left(I = \frac{1}{12}\right)$

5. Integreer de functie $z = x^2 + y^2$ over een driehoek begrensd door de x-as en de rechten $y = x$ en $x = 1$. $\left(I = \frac{1}{3}\right)$

6. Integreer de functie $z = 3x^2 + 3y^2 + 1$ over de driehoek begrensd door de coördinaatassen en de rechte $x + y = 1$ (I = 1)

7. Integreer de functie $z = x + y$ over het stuk van de ellips $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gelegen in de eerste assenhoek. $\left[I = \frac{ab(a+b)}{3}\right]$.

8. Bepaal de inhoud van het lichaam begrensd door de vlakken $z = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = 2x - 1$ en het oppervlak $z = xy + 10$. $\left(I = \frac{161}{24}\right)$

9. Het cilindervlak $x^2 + y^2 - 2x = 0$ wordt gesneden door de vlakken $z = 0$ en $z = x$. Bepaal de inhoud van het aldus ontstane lichaam. $(I = \pi)$

10. Bepaal de inhoud van het lichaam begrensd door de coördinaatvlakken en de cilindervlakken $x^2 + y^2 = 4$ en $z = y^2 + 1$ $(I = 2\pi)$.

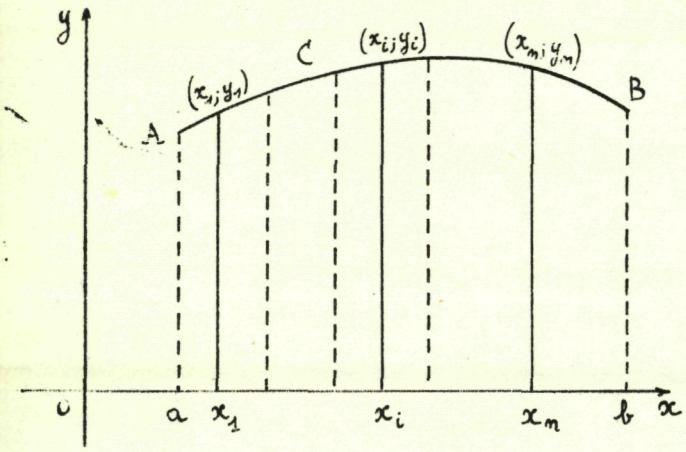
11. Bepaal de inhoud van het lichaam begrensd door de vlakken $y = 0$ en $z = 0$, het bolvlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en het cilindervlak $x^2 + y^2 - 2x = 0$. $\left[I = \frac{4}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\right]$

12. De balk begrensd door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ en $y = 1$ wordt gesneden door de oppervlakken $z = x^2 + y^2$ en $z = xy$. Bepaal de inhoud van het aldus ontstane lichaam. $\left(I = \frac{5}{12}\right)$

13. Een cilindervormig lichaam waarvan het grondvlak de cardioïde $\rho = 1 - \cos\theta$ is wordt gesneden door het kegelvlak $z^2 = x^2 + y^2$. Bepaal de inhoud van het aldus ontstane lichaam. $\left(I = \frac{5\pi}{3}\right)$

Par. 2. LIJNINTEGRALEN.

XVII, 9. Lijnintegralen langs een open kromme.



Zij M (x, y) een functie van twee veranderlijken x en y ; binnen het continuïteitsgebied van deze functie beschouwen wij een stuk A C B van een rectificeerbare kromme zodanig dat elke ordinaat de kromme in slechts één punt snijdt.

Zijn a en b respectievelijk de abscissen van A en B, dan verdelen wij het interval [a, b] in n deelintervallen met respectieve lengte Δx_1, Δx_2, Δx_3 ... Δx_i ... Δx_n.

