

BIJDRAGE TOT DE STUDIE VAN DE GETIJBEWEGING DOOR TOEPASSING VAN EINDIGE-DIFFERENTIE METHODEN OP EEN KWADRATISCH MAZENNET

door

ir. H. HOLSTERS

Ere-Directeur Dredging International

INLEIDING

Tijdens de negentiende eeuw en het begin van de twintigste bestond er weinig behoefte tot het uitvoeren van eigenlijke getijberekeningen i.e. het berekenen van waterstanden en stroomsnelheden door integratie der partiële differentiaalvergelijkingen van de niet-permanente waterbeweging.

De hydraulische problemen welke voornamelijk verband hielden met de uitvoering van verbeteringswerken ten behoeve van de scheepvaart werden bestudeerd en opgelost op grond van beredenering gesteund op ervaring en op grondige waarneming van de bestaande toestand.

Nochtans waren reeds rond het einde van vorige eeuw de theoretische grondlagen aanwezig welke later zouden leiden tot het uitvoeren van getijberekeningen in de moderne zin van het woord (e.g. de Saint-Venant (1871) en Massau (1900)).

In de twintiger jaren werd een belangrijke bijdrage geleverd door Lorenz (1927). De toepassing van zijn methode voor het berekenen van de te verwachten invloed van het afdammen van de Zuiderzee op de waterstanden nabij de Nederlandse kust betekende een mijlpaal in de ontwikkeling van de getijberekeningsmethoden.

Ook de verdere evolutie van deze methoden werd in sterke mate beïnvloed door de aard van de op te lossen problemen, onder andere het voorspellen van stormvloedhoogten en de studie van de maatregelen

om overstromingen te voorkomen of de gevolgen ervan te beperken.

Later, wegens de toenemende industrialisatie van de havengebieden of de oprichting van kerncentrales nabij de estuaria diende er meer en meer aandacht besteed te worden aan de studie van de scheikundige en thermische pollutie waardoor de berekeningsmethoden nog verder moesten worden verfijnd.

In een eerste fase werden de expliciete eendimensionale eindige-differentiemethoden ontwikkeld, dit rond het einde van de veertiger en het begin van de vijftiger jaren.

Later, en dit als gevolg van de rampenvloed van 1953, werd het noodzakelijk over te gaan tot de toepassing van tweedimensionale eindige-differentiemethoden, zodat begin van de zestiger jaren expliciete methoden ter beschikking kwamen nagenoeg in hun huidige vorm.

Deze expliciete methoden hebben het nadeel afhankelijk te zijn van het Courant-Friedrichs-Lewy of C.F.L.-criterium, waardoor een strenge restrictie wordt opgelegd aan het tijdsinterval in functie van de spatiale intervallen en de waterdiepte.

Deze moeilijkheid kon worden overwonnen door het ontwikkelen van impliciete of semi-impliciete algoritmen welke veel minder restrictief zijn ten aanzien van het tijdsinterval, zodat vanaf de aanvang van de zeventiger jaren ook deze werkwijzen nagenoeg in hun huidige vorm konden gebruikt worden.

Een zeer belangrijke bijdrage tot het op gang brengen van deze evolutie werd geleverd door Walter Hansen en dit voornamelijk door zijne artikels: „Theorie zur Berechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen” (1956) en „Hydro-dynamical methods applied to oceanographical Problems” (1962).

Het onderscheid tussen deze methoden ligt hoofdzakelijk bij de daarin aangewende ruimtelijke discretisatie-schemas, i.e. de localisatie op een mazennet van de discrete punten waar de waterstanden en de snelheidscomponenten, gezamenlijk of afzonderlijk, worden berekend en de waterdiepten worden gespecificeerd.

Om de gedachten te bepalen wordt in wat volgt het eerste schema (1956) het „diagonaal” schema genoemd, terwijl het tweede, tevens het meest gebruikelijke, als „klassiek” schema wordt betiteld. Voor beide gevallen geldt dat de oeverlijn van het berekeningsdomein moet worden voorgesteld door een polygoon waarop uitsluitend „snelheids-punten” mogen gelegen zijn en waarvan de zijden stuksgewijze evenwijdig moeten zijn aan een van de (cartesische) coördinatenassen.

Hieruit volgt dat de oevergedeelten welke niet evenwijdig zijn aan een van deze assen moeten voorgesteld worden door trapjes- (of zigzag-) lijnen wat zoals bekend (e.g. Kuiper en Vreugdenhil, 1973; Weare, 1979) aanleiding kan geven tot niet-verwaarloosbare afwijkingen tussen de numerische stroomsnelheden en waterstanden nabij deze oevergedeelten en de werkelijkheid.

Het voornaamste doel van onderhavige studie is te onderzoeken op welke wijze en in welke mate zulke fouten kunnen worden vermeden bij de toepassing van de expliciete diagonale methode.

1. ALGEMEENHEDEN

1.1. Bewegingsvergelijkingen

Voor het opstellen van de bewegingsvergelijkingen wordt uitgegaan van de „ondiep water-vergelijkingen” (cf. Stelling, 1983) enigzins vereenvoudigd door weglating van de viscositeitstermen en de termen welke betrekking hebben op de uitwendige krachten (wind en atmosferische druk):

$$u_t + uu_x + vv_y + gz_x + gu(u^2 + v^2)^{1/2}/C^2 h - fv = 0 \quad 1.1a$$

$$v_t + vv_y + uv_x + gz_y + gv(u^2 + v^2)^{1/2}/C^2 h + fu = 0 \quad 1.1b$$

$$z_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad 1.1c$$

waar

$$f = \omega \sin \varphi, \text{ met } \omega = \text{hoeksnelheid van de aardrotatie en } \varphi = \text{breedtegraad}$$

$$u = \text{snelheidscomponente in de } x\text{-richting}$$

$$v = \text{snelheidscomponente in de } y\text{-richting}$$

$$z = \text{waterstand ten opzichte van een horizontaal referentievlak}$$

$$g = \text{versnelling van de zwaartekracht}$$

$$C = \text{coëfficiënt van Chezy}$$

$$H = \text{diepte onder het referentievlak}$$

$$h = H + z = \text{totale diepte}$$

De vergelijkingen berusten op een aantal veronderstellingen waaronder als voornaamste kunnen worden aangestipt:

- de getijverwekkende krachten en de verticale versnellingen zijn verwaarloosbaar en de drukverdeling is hydrostatisch;
- al de in een vertikaal gelegen waterdeeltjes hebben dezelfde snelheid (hypothese van de Saint-Venant);
- het regiem is fluviaal, i.e. de stroomsnelheid is klein ten opzichte van de celeriteit.

