

WATERBOUWKUNDE LABORATORIUM
BIBLIOTHEEK
969
LABORATOIRE IN TECHNIEK HYDRAULIQUES
BIBLIOTHEQUE

952600
MINISTERIE VAN OPENBARE WERKEN
Waterbouwkundig
LABORATORIUM

SCHONFELD, J.C.

969

De turbulentie in de zout- en
zoetwaterbeweging.

1040

8 1548

WATERBOUWKUNDIG LABORATORIUM
BIBLIOTEEK
969
LABORATOIRE de RECHERCHES HYDRAULIQUES
BIBLIOTHEQUE

0307 000 5952


De turbulentie in de zout- en zoetwaterbeweging.

door

Dr. Ir. J.C. Schönfeld

(English abstract at the end).

1. Inleiding.

Het probleem van de diffusie van het zout in het getijgebied is van enigszins andere aard dan dat van de diffusie b.v. van chemicaliën uit het Ruhrgebied in de Rijntakken. Dit is een gevolg van een verschil in grootte-orde in de concentratie van het gediffundeerde zout.

Bij de betrekkelijk kleine concentraties in de Rijntakken heeft men met twee factoren te maken: de turbulente stroming en het gediffundeerde zout. Men mag dan bij benadering aannemen dat de stroming haar eigen wetten volgt, onafhankelijk van de concentraties van het zout. Aldus mag de stroming als een gegeven oorzaak van de diffusie van het zout worden opgevat

Bij de veel grotere concentraties in het getijgebied moet men met drie factoren rekening houden: de turbulente stroming, het zout en de dichtheid. De turbulente stroming is de oorzaak van de diffusie van het zout. Verder zijn de veranderingen van het zoutgehalte de oorzaak van veranderingen in de dichtheid, en ten slotte zijn de verschillen in dichtheid hier zó groot, dat zij een ingrijpende invloed op de turbulentie kunnen hebben. Het is in het bijzonder deze invloed op de turbulentie die wij in het volgende nader willen beschouwen.

De hier aangeroerde problemen doen zich ook voor bij de beweging van een lichte, warme luchtlaag over een zwaardere, koude luchtlaag in de atmosfeer.

Meestal zal het geoorloofd zijn zoutgehalte en dichtheid als synoniem te beschouwen, en dus b.v. gemakshalve te spreken van diffusie van dichtheid, wanneer eigenlijk verandering van de dichtheid als gevolg van de diffusie van het zout bedoeld wordt. Een voorbeeld waarbij het onderscheid niet uit het oog mag worden verloren, is de gemiddelde dichtheid van de

vloeistof in een bepaald volumen- element. Deze hangt niet alleen van het gemiddelde zoutgehalte af, doch ook nog enigszins daarvan, of de vloeistof in het volumen- element een homogene oplossing vormt, dan wel bestaat uit lagen of vloeistof pakketten met verschillende zoutgehalten.

Zoals in het artikel van Dr. Dronkers (Lit.7) is uiteengezet, kan onderscheid worden gemaakt tussen de hoofdbeweging van het water onder invloed van de getijden en de opperwaterafvoer, en de turbulentie. De hoofdbeweging verandert zo langzaam vergeleken met de turbulente fluctuaties, dat bij de beschouwing van de laatste, de hoofdbeweging als een stationnaire toestand mag worden opgevat.

Verder zal de hoofdbeweging in dit verband als onafhankelijk van x (de coördinaat in de lengterichting van de rivier) mogen worden opgevat. Ook de afhankelijkheid van y (in de dwarsrichting) mag buiten beschouwing worden gelaten. We beschouwen dus een horizontale stroming in de x - richting, waarvan de snelheid alleen van de verticale coördinaat z afhangt.

Ook van de gemiddelde dichtheid wordt aangenomen dat zij alleen van z afhangt. Wanneer hierna sprake zal zijn van de hoofdstroming, zal overigens ook stilzwijgend aan de gemiddelde dichtheidsverdeling gedacht worden.

In het algemeen kan een aëro- of hydrodynamisch probleem met twee beschouwingswijzen worden behandeld, de beschouwingswijze van Euler, en die van Lagrange. Ook op het turbulentieprobleem zijn beide beschouwingswijzen van toepassing. In de volgende paragrafen zal nu eerst de kinematisch-geometrische structuur van de turbulentie worden onderzocht met een beschouwingswijze in de trant van Euler, die aansluit bij de gelijkvormigheidstheorie van von Karman.

Daarna zal de statistische structuur van de turbulentie worden onderzocht. Voor dit onderzoek leent zich de beschouwingswijze van Lagrange beter, op de wijze als deze door Taylor is toegepast.

Vervolgens zal met verdere gebruikmaking van de beschouwingswijze van Lagrange de remmende invloed van de dichtheidsgradiënt op de ontwikkeling

van de turbulentie worden nagegaan. Hiertoe wordt een energiebalans opgesteld.

Tenslotte zal een korte bespiegeling over de door de Rijkswaterstaat te ondernemen metingen van de turbulentie worden gegeven.

2. De kinematisch-geometrische structuur van de turbulentie.

De ervaring leert dat de structuur van de turbulentie bij grote getallen van Reynolds in hoofdzaak onafhankelijk is van het getal van Reynolds, en dus van de viscositeit. We zullen ook onafhankelijkheid van de moleculaire diffusiecoëfficiënt aannemen.

Zien we dus af van het transport van dichtheid als gevolg van de moleculaire diffusie, dan wordt de transportvergelijking van de dichtheid:

$$(1) \quad \nabla \cdot (\rho \bar{v}) + \dot{\rho} = 0 \quad \text{of} \quad \rho \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \rho + \dot{\rho} = 0,$$

waarin ρ en \bar{v} de ogenblikkelijke dichtheid en snelheid zijn. Nemen we aan dat het volumen van een willekeurige hoeveelheid water constant is, dan geldt

$$(2) \quad \nabla \cdot \bar{v} = 0.$$

In werkelijkheid ondergaat het volumen nog veranderingen als gevolg van de diffusie.

Dat (2) binnen de gestelde nauwkeurigheidsgrenzen toch wel gemotiveerd is, zal in een aanhangsel van deze paragraaf worden aangetoond.

Substitutie van (2) in (1) geeft

$$(3) \quad \bar{v} \cdot \nabla \rho + \dot{\rho} = 0.$$

De turbulente fluctuaties in de y - richting (horizontaal en dwars op de hoofdstroom) zijn niet van direct belang voor de diffusie, en zij staan ook niet onder de directe invloed van de dichtheidsgradiënt. Gemakshalve zullen zij daarom nu verder buiten beschouwing blijven, en we bestuderen dus een twee-dimensionale stroming. Uitwerking van (3) geeft dan

$$(4) \quad (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}) \rho = 0.$$

De krachtvergelijkingen zijn

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_x = 0 \quad \text{waarin} \quad a_x = (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}) v_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho a_z + \rho g = 0 \quad \text{waarin} \quad a_z = (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}) v_z \quad (6)$$

Hieruit kan p geëlimineerd worden door (5) naar z en (6) naar x te differentiëren, en $\partial^2 p / \partial x \partial z$ algebraïsch te elimineren. Het resultaat is:

$$(7) \quad a_x \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial a_x}{\partial z} = a_z \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial a_z}{\partial x} + g \frac{\partial p}{\partial x}$$

Nu is

$$\frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

De eerste twee termen in het rechterlid zijn samen nul krachtens (2), en dus is

$$\frac{\partial a_x}{\partial z} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Door deze en een overeenkomstige formule voor $\partial a_z / \partial x$ in (7) te substitueren, vinden we:

$$(8) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) w_y = g \frac{\partial p}{\partial x} + a_z \frac{\partial p}{\partial x} - a_x \frac{\partial p}{\partial z},$$

waarin

$$(9) \quad w_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

de wervelsterkte in de y - richting voorstelt.

