Vues hors texte :

Restauration du Palais de la Nation, à Bruxelles.

Planches VII, VIII, IX.

MÉMOIRES

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE THÉORIQUE

DES

FLEUVES A MARÉES

ET

APPLICATION AUX RIVIÈRES A MARÉES

DU

BASSIN DE L'ESCAUT MARITIME

PAR

L. BONNET

Ingénieur en chef Directeur des Ponts et Chaussées.

AVANT-PROPOS.

La propagation des marées dans les cours d'eau constitue un des phénomènes les plus complexes qui se présentent en hydraulique fluviale.

L'importance de l'onde de la mer qui donne naissance à l'onde dérivée de la rivière, les conditions topographiques propres à chaque fleuve, la surface et la position de la section d'embouchure, l'évacuation du reliquat de l'onde marée précédente, l'écoulement des eaux supérieures, les résistances dues aux frottements, sont autant de causes qui influent sur la propagation des marées fluviales.

Il est extrêmement difficile de tenir compte de ces multiples circonstances dans une théorie analytique rigoureuse.

Le problème a été étudié par un grand nombre de savants et d'ingénieurs, mais tous ont dû le simplifier pour le rendre accessible à l'analyse.

Sir George Airy a établi des formules donnant la célérité de l'onde et la vitesse des courants dans le cas d'un canal indéfini de section uniforme.

De Saint-Venant a traité le problème en supposant que l'onde fluviale soit le résultat de la superposition d'une série d'ondes de translation très petites.

Maurice Lévy a complété la théorie de Saint-Venant en tenant compte du frottement dans le cas d'un fleuve de profondeur uniforme et de largeur constante ou lentement variable.

Mais, quelque loin que la théorie ait été poussée la solution générale des fleuves à marée n'a pas été donnée, parce que les conditions de la pratique diffèrent toujours beaucoup trop de celles qui ont été admises dans les études parues jusqu'à ce jour.

Des ingénieurs, MM. Comoy, Bourdelles, Franzius, ont cherché la solution du problème dans l'observation directe du phénomène de la marée.

Le travail de M. Bourdelles « *Sur le régime de la marée dans les estuaires et les fleuves* » est, à ce point de vue, particulièrement intéressant. Les éléments essentiels dont ce technicien tient compte sont : l'énergie de l'onde fluviale et les résistances de frottement.

Par une application raisonnée de ces deux éléments, M. Bourdelles donne une explication rationnelle des différents caractères de la marée fluviale et même de certaines propriétés qui semblent être en contradiction avec la théorie.

Les études basées sur l'observation directe des faits conduisent à quelques lois qui, si elles ne sont pas toujours générales, se vérifient au moins dans un grand nombre de cas. Parmi ces lois on peut citer celle donnée par M. Franzius au Troisième Congrès de Navigation intérieure tenu à Francfort-sur-Mein en 1888.

« Le principe fondamental de toute régularisation dans la partie maritime d'un fleuve consiste à augmenter le plus possible la force vive de l'onde marée, par suite le cube de l'eau à l'entrée et à la sortie et la vitesse de cette eau ».

Et cet autre principe formulé au Congrès de Paris de 1892.

« Les moyens essentiels et efficaces pour l'amélioration des fleuves à marée sont la formation d'un lit unique et régulier, se rétrécissant progressivement de l'aval vers l'amont et réglé de façon à ne gêner en rien le jeu des marées, la suppression des îles et des bancs de sable, le rassemblement des eaux dans un lit mineur encaissé dans des digues basses et l'ouverture du lit le plus grand possible pour l'introduction des hautes mers ».

M. Mengin Lecreulx posa encore la règle suivante :

« Je crois, dit-il notamment, qu'il faut élargir, seulement je répète ici une observation importante, c'est que le principal élément de transmission de la marée n'est pas la largeur, mais la profondeur. En sorte que, dans un fleuve même étroit, si vous étiez sûr d'obtenir une profondeur suffisante vous auriez une excellente transmission ».

Ces lois, tout en étant clairement formulées, sont d'une application difficile, parce qu'elles ne mettent pas à la disposition de l'ingénieur une formule analytique qui permet de calculer avec précision les élargissements et les approfondissements qu'il faut apporter au fleuve. Aussi peut-on enregistrer de nombreux mécomptes qui résultent d'une application erronée des lois de l'observation.

M. Merten, professeur à l'Université de Gand, a fait connaître en 1912 au Comité technique consultatif des travaux du Port d'Anvers, les résultats suivants de ses recherches sur les fleuves à marée :

1° Pour déterminer rationnellement les sections transversales des fleuves à marée à fond mobile, il faut exprimer que l'énergie perdue par l'onde marée, dans sa propagation le long du fleuve (en raison des variations dans ses dimensions) est absorbée par les travaux résistants dont l'expression est connue.

2° En particulier, pour maintenir constante, sur un tronçon à fond horizontal, l'énergie de l'onde par unité de largeur, le fleuve doit être calibré de façon *à faire varier les sections transversales suivant une loi de variation exponentielle* en fonction des distances. Si le fond, au lieu d'être horizontal, a un profil longitudinal imposé, la loi de variation est plus compliquée : elle se présente sous forme d'une loi exponentielle composée. L'expression mathématique de ces lois a été donnée par leur auteur. Nous la transcrivons ci-dessous :

Soient : l la largeur du fleuve en un point quelconque ; l_0 la largeur du fleuve à l'origine ; $h = h_0 a^x$ la loi de variation des profondeurs à mi-marée ; A une constante dépendante du fleuve. La largeur l du fleuve en un point quelconque doit être calibrée suivant la formule :

$$l = l_0 A^{a^{-\frac{3}{2}x-1}} \times a^{-\frac{3}{2}x} \quad \text{(loi de M. Merten).}$$

En m'appuyant sur le travail de M. Merten qui donne notamment l'équation différentielle de l'énergie de l'onde marée quand on tient compte des frottements, et qui montre qu'il y a une corrélation entre la variation de l'énergie de l'onde marée et celle de la largeur d'un fleuve à marée ; et en utilisant les lois du mouvement des ondes de translation et par pente de surface, nous avons pu trouver une série de lois et de propriétés qui permettent de résoudre tous les problèmes qui peuvent se présenter sur un fleuve maritime, à l'exception de ceux qui concernent le tracé en plan du fleuve, la position et la profondeur des passes navigables dans le lit du fleuve.

En publiant notre travail, nous n'avons pas la prétention de présenter une œuvre complète qui soit d'une rigueur absolue au point de vue de l'analyse. Notre étude a un caractère essentiellement pratique Elle admet des simplifications dans les développements des calculs, de manière à aboutir à des formules finales d'application sûre et facile ; les simplifications peuvent paraître hardies à première vue, mais nous devons ajouter qu'elles n'ont jamais été maintenues que si une vérification sérieuse faite sur l'Escaut maritime nous y autorisait.

Notre théorie des marées fluviales est entièrement basée sur les mouvements ondulatoires qui sont relativement peu connus, en tous cas, beaucoup moins que ceux par pente de surface. Nous croyons donc qu'il sera intéressant de résumer en tête de notre mémoire les propriétés essentielles des ondes et principalement celles qui sont appliquées dans notre étude de la marée fluviale. Cette partie de notre travail est rédigée en grande partie d'après la théorie des ondes de M. Boussinesq, le cours d'hydraulique de M. Flamant, le cours des travaux maritimes de MM. le Baron Quinette de Rochemont et Henry Desprez.

PREMIÈRE PARTIE.

Mouvements ondulatoires.

CHAPITRE PREMIER.

Classification des mouvements ondulatoires.