1.2. Eindige differenties

Voor het vervangen van de partiële afgeleiden door eindige differenties gaat men uit van de afgeknotte Taylor-reeks (cf. Richtmyer, 1957).

Bijvoorbeeld heeft men voor de functie u_x in het punt $x = 1 \Delta x$, $y = m \Delta y$:

$$u(l+1, m) = u(l, m) + \Delta x u_x(l, m) + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}(l+\theta, m) \quad 1.2a$$

waar $0 < \theta < 1$.

Hieruit volgt:

$$u_x(l, m) = (u(l+\frac{1}{2}, m) - u(l, m))/\Delta x + O(\Delta x) \quad 1.2b$$

$$O(\Delta x) = -\frac{1}{2} \Delta x \cdot u_{xx}(l+\theta, m) \quad 1.2c$$

Dit is het voorwaarts of Euler-schema (cf. van der Houwen 1977). De term $O(\Delta x)$ is de truncatie- of afbreekfout.

Als algemene regel geldt dat deze fout één orde lager is dan de laatste term van de afgeknotte Taylor-reeks.

Op analoge wijze vindt men voor het achterwaarts en het centraal schema:

$$u_x(l, m) = (u(l, m) - u(l-1, m))/\Delta x + O(\Delta x) \quad 1.2d$$

$$u_x(l, m) = \frac{1}{2}(u(l+1, m) - u(l-1, m))/\Delta x + O(\Delta x^2) \quad 1.2e$$

Vanzelfsprekend gelden bovenstaande betrekkingen, mutatis mutandis, voor de afgeleiden naar y en t , alsmede voor de functies v en z . Daarbij geldt $y = m \Delta y$ en $t = n \Delta t$.

1.3. Spatiale discretisatie-schemas

Figuur 1.3a heeft betrekking op de schematisatie volgens het klassiek schema (Hansen, 1962) in het X, Y -vlak.

Om de vergelijking met het diagonaal schema te vergemakkelijken wordt de gebruikelijke l, m -notatie vervangen door een vectoriële notatie met index i , dit met behulp van een net-constante k , waar k gelijk is aan het aantal kolommen van de l, m -matrix. De waterstands- of z -punten liggen ter plaatse van de knooppunten van het net. Bij elk z -punt behoren twee snelheidspunten U en V_i . Aan deze drie punten wordt hetzelfde indice toegekend (cf. Leendertse, 1967). Zoals blijkt uit de figuur ligt de component U_i halfweg tussen de z -punten i en $i+1$, en de component V_i halfweg tussen de z -punten i en $i+k$. De topografie wordt bepaald door de diepten in de knooppunten (cf. Reid en Bodine, 1973; Backhaus, 1976) of door de gemiddelde diepten van de kwadranten (cf. Leendertse, 1967).

Figuur 1.3b toont de ligging van de z - en (u, v) -punten volgens het diagonaal schema.

De ligging en de indexering van de z -punten is zoals bij het klassiek schema.

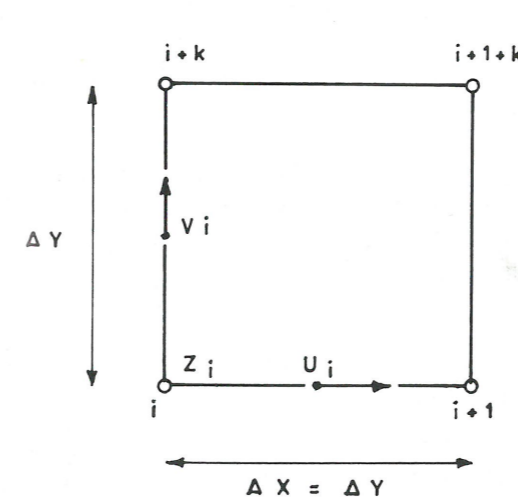


Fig. 1.3a

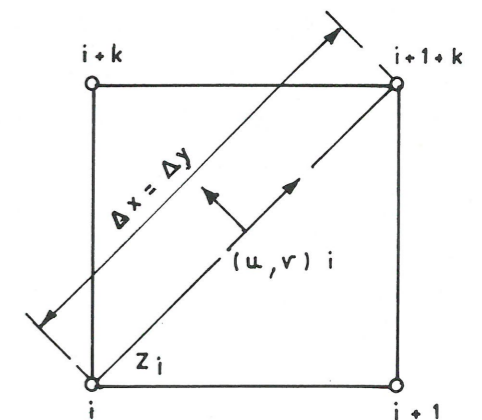


Fig. 1.3b

Het assenkruis x, y is echter 45 graden verdraaid ten opzichte van het X, Y -net en de snelheidscomponenten zijn samen gegroepeerd in het middelpunt van de mazen en diagonaal gericht ten opzichte van het door deze mazen gevormde net: vandaar de voorgestelde benaming „diagonaal schema”. Zoals bij het klassiek schema krijgen de (u, v) -punten hetzelfde indice als de daarbij behorende z -punten. De topografie van het schema wordt bepaald door de diepte in de snelheidspunten.

2. EXPLICIETE DIAGONALE METHODE

2.1. Aanvangswaarden en algemene berekeningsgang

Wegens de aanwezigheid van de wrijvingstermen en indien men niet beschikt over de eindwaarden van een vorige berekening kan worden uitgegaan van willekeurige aanvangswaarden.

Om het gebruik van centrale tijdelijke differenties mogelijk te maken worden de aanvangswaarden z^0 van de waterstanden gespecificeerd op tijdstip $t = 0$ en deze van de snelheidscomponenten $u^{-1/2}$ en $v^{-1/2}$ op tijdstip $t = -\frac{1}{2} \Delta t$.

Voor de eerste stap berekent men u^1 en v^1 in functie van de bekende waarden z^0 , $u^{-1/2}$ en $v^{-1/2}$ door middel van de dynamische vergelijkingen 1.1a en 1.1b, en daarna z^1 in functie van de bekende waarden z^0 en de berekende waarden u^1 en v^1 door middel van de continuïteitsvergelijking 1.1c.