In elk deelinterval kiezen wij een willekeurig punt x_i en beschouwen het punt $(x_i ; y_i)$ van ACB met abscis x_i ; in dit punt bepalen wij de functiewaarde M $(x_i ; y_i)$. Beschouwen wij nu de som

$$M(x_1;y_1)\Delta x_1 + M(x_2;y_2)\Delta x_2 + \ldots + M(x_i;y_i)\Delta x_i + \ldots + M(x_n;y_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M(x_i,y_i)\Delta x_i$$

Wanneer nu $n \longrightarrow \infty$ zodanig dat de lengte van elk deelinterval naar nul convergeert dan beschouwen wij de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M(x_i,y_i)\Delta x_i$$

en noemen deze de lijnintegraal van M (x, y) genomen langsheen de kromme ACB in de zin van A naar B. Dit wordt genoteerd

$$\int_{ACB} M(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M(x_i,y_i)\Delta x_i$$

De kromme ACB heet de integratieweg.

Men kan gemakkelijk inzien dat bovengenoemde limiet inderdaad gedefinieerd is. Immers is y = f (x) de vergelijking van de kromme, dan is

$y_i = f(x_i)$ en $M(x_i, y_i) = M[x_i, f(x_i)]$, zodat $M(x_i,y_i)$

een functie van x alleen wordt en wegens de gemaakte afspraken is deze functie continu. Derhalve

$$\int_{ACB} M(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M[x_i, f(x_i)]\Delta x_i = \int_a^b M[x, f(x)]\,dx \quad (1)$$

De berekening van een lijnintegraal is derhalve herleid tot deze van een bepaalde integraal.

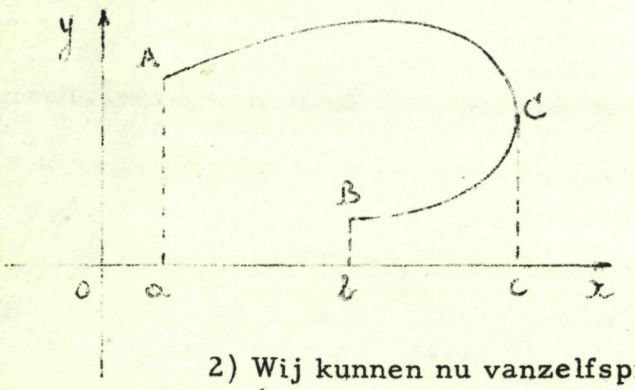
Voorbeeld : Bereken de lijnintegraal van de functie xy langs de kromme $y = x^n$ vanaf het punt A (0, 0) tot het punt B (1, 1)

$$\int_{AB} xy\,dx = \int_0^1 x \cdot x^n\,dx = \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

Men zal opmerken dat de lijnintegralen van dezelfde functie genomen over verschillende integratiewegen tussen dezelfde punten, ook verschillende waarden aannemen.

XVII, 10. Uitbreidingen van het begrip lijnintegraal.

1) Indien de integratieweg niet door een eenwaardige functie kan voorgesteld worden, dan zal men de integratieweg splitsen in stukken waarbij dit wel kan, aldus definieert men in bijgaande figuur.



$$\int_{ACB} M(x,y)\,dx = \int_{AC} M(x,y)\,dx + \int_{CB} M(x,y)\,dx$$

De formule (1) van XVII, 9 geldt dan echter niet meer voor de weg AB, wel voor de wegen AC en CB.

2) Wij kunnen nu vanzelfsprekend ook definiëren :

$$\int_{ACB} N(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} N(x_i, y_i)\,\Delta y_i$$

met mogelijke uitbreiding zoals in 1)

3) De gewichtigste lijnintegralen zijn de sommen van twee lijnintegralen van de gedaante $\int_{ACB} M(x,y)\,dx$ en $\int_{ACB} N(x,y)\,dy$, genomen langs dezelfde integratieweg. Men schrijft hiervoor

$$\int_{ACB} M(x,y)\,dx + \int_{ACB} N(x,y)\,dy = \int_{ACB} M\,dx + N\,dy$$

en men noemt dit de lijnintegraal van de lineaire differentiaalvorm M dx + N dy langs de kromme ACB.