De versnellingen a_x en a_z zijn alleen een gevolg van de turbulentie, daar de hoofdstroom stationnair gedacht is. Op grond van metingen van Bowden en Proudman mag worden aangenomen dat de versnellingen van de grootte-orde van $0,1 \text{ m sec}^{-2}$ zijn, en dat a_z dus wel t.o.v. g verwaarloosd mag worden. De tweede term in het rechterlid van (8) wordt daarom t.o.v. de eerste term verwaarloosd. Nemen we verder aan dat de derde term van dezelfde grootte-orde is als de tweede, dan kan ook de derde term verwaarloosd worden. Aldus krijgen we

$$(10) \quad \rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) w_y = g \frac{\partial p}{\partial x}$$

We willen nu de turbulentie gaan bestuderen in de omgeving van een punt dat met de hoofdstroom meebeweegt. We kiezen dit punt als oorsprong van

het coördinatenstelsel.

Verder splitsen we nu de beweging in hoofdstroom en turbulentie. De hoofdstroom wordt bovendien in een reeks ontwikkeld. Zo krijgen we

$$(11) \quad \rho = S + S'z + \dots + s(x, z, t)$$

$$(12) \quad v_x = U'z + \dots + u(x, z, t)$$

$$(13) \quad v_z = \dots + v(x, z, t)$$

Hierin is S de gemiddelde dichtheid en S' de gemiddelde dichtheidsgradiënt in de oorsprong. Daar de oorsprong met de hoofdstroom meebeweegt, is de gemiddelde snelheid aldaar nul; U' is de waarde die de gradiënt van de gemiddelde snelheid in de oorsprong heeft. De turbulente fluctuaties worden door s , u en v weergegeven.

Uit (9) volgt verder nog

$$(14) \quad w_y = U' + U''z + \dots + w(x, z, t),$$

waarin

$$(15) \quad w = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

de turbulente wervelsterkte is.

Bij het substitueren van (11), (12), (13) en (14) in (10) en (4) zullen we alleen de voornaamste termen uit de reeksen voor de hoofdstroom overnemen. De beschouwing krijgt op deze wijze weliswaar een zeer globaal karakter, doch we kunnen daar vrede mee hebben zolang we ons slechts ten doel stellen de voornaamste factoren op te sporen die van invloed zijn op de structuur van de turbulentie.

De verschillen in dichtheid zijn hoogstens enkele procenten van de dichtheid zelf, zodat het in deze globale beschouwing zeker geoorloofd is zowel $S'z + \dots$ als s t.o.v. S te verwaarlozen.

We krijgen dus:

$$(16) \quad U'z \frac{\partial w}{\partial x} + U''v + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{g}{S} \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$(17) \quad U'z \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + S'v + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Dit zijn twee differentiaalvergelijkingen voor de turbulente fluctuaties s , u , v en w , waarin de coëfficiënten nog afhangen van de hoofdstroom.

In de gedachtengang van von Karman stellen we nu de vraag of het mogelijk is, dat de turbulentie op twee verschillende plaatsen zich volgens een gelijkvormig patroon ontwikkelt, ook al zijn de kenmerken van de hoofdstroom op die twee plaatsen verschillend. Zulk een gelijkvormigheid zal alleen bestaanbaar zijn wanneer het mogelijk is de coëfficiënten in de vergelijkingen (16) en (17) onafhankelijk te maken van de hoofdstroom, door een geschikte definitie van schalen voor de lengteaftmetingen, de tijdsintervallen, de snelheden en de dichtheden in het turbulentiepatroon.

Om dit te onderzoeken voeren we nieuwe coördinaten enz. in volgens

$$\begin{aligned} x &= L x_1 & z &= L z_1 & t &= T t_1 \\ u &= C u_1(x_1, z_1, t_1) & v &= C v_1(x_1, z_1, t_1) \\ s &= D s_1(x_1, z_1, t_1) \end{aligned}$$

De schaalcoëfficiënten L , T , C en D zullen in afhankelijkheid van de kenmerken van de hoofdstroom gedefiniëerd moeten worden.

Uit (15) volgt nog

$$w = \frac{C}{L} w_1(x_1, z_1, t_1), \text{ waarin } w_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

De vergelijkingen (16) en (17) worden nu herleid tot:

$$(18) \quad \frac{U'C}{L} z_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + U''Cv_1 + \frac{C^2}{L^2} (u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1}) + \frac{C}{LT} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} = \frac{gD}{SL} \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$$

$$(19) \quad U'D z_1 \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + S'Cv_1 + \frac{CD}{L} (u_1 \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial s_1}{\partial z_1}) + \frac{D}{T} \frac{\partial s_1}{\partial t_1} = 0$$

De vergelijking (18) kan onafhankelijk gemaakt worden van de hoofdstroom b.v. door delen door de coëfficiënt van de eerste term, mits tussen alle coëfficiënten constante verhoudingen bestaan. Eenzelfde opmerking geldt

voor (19). Nader onderzoek van de coëfficiënten leert dat de constante verhoudingen bestaan, wanneer de grootheden L , T , C en D gedefiniëerd worden in overeenstemming met de volgende voorwaarden:

$$(20) \quad L : CT = \text{constant}$$

$$(21) \quad C : U'L = \text{constant}$$

$$(22) \quad LU'' : U' = \text{constant}$$

$$(23) \quad \frac{D}{C} : \frac{U'S}{g} = \text{constant}$$

$$(24) \quad \frac{D}{C} : \frac{S'}{U'} = \text{constant}$$

Het is altijd mogelijk L , C en T zo te definiëren dat aan (20), (21) en (22) voldaan wordt. Aan de voorwaarden (23) en (24) voor de definitie van D kan echter alleen voldaan worden als er een vaste verhouding tussen $U'S : g$ en $S' : U'$ bestaat.

Dit betekent dat de turbulentie op twee verschillende plaatsen zich alleen dan gelijkvormig kan ontwikkelen, wanneer de parameter van Richardson, r , gedefiniëerd door

$$(25) \quad r = \frac{-gS'}{S(U')^2},$$

op die twee plaatsen dezelfde waarde heeft. (In (25) is een minteken ingevoerd omdat S' meestal negatief is, daar z positief naar boven gedefiniëerd is, en de dichtere lagen zich in de regel onder de minder dichte lagen bevinden).

Is de waarde van r op de twee beschouwde plaatsen verschillend, dan moet ook een verschillend turbulentiepatroon verwacht worden.

We moeten dus aannemen dat het turbulentiepatroon nog een functie van de parameter r is. De veranderlijken u , v , en S , zullen dus als functies, niet alleen van x , z , en t , maar ook van r moeten worden opgevat. De verhoudingen tussen de coëfficiënten in (18) en (19) behoeven nu geen constanten te zijn, doch mogen ook functies van r zijn, en ook de constanten in (20) t/m (24) mogen functies van r worden. We zullen echter aannemen dat L , C , T en D zo gedefiniëerd worden, dat alleen in (23) een functie van r in plaats

van een constante wordt ingevoerd.