Les mouvements ondulatoires peuvent être classés en deux grandes catégories : *les ondes d'oscillation* et *les ondes de translation*.

Ondes d'oscillation.— Les ondes d'oscillation se produisent chaque fois que les eaux sont sollicitées par une force verticale, comme l'attraction des astres, la chute d'un corps sur la surface de l'eau, qui détermine un relèvement ou un abaissement momentané de la surface de l'eau sur une certaine étendue.

Les ondes d'oscillation peuvent être *ordinaires* ou *périodiques*.

Les *ondes périodiques* se succèdent comme les *ondes ordinaires*, mais la périodicité du mouvement tient à la périodicité de l'action : chaque action donnant lieu à la formation d'une onde.

Les *ondes ordinaires* ne dépendent plus d'une action périodique mais d'une force qui agit une fois, ou à des intervalles plus ou moins irréguliers.

L'onde marée de la mer est une *onde d'oscillation périodique*, les ondes formées par une pierre tombant dans l'eau sont des *ondes d'oscillation ordinaires*.

L'onde d'oscillation monte et descend de la même quantité au-dessus et au-dessous d'un plan horizontal d'équilibre ; à ce point de vue, elle est à comparer au pendule, qui oscille également de part et d'autre d'une position d'équilibre.

Les ondes d'oscillation peuvent encore être classées en deux autres catégories : celles qui paraissent courir à la surface de l'eau et qui s'appellent *ondes houleuses*, celles qui semblent rester sur place ou *ondes clapoteuses*. Les états correspondants de la masse liquide sont appelés : *houle* et *clapotis*.

Le *clapotis* se forme dans les masses liquides limitées de tous côtés par des parois. Dans des conditions semblables, la *houle* qui prend naissance par exemple, sous l'action du vent, se réfléchit contre les parois latérales en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence (abstraction faite du frottement) et se transforme en une onde de sens inverse qui se superpose à l'onde directe. Le mouvement ondulatoire résultant constitue le *clapotis*.

Les vagues, l'onde marée de la mer sont des *ondes houleuses;* le clapotis des rivières, les sèches des grands lacs sont des ondes *clapoteuses*.

L'*onde houleuse* est le mouvement naturel des masses liquides contenues dans des mers ouvertes et profondes, où les causes perturbatrices du mouvement ondulatoire sont inexistantes ou négligeables, tandis que l'*onde clapoteuse* est le mouvement propre des eaux limitées de toutes parts, par exemple, les eaux d'un lac, d'une rivière, d'un canal.

Ondes de translation. — Si une force horizontale agit sur une masse liquide, il se forme une onde appelée : *onde de translation*. A chaque action de la force correspond une et une seule onde de translation. Celle-ci se propage entièrement au-dessus ou au-dessous de la surface primitive de l'eau. Dans le premier cas l'onde est dite : *positive*, dans le second : *négative*.

Les ondes de translation *positives* sont obtenues soit en projetant un certain volume d'eau dans un canal, soit en soulevant momentanément le niveau de l'eau par la fermeture brusque d'un barrage, soit en traînant un solide, tel un bateau, dans l'eau.

Les ondes *négatives* sont produites en créant brusquement un vide ou une dépression dans la masse liquide, par exemple en ouvrant un barrage.

L'onde de translation *positive* a été observée pour la première fois par Scott Russell qui rend compte de sa découverte dans les termes suivants :

« J'observais le mouvement d'un bateau que tiraient deux chevaux rapidement dans un canal étroit, lorsque le bateau vint à s'arrêter brusquement ; mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula dans un état de vive agitation autour de la proue, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation à surface arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je

la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de huit à neuf mille à l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur un pied à 1 1/2 de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal ».

MM. Scott Russell et Bazin ont fait l'étude expérimentale des ondes de translation, M. Boussinesq en a établi la théorie analytique.

CHAPITRE II.

Propriétés des mouvements ondulatoires.

§ 1. — **Onde houleuse.**

Surface de niveau. — L'hypothèse des surfaces de niveau immobiles dans l'espace semble, à première vue, être en contradiction avec la surface libre de la houle (qui est une surface de niveau) dont la forme change à chaque instant. Mais la propriété des surfaces de niveau subsiste si l'on attribue aux surfaces ainsi qu'à toute la masse liquide un mouvement de translation commun. Ainsi complétée, la théorie des surfaces de niveau se prête également à l'analyse des ondes houleuses.

Dans notre étude nous ne considérons que des ondes cylindriques, c'est-à-dire telles que toutes les molécules se trouvant sur une même ligne horizontale perpendiculaire au plan vertical des coordonnées soient animées du même mouvement et reste constamment en ligne droite. Le mouvement est alors défini par celui des molécules situées dans le plan vertical des coordonnées.

Menons, à un instant quelconque, dans la masse liquide, les surfaces de niveau qui seront des cylindres horizontaux, ou, ce qui revient au même, traçons sur le plan vertical des coordonnées les bases de ces cylindres qui sont des courbes de niveau. Chacune de ces courbes regardée comme immobile dans l'espace, représente la trajectoire des molécules liquides qu'elle rencontre, car, cette ligne étant d'égale pression en tous ses points, une molécule quelconque ne peut s'en écarter.

Soit AMB l'une des courbes de niveau, trajectoires des molécules, et A le point le plus élevé. Menons l'horizontale Ax

et la verticale Ay que nous prendrons comme axes des coordonnées. Soient : v et v_0 les vitesses de la molécule aux points M et A de sa trajectoire, t l'instant auquel la molécule est en M, R_0 le rayon de courbe de la trajectoire en A, $\frac{1}{b}$ une quantité (b étant une longueur) égale à : $\frac{1}{v_0^2}\left(g - \frac{v_0^2}{R_0}\right)$. On peut démontrer (1) que la courbe de niveau, ou la trajectoire des molécules, est définie par les équations :

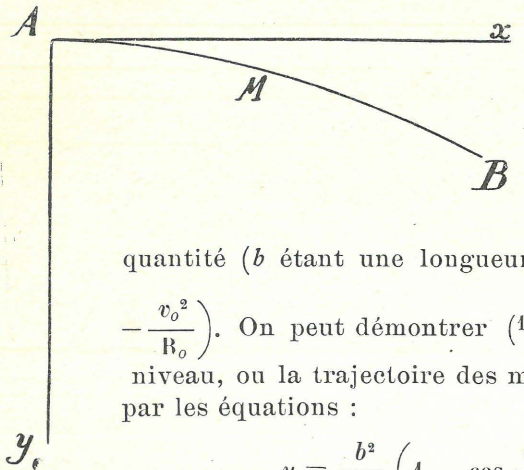

Fig 1.

$$y = \frac{b^2}{R_0}\left(1 - \cos\frac{v_0 t}{b}\right)$$

$$x = \frac{bg}{v_0}\,t - \frac{b^2}{R_0}\sin\frac{v_0 t}{b}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{bv}{R_0}\sin\frac{v_0 t}{b}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{bg}{v_0} - \frac{bv_0}{R_0}\cos\frac{v_0 t}{b}.$$

Les quantités b, v_0, R_0 sont constantes pour une même courbe de niveau, mais variables de l'une à l'autre.