Opmerking : Uit de definitie volgt $\int_{ACB} M\,dx + N\,dy = -\int_{BCA} M\,dx + N\,dy$

Voorbeeld : Integreer de lineaire differentiaalvorm $y^2\,dx - xy\,dy$ over de kwart-ellips uit de eerste assenhoek $x^2 + 4y^2 = 4$, van het punt A(0;1) tot het punt B (2;0)

$$\int_{AB} y^2dx - xy\,dy = \int_0^2 y^2dx - \int_1^0 xy\,dy = \int_0^2 \frac{4-x^2}{4}dx + \int_0^1 y\sqrt{4-4y^2}\,dy =$$

$$\frac{1}{4}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$

Men kan echter beide integralen met behulp van één enkele uitdrukken, door b.v. de tweede te berekenen door een substitutie op x ; aangezien hier $2x\,dx + 8y\,dy = 0$ komt :

$$\int_{AB} y^2dx - xy\,dy = \int_0^2 \frac{4-x^2}{4}dx + \int_0^2 x\cdot\frac{x\,dx}{4} =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 \left(4 - x^2 + x^2\right)dx = \int_0^2 dx = 2$$

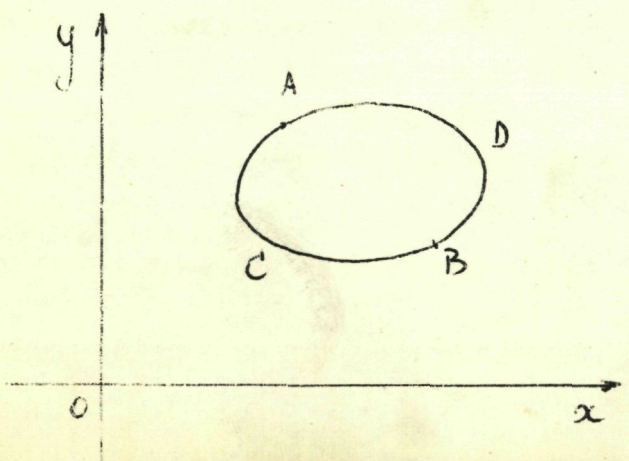
Ook bij parametrische definitie van de integratieweg komt men tot één enkele integraal ; aldus is hier :

$x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $dx = -2\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$ en dus

$$\int_{AB} y^2dx - xy\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2t\,(-2\sin t)\,dt - 2\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\,dt =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3t + \sin t\cos^2t\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

XVII 11. Lijnintegralen langs een gesloten kromme.



Wij beschouwen een gesloten kromme die zichzelf niet snijdt. Zijn A enB twee punten op deze kromme, dan is de lijnintegraal over de gesloten kromme de som van de twee lijnintegralen genomen langs de twee open krommen ACD en BDA. Men kan gemakkelijk aantonen dat deze lijnintegraal onafhankelijk is van de keuze van A en B.

Bond van Leerlingen
Oudleerlingen en Vrienden
STEDELIJK TECHNISCH INSTITUUT
OOSTENDE

Aangezien de traceringszin haar belang heeft voor het teken van de lijnintegraal definieert men als positieve traceringszin de zin waarin een waarnemer de kromme doorloopt, als hij het inwendig gebied aan de linkerhand heeft, de andere is de negatieve traceringszin.

De lijnintegraal over een gesloten kromme in de positieve traceringszin wordt door $+\oint$, in de negatieve traceringszin door $-\oint$ voorgesteld. Aldus op bovenstaande figuur :

$$+\oint = \int_{ACB} + \int_{BDA} \qquad \text{en} \qquad -\oint = \int_{ADB} + \int_{BCA}$$

Voorbeeld : Integreer de differentiaalvorm $x\,dy - y\,dx$ langs de cirkelomtrek $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ in positieve zin.