Op dezelfde wijze springt men voor de tweede en de volgende stappen van het tijdstip $n-\frac{1}{2}$ naar $n+\frac{1}{2}$ voor de snelheden en van n naar $n+1$ voor de waterstanden.

2.2. Randvoorwaarden

2.2.1. Open rand

Langs de open rand wordt het waterpeil voorgeschreven. Op basis van de theorie der karakteristieken werd door Daubert en Graffe (1967) aangetoond dat bij instroming een tweede randvoorwaarde zou moeten opgelegd worden, namelijk de stroomsnelheid, voor zover de convectieve termen uu_x , vu_y , vv_y en w_x niet verwaarloosbaar zijn.

In onderhavige studie wordt aangenomen dat de open rand ver genoeg van de probleemzone is gelegen opdat het weglaten van deze tweede randvoorwaarde slechts tot verwaarloosbare fouten kan aanleiding geven.

2.2.2. Gesloten rand

Langs de kust is de normale snelheidscomponente gelijk aan nul (cf. Hansen, 1956).

Voor de rechtlijnige (i.e. evenwijdig met de X - of Y -richting) gedeelten van de op figuur 2.2.2 geschematiseerde oever wordt hieraan voldaan door te stellen:

- $u-v = 0$ als de oever evenwijdig is met de Y -as (e.g. punt a)
- $u+v = 0$ als de oever evenwijdig is met de X -as (e.g. punt f).

Langs de gedeelten in trapjes-lijn (e.g. punt c) kan aan de gestelde voorwaarde slechts voldaan worden door beide componenten gelijk te stellen aan nul.

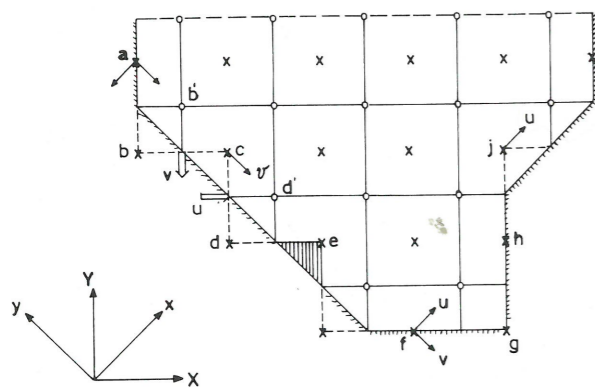


Fig. 2.2.2

De stroomsnelheid langs de lijn welke de inspringende punten verbindt is dus nul (no-slip conditie), dan wanneer er langs de rechtlijnige oevers wel een langssnelheid kan worden berekend. Deze anomalie

heeft verscheidene auteurs ertoe geleid de no-slip conditie uit te breiden tot geheel de oeverlijn door de plaatselijke snelheidscomponenten of de diepten gelijk aan nul te veronderstellen; zie Ueno (1964), Myazaki (1965), Tee (1976).

Zoals deze laatste opmerkt ontstaat hierdoor een grenslaag van de grootte-orde van de maaswijdte, wat enigszins kan gecompenseerd worden door de kustlijn landinwaarts te verschuiven.

Een andere veronderstelling (cf. Holsters, 1978) bestaat er in, zoals aangeduid in punt c van figuur 2.2.2 de plaatselijke snelheid v evenwijdig te stellen aan de diagonaal gerichte kustlijn. Dit impliceert dat doorheen het segment bc een debiet V naar buiten stroomt dat gelijk is aan het instromende debiet U doorheen segment cd , zoals symbolisch aangegeven op deze figuur. Met deze aanname, verder de „zwakke” randvoorwaarde genoemd, wordt niet voldaan aan de strenge voorwaarde (normaalsnelheid = 0) op de segmenten bc en cd elk afzonderlijk maar anderzijds is de integraal van de doorstroming over de sector bcd wel gelijk aan nul.

De grootte van de snelheid v is functie van het verhang tussen de naburige waterstandspunten b' en d' .

In de uitspringende (concave) punten zoals b en d (waar overigens geen gegevens voor een snelheidsberekening aanwezig zijn) mag worden gesteld $u = v = 0$.

Tenslotte kan nog worden opgemerkt dat de trapjeslijn op sommige plaatsen een werkelijke stroomverlammende hindernis kan voorstellen, bijvoorbeeld een in de stroom vooruitstekend kunstwerk (p.e. punt e van figuur 2.2.2).

In dit geval is het zinvol de klassieke randvoorwaarde toe te passen.

Indien de juiste weergave van de stroming in deze zone een belangrijke rol speelt met betrekking tot het doel van de berekening is het kennelijk nodig een fijner mazennet te gebruiken.

2.3. Schematisatie van een rivier evenwijdig met de x -as

Beschouwd wordt een prismatische rivier evenwijdig met de x -as met als breedte $\Delta x/2$. De rivier is onderverdeeld in vakken met lengte Δx (zie fig. 2.3a).

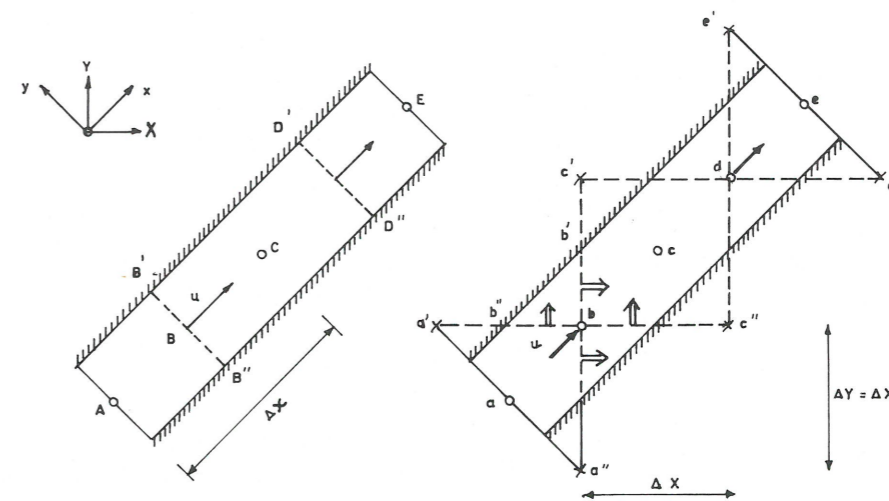


Fig. 2.3a

Fig. 2.3b

Figuur 2.3b toont de schematisatie van deze rivier in het x, y -vlak.

