

Les problèmes de navigation résolus par la géométrie analytique radiale

Communication faite à la Section Technique par Mr. J. LEGRAND,
Capitaine au L.C.R.M. — Professeur à l'Ecole Supérieure de
Navigation Maritime.

C'est dans cet important mémoire que Maurice Alliaume a exposé ses vues originales sur ce que devrait être la partie purement mathématique d'un traité de Navigation. Il a paru dans le 5^e fascicule des Annales des Travaux Publics de Belgique, octobre 1909, et en tiré à part d'une cinquantaine de pages chez l'Editeur Goemare à Bruxelles, la même Année.

Il comporte les chapitres suivants :

Introduction théorique ;

Le Compas, l'azimut et la correction des routes ;

La loxodromie et la carte de Mercator ;

Le grand cercle ;

Le point estimé ;

Le point astronomique par hauteurs simultanées, et les méthodes graphiques correspondant aux trois cas, Lalande, Borda et Saint-Hilaire ;

Le point astronomique par hauteurs simultanées ;

Le point astronomique exact par trois hauteurs, ou méthode nouvelle de détermination du point.

Il constitue donc un traité suffisamment complet de Navigation.

Introduction théorique : l'auteur l'a limitée aux développements de géométrie analytique radiale indispensables à la résolution des problèmes de navigation qu'il s'est proposé de traiter. Le lecteur les trouvera ci-dessous sous une forme quelque peu condensée.

La géométrie analytique radiale : ce doit être, pour que la navigation puisse s'édifier sur elle, une géométrie de l'espace. Un point de l'espace étant choisi, on y rapporte toutes les constructions que l'espace peut comprendre ; *ce point est le centre de l'espace*.

Par ce point passent une infinité de rayons — d'où le nom de géométrie analytique radiale — et dès lors une infinité de plans. De tous ces rayons et de tous ces plans, on en choisit un certain nombre qui serviront de repères, et on établit par rapport à eux les équations des figures de l'espace, et en premier lieu, celles des sur-

faces coniques, immédiatement déduites de l'équation de l'angle de deux rayons. Ces relations sont les relations fondamentales de la géométrie analytique radiale.

En particulier, un rayon est défini par ses projections sur deux plans de repère rectangulaires ; les coordonnées d'un rayon s'appellent longitude et latitude (L, G).

Problèmes généraux : 1°) angle ou distance angulaire de deux rayons (G', L'), (G'', L''). — C'est le moindre angle positif Δ vérifiant la relation

$$\cos. \Delta = \sin. L' \sin. L'' + \cos. L' \cos. L'' \cos. (G' - G'') \quad (1)$$

Si l'un d'eux est dans le plan fondamental (plan de latitude 0), il vient pour $L'' = 0$

$$\cos. \Delta = \cos. L' \cos. (G' - G'').$$

2) *Equation d'un cône*. — Le cône étant le lieu des rayons distants d'un angle Δ de l'axe (G_0, L_0), il a pour équation

$$\sin. L_0 \sin. L + \cos. L_0 \cos. L \cos. (G - G_0) - \cos. \Delta = 0. \quad (2)$$

Cette équation s'écrit plus simplement, après quelques substitution faciles à trouver :

$$A \sin. G + B \cos. G + C \operatorname{tg}. L - D \operatorname{sec}. L = 0. \quad (3)$$

3) *Equation d'un plan* : le plan étant un cône de demi-ouverture $\Delta = 90^\circ$, l'équation (2), pour $\Delta = 90^\circ$, devient

$$\sin. L_0 \sin. L + \cos. L_0 \cos. L \cos. (G_0 - G) = 0$$

ou

$$A \sin. G + B \cos. G + C \operatorname{tg}. L = 0 \quad (4)$$

c'est l'équation du plan.

4) *Intersection de deux cônes* : soient les deux cônes d'expression

$$A' \sin. G + B' \cos. G + C' \operatorname{tg}. L - D' \operatorname{sec}. L = 0$$

$$A'' \sin. G + B'' \cos. G + C'' \operatorname{tg}. L - D'' \operatorname{sec}. L = 0.$$

Ces équations étant homogènes en $\sin. G, \cos. G, \operatorname{tg}. L, \operatorname{sec}. L$, il vient, en écrivant, comme ci-dessous, la matrice des coefficients des inconnues

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1) & 2) & 3) & 4) \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array} \right\|$$

et le déterminant des colonnes m et n p. ex, étant noté Δ_{mn}

$$\text{tg. G} = \frac{-(\Delta_{13} \Delta_{23} - \Delta_{14} \Delta_{24}) \pm \sqrt{(\Delta_{13} \Delta_{23} - \Delta_{14} \Delta_{24})^2 - (\Delta_{13}^2 - \Delta_{14}^2 - \Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2)(\Delta_{23}^2 - \Delta_{24}^2 - \Delta_{34}^2)}}{\Delta_{13}^2 - \Delta_{14}^2 - \Delta_{23}^2} \quad (1)$$

$$\text{sin. L} = \frac{\Delta_{13} \Delta_{14} - \Delta_{23} \Delta_{24} \pm \sqrt{(\Delta_{13} \Delta_{14} - \Delta_{23} \Delta_{24})^2 - (\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2)(\Delta_{14}^2 + \Delta_{24}^2 - \Delta_{12}^2)}}{\Delta_{21}^2 - \Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2}$$

5) Intersection d'un plan et d'un cône : les formules (5) subsistent mais chaque déterminant d'indice 4 perd un terme car D' ou $D'' = 0$.