We beschouwen nu de gemiddelden van de producten uv en sv ter plaatse van de oorsprong. Het gemiddelde dat hier bedoeld wordt is een gemiddelde over een voldoende lange tijd.

We krijgen dan

$$\overline{uv} = C^2 \overline{u_1(0,0,t_1,r) v_1(0,0,t_1,r)},$$

gemiddeld naar t_1 . Het gemiddelde $\overline{u_1 v_1}$ zal nog een functie van r zijn. Rekening houdende met (21) krijgen we

$$\overline{uv} = -L^2 (U')^2 F(r),$$

waarin F een nog onbekende functie van r is, en waarin we L in overeenstemming met (21) definiëren als

$$(26) \quad L = k U' : U'',$$

waarin k voorstelt de constante "kappa" van von Karman (ongeveer 0,4).

Op soortgelijke wijze leiden we, rekening houdende met (24), af:

$$\overline{sv} = -L^2 U' S' f(r).$$

De functies F en f volgen niet uit de hier ontwikkelde theorie, evenmin als b.v. de constante k uit de oorspronkelijke theorie van von Karman volgde. We weten slechts van de functie F , dat

$$F(0) = 1$$

moet zijn, daar wij voor $S' = 0$, en dus $r = 0$, weer op de formule van Prandtl - von Karman terug moeten komen.

Voor de diffusiecoëfficiënt van de hoeveelheidbeweging krijgen we

$$(27) \quad D_i = L^2 U' F(r),$$

en voor de diffusiecoëfficiënt van het zout, en dus ook van de dichtheid, krijgen we

$$(28) \quad D_s = L^2 U' f(r).$$

We zouden de functies F en f dus b.v. kunnen bepalen door D_i , D_s , L , U' en r uit metingen van de hoofdstroom af te leiden, en dan $D_i : L^2 U'$ en $D_s : L^2 U'$ tegen r uit te zetten.

Bij bovenstaande beschouwingen werd aangenomen dat U' en U'' niet nul of bijna nul zouden zijn. Bij de snelheidsverdelingen in de zout- en

zoetwaterbeweging kunnen evenwel zowel punten waar $U' = 0$, als punten waar $U'' = 0$ is, voorkomen. De turbulentie in de omgeving van zulke punten zal dan ook bij gelegenheid zeker nog een punt van onderzoek moeten uitmaken. Voortgaande in de hierboven geschetste gedachtengang zou men dan kunnen trachten met zulke punten rekening te houden door het turbulentiepatroon en de functies F en f ook nog van een parameter

$$\frac{U' U'''}{(U'')^2}$$

afhankelijk te stellen.

Aanhangsel bij par. 2. De vergelijking $\nabla \cdot \bar{v} = 0$.

Laat ϵ de hoeveelheid opgeloste stof (zout) en η de hoeveelheid oplosmiddel (water) per eenheid van volumen zijn. Dan is

$$\rho = \eta + \epsilon$$

de dichtheid van de oplossing.

Laat \bar{v} de snelheid zijn van het zwaartepunt van een volumenelement van de oplossing. De snelheid van het zout is dan

$$\bar{v}_z = \bar{v} - \frac{\alpha}{\epsilon} \nabla \epsilon.$$

Verder geldt

$$\rho \bar{v} = \eta \bar{v}_w + \epsilon \bar{v}_z,$$

waarin \bar{v}_w de snelheid van het water is. Uit deze vergelijkingen volgt

$$\bar{v}_w = \bar{v} + \frac{\alpha}{\eta} \nabla \epsilon$$

De transportvergelijking van het water is dan

$$(29) \quad \eta \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \eta + \dot{\eta} = -\alpha \nabla^2 \epsilon,$$

en de transportvergelijking van het zout is

$$(30) \quad \epsilon \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \epsilon + \dot{\epsilon} = \alpha \nabla^2 \epsilon.$$

Door optellen van (29) en (30) vinden we

$$\rho \nabla \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \rho + \dot{\rho} = 0,$$

wat ook onmiddellijk uit de wet van het behoud van massa volgt.

De dichtheid is bovendien een uit metingen bekende functie van de concentratie ϵ , en op grond daarvan komen we tot

$$\rho \nabla \cdot \bar{v} + \frac{d\rho}{d\varepsilon} \bar{v} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{d\rho}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0.$$

Deze vergelijking trekken we nu van $\frac{d\rho}{d\varepsilon}$ maal (30) af, en dan lossen we $\nabla \cdot \bar{v}$ op:

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\frac{d\rho}{d\varepsilon}}{\rho - \varepsilon \frac{d\rho}{d\varepsilon}} \propto \nabla^2 \varepsilon.$$

Voor zout water is $d\rho/d\varepsilon$ ongeveer 0,8.

Hieruit blijkt dus dat $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ gesteld mag worden, juist voor zover als het geoorloofd is de invloed van de diffusiecoëfficiënt α op de stroming te verwaarlozen.

3. De statistische structuur van de turbulentie.

We beschouwen nu de menging in de geest van Lagrange, door de beweging van de vloeistofpakketten na te gaan. Eerst houden we ons met de beweging in verticale richting bezig.

Laat v de snelheid van een pakket in verticale richting zijn, en laat s het verschil in dichtheid met de omringende vloeistof zijn. We zullen eenvoudigheidshalve veronderstellen dat de omringende vloeistof de snelheid en dichtheid van de hoofdstroom heeft. Laat y de afstand zijn die het pakket in verticale richting heeft afgelegd, zodat

$$v = \dot{y}$$

is.

De bewegingsvergelijking voor het pakket wordt

$$(31) \quad M\dot{v} + Wv + gIs = K_y(t).$$

Hierin is M de massa van het pakket, Wv stelt een wrijvingskracht voor, g is de resultante van gewicht en opwaartse druk die het pakket drijft naar de laag van de hoofdstroom waarin het volgens zijn dichtheid zou thuishoren (I is de inhoud van het pakket). De kracht K_y stelt de resultante van de op het pakket werkende drukkrachten voor.

Door de diffusie zal de dichtheid van het pakket geleidelijk aan die van de omgeving worden aangepast. Is S de dichtheid van de laag $y=0$,

dan is $S+S'y$ de dichtheid van de omgeving van het pakket, en $S+S'y+s$ die van het pakket zelf. De diffusie van de dichtheid van het pakket kan nu worden weergegeven door een vergelijking van de vorm

$$(32) \quad I \frac{d}{dt} (S+S'y+s) + Ds = 0,$$

waarin D een coëfficiënt voor de diffusie is.

We delen (31) door M en (32) door I en krijgen na enige verdere herleiding:

$$(33) \quad \dot{v} + k_w v + \frac{g}{S} s = \frac{K_y}{M} \quad ; \quad k_w = \frac{W}{M}$$

$$(34) \quad \dot{s} + k_d s = -S'v. \quad ; \quad k_d = \frac{D}{I}.$$

Hieruit is s te elimineren met als resultaat:

$$(35) \quad \dot{v} + (k_w + k_d)v + (k_w k_d - \frac{gS'}{S})v = \frac{K_y + k_d K_y}{M}.$$

De beweging wordt onderhouden door de werking van de kracht K_y . Deze kracht is evenwel bepaald door de drukverdeling, die weer afhangt van de beweging van het pakket in horizontale richting (zie ook hierna par. 4).