Pour étudier plus facilement la forme de ces courbes, remplaçons les quantités v_0, R_0 et b par trois autres : r, V et T, liées aux premières par les relations :

$$r = \frac{b^2}{R_0}\ (1) \qquad V = \frac{bg}{v_0}\ (2) \qquad T = \pi\,\frac{b}{v_0}\ (3).$$

Les expressions de x, y, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ peuvent alors être mises sous la forme :

$$x = Vt - r\cos\frac{\Pi t}{T} \qquad (4)$$

(1) Voir pour la démonstration le cours d'hydraulique de M. Flamant.

$$y = r\left(1 - \cos\frac{\Pi t}{T}\right) \qquad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = V - \frac{\Pi r}{T}\cos\frac{\Pi t}{T} \qquad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Pi r}{T}\sin\frac{\Pi t}{T} \qquad (7).$$

Traçons dans un plan vertical une circonférence de rayon r, sur laquelle se déplacera un point mobile avec une vitesse angulaire constante : $\frac{\Pi}{T} = \frac{v_0}{b}$. A l'instant $t = o$ le point mobile est en A, à l'extrémité supérieure du diamètre vertical ; à l'instant t il est en M, l'angle AOM étant égal à $\frac{\Pi t}{T}$, et satisfait aux équations suivantes :

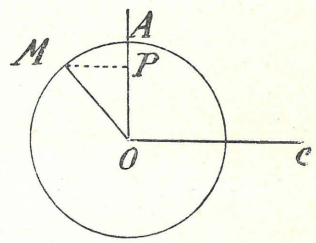

Fig. 2.

$$AP = OA - OP = r - r\cos\frac{\Pi t}{T} = r\left(1 - \cos\frac{\Pi t}{T}\right) = y$$

$$MP = r\sin\frac{\Pi t}{T} = Vt - x.$$

Si en même temps que le point M décrit la circonférence, le centre O se meut dans la direction OC des x positifs, avec une vitesse égale à V, le diamètre vertical aura parcouru pendant le temps t un espace horizontal égal à Vt, et l'abscisse du point M sera : $Vt - MP$, soit précisément l'abscisse x de la courbe de niveau.

Ainsi une courbe de niveau quelconque est engendrée par un point mobile parcourant, avec une vitesse angulaire constante, une circonférence de cercle placée dans un plan vertical et animée elle-même d'un mouvement de translation horizontal avec une vitesse constante. La courbe ainsi définie est une *trochoïde* qui se transforme en une *cycloïde* lorsque la vitesse de translation horizontale est égale à la vitesse linéaire du mobile sur la circonférence. Si, au contraire, la vitesse de translation devient très grande par rapport à la vitesse linéaire de rotation, les dimensions horizontales de la circonférence deviennent négligeables par rapport à l'espace parcouru pendant le même temps par la circonférence elle-même. La courbe de niveau se rapproche alors de celle qui est engendrée par le point P, projection de M sur le diamètre vertical, c'est-à-dire une *sinusoïde*. Le dernier cas s'applique à l'onde marée dont la vitesse de translation dépasse souvent 10000 fois celle du point mobile sur la circonférence.

Relations entre la longueur et la vitesse d'une onde, ainsi que la durée de la période. — Si nous désignons par 2L la quantité dont la circonférence avance horizontalement pendant le temps 2T, que met le point mobile à décrire la circonférence entière, nous avons : $2L = 2VT$ ou $L = VT$.

En tenant compte de cette égalité ainsi que des formules (2) et (3) nous pouvons écrire entre les trois quantités : L, V, T les relations suivantes :

$$V = \frac{gT}{\Pi} \qquad L = \frac{gT^2}{\Pi} \qquad T = \sqrt{\frac{\Pi L}{g}} \qquad V = \sqrt{\frac{gL}{\Pi}} \qquad \frac{\Pi}{T} = \sqrt{\frac{\Pi g}{L}}$$

Et, il suffit de connaître une quantité pour en déduire les deux autres.

Les relations ci-dessus montrent que les vagues de même longueur 2L sont décrites dans le même temps 2T, quelle que soit leur hauteur, et que la vitesse de translation V et la vitesse angulaire $\frac{\Pi}{T}$ ne dépendent que de L.

Conditions de continuité. — Considérons des courbes de niveau de même longueur 2L et plaçons-les de manière que tous les sommets soient sur des verticales distantes de 2L ; ces trajectoires seront toutes parcourues dans le même temps 2T par les diverses molécules liquides. Pour qu'il puisse en être ainsi, il doit exister entre les dimensions de ces courbes et leur espacement des relations déterminées par l'invariabilité du volume des éléments de la masse liquide. Soient :

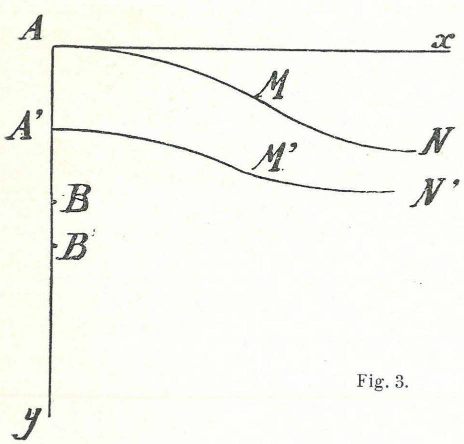

Fig. 3.

AMN la surface libre et B le centre du cercle générateur.

A'M'N' une courbe de niveau quelconque et B' le centre du cercle générateur correspondant.

Z la distance BB', ou la profondeur du centre B' sous celui de la surface libre.

h le rayon du cercle générateur de la surface libre.

r le rayon du cercle générateur correspondant à la surface de niveau A'M'N'.

On peut démontrer (1) que la condition de la continuité de la masse liquide impose la relation :

$$r = he^{-\frac{\pi Z}{L}} \qquad (8)$$

Ce qui montre que le rayon r des circonférences génératrices décroît en progression géométrique quand la profondeur Z croît en progression arithmétique.

Lorsque la masse liquide est très profonde, au point que Z puisse être égalé à l'infini pour la courbe de niveau du fond, la valeur correspondante de r est égale à 0, c'est-à-dire que la courbe de niveau du fond est une droite horizontale.

La relation (8) n'est applicable qu'aux ondes qui se propagent dans une eau de profondeur indéfinie. Quand le mouvement ondulatoire se produit dans une masse liquide de profondeur limitée H, M. Boussinesq démontre que le mouvement des molécules est encore orbitaire, seulement au lieu de décrire des cercles de rayon $r = he^{-\frac{\pi Z}{L}}$, les molécules décrivent des ellipses dont le demi-grand axe horizontal r et le demi-petit axe vertical r' ont les valeurs suivantes :

$$r = h \times \frac{\mathrm{coh}\,\pi\,\frac{H-Z}{L}}{\mathrm{sih}\,\pi\,\frac{H}{L}}. \qquad r' = h\,\frac{\mathrm{sih}\,\frac{\pi(H-Z)}{L}}{\mathrm{sih}\,\pi\,\frac{H}{L}}.$$

La demi-période T et la célérité ont alors pour expression :

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}\,\mathrm{coth}\,\pi\,\frac{H}{L}} \qquad V = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{\pi}\,\mathrm{tah}\,\pi\,\frac{H}{L}}.$$

Lorsque la profondeur est assez petite par rapport à L pour que $\frac{\pi H}{L}$ soit inférieur à $\frac{1}{4}$, par exemple, et que $\mathrm{tah}\,\frac{\pi H}{L}$ ne

(1) Voir pour la démonstration le cours d'hydraulique de M. Flamant.

diffère de $\frac{\pi H}{L}$ de moins de $\frac{1}{50}$ de sa valeur, on peut écrire, à ce degré d'approximation près :

$$V = \sqrt{gH}$$

formule qui a été donnée par Lagrange.

Dans ce qui précède nous avons fait abstraction des frottements du liquide sur lui-même et sur le fond ; or l'influence du frottement modifie un peu les conclusions ci-dessus. Elle a pour conséquence de rapprocher de la forme circulaire les trajectoires elliptiques des molécules, à partir d'une certaine hauteur au-dessus du fond et même de renverser le sens des axes, le grand axe de l'ellipse étant vertical et le petit horizontal, lorsqu'on est à une distance suffisante du fond.