6) Intersection de deux plans : dans ce cas, $D' = D'' = 0$ et la matrice devient

$$\begin{vmatrix} 1) & 2) & 3) \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

Les plans étant respectivement d'équation :

$$A' \sin. G + B' \cos. G + C' \text{tg. L} = 0$$

$$A'' \sin. G + B'' \cos. G + C'' \text{tg. L} = 0$$

il vient :

$$\text{tg. G} = - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} \text{ ou } \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{31}} \quad (6)$$

$$\text{sin. L} = \pm \frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{31}^2}}$$

7) Angle d'une surface et d'un plan principal.

Si l'on appelle plan principal, un des plans contenant l'axe du système, rayon déterminé de la gerbe de rayons passant par le centre de l'espace, cet angle R, est fourni par la relation :

$$\text{ctg. R} = - \frac{1}{\cos. L} \cdot \frac{dL}{dG} \quad (7)$$

Pour un cône $A \sin. G + B \cos. G + C \operatorname{tg}. L - D \operatorname{séc}. L = 0$,
 on a, en particulier

$$\operatorname{ctg}. R = \cos. L \frac{A \cos. G - B \sin. G}{C - D \sin. L}$$

et pour un plan ($D = 0$)

$$\operatorname{ctg}. R = \cos. L \frac{A \cos. G - B \sin. G}{C}$$

8) Angle de 2 plans : c'est l'angle de leurs normales ; on trouve
 ainsi pour :

$$\begin{aligned} A' \sin. G + B' \cos. G + C' \operatorname{tg}. L &= 0 \\ A'' \sin. G + B'' \cos. G + C'' \operatorname{tg}. L &= 0 \end{aligned} \quad (8).$$

$$\cos. \varphi = \frac{A' A'' + B' B'' + C' C''}{K' K''} \quad \begin{aligned} K'^2 &= A'^2 + B'^2 + C'^2 \\ K''^2 &= A''^2 + B''^2 + C''^2 \end{aligned}$$

La condition de perpendicularité s'écrit :

$$A' A'' + B' B'' + C' C'' = 0.$$

9) Plan tangent à une surface : le plan tangent suivant le rayon
 (G_1, L_1) à la surface $L = F(G)$, $L_1 = F(G_1)$, a pour équation :

$$\frac{1}{\cos. L_1} \frac{d L_1}{d G_1} \sin. (G_1 - G) - \sin. L_1 \cos. (G_1 - G) + \cos. L_1 \operatorname{tg}. L = 0. \quad (9)$$

Systèmes de coordonnées :

Le centre de la Terre est adopté pour centre de l'espace.

Les coordonnées horizontales sont : l'azimut (G), et la hauteur
 (L) , le plan fondamental ($L = 0$) étant l'horizon rationnel.

Les coordonnées équatoriales sont :

la longitude, l'angle horaire, l'ascension droite, (G) la latitude, la
 déclinaison (L), le plan fondamental étant l'équateur.

I^{re} partie : la route, le compas.

L'auteur considère, dans cette partie, huit demi-plans verticaux,
 ayant pour axe vertical commun la verticale d'un point quelconque
 A du navire. Ces huit plans numérotés de 1 à 8 déterminent deux

à deux des diédres, dont onze seulement nous intéressent :

Ce sont : (1.2) la Variation V du compas

(1.3) le cap vrai C_v du navire

(2.3) le cap au compas C_c du navire

(1.4) l'azimut vrai Z' d'un astre A'

(2.4) l'azimut au compas Z'_c de A'

(1.5) la déclinaison D du lieu

(5.2) la déviation δ correspondant au cap du Navire

(1.6) la route vraie relative R_r

(3.6) la dérive d

(1.7) la route du courant r

(1.8) la route vraie absolue R_a .

Appelant (G, L) les coordonnées du lieu, (G', L') les coordonnées géographiques de l'astre, il vient, en appliquant les formules (7) et (1) de l'introduction théorique :

$$\cotg. Z' = \cos. L \left[\frac{\tg. L'}{\sin. (G - G')} - \frac{\tg. L}{\tg. (G - G')} \right]$$

$$\cos. Z' = \pm \frac{\sin. L' - \sin. L \sin. H'}{\cos. L \cos. H'}$$

$$\sin. Z' = \pm \frac{\cos. L' \sin. (G - G')}{\cos. H'}$$

la première formule donnant Z' en fonction des coordonnées du lieu et de l'astre, la seconde en fonction de la déclinaison de l'astre, de sa hauteur vraie H' et de la latitude, la troisième indépendamment de L . c.a.d. pour une latitude inconnue ou incertaine.

Ces formules se prêtent bien à la recherche de l'erreur $\Delta Z'$ de l'azimut pour des erreurs $\Delta L'$, $\Delta H'$, ΔL , ΔG , $\Delta G'$.