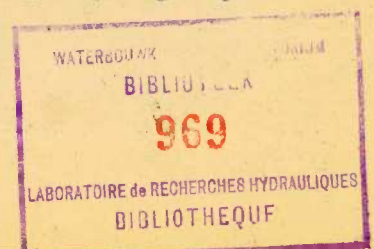
De horizontale beweging hangt weer van de verticale af, zoals we verderop in deze paragraaf nader zullen zien, omdat de verticale beweging het pakket in lagen met andere horizontale snelheden brengt. Er is dus wisselwerking tussen de horizontale en verticale beweging, en daarom heeft het zin na te gaan voor welke bewegingen in verticale richting voorkeur bestaat. Daartoe beschouwen we de oplossing van de vergelijking (35) met het rechterlid gelijk aan nul gesteld. Deze oplossing is

$$v = C_1 e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t},$$

waarin $-k_1$ en $-k_2$ de wortels van de karakteristieke vergelijking zijn:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_w + k_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_w - k_d}{2}\right)^2 + \frac{gS'}{S}}.$$

We kunnen twee gevallen onderscheiden:



de eigen bewegingen zijn aperiodiek, wanneer de discriminant positief of nul is, dus als

$$(36) \quad \sqrt{\frac{-gS'}{S}} \ll \left| \frac{k_w - k_d}{2} \right|$$

geldt, en periodiek als de discriminant negatief is, dus als

$$(37) \quad \sqrt{\frac{-gS'}{S}} > \left| \frac{k_w - k_d}{2} \right|$$

geldt.

In het laatste geval is

$$(38) \quad n = \sqrt{-\frac{gS'}{S} - \left(\frac{k_w - k_d}{2}\right)^2}$$

de hoekfrequentie, en

$$\frac{k_w + k_d}{2}$$

de dempingscoëfficiënt van de beweging. De beweging is relatief zwak gedempt, als

$$(39) \quad \frac{k_w^2 + k_d^2}{2} \ll n_0^2 = \frac{-gS'}{S}$$

geldt.

Allereerst kan nu worden opgemerkt dat in een stroming zonder dichtheidsverschillen, waarin dus $S'=0$ is, volgens (36) alle pakketten van nature een aperiodieke beweging hebben. Of een pakket bij een bepaalde gradiënt S' van nature een aperiodieke of een periodieke beweging zal hebben, hangt dan verder ook nog van de coëfficiënten k_w en k_d af. In elk geval mag volgens de gevolgde gedachtegang verwacht worden, dat bij een zeer grote waarde van $-S'$ veel pakketten van nature periodieke bewegingen uitvoeren, en dat deze bewegingen overwegend zwak gedempt zullen zijn.

Nu is in water voor een pakket met een lineaire afmeting van de grootte- orde L , (in m)

$$k_w \approx \frac{4 \cdot 10^{-6}}{L^2} \quad \text{en} \quad k_d \approx 10^{-3} k_w$$

Men komt tot deze schatting door een bolvormig pakket met een straal L , te beschouwen. Daarbij is $\gamma^2 \approx 10^{-6} m^2 sec^{-1}$ en $\alpha \approx 10^{-3} \gamma^2$, beide voor water.

We kunnen k_d dus t.o.v. k_w verwaarlozen.

Verder is g ongeveer 10 m sec^{-2} en S ongeveer 1000 kg m^{-3} ; S' is b.v. van de grootte- orde 1 kg m^{-4} . Een pakket zal dus volgens (37) van nature een periodieke beweging hebben als

$$L_1 > 0,005 \text{ m}$$

is.

Over een groot deel van de verticaal is de vermengingslengte L minstens enige decimeters, en dan is het vrij aannemelijk dat L_1 voor de meeste pakketten wel minstens enige centimeters is. De meeste pakketten voeren dan van nature een periodieke beweging uit. Bovendien zal de demping van die beweging volgens (39) ook meestal vrij zwak zijn.

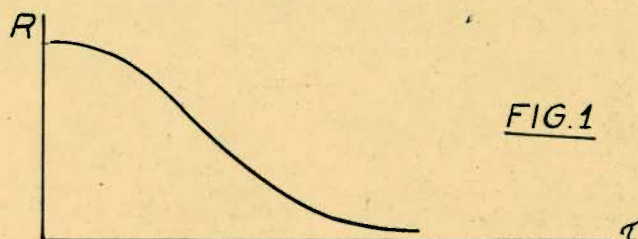
We zijn nu dus tot het vermoeden gekomen dat de beweging van de pakketten in een stroming zonder dichtheidsverschillen van nature aperiodiek is, en dat bij een grote dichtheidsgradiënt sterke voorkeur voor periodieke bewegingen bestaat.

We gaan de invloed hiervan op de autocorrelatie van de verticale snelheid na. De autocorrelatiefunctie R is gedefiniëerd door

$$(40) \quad R(\tau) = \frac{\overline{v(t)v(t-\tau)}}{v^2},$$

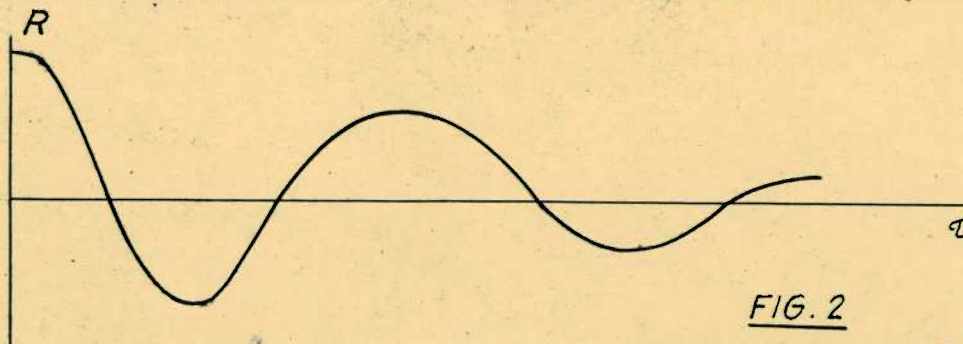
waarin de overstreping nu b.v. een statistisch gemiddelde over een voldoende groot aantal pakketten van gelijke afmetingen en onder statistisch gelijkwaardige omstandigheden voorstelt.

Is de beweging van het pakket van nature aperiodiek, dan zal de functie $R(\tau)$ vermoedelijk ongeveer aldus verlopen:



Dit is wat we verwachten mogen bij afwezigheid van dichtheidsverschillen. Is er echter een uitgesproken voorkeur voor een bepaalde periode,

dan zal ook de functie $R(\tau)$ een periodiek karakter hebben, ongeveer aldus:



Dit is dus wat we bij een sterke dichtheidsgradiënt zullen verwachten.

Vervolgens gaan we de invloed op de diffusiecoëfficiënten na. We integreren daartoe (34), aannemende dat v een gegeven functie van de tijd is:

$$s = S' \int_0^{\infty} d\tau e^{-k_d \tau} v(t-\tau).$$

Vervolgens bepalen we het statistisch gemiddelde van het product sv , en voeren de diffusiecoëfficiënt van het zout in volgens

$$\bar{sv} = D_s^* S'.$$

Dit is een diffusiecoëfficiënt voor een bepaalde categorie van pakketten, namelijk van gelijke grootte en onder statistisch gelijkwaardige omstandigheden.