Les frottements diminuent ainsi la célérité de l'onde et l'éteignent progressivement. Le coefficient d'extinction est inversément proportionnel au carré de la demi-longueur L de la houle, et par suite les houles les plus courtes disparaissent les premières. C'est ce qui explique comment, à la suite de mouvements tumultueux produisant des ondes de toute forme et de toute amplitude, il s'établit souvent après un certain temps une houle unique régulière dont l'amplitude est la plus grande.

État ondulatoire d'une masse liquide. — De ce qui précède il résulte que, si l'on place les unes au-dessus des autres des trochoïdes de même longueur 2L dont les hauteurs varient suivant la loi $r = he^{-\frac{\pi Z}{L}}$, les molécules fluides pourront les parcourir simultanément pendant le même temps 2T en constituant une masse liquide continue.

Cela restera vrai, si l'on imprime à l'ensemble de la masse liquide et des courbes de niveau un mouvement de translation avec une vitesse horizontale égale et contraire à V. Alors les sommets des vagues, en tant que formes géométriques, marcheront avec la vitesse V vers les x négatifs et les centres des circonférences, trajectoires des points décrivant les trochoïdes, resteront immobiles. Les molécules liquides, qui décrivent précisément ces circonférences, tourneront ainsi constamment autour de points fixes, avec des vitesses angulaires constantes et les mêmes pour toutes.

Ceci montre encore que le sens du mouvement apparent de la propagation de l'onde houleuse est le même que celui de la vitesse des molécules liquides quand elles passent au point le plus elevé de la trajectoire circulaire.

Déferlement — La forme de la surface libre d'une onde houleuse, comme celle de toutes les surfaces de niveau, est une trochoïde qui se transforme en cycloïde lorsque la longueur 2L est égale à $2\pi h$. Dans ce cas particulier, la forme théorique de la houle se terminerait en une pointe aiguë correspondant au contact de deux arceaux successifs de cycloïde ; mais cette forme d'onde ne peut exister, car elle déferlerait bien avant sa formation. En réalité, la longueur 2L de la houle est toujours beaucoup plus grande que $2\pi h$ et le déferlement se produit lorsque le rapport de la hauteur h à la longueur L atteint une certaine valeur qui varie avec les circonstances.

Lorsque l'onde houleuse se propage dans un courant dont les vitesses de surface sont plus grandes que celles de fond, ce qui est le cas lorsque les vagues se propagent dans un fleuve, les molécules superficielles rencontrent des vitesses plus grandes que celles qui se trouvent plus bas et sont repoussées en arrière ; ceci fait que les sommets des courbes de niveau ne sont plus situés sur une même verticale, mais sont reportés en arrière sur une ligne inclinée : le déferlement se produit vers l'arrière ou en sens contraire du mouvement de propagation.

Le déferlement se produit vers l'avant lorsque les molécules profondes sont plus ralenties que les molécules de surface, comme, par exemple, lorsque les vagues de la mer avancent sur une plage à pente douce.

Niveau d'équilibre différent du niveau moyen. — Soit la surface libre OAO' rapportée à deux axes des coordonnées ox et oy, le premier horizontal et le second vertical. Menons une tangente au point le plus bas A et calculons la surface comprise entre la tangente et la courbe de niveau OAO'. Cette sursurface S est égale à :

$$\int_0^{2L} (2h - y)\, dx.$$

Nous avons vu, que :

$$y = r\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right) \qquad \frac{dx}{dt} = V - \frac{\pi r}{T}\cos\frac{\pi t}{T}.$$

Soit : $\frac{\pi t}{T} = \varphi$ ou $\frac{\pi}{T}\, dt = d\varphi$ et remarquons que $VT = L$ et $r = h$.

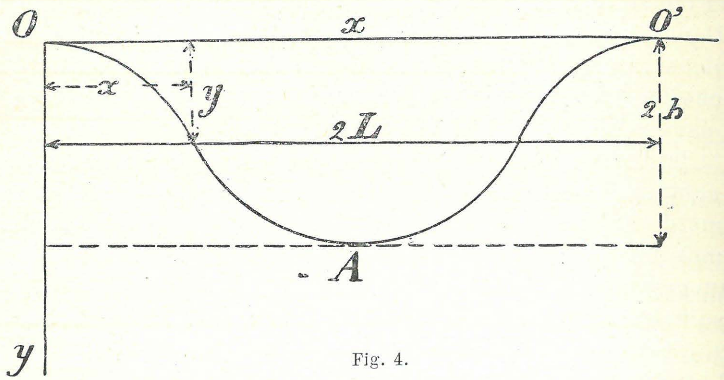

Fig. 4.

Nous pouvons alors écrire les deux relations ci-dessus sous la forme :

$$y = h\,(1 - \cos\varphi) \qquad\qquad dx = \left(\frac{L}{\pi} - h\cos\varphi\right) d\varphi.$$

D'où :

$$S = \int_o^{2L} (2h - y)\, dx = \int_o^{2\pi} (2h - h + h\cos\varphi)\left(\frac{L}{\pi} - h\cos\varphi\right) d\varphi$$

$$S = 2hL - \pi h^2.$$

La hauteur du rectangle équivalent à la surface S supposée également répartie sur la longueur 2L de l'onde sera égale à :

$$h' = \frac{S}{2L} = h - \frac{\pi h^2}{2L}.$$

Par conséquent, le niveau d'équilibre se trouve au-dessus du niveau moyen, lequel est à la hauteur h, d'une quantité égale à : $\frac{\pi h^2}{2L}$.

La démonstration ci-dessus suppose que les trajectoires des molécules soient des circonférences, ce qui ne se réalise rigoureusement que dans des masses liquides de profondeur indéfinie. Quand les trajectoires sont elliptiques, ce qui est le cas pour des profondeurs limitées, le niveau moyen est au-dessus du niveau d'équilibre de la quantité : $\frac{\pi r r'}{2L}$.

Pour l'onde marée, h est très petit par rapport à L, de sorte que le niveau d'équilibre se confond sensiblement avec le niveau moyen.

Énergie totale d'une onde d'oscillation. — L'énergie d'une onde est le travail qu'elle peut produire en revenant au repos. L'énergie totale comprend : l'énergie potentielle, due à l'élévation de l'onde, et l'énergie cinétique, ou actuelle, ou demi-force vive, due aux vitesses des molécules fluides. Cette énergie est constante quand on fait abstraction des phénomènes de frottement. En effet, les actions moléculaires sont alors normales aux facettes sur lesquelles elles agissent et ne produisent aucun travail quels que soient les changements de forme du liquide, dont le volume reste constant. Il en est encore de même des pressions appliquées à la surface libre et aux parois fixes du canal. Il ne reste dès lors, comme force agissante et capable de produire du travail, que la pesanteur. Or cette force ne peut produire que du travail moteur et non pas résistant. Dans ces conditions l'énergie totale de l'onde est bien une constante.

M. Boussinesq a démontré que l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique, et que la somme des deux, représentée par $\rho g E$ est égale à :

$$\rho g E = \rho g L h^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi Z_1}{L}}\right).$$

expression dans laquelle ρ représente la densité, ρg le poids spécifique, Z_1 la profondeur correspondant au centre du cercle générateur des molécules du fond.