Le calcul montre que les conditions les plus favorables sont réalisées pour les astres voisins du 1^{er} vertical et de faible hauteur, la latitude étant la moins élevée possible.

Enfin, il existe entre R_a et R_r une relation pouvant être mise sous la forme

$$R_a = R_r + \text{ang. tg.} \frac{v \sin. (r - R_r)}{V + v}$$

V étant la vitesse du navire mesurée au loch, v la vitesse du courant, telle que R_a , route vraie absolue se trouve exprimée par

$$R_a = R_c + D + \delta + d + \text{ang. tg.} \frac{v \sin. (r - R_c)}{V + v},$$

la différence entre R_r et R_c étant une correction petite du second ordre et négligeable.

La loxodromie : la loxodromie est une route d'orientation constante, le cône loxodromique, une surface radiale coupant les plans principaux sous un angle constant.

Pour écrire son équation, l'auteur exprime que le plan tangent suivant un rayon quelconque (G_1, L_1), et le méridien $G = G_1$, se coupent suivant un angle R mesuré comme un azimut.

Par application de la formule (9) de l'introduction, il vient, après élimination des coefficients et suppression des indices

$$-dG = \text{tg. } R \frac{dL}{\cos. L} \quad (1)$$

équation différentielle du cône loxodromique.

Cette forme remarquable, prête pour l'intégration, montre que pour $R = 0^\circ$ ou 180° , $G = \text{constante}$, le cône loxodromique se confond avec un méridien

pour $R = 90^\circ$ ou 270° , $L = \text{constante}$, la loxodromie se réduit à un parallèle, le cône loxodromique à un cône principal ; la loxodromie ne peut donc être tangente soit à un méridien soit à un parallèle, sans se confondre entièrement avec lui.

Intégrant la relation (1), ci-dessus, il vient pour un cône loxodromique d'angle de route R contenant un rayon (G_0, L_0),

$$G_0 - G = \text{tg. } R \int_{L_0}^L \frac{dL}{\cos. L} = \left[\log. \text{tg.} \frac{90^\circ + L}{2} - \log. \text{tg.} \frac{90^\circ + L_0}{2} \right]$$

$$- \text{Le 2}^{\text{d}} \text{ membre } \int_{L_0}^L \frac{dL}{\cos. L} \text{ ou } \textit{latitude croissante} \text{ se calcule}$$

comme suit :

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{\cos. L} = \int_{L_0}^L dL \cdot \sec. L = \lim. de :$$

$$\left\{ \sec. L_0 + \sec. (L_0 + \Delta L) + \sec. (L_0 + 2 \Delta L) + \dots + \sec. L \right\} \Delta L$$

en se contentant de faire $\Delta L = 1'$, et au moyen d'une table de sécantes naturelles.

Remarque : la différence $\int_0^L \frac{dL}{\cos. L} - \int_0^{L_0} \frac{\cos. L}{dL}$ s'appelle

différence de latitudes croissantes ΔL_c correspondant aux latitudes L et L_0 ; c'est pratiquement la différence de deux lectures d'une table telle que la table « Meridional Parts » de Norie's.

Mesure du chemin parcouru : l'auteur calcule ensuite la longueur du chemin parcouru par un *developpement en secteur* d'une portion de nappe loxodromique comprise entre deux rayons donnés.

Si l'on appelle : (G_0, L_0) , $(G_0 + \Delta G, L_0 + \Delta L)$ deux rayons d'une surface loxodromique d'angle R , $\Delta \sigma$ leur distance mesurée sur le secteur loxodromique, $\Delta \sigma + \varepsilon$ leur plus courte distance angulaire, ε étant très petit vis à vis de $\Delta \sigma$, il vient pour le développement de la surface entre deux latitudes L_0 et L , $\Delta \sigma + \varepsilon$ étant projeté sur le méridien G_0

$$\sigma = - \frac{L - L_0}{\cos. R} \quad (1)$$

D'autre part, en projetant sur le plan tangent suivant le rayon (G_0, L_0) au cône principal L_0 , on trouve entre deux longitudes G_0 et G

$$\sigma = - \int_{G_0}^G \frac{\cos. L \cdot dG}{\sin. R} \quad (2)$$

l'expression $L - L_0$ s'appelle *la différence en latitude* ΔL ,

$\int_{G_0}^G \cos. L. d G$ est le chemin *Est-Ouest* Δ_e .

Eliminant R entre (1) et (2), il vient

$$\sigma^2 = (L - L_0)^2 + \left(\int_{G_0}^G \cos. L. d G \right)^2, \quad (3)$$

expression montrant que les grandeurs absolues de la distance loxodromique du changement en latitude et du chemin *Est-Ouest*, suivant un angle R sont comme l'hypothénuse et les deux autres côtés d'un triangle rectangle d'angle R opposé à l'un d'eux, l'homologue du chemin est-ouest.

$$\int_{G_0}^G \cos. L. d G = \cos. L_m (G - G_0), \text{ pour } L_m \text{ compris entre } L_0 \text{ et } L,$$

et avec cette approximation la table de point (*Traverse Table*), construite d'après l'expression (3) permet encore de passer de ΔG à Δ_e et inversement.

pratiquement on écrit :

$$\int_{G_0}^G \cos. L. d G = (G - G_0) \cos. \frac{L_0 + L}{2} \quad (4)$$

La carte de Mercator : un rayon de la gerbe de rayons géocentrique étant déterminé par deux coordonnées, la gerbe de rayons peut-être figurée sur une surface plane. Il y a intérêt que cette représentation ou *carte* soit telle qu'à une loxodromie quelconque corresponde une droite. Ainsi les méridiens $R = 0$ et les cônes principaux $R = 90^\circ$ deviendront des groupes de droites parallèles.