Voor deze diffusiecoëfficiënt vinden we

$$(41) \quad D_s^* = \bar{v}^2 T(k_d),$$

waarin de functie $T(k)$ door

$$(42) \quad T(k) = \int_0^{\infty} e^{-k\tau} R(\tau) d\tau$$

gedefinieerd is.

Voor de beweging van het pakket in horizontale richting gaan we uit van de volgende bewegingsvergelijking:

$$(43) \quad M \frac{d}{dt} (u + U'y) + Wu = K_x.$$

De kracht K_x , dat is de resulterende drukkracht, zal gemiddeld de beweging in horizontale richting tegenwerken (zie ook hierna par. 4). Zij kan

dus globaal als een extra weerstand in rekening worden gebracht. We komen zo tot de vergelijking

$$(44) \quad \dot{u} + (k_w + k_p) u = -U' v,$$

waarin de term k_p dus de invloed van de druk weergeeft.

Voor de diffusie van hoeveelheid van beweging kan de coëfficiënt

$$(45) \quad D_i^* = \sqrt{v^2} T (k_w + k_p)$$

uit (44) worden afgeleid, op soortgelijke wijze als hierboven de diffusie-coëfficiënt van het zout.

Om tot een vergelijking van D_i^* en D_s^* te komen, moet het verloop van de functie T worden nagegaan. We onderscheiden hier weer het geval dat $S' = 0$ is, en het geval dat S' groot is.

In het eerste geval, wanneer $R(\tau)$ verloopt als in fig. 1. zal de functie T ongeveer aldus verlopen:

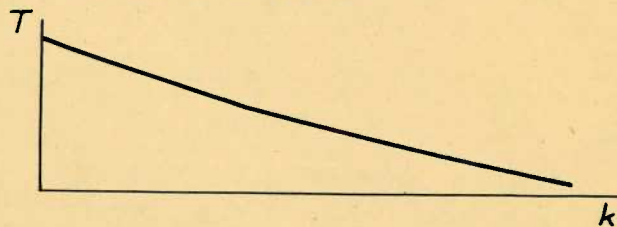


FIG. 3

De functie is dan maximaal voor $k = 0$.

In het tweede geval daarentegen, wanneer $R(\tau)$ verloopt als in fig. 2, zal T veeleer ongeveer aldus verlopen:

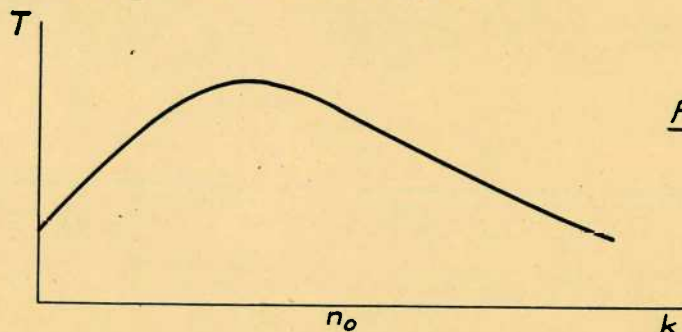


FIG. 4

Het maximum van T ligt dan niet bij $k = 0$, maar bij een waarde ongeveer gelijk aan de door (39) bepaalde hoekfrequentie n_0 .

Ingeval $S' = 0$ is, zal k_p voor de pakketten die het meest tot de diffusie bijdragen, van dezelfde orde van grootte zijn als k_w . Dit wordt nader gemotiveerd in par. 4. Verder is k_d in water veel kleiner dan k_w (zie pag. 12).

en in de lucht hoogstens van dezelfde grootte- orde. Het is duidelijk dat k_d meestal kleiner zal zijn dan $k_w + k_p$, en hoogstens ongeveer even groot. Uit (41), (45) en fig. 3 volgt dus dat we bij afwezigheid van dichtheidsverschillen mogen verwachten dat

$$(46) \quad D_i \ll D_s$$

zal gelden. Hier zijn D_i en D_s dus gemiddelde diffusiecoëfficiënten voor alle soorten van pakketten.

Ingeval S' groot is, zal k_p voor de pakketten die het meest tot de diffusie bijdragen, misschien enige malen groter dan k_w zijn (zie weer hierna par. 4). Is overigens, zoals we hiervoor op grond van de vermoedelijke afmetingen van de pakketten aannamen, k_w beduidend kleiner dan n_0 , dan zal ook $k_w + k_p$ kleiner, of althans niet veel groter zijn dan n_0 . Daar k_d voor zouten in water zeer veel kleiner is dan k_w en dus ook zeer veel kleiner dan n_0 , volgt uit (41), (45) en fig. 4 dat het in dit geval zeer wel mogelijk is dat

$$(47) \quad D_s < D_i$$

is.

Uit metingen van Jacobsen (lit. 3) in de Deense wateren is inderdaad gevonden dat D_s kleiner kan zijn dan D_i , en wel van de grootte-orde 10 maal zo klein. Dit verschil tussen D_s en D_i zou op grond van de voorgaande beschouwingen als volgt kunnen worden verklaard:

Wanneer de vloeistofpakketten over betrekkelijk grote afstanden heen en weer zwerven, kunnen ze in belangrijke mate overdracht van hoeveelheid van beweging van de ene laag naar een andere bewerken. Doordat de dichtheid in het pakket slechts zeer langzaam aan die van de omgeving wordt aangepast, zal het pakket echter sterk de neiging hebben na iedere zwerftocht weer ongeveer naar zijn oorspronkelijke laag terug te keren. Daardoor zal het slechts een betrekkelijk geringe diffusie van het zout kunnen bewerken.

Indien deze zienswijze juist is, dan kan verwacht worden dat bij de diffusie in luchtlagen van verschillende dichtheid het verschil tussen D_s en D_i niet zo groot zal zijn als in lagen water met verschillende dichtheid, omdat de moleculaire diffusiecoëfficiënt in lucht relatief veel groter is dan in

water (zie pag. 12).

4. De remmende invloed van de dichtheidsgradiënt op de ontwikkeling van de turbulentie.

De verschillen in dichtheid tussen de lagen van de hoofdstroom hebben een remmende invloed op de ontwikkeling van de turbulentie. Immers, een vloeistofpakket afkomstig uit een bepaalde laag, dat in een andere laag doordringt, ondervindt daar een kracht die het teruggedrijft naar zijn oorspronkelijke laag, als gevolg van het verschil in soortelijk gewicht tussen het pakket en zijn omgeving. Voor het mengen van de lagen is dus een hoeveelheid arbeid nodig die niet geleverd hoeft te worden wanneer de lagen alle dezelfde dichtheid hebben. Voor het ontwikkelen van een zekere mate van turbulentie is dus meer energie nodig dan wanneer er geen dichtheidsverschillen zijn, en bij een gegeven beschikbaar vermogen van de schuifspanningen in de hoofdstroom zal de turbulentie dus zwakker ontwikkeld zijn.