Wij definiëren de cirkelomtrek parametrisch door de formules

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos t \\ y = 3 + 2\sin t \end{cases}$$

$$+\oint (x\,dy - y\,dx) = \int_0^{2\pi} \left[(2+2\cos t)\,2\cos t + (3+2\sin t)\,2\sin t\right] dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (2\cos t + 3\sin t + 2)\,dt = 8\pi$$

XVII, 12. De stelling van Green (*) - Riemann. (**)

Dit is een stelling die een verband legt tussen de lijnintegralen en de dubbelintegralen.

Zij K de gesloten omtrekskromme van het gebied G en zijn M en N twee functies van x en y die partieel afleidbaar zijn binnen dit gebied ; dan is

$$\iint_G \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = +\oint M\,dx + N\,dy$$

Wij zullen deze stelling alleen bewijzen wanneer G een convex gebied is, doch ze kan uitgebreid worden op elk gebied dat in convexegebieden kan verdeeld worden.

(*) George GREEN : Engels wis- en natuurkundige ; 1793-1841.

(**) Bernhard RIEMANN : Duits wiskundige ; 1826-1866.

Met de notaties van bijgaande figuur heeft men immers

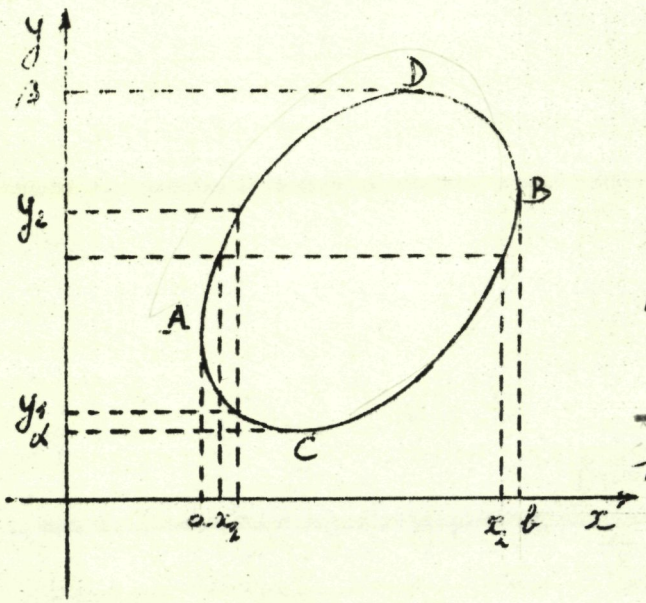
$$-\iint_G \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b -\left[M(x,y_2) + M(x,y_1)\right] dx =$$

$$-\int_a^b M(x,y_2)\,dx + \int_a^b M(x,y_1)\,dx =$$

$$-\int_{ADB} M(x,y)\,dx + \int_{ACB} M(x,y)\,dx \quad (XVII,9) =$$

$$-\int_{ADB} M(x,y)\,dx - \int_{BCA} M(x,y)\,dx = \overset{+}{\oint_K} M(x,y)\,dx$$



Op analoge manier toont men aan dat

$$\iint_G \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \overset{+}{\oint_K} N(x,y)\,dy.$$

Uit deze betrekkingen volgt dan het gestelde.

XVII, 13. Oppervlakte van een gesloten gebied uitgedrukt door een lijnintegraal.

In de formule van Green-Riemann stellen wij M = - y en N = x ,

dan is $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ en $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$

de formule wordt dan

$$\boxed{\iint_G dx\,dy = \frac{1}{2} \overset{+}{\oint} x\,dy - y\,dx}$$

Nu stelt het eerste lid de oppervlakte van het gebied G voor (XVII, 7) ; deze oppervlakte wordt dus ook door het tweede lid uitgedrukt.

Voorbeeld : Bepaal de oppervlakte van een ellips met behulp van een lijnintegraal.

Zij de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die wij parametrisch definiëren door de formules $x = a\cos t$, $y = b \sin t$.

$$S = \frac{1}{2} \oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[a\cos t . b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\right] dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\, t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab$$

XVII, 14. Lijnintegralen die enkel afhangen van de grenzen.