Cette condition est réalisée par un système de coordonnées rectangulaires en X et Y, et les relations

$$X = G$$

$$Y = \int_0^L \frac{dL}{\cos. L}$$

En effet pour $X = X_0$
 $Y = Y_0$, il vient

$$X_0 = G_0$$

$$Y_0 = \int_0^{L_0} \frac{dL}{\cos. L}$$

et $X - X_0 = -\text{tg. } R (Y - Y_0)$

équation d'une droite coupant les méridiens suivant un angle R , l'axe des x figurant l'équateur, l'axe des y le premier méridien, la représentation du pôle étant rejetée à l'infini.

Un tel système s'appelle système de Mercator.

Hauteurs simultanées. Une hauteur d'astre donne un lieu géométrique du navire, et en principe deux hauteurs permettent de déterminer sa position. L'ambiguïté est levée par l'estime qui fournit une première approximation. On remplace les deux lieux géométriques par des lieux approchés ou les équations du problème par des équations approchées.

Soit donc un astre A' de hauteur vraie H' ; son observation apprend que la verticale du navire appartient à un cône d'axe (G', L') et de demi-ouverture $90^\circ - H'$.

Simultanément, la hauteur H'' d'un second astre A'' (G'', L'') fournit un second lieu géométrique et la verticale du navire est ainsi l'un des deux rayons d'intersection des deux cônes

$$\sin. L' \sin. L + \cos. L' \cos. L \cos. (G' - G) - \sin. H' = 0$$

$$\sin. L'' \sin. L + \cos. L'' \cos. L \cos. (G'' - G) - \sin. H'' = 0$$

La solution de ce système fournit une réponse rigoureusement exacte du problème, mais elle est longue et pénible, aussi, dit l'auteur, préfère-t-on obtenir la position du navire par approxima-

tions successives, avec la position estimée E, de coordonnées (G_e, L_e), comme première approximation.

Examinons la méthode *Marcq de Saint-Hilaire*.

Soit situé sur la carte de Mercator le point estimé E (G_e, L_e) et tracées les deux courbes C', C'', représentation des deux lieux coniques ; le point vrai X (G, L) est leur intersection *voisine* de E. Si on a eu soin d'observer des astres de hauteurs peu considérables, ces courbes sont à faible courbure, et si, par deux points, D' (G'_d, L'_d) sur c', D'' (G''_d, L''_d) sur c'' dits points déterminatifs, on construit respectivement la tangente à chacune d'elles, ces tangentes, t' et t'', se coupent en un point très proche de X, — de telle sorte que si la distance EX est petite du 1^{er} ordre, sa distance à X est petite du 2^e ordre. C'est la seconde approximation dont on se contente généralement.

La traduction mathématique de ces procédés graphiques est la suivante :

1°) choix d'une surface c contenant le rayon E.

2°) calcul des points D' et D'' avec les lieux coniques C' et C''.

3°) détermination des nappes loxodromiques et des tangentes t' et t'' de rayons D' et D'' à c' et à c''.

4°) calcul de X, leur rayon commun.

a) *surface c* : elle résulte d'après Marcq de Saint-Hilaire, de l'ensemble des plans azimutaux de A' et A'', déterminés par les deux rayons (G_e, L_e) de E, (G', L') de A', et (G_e, L_e) de E, (G'', L'') de A''.

b) *calcul des points déterminatifs* : le calcul des rayons déterminatifs (L'_d, G'_d), (L''_d, G''_d) se ramène au calcul de l'intersection de deux cônes, calcul exposé dans l'introduction théorique.

Il vient pour D'

$$L'_d - L_e = (H' - H'_e) \cos Z'_e \quad (1)$$

$$G'_d - G_e = (H' - H'_e) \frac{\sin Z'_e}{\cos L_e}$$

et par analogie, pour D''

$$L''_d - L_e = (H'' - H''_e) \cos Z''_e \quad (2)$$

$$G''_d - G_e = (H'' - H''_e) \frac{\cos L_e}{\sin Z''_e}$$

c) les azimuts déterminatifs Z'_d et Z''_d de A' et A'' étant déterminés, les équations des tangentes t' et t'' s'expriment par :

$$G - G'_d = \text{ctg. } Z'_d \int \frac{dL}{\cos. L} \cdot \frac{L}{L'_d}, \quad G - G''_d = \text{ctg. } Z''_d \int \frac{dL}{\cos. L} \cdot \frac{L}{L'_d}$$

d) *Intersection X* : remarquant qu'on a avec l'approximation usuelle $Z'_d = Z'_e$; $Z''_e = Z''_e$, il vient, après substitution, pour les systèmes (1) et (2)

$$(G - G_e) \cos. L_e = \frac{(H' - H'_e) \cos. Z''_e - (H'' - H''_e) \cos. Z'_e}{\sin. (Z''_e - Z'_e)} \quad (3)$$

$$L - L_e = \frac{(H' - H'_e) \sin. Z''_e - (H'' - H''_e) \sin. Z'_e}{\sin. (Z''_e - Z'_e)}$$

Remarque : l'examen des formules sous (1), (2), (3), montre que le procédé Marcq de Saint-Hilaire est également bon, quels que soient les azimuts des astres observés.