Lorsque la profondeur de la masse liquide est très grande, et par conséquent Z_1 aussi, l'exponentielle est négligeable devant l'unité, de sorte que l'on a :

$$\rho g E = \rho g L h^2$$

ou bien encore en remplaçant L par $\frac{\pi V^2}{g}$.

$$\rho g E = \rho \pi h^2 V^2.$$

L'énergie d'une onde d'oscillation est donc égale, ou un peu inférieure, au produit de la masse liquide, contenue dans le cercle d'oscillation des molécules superficielles, par le carré de la célérité de la propagation.

Dans le cas où les trajectoires fluides sont des ellipses, l'énergie totale est égale à :

$$\rho g E = \rho \pi r r' V^2.$$

Vitesse des courants.— La propagation des ondes houleuses entraîne un certain déplacement horizontal du liquide auquel il faut attribuer la production des courants de marée. La vitesse de ces courants peut être déduite d'une propriété géométrique des ondes.

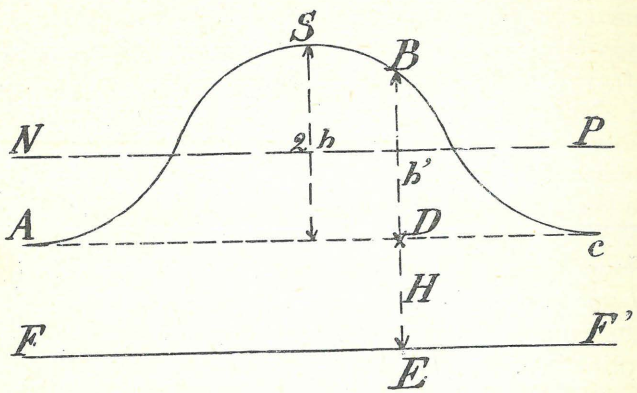

Fig. 5.

Soit ASC, une onde qui se propage dans un canal dont le niveau primitif est en NP et le plafond en FF'.

Représentons par V la vitesse de propagation de l'onde et par u la vitesse du courant.

Nous pouvons concevoir que le mouvement de l'onde se fasse entièrement au dessus du plan AC, la masse liquide en-dessous de ce niveau restant entièrement immobile. S'il en était ainsi, le débit de l'onde, en une section quelconque B, sur une largeur égale à l'unité, serait égal à :

$$q = V \times BD \times 1.$$

Si nous admettons, au contraire, que la totalité de la masse fluide participe au mouvement, comme c'est le cas d'ailleurs, le débit est égal à :

$$q' = u \times BE \times 1.$$

Comme les débits q et q' sont nécessairement égaux, nous pouvons écrire :

$$V \times BD \times 1 = u \times BE \times 1.$$

D'où :

$$V = u \frac{BE}{BD}$$

$$u = V \frac{h'}{H + h'}.$$

Dans les mers ouvertes, où l'onde peut se propager librement sans rencontrer d'obstacles et où sa forme est régulière, la vitesse u du courant est la même sur toute la profondeur de la nappe.

Examinons comment varie cette vitesse pendant la durée d'une période complète du mouvement ondulatoire.

A cet effet, considérons le mouvement orbitaire des molécules fluides. A l'instant où la molécule se trouve au sommet de sa course en A, la vitesse du courant est dirigée dans le même sens que la célérité V. A mesure que l'onde avance, la molécule se rapproche de la position B et la composante horizontale de la vitesse diminue sans cesse, tout en conservant une valeur positive. Il se produit pendant toute cette période ce qu'on appelle pour la marée : un courant de *flot*. Au point B la vitesse horizontale s'annule et devient négative au-delà. La vitesse négative se maintient jusqu'en D où elle s'annule à nouveau. La valeur maxima de la vitesse négative a lieu en C, c'est-à-dire au moment où passe le creux de la vague. Cette phase de l'onde correspond au *jusant* de la marée. Le D en A la vitesse du courant est de nouveau positive et elle atteint sa valeur maxima en A.

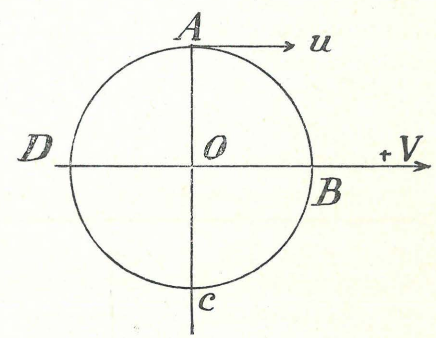

Fig. 6.

En résumé, il se produit au passage d'une onde houleuse deux courants : l'un dirigé dans le sens de la propagation de l'onde ou courant de *flot*, l'autre de sens contraire ou courant de *jusant* ; le renversement du courant se produit à mi-hauteur de l'onde et les vitesses horizontales maxima se présentent au sommet et au creux de la vague.

Ces conclusions ne sont valables que pour les mers largement ouvertes et profondes.

Sur les côtes où il existe de nombreuses causes perturbatrices du mouvement ondulatoire, les heures des étales et des vitesses maxima diffèrent plus ou moins des heures théoriques. Si nous considérons en particulier l'onde marée, celle-ci peut perdre en tout ou en partie son caractère périodique et se rapprocher de l'onde de translation lorsque la côte est irrégulière ou encombrée de bancs et d'îles.

Considérations particulières sur les ondes houleuses. — VAGUES. — Les vagues de la mer produites par l'action du vent se comportent d'une façon générale comme les ondes houleuses.

Au large, les lames sont d'autant plus hautes que les mers sont plus vastes et plus profondes ; elles s'y propagent dans la direction du vent, sous la forme d'ondes cylindriques avec une vitesse de propagation égale à : $\sqrt{gH}$.

En approchant la côte, la partie de la vague la plus voisine du rivage est retardée dans sa marche par suite de l'existence de profondeurs moins grandes, pendant que l'autre extrémité, du côté de la mer, continue à avancer avec la même célérité. Les lames semblent ainsi pivoter autour d'un point de la côte et se rabattre le long du rivage.

Lorsque les vagues se présentent normalement, ou à peu près, à l'entrée d'une baie largement évasée, les deux extrémités des vagues près des rives, où il y a de faibles profondeurs, avancent moins vite que les parties centrales, où les profondeurs sont plus grandes. Les lames s'étendent alors en éventail et accentuent ce mouvement à mesure qu'elles avancent plus profondément dans la baie.

On remarque encore que les vagues, qui pénètrent dans une baie en entonnoir et de profondeur décroissante, se raccourcissent et deviennent de plus en plus hautes. Ce fait s'observe tout spécialement dans le port d'Ajaccio, situé au fond d'une anse qui va en se rétrécissant et qui est ouverte aux vents du large, très violents dans ces parages. Quand les vagues pénètrent au contraire par un goulet étroit dans une baie qui s'évase les vagues augmentent de longueur et diminuent de hauteur.

Les deux phénomènes ci-dessus peuvent s'expliquer aisément par la propriété de l'énergie de l'onde. A cet effet, rappelons-nous les relations suivantes :

Célérité de l'onde : $V = \sqrt{gH}$

Longueur de l'onde : $L = \frac{\pi}{g} V^2$

Énergie de l'onde : $\rho g E = \rho g l h^2 L$

l étant la largeur de la baie et L la longueur de la vague.

Si nous faisons abstraction du frottement, l'énergie est une constante, de sorte que si l et L varient dans un sens, h varie en sens contraire.

Dans le premier cas rapporté ci-dessus l décroît ainsi que L — puisque H et par conséquent V diminue —, donc h croît, ce qui est en parfaite concordance avec les faits de l'observation.

Dans le second cas, l augmente, si L reste constant ou augmente h doit diminuer, ce qui est encore d'accord avec la réalité.

Marées. — L'onde marée est due à l'attraction luni-solaire qui agit sur les éléments fluides de l'océan.