De turbulente schuifspanning in de hoofdstroom kan door

$$\tau = S D_i U'$$

worden weergegeven. Het hierdoor per volume-eenheid geleverde vermogen bedraagt

$$\tau U' = S D_i (U')^2.$$

Door de turbulentie ontstaat overdracht van zout in verticale richting. De grootte

$$- D_s S'$$

stelt het hieruit resulterende transport van massa per eenheid van tijd door een horizontale eenheid van oppervlak voor. Hiervoor moet in het zwaartekrachtsveld per eenheid van volume een vermogen

$$- g D_s S'$$

geleverd worden.

Er is alleen turbulentie mogelijk wanneer het vermogen dat door de schuifspanningen geleverd wordt, het vermogen dat voor het massatransport nodig is, overtreft, dus als

$$S D_i (U')^2 > -g D_s S'$$

is, of als

$$(48) \quad \frac{D_i}{D_s} > r$$

is, waarin r weer de door (25) gedefiniëerde parameter van Richardson is.

De voorwaarde (48) is het eerst door Taylor afgeleid. Een afleiding volgens dezelfde gedachtengang, doch uitgaande van de waarschijnlijk niet steeds juiste veronderstelling dat D_i en D_s ongeveer gelijk zouden zijn, is reeds door Richardson gegeven. Ook Prandtl heeft een dergelijke afleiding gegeven.

De ongelijkheid (48) is door Taylor behoorlijk in overeenstemming met de metingen van Jacobsen bevonden. Met name bleek ook dat de parameter r verscheidene malen groter dan 1 kon zijn, wat weer op de onjuistheid van de oudere afleidingen van Richardson en Prandtl wijst.

De voorwaarde (48) kan ook worden afgeleid door de beweging van een pakket te beschouwen. Op die wijze kan de voorwaarde nog iets nader geprecieerd worden.

We stellen de balans op voor de vermogens die met de beweging van een pakket gemoeid zijn. We zullen deze balans splitsen in een balans voor de horizontale, en een balans voor de verticale beweging.

Het vermogen dat door de omringende vloeistof, d.w.z. door de schuifspanningen van de hoofdstroom per massaeenheid aan het pakket geleverd wordt, is gelijk aan het product van de door de omringende vloeistof uitgeoefende kracht $-U'v$, en de relatieve snelheid u . Gemiddeld is dit vermogen dus $-U' \overline{vu}$.

Dit vermogen moet gelijk zijn aan de som van het gemiddelde bij horizontale beweging gedissipeerde vermogen,

$$k_w \overline{u^2},$$

en het gemiddelde aan het drukkrachtenveld afgegeven vermogen,

$$k_p \overline{u^2}.$$

De vermogen-balans van de horizontale beweging wordt dus door de vergelijking

$$(54) \quad -U' \overline{vU} = k_w \overline{u^2} + k_p \overline{u^2}$$

weergegeven.

Het aan het drukkrachtenveld afgegeven vermogen is niet gedissipeerd, daar dit veld conservatief is. Het genoemde vermogen moet dus weer ten goede komen, hetzij aan de verticale beweging van het pakket, hetzij aan de beweging van andere pakketten.

De grote pakketten verliezen relatief minder wrijvingsenergie dan de kleine pakketten, en het is dus zeer wel mogelijk dat de grote pakketten gemiddeld meer energie afstaan aan andere pakketten, dan zij ontvangen van andere pakketten. Bij de kleine pakketten moet men dan het omgekeerde verwachten.

In elk geval zal het mogelijk zijn pakketten te beschouwen van een zodanige middelmatige grootte, dat zij gemiddeld evenveel energie afstaan als ontvangen. Voor zulk een pakket stelt dus

$$k_p \overline{u^2}$$

het gemiddelde vermogen voor, dat door het drukkrachtenveld aan de verticale beweging van het pakket wordt afgegeven. Dit vermogen is nodig, om de verticale beweging te onderhouden, die ten eerste geremd wordt door de wrijvingskracht $k_w v$, en ten tweede door het verschil $g_s \cdot S$ tussen gewicht en opwaartse druk. Het door de eerste kracht gedissipeerde vermogen is gemiddeld

$$k_w \overline{v^2}$$

en het door de tweede kracht verwerkte vermogen is gemiddeld

$$\frac{g}{S} \overline{sv}.$$

De vermogen-balans van de verticale beweging wordt dus door de vergelijking

$$(50) \quad k_p \overline{u^2} = k_w \overline{v^2} + \frac{g}{S} \overline{sv}$$

weergegeven.

Substitutie van (50) in (49) geeft de volgende vergelijking voor de totale vermogen-balans:

$$(51) \quad -U' \overline{vU} = k_w (\overline{u^2} + \overline{v^2}) + \frac{g}{S} \overline{sv}.$$

Deze vergelijking geldt dus voor een soort van middelmatige pakketten die gemiddeld evenveel energie aan andere pakketten afgeven, als zij van andere pakketten ontvangen.

Een tweede soort van middelmatige pakketten, die niet noodzakelijk identiek behoeft te zijn met de eerste soort, is maatgevend voor de overdracht van hoeveelheid van beweging, zodat voor deze pakketten

$$(52) \quad -\overline{vU} = D_i U'$$

geldt.

Een derde soort van middelmatige pakketten is maatgevend voor de diffusie van het zout, zodat hiervoor

$$(53) \quad \overline{vS} = -D_S S'$$

geldt.

Nemen we aan dat de drie soorten van middelmatige pakketten even groot, of althans globaal even groot zijn, dan kan (51) tot

$$(52) \quad D_i (U')^2 = k_w (\overline{u^2} + \overline{v^2}) + r D_S (U')^2$$

herleid worden. Daar de wrijvingsterm $k_w (\overline{u^2} + \overline{v^2})$ altijd positief is, volgt hieruit om te beginnen weer de ongelijkheid (48).

Bovendien kunnen we nu een globale indruk van de waarde van k_p krijgen, althans bij de pakketten van middelmatige grootte.

Indien er geen dichtheidsverschillen zijn, dus $\overline{sv} = 0$ is, volgt uit (50) en uit het experimenteel gebleken feit dat $\overline{u^2}$ en $\overline{v^2}$ ongeveer gelijk zijn, dat ook k_p en k_w ongeveer even groot moeten zijn.

Bij de door Jacobsen gemeten zout- en zoetwaterbeweging zijn de twee termen in het rechterlid van (52) zeer globaal even groot, hetgeen kan worden afgeleid uit de waarden van D_i , D_S en r .

In de atmosfeer is verder door metingen gebleken dat $\overline{u^2}$ en $\overline{v^2}$ ongeveer even groot blijven, ook als er dichtheidsverschillen zijn. Nemen we de gelijkheid van $\overline{u^2}$ en $\overline{v^2}$ ook bij de zout- en zoetwaterbeweging aan, dan is

dus de term $k_w \sqrt{v^2}$ zeer globaal de helft van $\frac{g}{S} \sqrt{v}$, Uit (50) volgt dan dat k_p enige malen groter dan k_w kan worden.

5. Slotbeschouwing.

Het grote verschil tussen D_s en D_i , dat uit de waarnemingen van Jacobsen volgt, wijst op een voorkeur voor periodieke bewegingen, waarvan de hoekfrequentie door (38) bepaald is. De grootte- orde van deze hoekfrequentie kan uit de grootte- orde van g , S en S' bepaald worden. Stellen we weer $g = 10 \text{ m sec}^{-2}$, $S = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ en $-S' = 1 \text{ kg m}^{-4}$, dan is n_0 dus ongeveer $0,1 \text{ rad sec}^{-1}$. Dit komt overeen met een periode van ongeveer een minuut.