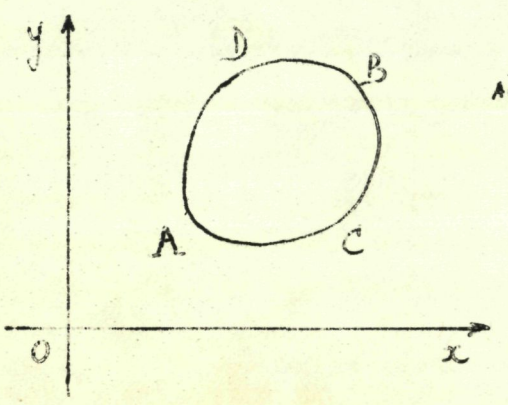
Zoals wij reeds in XVII, 9 hebben opgemerkt zal een lijnintegraal van dezelfde differentiaalvorm over verschillende integratiewegen tussen dezelfde eindpunten, ook verschillende waarden aannemen.

Wij wensen nu de voorwaarde op te zoeken waaronder een dergelijke lijnintegraal enkel afhankelijk is van de eindpunten A en B van de integratieweg en niet van de weg zelf die deze punten verbindt.

Daartoe bewijzen wij de volgende

Stelling : Nodig en voldoende opdat de lijnintegraal $\int_{AB} M\,dx + N\,dy$ onafhankelijk zij van de integratieweg is dat $M\,dx + N\,dy$ een totale differentiaal zij. (XIII, 6)

Om deze stelling te bewijzen zullen wij ze eerst onder een andere vorm brengen . Wij verbinden de punten A en B door twee willekeurige integratiewegen die verlopen binnen een gebied waar de functies M en N partieel afleidbaar zijn. Deze twee integratiewegen bepalen nu een gesloten gebied en men heeft bv. in de figuur



$$\int_{ACB} M\,dx + N\,dy + \int_{BDA} M\,dx + N\,dy = \oint M\,dx + N\,dy$$

Is nu $\int_{ACB} = \int_{ADB}$ dan is

$$\int_{ACB} + \int_{BDA} = \oint = 0 \text{ en omgekeerd}$$

De stelling kan dus als volgt geformuleerd worden :

Nodig en voldoende opdat de lijnintegraal $\oint M\,dx + N\,dy$ genomen over een willekeurige gesloten weg binnen dewelke de functies M en N partieel afleidbaar zijn, gelijk zij aan nul, is dat M dx + N dy een totale differentiaal zijn.

Onder deze vorm is nu de stelling gemakkelijk te bewijzen aan de hand van de formule van Green-Riemann.

$$\iint_G \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \overset{+}{\oint_K} M\,dx + N\,dy \qquad (1)$$

Immers is Mdx + Ndy een totale differentiaal dan is $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ (XV, 4)

De functie $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ is dan identiek nul ; het eerste lid van (1) is derhalve nul en dus ook het tweede.

Omgekeerd is in de gegeven voorwaarde $\overset{+}{\oint} M dx + N dy = 0$ over een willekeurige gesloten weg gelijk aan nul dan is ook het eerste lid van (1) over een willekeurig gebied steeds nul ; dit kan slechts wanneer

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} ;$$

maar dan is Mdx + Ndy een totale differentiaal (XV, 4)

Voorbeeld : Bepaal de lijnintegraal van $y^2dx + 2\,xy\,dy$ tussen de punten A (0;1) en B (1;2) over de volgende integratiewegen :

1) de rechte y = x + 1
2) de parabool $y = x^2 + 1$
3) de hyperbool $y^2 = 3x^2 + 1$

Men vindt achtereenvolgens :

1) $\int_{AB} y^2\,dx + 2\,xy\,dy = \int_0^1 \left[(x+1)^2\,dx + 2x(x+1)\,dx\right] =$
$\int_0^1 (3x^2 + 4x + 1)\,dx = (x^3 + 2x^2 + x)\Big|_0^1 = 4.$

2) $\int_{AB} y^2\,dx + 2\,xy\,dy = \int_0^1 \left[(x^2+1)\,dx + 2x(x^2+1)\,2x\,dx\right]$
$\int_0^1 (5x^4 + 6x^2 + 1)\,dx = (x^5 + 2x^3 + x)\Big|_0^1 = 4.$