De geschematiseerde oever is aangegeven in stip-pellijn.

Met de strenge randvoorwaarde of met de no-slip veronderstelling is de snelheid in punten b en d gelijk aan nul en kan er dus geen water door de rivier stromen.

Met de zwakke randvoorwaarde is de snelheid in de inspringende punten zoals b gelijk aan de snelheid in het prototype. In de uitspringende punten is zij gelijk aan nul.

Zoals aangeduid op de figuur is de uitstroming over het segment bb'' gelijk aan de instroming over bb' .

Klaarblijkelijk is de schematisatie 2.3b equivalent met het prototype 2.3a; de snelheden zijn dezelfde in

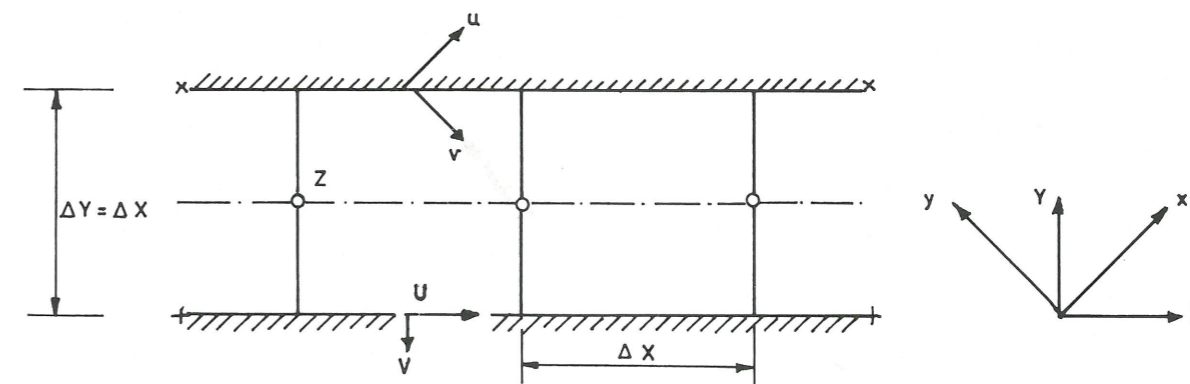


Fig. 2.4

de homologe punten, en hetzelfde geldt voor de kombergingsoppervlakten $B'D'D'B''$ resp. $c'dc''b$.

2.4. Schematisatie van een rivier evenwijdig met de X -as

De schematisatie van een rivier evenwijdig met de X -as en met breedte ΔY is afgebeeld op figuur 2.4.

De berekening van de snelheidscomponenten u en v kan niet rechtstreeks geschieden maar wel mits overgang tot de componenten U en V .

De normaalcomponente V is gelijk aan nul.

De langscomponente U kan worden berekend in functie van het verhang tussen de naburige z -punten en, voor wat de Bernoulliterm betreft, van de snelheden in de naburige U -punten; daarna wordt terug overgegaan naar de u, v -componenten.

2.5. Stabiliteit

Om de exponentiële aangroei van afrondingsfouten of andere storingen te vermijden is het nodig te voldoen aan het C.F.L.-criterium.

Dit criterium vergt dat het numerisch invloedsgebied van een perturbatie het analytisch invloedsgebied volledig moet omvatten, wat leidt tot de betrekking (cf. Myazaki, 1965);

$$\Delta s / \Delta t \geq (2gh_{\max})^{1/2} \quad 2.5$$

waar $\Delta s = \Delta x = \Delta y$.

Deze voorwaarde is echter niet steeds voldoende.

Voor het eendimensionaal geval werd aangetoond (cf. Holsters, 1962; Vreugdenhil, 1967) dat de weerstandsterm neutraal (i.e. semi-impliciet) of overwegend impliciet moet zijn.

Een soortgelijke restrictie geldt voor de tweedimensionale beweging. Bovendien is zoals door Dronkers (1969) werd aangetoond voor het eendimensionaal geval de stabiliteit van een expliciete methode slechts mogelijk indien de invloed van de wrijvingsterm overwegend is ten aanzien van de convectieve termen.

2.6. Eindige-differentie betrekkingen

2.6.1. Tijdelijke discretisatie

In een eerste fase worden enkel de afgeleiden naar t en de Coriolis- en wrijvingstermen gediscrèteerd.

Om de notaties te vereenvoudigen worden de op tijdsniveau $n+1$, resp. $n+\frac{1}{2}$ te berekenen functies aangeduid met een accent, terwijl de reeds op tijdsniveau n , resp. $n-\frac{1}{2}$ berekende waarden zonder tijdsindex worden geschreven.

De dynamische vergelijkingen worden dan:

$$(u' - u) / \Delta t + u' u_x + v u_y + g z_x + g u' (u^2 + v^2)^{1/2} / C^2 h - f v = 0 \quad 2.6.1a$$

$$(v' - v) / \Delta t + v' v_y + u v_x + g z_y + g v' (u^2 + v^2)^{1/2} / C^2 h + f u = 0 \quad 2.6.1b$$

Mits te stellen

$$r = g(u^2 + v^2)^{1/2} / C^2 h \quad 2.6.1c$$

kunnen vergelijkingen 2.6.1a en b omgevormd worden tot een stelsel van twee expliciete betrekkingen:

$$u' = (u - (u - (gz_x - f v + v u_y) \Delta t) / (1 + (u_x + r) \Delta t)) \quad 2.6.1d$$

$$v' = (v - (v - (gz_y + f u + u v_x) \Delta t) / (1 + (v_y + r) \Delta t)) \quad 2.6.1e$$

Door invoering van deze waarden in de continuïteitsvergelijking bekomt men dan de expliciete formule voor z' :

$$z' = z - ((h u')_x + (h v')_y) \Delta t / \Delta x \quad 2.6.1f$$

2.6.2. Ruimtelijke discretisatie

Het berekeningsdomein omvat natte en droge punten.

De droge punten zijn gelegen in een horizontaal vlak op een peil Z dat hoger is dan de hoogste te verwachten waterstand. De snelheidscomponenten u en v zijn gelijk aan nul.