Hauteurs non simultanées : abordant ensuite le problème des hauteurs non simultanées, M. Alliaume, arrive aux conclusions suivantes : que dans l'intervalle de deux observations, la déformation du lieu géométrique est négligeable si le chemin parcouru est comparable à l'incertitude de l'estime.

que c'est la petitesse du déplacement σ qui permet aussi de ne pas tenir compte de l'augmentation d'erreur de l'estime dans l'intervalle des observations, car elle est petite par rapport à σ , donc du 2^e ordre et négligeable,

que la translation du lieu géométrique est principalement proportionnelle à σ , sa déformation à σ^2 ,

qu'il est permis pourvu que σ soit, de calculer le pagel de première observation d'après les seuls éléments de la première observation.

Points exact par trois hauteurs : ce dernier chapitre particulièrement remarquable du mémoire, a pour objet de substituer aux méthodes courantes ayant pour point de départ une exactitude suffisante du point estimé, une méthode conduisant à la même exactitude,

sans données de première approximation. L'application de cette méthode, *absolument nouvelle*, s'impose quand après une série de mauvais temps ou par des latitudes, très élevées, on ne peut savoir quelle confiance accorder aux résultats de l'estime.

Soient trois astres observés simultanément, A' (G', L'), A'' (G'', L''), A''' (G''', L'''), de hauteurs vraies H' H'' H'''.

La verticale du navire est le rayon commun aux trois cônes :

$$\begin{aligned} \sin. L' \sin. L + \cos. L' \cos. L (G' - G) - \sin. H' &= 0 \\ \sin. L'' \sin. L + \cos. L'' \cos. L (G'' - G) - \sin. H'' &= 0 \\ \sin. L''' \sin. L + \cos. L''' \cos. L (G''' - G) - \sin. H''' &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

et appartient comme telle aux trois plans déduits des cônes pris deux à deux. Les coordonnées du rayon exact seront donc les racines, d'un des trois systmèmes formés par deux de ces équations. On en tirera ainsi les coordonnées de six rayons, qui pour des hauteurs H', H'', H''' parfaites se confondraient rigoureusement trois à trois ; la moindre idée de la région du globe où se trouve le navire permet de lever l'ambiguïté relative aux deux rayons antipodes résultants. En pratique, les rayons ne seront pas superposés mais entrêment voisins.

Les trois cônes d'équations (1) déterminent donc trois plans

$$\frac{\sin. H'}{\cos. L'} \cos. (G' - G) - \frac{\sin. L''}{\cos. H''} \cos. (G'' - G) + \left(\frac{\sin. L'}{\sin. H'} - \frac{\sin. L''}{\sin. H''} \right) \text{tg. } L = 0$$

(1 bis)

$$\frac{\cos. L''}{\sin. H''} \cos. (G'' - G) - \frac{\cos. L'''}{\sin. H'''} \cos. (G''' - G) + \left(\frac{\sin. L''}{\sin. H''} - \frac{\sin. L'''}{\sin. H'''} \right) \text{tg. } L = 0$$

$$\frac{\cos. L'''}{\sin. H'''} \cos. (G''' - G) - \frac{\cos. L'}{\sin. H'} \cos. (G' - G) + \left(\frac{\sin. L'''}{\sin. H'''} - \frac{\sin. L'}{\sin. H'} \right) \text{tg. } L = 0$$

pouvant être mis sous la forme

$$\begin{aligned} A_1 \sin. G + B_1 \cos. G + C_1 \text{tg. } L &= 0 \text{ pour } A'' \text{ et } A''' \\ A_2 \sin. G + B_2 \cos. G + C_2 \text{tg. } L &= 0 \text{ pour } A''' \text{ et } A' \\ A_3 \sin. G + B_3 \cos. G + C_3 \text{tg. } L &= 0 \text{ pour } A' \text{ et } A'' \end{aligned} \quad (2)$$

Le système (2) fournit les solutions du problème par rapport à $\sin. G$, $\cos. G$, et tg. L , les coefficients ayant eu égard à (1 bis), les valeurs ci-après