3) $\int_{AB} y^2\,dx + 2\,xy\,dy = \int_0^1 \left[(3x^2+1)\,dx + 2x \cdot 3x\,dx\right] =$
$\int_0^1 (9x^2+1)\,dx = (3x^3 + x)\Big|_0^1 = 4.$

De drie lijnintegralen zijn dezelfde ; zulks was te verwachten, want $y^2\,dx + 2\,x\,y\,dy$ is een totale differentiaal .

Aangezien de lijnintegralen van deze totale differentiaal van het punt A tot B dezelfde zijn kon men eenvoudigweg integreren langs de rechte y = 1 (van 0 tot 1) en langs de rechte x = 1 (van 1 tot 2) ; langs de eerste rechte is dy = 0 en langs de tweede is dx = 0 . Er komt

$$\int_{AB} y^2\,dx + 2\,xy\,dy = \int_0^1 dx + \int_1^2 2y\,dy = 1 + 4 - 1 = 4.$$

OPGAVEN :

1. Bepaal de lijnintegraal van $xy^2\,dy - x^2y\,dx$ tussen de punten A (0;0) en B (1;1) over de volgende integratiewegen :
1) y = x ; 2) $y = x^2$; 3) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; 4) $xy = 2x - y$.

2. Bepaal de lijnintegraal van $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{xy}$ tussen de punten A (1;4) en B (2;2) over de volgende integratiewegen :

1) xy = 4 ; 2) y = 6 - 2 x ; 3) $y = 7x - 3x^2$.

Waarom vindt U telkens hetzelfde resultaat ? Welke ware de eenvoudigste methode om deze lijnintegraal tussen de twee gegeven punten te berekenen.

3. Bepaal de lijnintegraal van $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ over de cirkelomtrek : $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Kon het resultaat op voorhand vermoed worden ?
Bereken nu de lijnintegraal van dezelfde differentiaalvorm over de cirkelomtrek $x^2 + y^2 = 1$. Is het resultaat niet strijdig met de stelling van XVII, 14 ?

4. Men geeft de punten A, B, C, door middel van hun cartesische coördinaten ; bepaal de oppervlakte van de driehoek ABC met behulp van een lijnintegraal en vind aldus de bekende formule uit de Analytische Meetkunde terug.

5. Bepaal met een lijnintegraal de oppervlakte van de epicycloïde waarvan de straal van de vaste cirkel het dubbel is van de straal van de rollende cirkel .

==========

HERHALINGSOPGAVEN.

1. a) Integreer de dvgl. $2xyy' + y^2 + 1 = 0$;
   b) Schets de integraalkromme door het punt P (1; 1);
   c) Bepaal de oppervlakte begrepen tussen deze kromme en haar asymptoot ;
   d) Bepaal de inhoud van het omwentelingslichaam ontstaan door het wentelen van deze kromme om haar asymptoot.

2. Men beschouwt de ellips $y^2 + 3x^2 = 3$:
   a) Bepaal de oppervlakte van de grootst mogelijke rechthoek die in deze ellips kan ingeschreven worden ;
   b) Bepaal de oppervlakte en de inhoud van de omwentelingsellipsoïde ontstaan door het wentelen van deze ellips om de x-as.

3. a) Integreer de dvgl. $y' e^{\frac{y}{2}} + 4x = 0$;
   b) Schets de integraalkromme waarvan de kromming in het snijpunt met de y-as gelijk is aan -1 ;
   c) Bepaal de oppervlakte en de omtrek van het gebied begrensd door deze kromme en de x-as.

4. a) Onderzoek het verloop van de functie $y = \sin^2 x$ en schets haar grafiek ;
   b) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrepen tussen de kromme en de x-as binnen één periode-interval ;
   c) Bepaal de inhoud van het omwentelingslichaam ontstaan door het wentelen van dit gebied om de x-as.