De natte waterstandspunten zijn ofwel randpunten waar de waterstand wordt voorgeschreven, ofwel binnenpunten waar z wordt berekend door middel van de continuïteitsvergelijking.

De natte (u, v)-punten zijn rand- of binnenpunten. In deze laatste worden u en v berekend met de dynamische vergelijkingen in hun algemene vorm; in de randpunten moeten aangepaste formules worden gebruikt welke gekozen worden in functie van een codegetal nc dat als volgt wordt bepaald:

— aan de vier punten $i, i+k, i+1+k, i+1$ welke een bepaald (u, v)-punt omringen worden respectievelijk de gewichtscoefficienten 1, 2, 4 of 8 toegekend;

— voor het code-getal nc geldt dan $nc = (Z - z_i \neq 0) + 2(Z - z_{i+k} \neq 0) + 4(Z - z_{i+1+k} \neq 0) + 8(Z - z_{i+1} \neq 0)$

waar de Booleaanse uitdrukkingen $(Z - z \neq 0)$ 1 of 0 zijn naargelang zij waar of onwaar zijn.

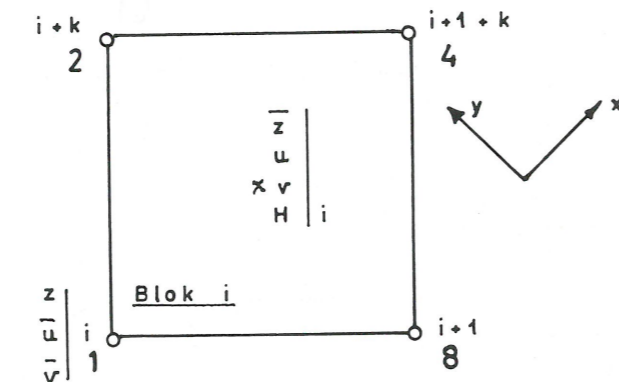


Fig. 2.6.2

Ten behoeve van de duidelijkheid worden de hulpvariabelen \bar{z}, \bar{u} en \bar{v} ingevoerd, zijnde respectievelijk de gemiddelde waterstand in de snelheidspunten en de gemiddelde snelheid in de waterstandspunten (zie ook fig. 2.6.2).

Voor wat de binnenpunten betreft worden de uiteindelijke recurrentieformules opgesteld door invoering van de centrale ruimtelijke differenties in de vergelijkingen 2.6.1d, 2.6.1e en 2.6.1f (zie § 2.7.1).

De formules betreffende de snelheidspunten langs de kust worden behandeld in § 2.7.2.

2.7.1. Recurrentie-formules voor de binnenpunten (code-getal $nc = 15$)

Mits te stellen:

$$R = 1 + (\bar{u}_{i+1+k} - \bar{u}_i) \Delta t / \Delta x + g(u_i^2 + v_i^2)^{1/2} \Delta t / C^2 h_i$$

$$S = 1 + (\bar{v}_{i+k} - \bar{v}_{i+1}) \Delta t / \Delta y + g(u_i^2 + v_i^2)^{1/2} \Delta t / C^2 h_i$$

vindt men voor de snelheidscomponenten:

$$u'_i = (u_i + g(z_i - z_{i+1+k}) \Delta t / \Delta x + v_i (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+k}) \Delta t / \Delta x + f v_i \Delta t) / R \quad 2.7.1a$$

$$v'_i = (v_i + g(z_{i+1} - z_{i+k}) \Delta t / \Delta y + u_i (\bar{v}_{i+1+k} - \bar{v}_i) \Delta t / \Delta y - f u_i \Delta t) / S \quad 2.7.1b$$

$$\bar{u}'_i = (u'_i + u'_{i-1-k}) / 2 \quad 2.7.1c$$

$$\bar{v}'_i = (v'_{i+1+k} + v'_i) / 2 \quad 2.7.1d$$

Daarna volgt, voor de waterstand en de diepte, met $\Delta s = \Delta x = \Delta y$

$$z'_i = z_i + (h_{i-1-k} u'_{i-1-k} - h_i u'_i + h_{i-k} v'_{i-k} - h_{i-1} v'_{i-1}) \Delta t / \Delta s \quad 2.7.1e$$

$$\bar{z}'_i = (z'_i + z'_{i+k} + z'_{i+k+1} + z'_{i+1}) / 4; \quad h'_i = H_i + \bar{z}_i \quad 2.7.1f$$

In een binnenpunt gelegen nabij de open rand kunnen de betrekkingen 2.7.1c en 2.7.1d niet worden toegepast daar de snelheidscomponenten zeewaarts van de open rand niet gekend zijn. Hieraan kan worden verholpen door in het beschouwde binnenpunt te stellen $u_{xx} = v_{yy} = 0$, wat er op neer komt de centrale differenties voor het berekenen van u_x en v_y te vervangen door eenzijdige differenties.

2.7.2. Recurrentie-formules voor de snelheidspunten langsheen de gesloten rand

De diverse randpunten zijn gelegen hetzij in de nabijheid van de diagonale (i.e. evenwijdig met de x - of de y -as) gedeelten van de geschematiseerde kustlijn, of op de gedeelten evenwijdig met de X - of de Y -as (zie ook § 2.2.2).

De eerste categorie omvat uitspringende (concave) en inspringende (convexe) punten).

Daar voor de concave punten werd gesteld $u = v = 0$ is hier geen berekening vereist.

In een convex punt geldt $u \neq 0$ en $v = 0$, of $u = 0$ en $v \neq 0$.

In het eerste geval worden de bewegingsvergelijkingen 1.1a en 1.1b herleid tot:

$$u_i + u u_x + g z_x + g u |u| / C^2 h = 0 \quad 2.7.2a$$

$$u v_x + z_y + f u = 0 \quad 2.7.2b$$

De langscomponente u is dus onafhankelijk van de Coriolis-term en de centripetaal-term $v u_y$, wat vanzelfsprekend ook geldt voor de in § 2.3 beschouwde diagonale rivier.