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sin. G'' \cos. L'' \sin. H''' - \sin. G''' \cos. L''' \sin. H'' \\
 B_1 &= \cos. G'' \cos. L'' \sin. H''' - \cos. G''' \cos. L''' \sin. H'' \\
 C_1 &= \sin. L'' \sin. H''' - \sin. L''' \sin. H'' \\
 A_2 &= \sin. G''' \cos. L''' \sin. H' - \sin. G' \cos. L' \sin. H'' \\
 B_2 &= \cos. G''' \cos. L''' \sin. H' - \cos. G' \cos. L' \sin. H'' \quad (3) \\
 C_2 &= \sin. L''' \sin. H' - \sin. L' \sin. H'' \\
 A_3 &= \sin. G' \cos. L' \sin. H'' - \sin. G'' \cos. L'' \sin. H' \\
 B_3 &= \cos. G' \cos. L' \sin. H'' - \cos. G'' \cos. L'' \sin. H' \\
 C_3 &= \sin. L' \sin. H'' - \sin. L'' \sin. H'
 \end{aligned}$$

La condition pour que (2) ait une solution différente de $\sin. G = \cos. G = \text{tg. L} = 0$ s'exprime par les matrices

$$\begin{vmatrix} 1) & 2) & 3) \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1) & 2) & 3) \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1) & 2) & 3) \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \neq 0$$

et chacun de ces systèmes fournira les coordonnées d'un des trois rayons cherchés, si bien qu'il vient enfin :

$$\text{tg. G} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{31}}, \quad \frac{1}{\sin. L} = \pm \frac{\sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{31}^2}}{\Delta_{12}}$$

les symboles Δ_{23} , Δ_{31} ... etc ayant le signification définie au début de cette étude.

Si l'on a assez de confiance dans l'enactitude des hauteurs, on pourra ne rechercher qu'un seul de ces trois rayons, et les calculs en seront notablement réduits.

Conclusion : le cause de Maurice Alliaume aura été bien mal servie, nous le craignons, par cet aperçu, forcément incomplet est décousu, que nous nous sommes efforcé de donner de son magistral mémoire. La véritable révolution dans l'esprit et l'exposé de la Navigation théorique que son auteur aurait voulu susciter n'a pas eu lieu ; nous ne pouvons qu'en accuser le goût de l'ornière, du déjà vu, et regretter qu'à l'aube de l'ère qu'on nous dit dépouillée de tout appareil spirituel, une telle somme de labeur doive rester sans emploi.

Notice biographique de Mr. MAURICE ALLIAUME. — Né à La Louvière le 28 juin 1882 Maurice Alliaume après avoir fait ses humanités au Collège St Pierre à Louvain et passé une année à l'Institut Préparatoire entra comme étudiant aux Ecole Spéciales de l'Université de Louvain en octobre 1899. Il en sortit en 1904 porteur des diplômes d'Ingénieur Civil des Mines et de candidat en sciences physiques et mathématiques, et ayant subi avec distinction la première épreuve du doctorat en ces mêmes sciences il devait conquérir brillamment ce dernier grade deux ans plus tard, en 1906, devant le Jury Central. Dans l'entretemps, il poursuivit ses études à Paris sous la direction de M. BOUSSINESQ et présente, en 1905, au concours des Bourses de voyage une thèse de mécanique Rationnelle et il fut lauréat. Sa préparation terminée, il entra dans le corps professoral du Collège Communal de Dinant. Mais après quelques mois, il fut appelé à Anvers comme professeur de mathématiques et d'Astronomie à bord du navire Ecoles. Comte de Smet de Nayer et aussi au Collège N. Dame. C'est de là qu'il revint à l'Université de Louvain, déjà muni d'une précieuse expérience didactique, à la demande de Mr GOEDSEELS dont il était l'élève de prédilection et qui voulait le préparer lui-même comme son successeur, en lui faisant donner successivement, sous sa direction, les diverses leçons dont il était le titulaire à Louvain. En 1913, Mr ALLIAUME fut chargé de cours comme suppléant de son maître, pour l'enseignement de la géométrie descriptive appliquée, de l'astronomie, du calcul de probabilités, de la géodésie, de la géographie mathématique et de la topographie. La guerre retarda jusqu'à la fin de 1918 sa nomination comme professeur et titulaire de ces cours. Deux ans plus tard, en octobre 1920, il échangea les leçons de géométrie descriptive appliquée contre celles de géométrie analytique. Depuis 1919, il était suppléant de M. PASQUIER pour le cours de mécanique céleste et il en était le titulaire depuis 1925. (Extraits du discours prononcé aux funérailles par S. E. Mr LADEUZE Recteur Magnifique). Mr. Alliaume mourut à Louvain le 24 octobre 1932.

OUVRAGES DE M.M. ALLIAUME

- 1) Géométrie de l'Espace 1908.
- 2) Trigonométrie plane et sphérique (1912).
- 3) Chimie générale (1913), ces 3 ouvrages à l'usage des cadets du N. Ecole.

- 4) Cours d'Astronomie (1921, Uystruyst, Louvain ; Cauthier Vil-lars, Paris).
 - 5) Résumé du cours de Géométrie analytique, (1924).
 - 6) Cours de géométrie analytique (3 volumes 1929-1930).
 - 7) Cours d'astronomie et d'erreurs d'observations (1924).
 - 8) Tables jusqu'à $n = 1200$ des factorielles n décomposées en facteurs premiers et factorielles premières (1930).
 - 9) Précis de Trigonométrie en collaboration avec M/E DORY 1928.
 - 10) Traité de Trigonométrie en collaboration avec M.E. DORY 1930.
- De nombreuses études et nombres d'articles furent publiés dans les revues suivantes Mémoires de l'Académie Royale de Belgique.