5. a) Integreer de dvgl. $2x(x + 3)y' = 3y(x + 2)$;
   b) Schets de grafiek van de integraalkromme door het punt (-2 ; 2) ;
   c) Bepaal de oppervlakte van de lus door deze kromme gevormd ;
   d) Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van deze lus om de x-as.

6. Men beschouwt het gebied begrensd door de parabool $y^2 = 4x$ en de rechte $x = 1$:
   a) Bepaal de oppervlakte en de omtrek van dit gebied ;
   b) Bepaal de oppervlakte en de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van dit gebied om de x-as.

7. a) Integreer de dvgl. $(4 - x^2)\,dy - 2xy\,dx = -2x\,dx$;
   b) Schets de integraalkromme door het punt P (1;0) ;
   c) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrepen tussen deze kromme en de x-as.

8. Men beschouwt de grafiek van de functie $y = \ln x$;
   a) Bepaal de lengte van het stuk van de kromme tussen de abscissen 1 en $\sqrt{3}$;
   b) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrepen tussen de kromme, de x-as en de rechte $x = e$, alsmede de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van dit gebied om de x-as.

9. a) Integreer de dvgl. $(x+1)\ y' + 2y = \dfrac{2x}{x+1}$
   b) Schets de integraalkromme door het punt $(0 ; -4)$;
   c) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door deze kromme en de coördinaatassen.

10. a) Integreer de differentiaalvergelijking $(x^2 + 1)\ y' + 2xy = 4$;
    b) Schets de integraalkromme die door de oorsprong gaat ;
    c) Bepaal de oppervlakte van het normaalgebied begrensd door deze grafiek en de parabool $y = ax^2$ die door het maximum van deze integraalkromme gaat.

11. a) Integreer de dvgl. $x \ln x\ y' - y = 2x^2 \ln^2 x$;
    b) Schets de integraalkromme waarvan de raaklijn in het snijpunt met de x-as de richtingscoëfficiënt 1 heeft ;
    c) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door deze kromme en de x-as ;
    d) Bepaal de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van dit gebied om de x-as.

12. a) Integreer de dvgl. $x\ y' + 3\ (y^2 - y) = 0$;
    b) Schets de integraalkromme waarvan de rechte $x = 2$ een verticale asymptoot is ;
    c) Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door deze kromme, de x-as en de rechte $x + 1 = 0$.

13. a) Integreer de dvgl. $2y = \ln \dfrac{x\ y' + 1}{x\ y' - 1}$;
    b) Schets de integraalkromme door het punt $(1;0)$
    c) Bepaal de oppervlakte en de omtrek van het gebied begrensd door deze kromme, de x-as en de rechte $x = 3$;
    d) Bepaal de oppervlakte en de inhoud van het lichaam ontstaan door het wentelen van dit gebied om de x-as.

INHOUDSTAFEL.

EERSTE DEEL.

Blz.

Ter verantwoording. I

HOOFDSTUK I : Functies . . . . . .
par. 1. Algemeenheden 1
par. 2. Soorten van functies 8

HOOFDSTUK II : Limieten
par. 1. Oneindig voortlopende rijen 13
par. 2. Limieten van functies 19
par. 3. Stellingen inzake limieten 28
par. 4. Limieten van algebraïsche functies 32
par. 5. Limieten van goniometrische functies 39

HOOFDSTUK III : Continuïteit 43

HOOFDSTUK IV : Afgeleiden van expliciete functies van één veranderlijke.
par. 1. Definities 49
par. 2. Algemene regels voor het afleiden 54
par. 3. Afgeleiden van goniometrische functies 59
par. 4. Afgeleiden van hogere orde 60

HOOFDSTUK V : Eigenschappen van afleidbare functies
par. 1. Algemene stellingen 63
par. 2. Eigenlijke waarde van onbepaalde vormen 68

HOOFDSTUK VI : Het verloop van functies
par. 1. Raaklijnen en normalen 73
par. 2. Het stijgen en dalen van functies en het voorkomen van extrema 75
par. 3. De zin van de kromming van een grafiek en het voorkomen van buigpunten 85
par. 4. Asymptoten 91
par. 5. Onderzoek van het verloop van functies 95

HOOFDSTUK VII : Nieuwe transcendente functies
par. 1. Het omkeren van functies 107
par. 2. De cyclometrische functies 110
par. 3. De exponentiële en de logaritmische functies . . 117
par. 4. De hyperbolische functies 133

TWEEDE DEEL.