Uit vergelijking 2.7.2 volgt dat de Coriolis-term aanleiding geeft tot een dwarsverhang z_y , evenals de centripetale term $u v_x$ voor zover v_x verschillend is van nul (zoals bijvoorbeeld het geval is in een alleenstaand randpunt zoals punt j van fig. 2.2.2). Daar op de kustlijn geen waterstanden worden berekend heeft dit dwarsverhang overigens geen invloed op de berekeningsresultaten.

In het geval van een punt van de tweede categorie (oever evenwijdig met de X -as bijvoorbeeld) kunnen zoals voor de in § 2.4 beschouwde rivier de snelheidscomponenten u en v niet rechtstreeks worden berekend maar dient dit te geschieden via overgang naar de U, V -componenten in het X, Y -assenstelsel. Mits V gelijk te stellen aan nul in de desbetreffende bewegingsvergelijkingen komt men tot dezelfde conclusies als voor de convexe punten.

Voor het convexe punt met code-getal 10 (snelheidsvector evenwijdig met de x -as) zijn de recurrentie-formules:

$$R = 1 + (\bar{u}_{i+1+k} - \bar{u}_i) \Delta t / \Delta x + g |u_i| \Delta t / C^2 h_i$$

$$u'_i = (u_i + g(z_i - z_{i+1+k}) \Delta t / \Delta x) / R \quad 2.7.2c$$

$$\bar{u}'_i = (u'_i + u'_{i-1-k}) / 2 \quad 2.7.2d$$

$$\bar{z}'_i = (z'_i + z'_{i+1+k}) / 2; \quad h'_i = H_i + \bar{z}_i \quad 2.7.2e$$

Analoge formules gelden voor $nc = 11$ en 14.

Voor het convexe punt met code-getal 5 (snelheidsvector evenwijdig met de y -as) heeft men:

$$S = 1 + (\bar{v}_{i+k} - \bar{v}_{i+1}) \Delta t / \Delta x + g |v_i| \Delta t / C^2 h_i$$

$$v'_i = (v_i + g(z_{i+1} - z_{i+k}) \Delta t / \Delta y) / S \quad 2.7.2f$$

$$\bar{v}'_i = (v'_{i+1+k} + v'_i) / 2 \quad 2.7.2g$$

Met

$$d = h_i = z_i^* - zd$$

$$D = h_{i+1} = z_{i+1} - zd$$

$$d_m = (D+d)/2$$

Cq = debietscoëfficiënt

uk = kritische snelheid op de drempel

Q = overstortdebiet

komt men mits een aantal op testberekeningen gebaseerde vereenvoudigingen tot het volgende stelsel:

$$d = \frac{1}{2}(C^2 Cq^{-2} \Delta x^{-1})^{1/3} (D+d)(D-d)^{1/3} \quad 2.9a$$

$$uk = Cq \cdot d^3 \quad 2.9b$$

$$Q = uk \cdot d \quad 2.9c$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \pm uk \cdot d/dm \quad 2.9d$$

De eerste betrekking is impliciet in de theoretische overstortdikte d , maar convergeert zeer snel bij iteratie.

Bij afwaartse waterstanden z_i onder het drempelpeil bestaat de berekening enkel uit het toepassen van de betrekkingen 2.9a-2.9d. Bij waterstanden z_i hoger dan het drempelpeil berekent men eerst (nabij het einde van de fluviale fase) de snelheid $u_{i+\frac{1}{2}}$ met de gewone recurrentie-formulen en leidt daaruit de maximum snelheid um af ter plaatse van de drempel volgens de betrekking:

$$um = |u_{i+\frac{1}{2}}| dm/d$$

Zodra $um \geq uk$ wordt $u_{i+\frac{1}{2}}$ berekend met formule 2.9d.

De afwaartse waterstand z_i kan worden berekend met de normale continuïteitsformule. Daar de drempel niet ter plaatse van een snelheidspunt gesitueerd is wordt hierbij het plaatselijk kombergingsvermogen overschat; dit geldt zowel bij vloed als bij eb zodat de globale continuïteit behouden blijft.

Overigens kan deze afwijking vermeden worden door het toepassen van eenzijdige differenties wat niet schaaft aan de globale nauwkeurigheid (cf.

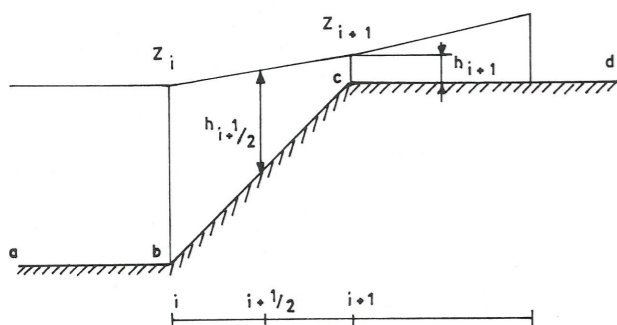


Fig. 2.9b

Vreugdenhil, 1980) aangezien z_i als randwaarde fungeert voor het benedenstrooms riviergedeelte.

Formules 2.9a-2.9d gelden voor een bodemtopografie op basis van de diepten in de snelheidspunten.

Figuur 2.9b heeft betrekking op een bodemtopografie gebaseerd op de diepte in de z -punten: het geschematiseerd langprofiel wordt dan symbolisch voorgesteld door de volle lijn $a-b-c-d$.

Bij dalende waterstanden en fluviaal regime wordt de snelheid in vak $(i, i+1)$ berekend met de normale formules in functie van de waterstanden z_i en z_{i+1} . Tegelijkertijd berekent men de hierbijbehorende maximum-snelheid um op de drempel volgens de formule

$$um = |u_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}} / h_{i+1}| \quad 2.9e$$

Uitgaande van het principe dat in het vak $(i, i+1)$ het debiet niet groter kan zijn dan het overstortdebiet wordt de snelheid um nu vergeleken met de kritische snelheid

$$uk = Cq \cdot h_{i+1}^3 \quad 2.9f$$

Zodra um groter dan of gelijk is aan uk stelt men:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \pm uk \cdot h_{i+1} / h_{i+\frac{1}{2}} \quad 2.9g$$

Beide methoden kunnen gecombineerd worden met een beperking op de componenten van de vertikaal geïntegreerde snelheid.

Zij kunnen praktisch ongewijzigd worden toegepast op het diagonaal schema en het klassiek schema voor zover de bodemtopografie niet gebaseerd is op de diepten in de waterstandspunten; in dit laatste geval is voor het klassiek schema alleen de tweede methode van toepassing.