C'est Newton qui s'occupa le premier du phénomène de la marée et qui essaya d'en donner une explication.

Laplace montra l'imperfection de la théorie de Newton et reprit la question en partant du théorème qui peut s'énoncer comme suit : Sous l'influence des forces reprenant périodiquement les mêmes valeurs le mouvement des molécules fluides et celui du niveau doivent être périodiques et d'une période égale à celle des forces. Mais la nouvelle méthode était encore bien incomplète et ne pouvait rendre suffisamment compte de tous les faits observés.

Hatt fit alors une nouvelle étude du phénomène de la marée en attribuant les mouvements oscillatoires bien plus à une modification de la verticale sous l'effet de l'attraction des astres, qu'à la variation de la gravité même.

Les forces dont il faut tenir compte sont : les unes constantes ou lentement variables, les autres périodiques à période diurne ou semi-diurne. La hauteur de la mer au-dessus du niveau d'équilibre dépend alors de trois termes : un constant ou lentement variable, les deux autres périodiques de même période que les forces.

Pour compléter l'étude des marées, des savants ont proposé d'admettre que les marées se forment dans le vaste bassin de l'Océan Pacifique, d'où elles se propageraient par dérivation dans les différentes mers du monde. Mais cette hypothèse ne rencontre plus guère de crédit aujourd'hui, car elle ne parvient pas à expliquer tous les problèmes de l'observation.

Quoiqu'il en soit, le mouvement ondulatoire une fois établi dans une mer répond à toutes les lois d'une onde houleuse, de sorte que ces lois permettent d'expliquer toutes les particularités qui sont observées dans la propagation des marées.

Nous avons vu que l'énergie d'une onde houleuse, produite dans une eau de profondeur illimitée, est égale à : $\rho\pi h^2 V^2$.

Comme la marée est due à une cause d'intensité moyenne invariable : action combinée de la lune et du soleil, l'énergie qui lui est communiquée est constante. Dans ces conditions : $\rho\pi h^2 V^2 = c^{ste}$ ou $hV = c^{ste}$ ou bien encore en remplaçant V par sa valeur approximative : $\sqrt{gH}$.

$$h\sqrt{H} = c^{ste} \qquad (9).$$

Cette relation qui a été donnée par Comoy montre : que la hauteur de la marée est en chaque point, et toutes choses égales, inversement proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de la mer. Les chiffres déduits de la formule (9) dans laquelle la constante est égale à 20, concordent assez bien, d'après Comoy, avec les hauteurs des marées observées dans les mers de faible profondeur et avec les rares données que l'on possède sur celles des mers profondes.

Dans la Méditerranée les marées sont relativement faibles, malgré cela on observe de grandes amplitudes au Nord de l'Adriatique et au fond du golfe de Gabès. Un phénomène semblable se produit dans la mer Rouge où les marées sont insignifiantes et où on relève néanmoins des hauteurs de marées très fortes au fond du golfe de Suez.

Ces faits doivent être attribués :

1° Au relèvement du fond de la mer qui, en diminuant la célérité de propagation, provoque une augmentation de l'amplitude de l'onde marée, comme c'est le cas pour les vagues de la mer ;

2° A la transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle, au moment où la marée arrive au fond du golfe. Là, l'énorme quantité d'énergie cinétique encore disponible ne peut être amortie par les résistances locales et doit être transformée en une énergie latente, telle l'énergie potentielle, par un relèvement de la hauteur de la marée. C'est quelque chose de semblable qui se produit pour les vagues de la mer arrêtées contre une digue ou une falaise et qui se relèvent verticalement devant l'obstacle rencontré.

§ 2. — Onde clapoteuse.

L'onde clapoteuse résulte de la superposition de deux ondes houleuses : l'une directe, l'autre réfléchie sur un plan vertical perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'onde. Afin de nous rendre compte de ce qu'est exactement le *clapotis*, figurons séparément l'onde directe et l'onde réfléchie, qui ont la même forme mais qui se propagent en sens contraire avec des célérités égales et donnons-nous les trajectoires circulaires d'une même molécule fluide, suivant qu'elle participe au mouvement de l'onde directe ou bien de l'onde réfléchie.

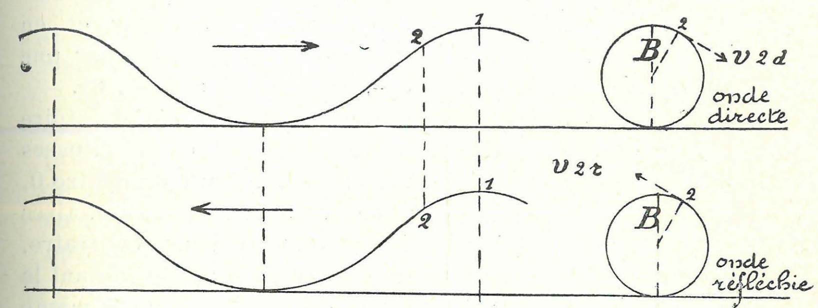

Fig. 7.

Envisageons les deux ondes dans une position telle que les sommets et les creux se trouvent sur les mêmes verticales. L'onde unique qui en résulte a la même longueur et une amplitude double des deux ondes correspondantes.

Considérons la molécule 1 qui se trouve au sommet. Le mouvement ondulatoire direct communique à cette molécule une vitesse horizontale dirigée dans le sens de la propagation de l'onde, soit vers la droite ; le mouvement de l'onde réfléchie imprime une vitesse égale à la première mais dirigée en sens contraire, de sorte que la vitesse résultante est nulle.

Soit une molécule 2 située sur un flanc de l'onde ; participant au mouvement de l'onde directe la molécule a une vitesse

v_{2d} qui fait un angle β avec la verticale et qui est dirigée dans le sens de la marche des aiguilles d'une montre ; considérée comme faisant partie de l'onde réfléchie la molécule a une vitesse égale à la première v_{2r} mais dirigée en sens contraire ; la vitesse résultante est donc de nouveau égale à zéro.

Ce que nous disons pour les molécules 1 et 2, nous pouvons le répéter pour toutes les autres, de sorte qu'à l'instant considéré, les vitesses résultantes sont nulles dans toute l'étendue de la masse liquide.

Envisageons maintenant l'instant auquel le sommet de l'onde réfléchie correspond avec un point 2 quelconque de l'onde directe. La molécule fluide est animée à ce moment d'une vitesse horizontale v_{12} dirigée vers la gauche et une vitesse v_{2d} égale à la première dirigée dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre et faisant un angle β avec la verticale. La vitesse résultante w_1, en grandeur et en direction, est donnée par une épure des vitesses (fig. 8).

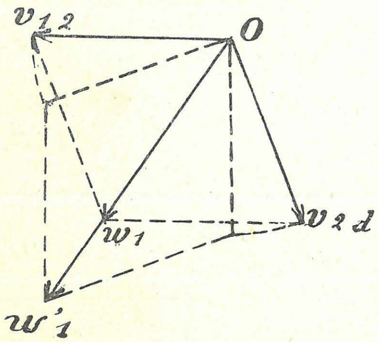

Fig. 8.

Le mouvement ondulatoire persistant, les deux vitesses tourneront autour du centre 0, avec des vitesses angulaires égales et de sens contraire, de sorte qu'à chaque instant la vitesse résultante aura la même direction mais variera de sens et de grandeur. Si nous suivons maintenant le mouvement d'autres molécules nous verrions que l'angle que fait la vitesse résultante avec la verticale change de valeur, mais que toutes les autres conclusions ci-dessus restent debout.

Ceci montre que les trajectoires des molécules liquides sont rectilignes, diversement inclinées, et qu'à une époque quelconque les molécules appartenant à un même plan horizontal d'équilibre sont à la même distance du centre d'oscillation.