HOOFDSTUK VIII : Theorie van de oneindig kleinen
par. 1. Algemene eigenschappen 2
par. 2. De differentiaal 7
par. 3. De bepaalde integraal 12

HOOFDSTUK IX . De grondbeginselen van de integraalrekening
par. 1. De onbepaalde integraal 20
par. 2. Het berekenen van bepaalde integralen 25

HOOFDSTUK X : Algemene integratiemethodes
par. 1. Het integreren door splitsing 30
par. 2. Het integreren door substitutie 32
par. 3. Partiële integratie 35

HOOFDSTUK XI : Bijzondere integratiemethodes
par. 1. Het integreren van rationale functies 39
par. 2. Het integreren van irrationale functies 46
par. 3. Het integreren van goniometrische functies 55

HOOFDSTUK XII : De formules van Taylor en Mac-Laurin 63

HOOFDSTUK XIII : Expliciete functies van meer dan één veranderlijke.
par. 1. Algemeenheden 79
par. 2. Afgeleiden en differentialen van de eerste orde . 85
par. 3. Afgeleiden en differentialen van hogere orde . . 93
par. 4. Extrema van een functie van twee veranderlijken 96

HOOFDSTUK XIV : Afgeleiden en differentialen van functies die niet expliciet gedefinieerd zijn
par. 1. Impliciete functies van één veranderlijke 98
par. 2. Impliciete functies van meer dan één veranderlijke 105
par. 3. Parametrische gedefinieerde functies 107
par. 4. Overgang op poolcoördinaten 109
par. 5. Toepassing op de grafische voorstelling van functies 113

HOOFDSTUK XV : Differentiaalvergelijkingen
par. 1. Algemeenheden 127
par. 2. Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde 129
par. 3. Differentiaalvergelijkingen van de tweede orde 141

HOOFDSTUK XVI : Meetkundige toepassingen.
par. 1. Oppervlakte van vlakke figuren 145
par. 2. Inhoud van omwentelingslichamen 151
par. 3. Lengte van krommebogen 153
par. 4. Oppervlakte van omwentelingslichamen 157
par. 5. Aanraking en osculatie van krommen 160
par. 6. Meetkundige toepassingen van de differentiaalvergelijkingen 168
par. 7. Omhullenden en ontwondenen 173

HOOFDSTUK XVII : Dubbelintegralen en lijnintegralen
par. 1. Dubbelintegralen 181
par. 2. Lijnintegralen 191

Herhalingsopgaven 199

DERDE DEEL.

HOOFDSTUK XVIII : Oneindig voortlopende reeksen

par. 1. Numerieke reeksen 1

par. 2. Machtreeksen 13

HOOFDSTUK XIX : Reeksontwikkeling van functies

par. 1. Ontwikkeling van een functie in een machtreeks 20

par. 2. Ontwikkeling van een functie in een reeks van Fourier 29

HOOFDSTUK XX : Complexe getallen

par. 1. Ter herhaling 59

par. 2. Complexe functies 67

par. 3. Toepassing van de complexe getallen in de frequentie-analyse 88

HOOFDSTUK XXI : Lineaire differentiaalvergelijkingen

par. 1. Algemeenheden 98

par. 2. Homogene lineaire differentiaalvergelijkingen 101

par. 3. Complete lineaire differentiaalvergelijkingen 110

par. 4. Het integreren van lineaire dvgln. met behulp van machtreeksen 120

par. 5. Functies van Bessel 123

par. 6. Het grondbeginsel van de Laplace- transformatie 132