REFERENTIES

- AKSAI KUMAR RUNCHAL: Numerical model for storm surge and tidal run-up studies Symposium Modelling Techniques, San Francisco, 1975.
- BACKHAUS, J.: Zur Hydrodynamik im Flachwassergebiet. Ein numerisches Model. Deutsches Hydrodynamisches Zeitschrift, 1976.
- BENQUÉ, J.P., CUNGE, J.A., FERULLET, J., HAUGUEL, A., HOLLEY, F.M.: New method for tidal current computation. WW: B-1982 Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASC, 1982.
- DAUBERT, A. et GRAFFE, O.: Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents. La Houille Blanche, 1967.
- DRONKERS, J.: Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas. Journal Hydraulics Division, ASC, 1969.
- DRONKERS, J.: The schematization for tidal computations in case of variable bottom shape. Coastal Engineering Conference, Vancouver, 1972.

- HANSEN, W.: Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen. Tellus, 3-1956.
- HANSEN, W.: Hydro-dynamical methods applied to oceanographical problems. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität. Hamburg, 1962.
- HOLSTERS, H.: Remarques sur la stabilité dans les calculs de marée. Mitteilungen des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg, 1962.
- Mathematical Modelling of tidal flats: a few remarks. Mathematical Modelling of Estuarine Physics: Proceedings of an International Symposium. Hamburg, 1978.
- KUIPERS, J. and VREUGDENHIL, C.B.: Calculations of two-dimensional horizontal flow. Report on basic research, S-163, Delft, 1973.
- LEENDERTSE, J.J.: Aspects of a computational model for long-period water-wave propagation. Proefschrift T.H. Delft, 1967.
- MASSAU, J.: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Annales AIG, 1900.
- MYAZAKI, M.: A numerical computation of the storm surge of hurricane Carla 1961 in the Gulf of Mexico. The Oceanographical Magazine, 11-1965.
- LORENZ, H.A.: Verslag van de Staatscommissie Zuiderzee, 1915-1926 Den Haag, Algemene Landsdrukkerij, 1926.
- RAMMING, H.G.: Numerical investigations of the influence of coastal structures upon the dynamic off-shore process by application of a nested tidal model. Elsevier Oceanographic Series, 1978.

- Robert O. REID and BERNIE R. BODINE: Numerical model for storm surges in Galveston Bay. Journal of the Waterways and Harbours Division, ASC, 1968.
- RICHTMYER, R.D.: Difference methods for initial value problems New-York, 1957.
- de SAINT-VENANT: Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, 1871.
- SIELECKI A.: An energy-conserving difference scheme for the storm surge equations. Monthly Weather Review, 1968.
- STELLING, G.S.: On the construction of computational methods for shallow water flow problems. Proefschrift T.H. Delft, 1983.
- TEE, K.: Tide-induced residual current, a 2-D nonlinear numerical tidal model. Journal of marine research, 1976.
- UENO, T.: Non-linear numerical studies on tides and surges in the central part of Seto inland sea. The Oceanographical Magazine, 1964.
- van der HOUWEN, P.J.: Berekening van waterstanden in zeën en rivieren. MC Syllabus 33, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- VREUGDENHIL, C.B.: De invloed van de wrijvingsterm op de stabiliteit van differentiemethoden voor hydraulische problemen. De Ingenieur, 1966.
- VREUGDENHIL, C.B.: Waterloopkundige berekeningen II. T.H. Delft, 1980.
- WEARE, T.: Errors arising from irregular boundaries in ADI solutions of the shallow water equations. International journal for numerical methods in engineering 1977.

RÉSUMÉ :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES MAREES PAR APPLICATION DE METHODES AUX DIFFERENCES FINIES SUR UN RESEAU QUADRATIQUE

La méthode considérée consiste dans l'intégration pas-à-pas des équations de Saint-Venant régissant le mouvement non permanent dans le cas des ondes longues.

Les fonctions à déterminer sont les composantes $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ du vecteur vitesse et les niveaux d'eau (ou cotes) $z(x, y, t)$ par rapport à un plan de référence horizontal. En remplaçant les différentielles par des différences finies on peut établir des formules de récurrence permettant le calcul des fonctions u, v et z à l'instant $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ pour les vitesses et $(n+1)\Delta t$ pour les cotes en fonction des valeurs connues aux instants $(n-\frac{1}{2})\Delta t$ et $n\Delta t$ dans des points discrets d'un réseau quadratique.

Le schéma de discrétisation le plus utilisé a été proposé par Hansen (1962). Dans ce schéma dit classique les points d'élévation sont situés dans les nœuds d'un réseau quadratique et leur position est déterminée par les relations $X = l\Delta X$ et $Y = m\Delta Y$, $\Delta x = \Delta Y$,

$0 \leq l \leq L$ et $0 \leq m \leq M$. Les composantes de vitesse U et V associées à chaque point d'élévation sont calculées sur les côtés des carrés, à mi-chemin entre ces points avec comme coordonnées $(l+\frac{1}{2}, m)$ et $(l, m+\frac{1}{2})$. Afin de simplifier les formules de récurrence il est utile de remplacer la notation matricielle par une notation vectorielle où les points z, U et V sont dotés du même indice $i = lk+m$, k étant le nombre de colonnes de la matrice l, m (cf. fig. 1.3a). Dans la présente étude nous examinons plus en détail un autre schéma de discrétisation également dû à Hansen (1956). Les cotes sont calculées dans les nœuds du réseau classique. Les composantes u (parallèle à l'axe des x) et v (perpendiculaire à l'axe des y) sont situées ensemble au centre des carrés et orientés suivant les diagonales, d'où l'appellation schéma « diagonal ». Comme dans le schéma classique les cotes et les composantes de vitesse correspondantes sont dotés du même indice i (cf. fig. 1.3b).

Le périmètre terrestre est schématisé dans les deux schémas sous forme d'un polygone passant exclusive-

ment par des points de vitesse et dont chaque segment est orienté suivant un des axes du système X, Y.

Pour satisfaire à la condition de continuité (conservation de masse les composantes U ou V du schéma classique sont nulles dans les points situés sur le périmètre terrestre.