La surface libre du clapotis varie de forme à chaque instant, mais les saillies et les creux restent toujours sur les mêmes verticales, les saillies y alternant avec les creux de façon que les ondes s'élèvent et s'abaissent sur place sans présenter l'apparence d'un mouvement de propagation ; toutes les

molécules repassent simultanément et à intervalles égaux par leurs positions d'équilibre. A mi-distance des verticales où se produisent les saillies et les creux, il y a un point où la molécule liquide n'éprouve que des déplacements horizontaux, c'est-à-dire que la surface libre reste constamment en coïncidence avec la surface d'équilibre.

Les différentes propriétés données ci-dessus peuvent être déduites des formules du mouvement de l'onde houleuse (4, 5, 6, 7) il suffit à cet effet de considérer simultanément les équations du mouvement de deux ondes égales se propageant en sens contraire avec des célérités égales.

Les relations fondamentales $L = \frac{gT^2}{\pi}$ et $V = \sqrt{\frac{gL}{\pi}}$ établies pour la houle subsistent encore pour le clapotis qui se produit dans une eau de profondeur infinie. Lorsqu'il s'agit d'une masse limitée H, il faut appliquer la formule de Lagrange :

$$V = \sqrt{gH}.$$

Seiches des grands lacs. — Une des formes les plus remarquables de l'onde clapoteuse est le phénomène connu sous le nom de *Seiches* des lacs.

Les seiches de plusieurs lacs suisses, et plus spécialement celles du lac de Genève, ont été étudiées d'une manière très précise et très détaillée par M. Forel, professeur à l'Académie de Lausanne. Les oscillations les plus fortes sont relevées à Genève où elles peuvent atteindre de un à deux mètres de hauteur.

M. Forel indique, comme se rattachant à la même famille d'ondes, les oscillations rythmiques et régulières observées par M. Airy au marégraphe de Malte en 1872 ; ces oscillations mesuraient environ $0^m.45$ de hauteur et duraient de vingt à vingt et une minutes.

Il y a encore les seiches du lac George en Australie, lac qui mesure 29 kilomètres de long et $5^m.50$ de profondeur. Les ondulations clapoteuses de ce lac ont été observées par Scott Russell qui releva notamment pour la durée de la période : 131 minutes, chiffre qui concorde avec la théorie.

§ 3. Ondes de translation.

Célérité de propagation et vitesse du courant. — Si nous représentons par H la profondeur primitive du canal et *h* la hauteur de l'onde, M. Boussinesq démontre que la célérité est égale à :

$$V = \sqrt{gH\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{3h}\frac{d^2h}{dx^2}\right)} \qquad (10).$$

c'est-à-dire que la vitesse de propagation varie d'une tranche à l'autre de l'intumescence et dépend : de la profondeur initiale du canal, de la hauteur de l'onde au point considéré et de la courbure de la surface.

Pour une onde d'une certaine grandeur à faible courbure, la célérité est donnée, avec un degré d'approximation suffisant, par la formule de Bazin ou de Scott Russell :

$$V = \sqrt{g\,(H + h)} \qquad (11).$$

Si l'eau du canal est animée d'une vitesse propre $\pm u''$, la célérité de propagation est égale à :

$$V = \sqrt{g\,(H + h)} \pm u'' \qquad (12).$$

La vitesse du courant, produit par l'onde de translation, est donnée par l'une ou l'autre des deux formules :

1° Canal où il n'existe pas d'écoulement d'eau :

$$u = V\,\frac{h}{H + h} \qquad (13).$$

2° Canal ou l'eau est animée d'une vitesse propre $\pm u''$:

$$u = V\,\frac{h}{H + h} \pm u'' \qquad (14).$$

Onde solitaire. — Parmi toutes les intumescences de formes diverses dont on peut imaginer la propagation, il en est une pour laquelle les hauteurs h et les courbures $\frac{d^2h}{dx^2}$ sont réparties de telle manière que la célérité de propagation est la même en tous les points de l'onde. Cette forme particulière de l'onde est appelée : *onde solitaire* et a été observée par Scott Russell et Bazin.

Pour en déterminer la forme, il suffit d'exprimer que la somme des deux derniers termes variables dans l'expression de V soit une constante.

M. Boussinesq a fait une étude très détaillée de cette onde et donne plusieurs propriétés qui présentent le plus haut intérêt au point de vue de la propagation des ondes de translation.

Après avoir posé :

$$\frac{3}{4}\frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h}\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_1}{2H}$$

M. Boussinesq démontre que :

$$Q = 2H\sqrt[3]{E} \qquad (15)$$

$$h_1 = \frac{3\sqrt[3]{E^2}}{4H} \qquad (16)$$

$$\frac{Q}{h_1} = \frac{8H^2}{3\sqrt[3]{E}} \qquad (17)$$

expression dans lesquelles : h_1 est une constante, Q le volume de l'onde, E l'énergie de l'onde, qui est une constante si on fait abstraction des frottements.

Les relations 15, 16, 17 permettent d'énoncer les théorèmes suivants :

1° Le volume de l'onde solitaire varie dans le même rapport que la profondeur du canal ;

2° La hauteur de l'onde solitaire varie en raison inverse de la profondeur du canal ;

3° Le rapport $\frac{Q}{h_1}$, qui mesure en quelque sorte la longueur de l'onde solitaire est proportionnel au carré de la profondeur du canal.

Comme toute onde de translation se rapproche de l'onde solitaire, nous pouvons admettre, avec un certain degré d'approximation, que les lois ci-dessus sont applicables à toutes les ondes de translation. Par conséquent, si une onde de translation quelconque se propage dans un canal de profondeur décroissante l'onde s'élève et se raccourcit jusqu'à ce qu'elle manque de base et qu'elle déferle.

L'onde *solitaire*, dont les différents éléments sont tous animés de la même célérité, ne change pas de forme en se propageant, mais une autre intumescence, pour laquelle la somme des deux termes variables dans l'expression de V n'est pas une constante, se modifie à chaque instant et tend vers la seule forme stable qui est l'onde *solitaire*. C'est ce qui explique pourquoi on produit si aisément des ondes *solitaires*.

Énergie totale d'une onde de translation. — On entend par énergie totale d'une onde de translation, le travail qu'elle peut produire en revenant au repos. Cette énergie est constante quand on fait abstraction des phénomènes de frottement. La démonstration de cette propriété est identique à celle que nous avons présentée pour les ondes d'oscillation. Déterminons l'énergie totale.

Soit Q le volume du liquide qui, par sa projection brusque dans le canal, donne naissance à l'intumescence. Ce volume n'est nécessairement pas entièrement positif; il peut être composé de parties positives et négatives, il suffit pour cela que la somme des volumes partiels soit égale au volume d'eau qui a produit l'onde de translation.

Considérons deux axes des coordonnées, l'un vertical, l'autre horizontal se confondant avec le plafond du canal. Désignons par μ la hauteur du centre de gravité de l'onde au-dessus du niveau du canal et par ξ son abscisse.

Pour un élément hdx de l'onde, l'énergie potentielle est égale à : $\rho g \times h \times dx \times \frac{h}{2}$ et pour l'ensemble de l'onde : $\int \rho g \frac{h^2}{2} dx = \rho g Q \mu$.

L'énergie actuelle, ou demi-force vive, est égale au demi-produit de la masse par le carré de la vitesse horizontale des molécules, abstraction faite de la composante verticale de la vitesse; soit pour un élément dx : $\frac{1}{2} \rho (H + h) u^2 dx$, ou bien en remplaçant u^2 par sa valeur : $\frac{gh^2}{H+h}$

$$\frac{1}{2} \rho (H + h) u^2 dx = \frac{1}{2} \rho (H + h) \frac{gh^2}{H+h} dx = \frac{1}{2} \rho g h^2 dx,$$

expression qui est absolument identique à celle de l'énergie potentielle.