Comte rendu des scéances de l'Académie des sciences de Paris.

Annales de la société scientifique de Bruxelles.

Annales des travaux publics de Belgique.

Journal de Physique.

Bulletin géodésique.

Bulletin technique des Ingénieurs sortis de Louvain.

Ciel et terre.

Revue belge de Pédagogie.

L'enseignement mathématique.

Mathésis.

Revue des Questions scientifiques.

Revue bibliographique etc.

EXEMPLE DE CALCUL DE POINT SANS UTILISATION DES DONNEES DE L'ESTIME

Le 22 sept. 193... vers 10^H p. m. par le 45° 01' N. g_e, 173° 48' W.

H_v Vega 49° 36',

H_v σ Aquilae = 41° 49',

H_v σ Piscis Australis = 14° 28' 30''.

T _{mp} ' = 9 ^H 40 ^m 15 ^s	T _{mp} '' = 9 ^H 41 ^m 31 ^s	T _{mp} ''' = 9 ^H 42 ^m 43 ^s
α _m = 12 ^H 07 ^m 56 ^s	α _m = 12 ^H 07 ^m 56 ^s	α _m = 12 ^H 07 ^m 56 ^s
T _{sp} ' = 21 ^H 48 ^m 12 ^s	T _{sp} '' = 21 ^H 49 ^m 27 ^s	T _{sp} ''' = 21 ^H 50 ^m 39 ^s
α _A ' = 18 ^H 34 ^m 31 ^s	α _A '' = 19 ^H 47 ^m 18 ^s	α _A ''' = 22 ^H 53 ^m 43 ^s
HA' = 3 ^H 13 ^m 41 ^s	HA'' = 2 ^H 02 ^m 09 ^s	HA''' = 22 ^H 56 ^m 56 ^s

COORDONNEES

$$\begin{aligned}
 G' &= 3^{\text{h}} 13^{\text{m}} 41^{\text{s}} = 48^{\circ} 25' 15'' & L' &= 38^{\circ} 43' \text{ N} & H_v' &= 49^{\circ} 36' \\
 G'' &= 2^{\text{h}} 02^{\text{m}} 09^{\text{s}} = 30^{\circ} 32' 15'' & L'' &= 8^{\circ} 41' \text{ N} & H_v'' &= 41^{\circ} 49' \\
 G''' &= 22^{\text{h}} 56^{\text{m}} 56^{\text{s}} & L''' &= 30^{\circ} 00' 5'' & G''' &= 344^{\circ} 14' & H_v''' &= 14^{\circ} 28' 30''
 \end{aligned}$$

LOGARITHMES

sin. G' = $\overline{1, 873896}$	cos. G' = $\overline{1, 821977}$
sin. G'' = $\overline{1, 705898}$	cos. G'' = $\overline{1, 935171}$
sin. G''' = $\overline{1, 434122}$	cos. G''' = $\overline{1, 983345}$
sin. L' = $\overline{1, 796206}$	cos. L' = $\overline{1, 892233}$
sin. L'' = $\overline{1, 178900}$	cos. L'' = $\overline{1, 994993}$
sin. L''' = $\overline{1, 698970}$	cos. L''' = $\overline{1, 937531}$
sin. H' = $\overline{1, 881692}$	cos. H' = $\overline{1, 811655}$
sin. H'' = $\overline{1, 823963}$	cos. H'' = $\overline{1, 872321}$
sin. H''' = $\overline{1, 397866}$	cos. H''' = $\overline{1, 985991}$

CALCUL DES COEFFICIENTS

$$A_1 = \sin. G'' \cos. L'' \sin. H''' - \sin. G''' \cos. L''' \sin. H''$$

$$A_1 = a + b$$

$$\overline{1, 705898}$$

$$\overline{1, 434122}$$

$$a = 0,1255$$

$$\overline{1, 994993}$$

$$\overline{1, 937531}$$

$$b = 0,1569$$

$$\overline{1, 397866}$$

$$\overline{1, 823963}$$

$$A_1 = 0,2824 +$$

$$\log. a = \overline{1, 098757} \quad \log. b = \overline{1, 195616}$$

$$B_1 = \cos. G'' \cos. L'' \sin. H''' - \cos. G''' \cos. L''' \sin. H''$$

$$\overline{1, 935171}$$

$$\overline{1, 983345}$$

$$a = 0,2128$$

$$\overline{1, 994993}$$

$$\overline{1, 937531}$$

$$b = 0,5557$$

$$\overline{1, 397866}$$

$$\overline{1, 823963}$$

$$B_1 = 0,3429 -$$

$$\log. a = \overline{1, 328030} \quad \log. b = \overline{1, 744839}$$

$$C_1 = \sin. L'' \sin. H''' - \sin. L''' \sin. H''$$

$\overline{1, 178900}$	$\overline{1, 698970}$	$a = 0,03774$
$\overline{1, 397866}$	$\overline{1, 823963}$	$b = 0,3334$
$\underline{\hspace{1.5cm}}$	$\underline{\hspace{1.5cm}}$	$C_1 = 0,37114$
$\log. b = \overline{1, 522933}$		
$\log. a = \overline{2, 576766}$		