Dans le schéma diagonal les composantes u et v sont obliques par rapport à ce périmètre et l'hypothèse la plus simple pour obtenir la conservation de masse est $u = v = 0$ ou, ce qui revient au même, $h = 0$ dans les points-limite (e.g. Ueno, 1964; Myazaki, 1965; Tee, 1976). Toutefois cette hypothèse implique l'existence, le long des rives, d'une couche-limite dont la largeur est de l'ordre de la dimension des mailles (cf. Tee).

Le schéma classique présente la même anomalie le long des rives obliques où le périmètre schématisique prend la forme d'une ligne à gradins (cf. Kuipers et Vreugdenhil, 1963; Weare, 1977).

Pour ce qui concerne le schéma diagonal cet inconvénient peut être évité en posant (cf. fig. 2.2.2):

$u \pm v = 0$ le long des rives parallèles à un des axes du système X, Y (cf. Sielecki, 1968);

$u = v = 0$ dans les points « concaves » et $u \neq 0$ ou $v \neq 0$ dans les points « convexes » des lignes à gradins représentant les rives parallèles à un des axes du système x, y (cf. Holsters, 1978).

Les formules de récurrence sont reprises aux sections 2.7.1 (points intérieurs) et 2.7.2 (points-limite). Elles sont complètement explicites pour le calcul des vitesses inconnues u' et v' .

La formule implicite pour le calcul des cotes inconnues z' devient en fait explicite après le calcul des vitesses. Elle n'est pas applicable sur le périmètre maritime où les cotes doivent être données.

Dans les zones où la cote de fond se situe entre les niveaux d'eau extrêmes on pose usuellement $u = v = 0$ dès qu'au jusan la profondeur locale atteint une épaisseur-limite au dessous de laquelle l'eau peut être considérée comme stagnante.

Dans le cas d'une bathymétrie à fortes pentes de fond cette hypothèse ne suffit toutefois pas pour éviter des oscillations compromettant la stabilité et la conservation de masse.

Ces perturbations numériques sont liées au fait que dans la nature l'évacuation des haut-fonds se fait pour une grande partie par des dépressions relativement profondes mais de largeur nettement inférieure à la dimension des mailles, et que les courants calculés au moyen des formules du régime fluvial sur base d'une schématisation trop grossière dépassent la vitesse critique local dans certains points du réseau.

Les algorithmes proposés à la section 2.9 permettent le passage graduel du régime fluvial normal à un régime à déversement dès que la vitesse critique est atteinte dans ces points.

LEESBAARHEID VAN VERKEERSBORDEN VAN HET INWENDIG VERLICHTE TYPE

door

ir. R. GEETS

Inspecteur-Generaal
Bestuur voor Elektriciteit en Elektromechanica

1. Inleiding

Om de leesbaarheid van verkeersborden bij nacht te verbeteren maakt men dikwijls gebruik van een bij het bord horende verlichting.

De leesbaarheid en in het bijzonder de leesbaarheidsafstand van een verkeersbord hangt van verschillende parameters af, zoals luminantieniveau, contrasten, vorm symbolen. Het luminantieniveau blijkt de hoofdparameter te zijn die de meest uitgesproken invloed heeft op de leesbaarheidsafstand. Proefondervindelijk werd aangetoond dat wanneer het adaptatieniveau van het oog bepaald wordt door de omgevingsverlichting, de leesbaarheidsafstand van een verkeersbord een stijgende functie is van de luminantie van het bord, bij verder stijgende luminantie een plateau bereikt en vervolgens terug daalt als de luminantie te hoog wordt. Voor de luminantieniveaus gebruikelijk bij verlichte verkeersborden bevindt men zich nog in het stijgend deel van de functie. De grootte van het luminantieniveau kan dan als een maat — niet noodzakelijk lineair — gehanteerd worden om de leesbaarheidsafstand te kenmerken.

2. De luminantie van de inwendig verlichte borden

De voorschriften volgens het typebestek 400.G.01 van het Ministerie van Openbare Werken leggen op dat de gemiddelde luminantie L_m voor het wit en het blauw dienen begrepen te zijn tussen volgende waarden:

$$\begin{aligned} \text{Wit} &: 90 \text{ cd/m}^2 \leq L_m \leq 210 \text{ cd/m}^2 \\ \text{Blauw} &: 5 \text{ cd/m}^2 \leq L_m \leq 15 \text{ cd/m}^2 \end{aligned}$$

Er werd nagegaan of deze waarden werkelijk tussen

de opgelegde vallen en dit voor een klassiek uit de courante productie genomen seinbord.

Het voor de meting gebruikt bord is 3,50 m breed en 3,50 m hoog (fig. 1). Het bestaat uit een kast in met glasvezels versterkte polyester. De doorschijnende voorzijde draagt de te lezen teksten of symbolen. De teksten of symbolen zijn wit. De achtergrond blauw of groen. De verlichting gebeurt met 8 fluorescentielampen van 40 W van het zogenaamde type „daglicht”.

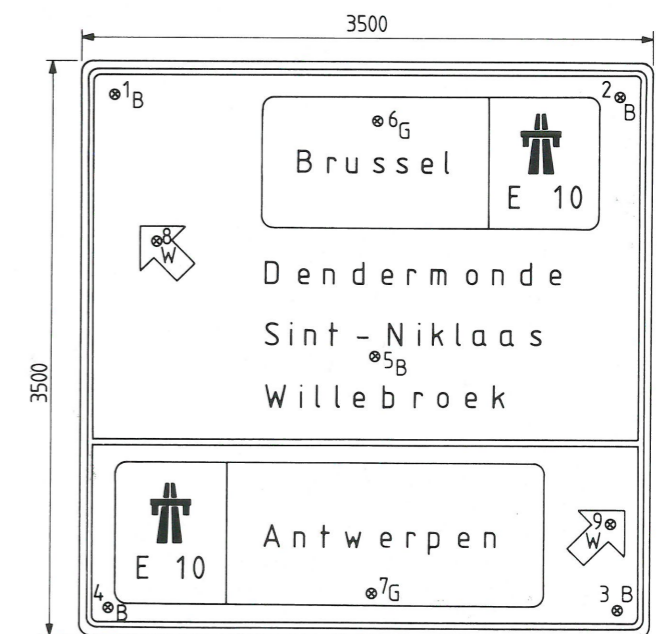


Fig. 1