Inderdaad zijn perioden van de grootte- orde van één of enkele minuten geconstateerd, o.a. door Bowden en Proudman. Als verklaring voor zulke betrekkelijk lange perioden opperen deze auteurs twee mogelijkheden.

- a. Turbulente wervels met verticale as en diameters van b.v. 50 of 100 m.
- b. Interne golven.

Op grond van het voorgaande zouden we dan als derde mogelijke verklaring nog kunnen toevoegen:

- c. Verticale schommelingen van vloeistofpakketten.

Aanvaardt men voor een ogenblik de derde verklaringswijze, dan moeten we aannemen dat de pakketten, althans in horizontale richting, afmetingen van b.v. 50 of 100 m moeten hebben, omdat bij veel kleinere afmetingen de lange perioden alleen in een met de stroom meebewegend punt geconstateerd zou kunnen worden, doch niet in een vast punt. Uiteraard moeten de verticale afmetingen veel kleiner zijn, omdat de diepte al niet meer dan b.v. 10 m is.

Willen we in dit beeld ook de kortere door Bowden en Proudman gevonden perioden van enkele seconden inpassen, dan kunnen we aannemen dat de genoemde pakketten tamelijk homogeen van zoutgehalte zijn, en dat zich in die pakketten nog weer een snellere turbulentie ontwikkelt.

Het is ook nog de vraag of er niet enig verband is tussen de be-

schouwde slingerbeweging van pakketten, en de interne golven, daar beide soorten verschijnselen op een periodieke uitwisseling van bewegingsenergie tegen potentiële energie in het zwaartekrachtsveld en omgekeerd berusten.

Hierop wijst ook het feit dat de voorkeursperiode van de slingerbeweging van de pakketten (n.l. $2\pi \cdot \sqrt{gS':S}$), dezelfde is als de grensperiode voor de mogelijkheid van interne golven. Toch moeten de verschijnselen voorshands wel onderscheiden worden, omdat we door een beweging van pakketten wel goed reken-schap van diffusie kunnen geven, doch zulk een diffusie met interne golven veel moeilijker verklaard kan worden.

Bovenstaande speculatieve beschouwingen vormen geen oplossing van het probleem, doch illustreren veeleer de noodzaak van verdere waarnemingen.

Voor het verkrijgen van een beter inzicht zal in de eerste plaats moeten worden opgehelderd, welke fluctuaties met mengprocessen samenhangen. Dit kan worden uitgemaakt wanneer niet alleen fluctuaties van één snelheidscomponent worden waargenomen, maar gelijktijdig fluctuaties b.v. van de horizontale en de verticale snelheidscomponent op één plaats, zodat het correlatieproduct \overline{uv} bepaald kan worden. Worden ook zoutgehaltefluctuaties gemeten, dan kan evenzo het correlatieproduct \overline{sv} bepaald worden. Bij de bepaling der correlatieproducten blijkt dan verder welke frequenties vooral met de overdracht van hoeveelheid van beweging samenhangen, en welke frequenties met de overdracht van zout.

Bij de Centrale Studiedienst van de Rijkswaterstaat worden met het oog hierop momenteel meetinstrumenten ontwikkeld voor het gelijktijdig op één plaats meten van de ogenblikkelijke snelheidscomponenten, en het ogenblikkelijke zoutgehalte.

Door zulke metingen te combineren met metingen van de gemiddelde snelheids- en dichtheidsverdeling in de verticaal, kan bovendien een directe verificatie van de formules voor D_i en D_s verkregen worden, wat weer van praktisch nut is voor de berekening van de zout- en zoetwaterbeweging bij gegeven getijden en bovenafvoeren.

Literatuur:

1. L.F. Richardson, Proc. Royal Soc. Ser. A. Vol. 97, 1920, p. 354.
 2. L. Prandtl, Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebiete, 1929.
 3. J.P. Jacobsen, Rapp. Proc. Verb. Réunions Conseil Perm. Intern. Exploration de la mer, Vol. 64, 1930, p. 59 - 68.
 - 4a. Th. von Karman, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1930, p. 58 - 76.
 - 4b. " , Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech., Stockholm, 1930, p. 83 - 92.
 5. G.I. Taylor, Rapp. Proc. Verb. Réunions Conseil Perm. Intern. Exploration de la mer, Vol. 76, 1931, p. 35 - 42.
 6. K.F. Bowden and J. Proudman, Proc. Royal Soc. Ser. A. Vol. 199, 1949, p. 311 - 327.
 7. J.J. Dronkers, Algemene beschouwingen over zout- en zoetwaterbeweging. Berekeningsmethoden.
-

English abstract.

The paper deals with the turbulence in the movement of salt and fresh water, especially in the Dutch estuaries.

1. Introduction.

Three elements in the mechanism of the turbulence are distinguished: the turbulent flow, the salinity, and the density. The turbulent flow is the main agent of the diffusion of the salt; the alterations in the salinity produce alterations in the density; the differences in density are so great in the case considered, that their influence upon the turbulence in the flow is considerable.

We may for brevity identify salinity and density, saying that density is diffused by the turbulent flow, meaning that density is altered by the diffusion of salt by the turbulent flow.

Distinction is made between the main flow under influence of tides and fresh water discharge, and the much more rapid variations of the turbulence. The main flow is supposed to be varying so slowly, that turbulence may be investigated by presuming main flow characteristics independent of the time t and of the length- coordinate x .

2. The kinematic- geometrical constitution of the turbulence.

Treatment of the turbulence on the Eulerian plan, by an extension of von Karman's similarity theory.

As by experience the turbulence for great Reynolds numbers is largely independent of viscosity, we neglect viscosity; accordingly we neglect molecular diffusion and assume constant volume of a particle. The transport of density is then expressed by (3) (\bar{v} is instantaneous velocity- vector, ρ is density).

Simplifying the problem to a two- dimensional form (z is vertical coordinate), and eliminating the pressure p , yields (8) (a_x, a_z are acceleration- components, w_y is vorticity in $x-z$ -plane). Neglect of accelerations with respect to g (gradient of gravity) yields (10).

We consider turbulence near a point moving with the main flow; this point we adopt as origin of the coordinate- system. Density, velocity and vorticity are resolved into main flow values (S, U) which are expanded in MacLaurin series with respect to z , and turbulent fluctuations (s, u, v, w) (v. (11), (12), (13), (15)). Substitution in (10) and (4), retaining only the lowest order terms of the expansions, yields (16) and (17).

We investigate whether we may presume that turbulence in different circumstances will develop similar to one pattern. Therefore we introduce scale coefficients L (length), T (time), C (velocity), and D (density), and reduce (16) and (17) to (18) and (19). By comparing the terms in these equations, we find that turbulence develops similar to one pattern, only if Richardson's parameter r (v. (25)) is invariable. Hence we must generally presume not one pattern, but a continuous range of patterns of which the characteristics are functions of r .

As we are to some extent free in defining the scale coefficients, we define L according to von Karman's formula (26). Then in the formula for the coefficient of diffusion of momentum D_i (coefficient of shear stress) a function of r is introduced as factor (v. (27)). We arrive at a similar formula (28) for the coefficient of diffusion of salt (density) D_s . The theory does not provide the form of the functions F and f ; they might be deduced empirically.