$$A_2 = \sin. G''' \cos. L''' \sin. H' - \sin. G' \cos. L' \sin. H''$$

$\overline{1, 434122}$	$\overline{1, 873896}$	$a = 0,1792$
$\overline{1, 937531}$	$\overline{1, 892233}$	$b = 0,1459$
$\overline{1, 881692}$	$\overline{1, 397866}$	$A_2 = 0,3251 -$
$\log. a = \overline{1, 253345}$	$\log. b = \overline{1, 163995}$	

$$B_2 = \cos. G''' \cos. L''' \sin. H' - \cos. G' \cos. L' \sin. H''$$

$\overline{1, 983345}$	$\overline{1, 821977}$	$a = 0,6347$
$\overline{1, 937531}$	$\overline{1, 892233}$	$- b = 0,1294$
$\overline{1, 881692}$	$\overline{1, 397866}$	$B_2 = 0,5053 +$
$\log. a = \overline{1, 802568}$	$\log. b = \overline{1, 112076}$	

$$C_2 = \sin. L''' \sin. H' - \sin. L' \sin. H''$$

$\overline{1, 698970}$	$\overline{1, 796206}$	$a = 0,3808$
$\overline{1, 881692}$	$\overline{1, 397866}$	$b = 0,1563$
$\log. a = \overline{1, 580662}$	$\log. b = \overline{1, 194072}$	$C_2 = 0,5371 -$

CALCUL DES DETERMINANTS

$$\text{Déterminant caractéristique } \left\| \begin{array}{ccc} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{array} \right\| \text{ tg. } G = \frac{\Delta 23}{\Delta 31}$$

Indiquant les termes du déterminant par M et M', il vient

$$\left. \begin{aligned} \text{tg. G} &= \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} -0,3429 & 0,3711 \\ 0,5053 & -0,5371 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,3711 & 0,2824 \\ -0,5371 & -0,3251 \end{vmatrix}} \end{aligned} \right\}$$

$$\log. 0,3429 = \overline{1}, 535167 \quad \log. 0,0553 = \overline{1}, 703549$$

$$\log. 0,5371 = \overline{1}, 730055 \quad \log. 0,3711 = \overline{1}, 569491$$

$$\log. M = \overline{1}, 265222 \quad \log M' = \overline{1}, 273040$$

$$M = 0,18752$$

$$M' = 0,18418$$

$$N = -0,00334$$

$$\log. 0,3711 = \overline{1}, 569491 \quad \log. 0,5371 = \overline{1}, 730055$$

$$\log. 0,3251 = \overline{1}, 512017 \quad \log. 0,2824 = \overline{1}, 450865$$

$$\log. M = \overline{1}, 081508 \quad \log M' = \overline{1}, 180920$$

$$M = 0,12065 -$$

$$M' = 0,15168 +$$

$$D = 0,03103 +$$

$$\log. N = \overline{3}, 523746$$

$$\text{colog. D} = \overline{1}, 508218$$

$$\log. \text{tg. G} = \overline{1}, 031964$$

$$G = 179^\circ 59' 60'' - 6^\circ 08' 30'' = 173^\circ 51' 30''$$

estimé

$$173^\circ 48'$$

b) Calcul de la Latitude.

on a :

$$\sin. L = \pm \frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{12}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{31}^2}}$$

$$\text{Calcul de } \Delta_{12} : \Delta_{12} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2824 & -0,3429 \\ -0,3251 & 0,5053 \end{vmatrix}$$

$$\log. 0,2824 = \overline{1}, 450865 \quad \log. 0,3251 = \overline{1}, 512017$$

$$\log. 0,5053 = \overline{1}, 703549 \quad \log. 0,3429 = \overline{1}, 535167$$

$$\log. M = \overline{1}, 154414 \quad \log M' = \overline{1}, 047184$$

$$M' = 0,1115 -$$

$$M = 0,1427 +$$

$$\Delta_{12} = 0,0312$$

$$\Delta_{12} = 0,0312$$

$$\Delta_{12}^2 = 0,0009734$$

$$\Delta_{23} = -0,00334$$

$$\Delta_{23}^2 = 0,00001116$$

$$\Delta_{31} = 0,03103$$

$$\Delta_{31}^2 = 0,00096286$$

$$D = 0,0019473$$

$$\log. D = \overline{3}, 289366$$

$$\frac{1}{2} \log. D = \overline{2}, 644683$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{colg } D = \overline{1}, 355317 \\ \log. \Delta_{12} = \overline{2}, 494155 \end{array} \right\}$$

$$\log. \sin. L = \overline{1}, 849472 = 45^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Estime} \\ \text{Observé} \end{array} \right\} \begin{cases} L = 45^\circ 01' \\ G = 173^\circ 48' \\ L = 45^\circ \\ G = 173^\circ 51' 30'' \end{cases}$$