The theory might fail at a maximum or at an inflection- point of the vertical velocity- distribution. We might try to deal with such points by making F and f dependent moreover on a parameter involving U''' .

Appendix to par. 2. Demonstration that variations of volume by molecular mixing, are negligible when molecular diffusion of salt is negligible.

3. The statistical constitution of the turbulence.

Treatment of the turbulence on the Lagrangian- plan, in the way of Taylor.

We consider a parcel of liquid, and for the sake of simplicity as-

sume the surrounding liquid to have main flow movement and density.

The vertical movement of the parcel is expressed by (31), where M is mass and I is volume of the parcel, W is a coefficient of viscous friction, and K_y is the resulting pressure-force; y is vertical displacement, v is vertical velocity and s is difference in density of parcel relatively to the surrounding liquid. The continuity of density (salt) is expressed by (32), where D is a coefficient for the diffusion of density from the parcel. Reduction of (31) and (32) yields (33) and (34), and elimination of s yields (35).

The vertical movement is induced by the pressure-force K_y , depending on the horizontal movement of the parcel. The horizontal movement in turn is affected by the vertical movement which carries the parcel to layers with other horizontal velocities. It is therefore sensible to trace the tendencies of the vertical movement by investigating the free oscillations.

There is a tendency to aperiodic vertical movements when (36) is valid, and a tendency to periodic movements with angular frequency ω (v. (38)), when (37) is valid. The decay of the periodic movement is small, when (39) is valid.

In case of absence of a density gradient, a tendency to aperiodic vertical movements appears to prevail.

Now an estimation is made for the viscous friction-coefficient k_w , and for the molecular diffusion-coefficient k_d of a spherical parcel with radius L , in water. Then by considering the values of the density gradient and of von Karman's mixing length L as occurring in the Dutch estuaries, we arrive at the presumption that a tendency to slowly decaying periodic vertical oscillations may prevail in this case.

In case of an aperiodic movement the autocorrelation-function R will have a trend like that of fig. 1, and in case of a periodic movement with little decay it will have a trend like of fig. 2; R is defined by (40) where the bar denotes an average over a number of parcels of equal size and in statistically equivalent circumstances.

Integration of (34) assuming v to be a given function of time, yields an expression (41) for the coefficient of diffusion of salinity D_S^* for all parcels of equal size and in statistically similar circumstances; here T is a function deduced from the autocorrelation-function R according to (42).

The horizontal movement of the parcel is expressed by (43) (u is horizontal velocity of parcel relative to the surrounding liquid, K_x is resulting horizontal pressure-force). As the pressure-forces transmit energy from the horizontal to the vertical movements, we conceive of K_x crudely as a force opposing horizontal movement u (coefficient k_p); this yields (44).

By integration of (44) we arrive at (45) to express the coefficient of diffusion of momentum D_i^* , for one kind of parcels, where we encounter the function T (v. (42)) again.

In case of predominant aperiodic vertical movements (v. fig. 1) the trend of the function T is like in fig. 3. In case of predominant periodic movements with little decay (fig. 2) the trend is like in fig. 4 with a maximum near $k = n_0$ (n_0 defined by (39)).

Considering that for all parcels k_d is less than, or at most about equal to $k_w + k_p$ it appears that (46) will be valid in case of S' being zero in view of fig. 3.

In case of S' being as great as it uses to be in the Dutch estuaries, k_w may be expected to be less than n_0 for most parcels, and as k_p may be expected to be of the same order of magnitude as k_w (v. par. 4) and k_d to be much less in water, we arrive at the plausibility of (47) being valid in this case, in view of fig. 4.

Equation (47) is in agreement with observations of Jacobson in the Danish waters.

The result is explained by considering that parcels wandering over rather great distances may appreciably transmit momentum from one layer to another. When the parcels adapts its density to the surrounding liquid slowly (k_d small), it tends strongly to return to its original layer, and in do-

ing so it ultimately transmits salinity only to a small amount.

It may be expected that the difference between D_s and D_i will be less in air than in water, since in air $k_d \approx k_w$, and in water $k_d \ll k_w$.

4. Density gradient hindering the development of turbulence.

Derivation on the Eulerian plan of Taylor's condition (48) for the possibility of turbulence, by formulating that the energy supplied by the turbulent shearing stress τ must cover at least the increase of gravitational energy by transport of density in the vertical direction.

Approach to the same problem on the Lagrangian plan by considering the power-budget of a parcel. The power budget of the horizontal movement is expressed by (49): power raised from the main flow equals power dissipated by friction plus power invested in the pressure-field.

As larger parcels dissipate relatively less energy than smaller parcels, the former may be expected to lose energy in favour of the latter. Now we consider an average kind of parcels which is significant for the energy-budget, so that a parcel of this kind gains as much energy from other parcels as it loses energy to other parcels; such a parcel invests as much power in the pressure-field by its horizontal movement, as it raises from that field by its vertical movement. The power-budget of the vertical movement of such a parcel is expressed by (50): power raised from the pressure-field equals power dissipated by friction plus rate of increase of gravitational potential energy. The total power-budget of the parcel is expressed by (51).

A second kind of average parcels is significant for the diffusion of momentum, so that for these parcels (52) is valid.

A third kind of average parcels is significant for the diffusion of density, so that for these parcels (53) is valid.

By tentatively identifying the three kinds of average parcels we arrive at (52). As the dissipation-term is always positive, we may deduce (48) once more;

In case of absence of density differences, the third term in (50)

drops out, and as horizontal and vertical velocity fluctuations are of the same order of magnitude by experimental evidence, k_p must be of the same order of magnitude as k_w .

Jacobsen's observations put in evidence that the two terms in the right-hand member of (52) or (51) are crudely of the same order of magnitude. Observations in the atmosphere indicate that vertical and horizontal velocity fluctuations are still of the same order of magnitude when there is a density gradient. Adopting this likewise as evidence in case of a density gradient in water, we infer from (50) that k_p will not amount to more than a few times k_w .

5. Final considerations.

Adopting Jacobsen's observations as evidence for a tendency to periodic turbulent motions, we should expect a period of the order of magnitude of one minute to be prevailing in the turbulent spectre.

Periods of this order of magnitude have been found, e.g. by Bowden and Proudman (Lit. 6). As an explanation these authors offer either (a) turbulent eddies with vertical axis and diameters of e.g. 50 or 100 m, or (b) internal waves. According to the above considerations we now offer as a third possibility (c) vertical oscillations of parcels of liquid.

Adopting the third explanation, we should assume sheet-like parcels of longitudinal dimensions of e.g. 50 or 100 m, and a much smaller thickness (for the depth is no more than some 10 or 20 m). In order to explain the smaller period oscillations found likewise by Bowden and Proudman, we might assume this smaller scale turbulence to be developing internally in the sheet-like parcels, which are then assumed to be of rather homogeneous salinity.

There is probably some connection between the oscillating movement of parcels and the internal waves; the selective period of the oscillations is the same as the limiting period for the existence of internal waves. A distinction is yet necessary, since we can account for diffusion as a result of oscillations of parcels, but we can not well explain diffusion by internal waves.

Several of the questions discussed can be cleared by measurements of

local fluct-

tuations in salinity, horizontal and vertical velocity, and analysing correlation-products \overline{uv} and \overline{sv} .

The Central Research- division of the Rijkswaterstaat is preparing such an investigation.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