Dès lors, l'énergie totale d'un élément dx est égale à : $\rho g h^2 dx$, et l'énergie totale de l'ensemble de l'intumescence a pour valeur :

$$E = \int \rho g h^2 dx = 2 \rho g Q \mu \quad (18).$$

D'où il résulte que l'énergie totale d'une onde de translation est égale au double du poids de l'onde multiplié par la hauteur du centre de gravité au-dessus du niveau primitif du canal.

De l'expression : $dE = \rho g h^2 dx$, nous pouvons encore déduire l'énergie totale d'une tranche d'onde de longueur égale à l'unité et de largeur l, soit : $\rho g l h^2$, h étant la hauteur moyenne de la tranche.

La relation (18) montre que si le volume de l'onde est constant, la hauteur du centre de gravité au-dessus du niveau du canal reste aussi invariable. Cette propriété n'implique pas nécessairement que l'onde conserve la même hauteur pendant toute la durée de la propagation. La hauteur de l'onde peut parfaitement changer, il suffit alors que l'intumescence se décompose en parties alternativement positives et négatives telles que la somme algébrique des volumes partiels soit égale au volume primitif de l'intumescence. Dans des conditions semblables, les centres de gravité des parties positives et négatives peuvent se rapprocher sans cesse de la surface libre primitive, alors que le centre de gravité général reste constamment à la même hauteur.

Si la pesanteur et les réactions normales aux parois sont les seules forces dont on tient compte, la quantité de mouvement projetée sur l'horizontale est aussi une constante égale à la masse fluide ρQ multipliée par la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$ du centre de gravité.

Si, d'autre part, le volume de l'onde ou la masse fluide reste invariable, la vitesse du centre de gravité général sera aussi une constante.

Perte d'énergie de l'onde de translation sous l'action des frottements. — Considérons le même cas que celui qui a été étudié par M. Boussinesq : soit une onde dont la vitesse du courant est suffisamment petite pour que les frottements puissent être supposés proportionnels à la vitesse du courant.

Admettons que l'eau dans le canal soit au repos et que la célérité ainsi que la vitesse du courant soient données par les relations :

Célérité de l'onde : $V = \sqrt{gH}$.

Vitesse du courant : $u = \sqrt{g} \frac{h}{\sqrt{H}}$.

Si nous désignons par χ le périmètre mouillé et par ε_1 un coefficient de frottement, la résistance par unité de longueur d'onde est égale à $\chi\varepsilon_1\, h\sqrt{\frac{g}{H}}$, et le travail produit par cette force pendant le temps dt a pour valeur :

$$\chi.\,\varepsilon_1.\, h\sqrt{\frac{g}{H}} \times udt = \chi.\,\varepsilon_1\, \frac{g}{H}\, h^2\, dt.$$

Comme ce travail représente la variation élémentaire d'énergie : dE, nous pouvons écrire :

$$dE = -\,\chi.\varepsilon_1\, \frac{g}{H}\, h^2 dt\,.$$

En divisant le premier membre par E et le second par la valeur de l'énergie totale : $\rho g l h^2$ nous avons :

$$\frac{dE}{E} = -\,\frac{\chi.\,\varepsilon_1 \frac{g}{H}\, h^2 dt}{\rho g l h^2}$$

ou bien en faisant les simplifications et en posant : $l\mathrm{H} = \omega$

$$\frac{dE}{E} = -\,\frac{\chi}{\omega}\cdot\frac{\varepsilon_1}{\rho}\, dt\,.$$

D'où :

$$l_n E = -\,\frac{\varepsilon_1}{\rho}\,\frac{\chi}{\omega}\, t + c^{ste}.$$

Pour : $t = 0$ $\qquad$ $E = E_o$.

Donc : $l_n E = l_n E_o$

$$l_n E = l_n E_o - \frac{\varepsilon_1}{\rho}\,\frac{\chi}{\omega}\, t$$

$$E = E_o\, l^{-\frac{\chi}{\omega}\frac{\varepsilon_1}{\rho} t} \qquad (19).$$

Cette relation montre que : l'énergie totale d'une onde de translation décroît suivant une loi logarithmique.

Variation de la hauteur de l'onde de translation dans un canal de largeur variable et de profondeur constante. — Soit une tranche d'onde de longueur égale à l'unité dont l'énergie est égale à : $\rho g l h^2$.

Considérons le mouvement de cet élément d'onde pendant un temps assez court pour que l'effet du frottement soit négligeable et par conséquent pour que l'énergie puisse être supposée constante.

Si sur le parcours de l'onde, la largeur l du canal change et devient l_1, la variation de l'amplitude est donnée par la relation :

$$\rho g l h^2 = \rho g l_1 h_1^2$$

qui exprime que l'énergie est constante.

D'où l'on peut déduire :

$$h_1^2 = h^2\,\frac{l}{l_1}\,.$$

$$h_1 = h\sqrt{\frac{l}{l_1}} \qquad (20).$$

Ceci montre que dans un canal de profondeur constante la hauteur de l'onde varie en raison inverse de la racine carrée de la largeur du canal.

Considérations particulières sur la propagation des ondes de translations. — Onde positive. — Considérons une intumescence d'une certaine longueur produite dans un canal par la projection d'un débit d'eau constant pendant un temps donné.

La forme première de l'intumescence est semblable au gonflement ABCD (fig. 9). Elle comprend une partie centrale sensiblement horizontale BC et deux courbes de raccordement avec le plan d'eau primitif AB et CD.

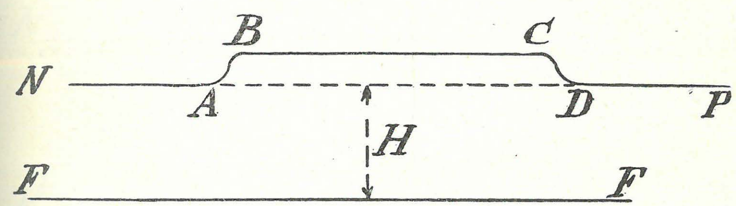

Fig. 9.

Dans la partie horizontale BC, la courbure étant nulle ou négligeable, la célérité y est exprimée par les deux premiers termes de la valeur de V, soit par : $\sqrt{g\left(H + \frac{3}{2}h\right)}$. Mais à l'avant de l'intumescence, au droit de l'arc de raccordement, la courbure étant appréciable il faut tenir compte du troisième terme de la vitesse de propagation. Ce terme est négatif en C, où le raccordement est nécessairement convexe à courbure négative, de sorte que la vitesse de propagation y est moindre que dans la partie horizontale. La tête de l'intumescence est ainsi inondée par un afflux d'eau venant de l'arrière jusqu'au moment où l'exhaussement provoqué compense l'influence du terme négatif de la courbure. A partir de cet instant la tête et le corps se propagent avec la même célérité.

La tête ainsi formée est appelée : *onde initiale* et a été observée par M. Bazin, qui lui a attribué une hauteur égale à : $\frac{3}{2} h$.

L'ONDE INITIALE se raccorde vers l'arrière avec le corps de l'intumescence par l'intermédiaire d'un axe concave à courbure positive. En ce point le troisième terme de la vitesse de propagation devient positif, et la célérité y est plus grande que pour les tranches d'ondes voisines. Il se forme dès lors un creux assez profond pour que la diminution de profondeur compense le terme de la courbure. La concavité ainsi formée, ne pouvant se raccorder à la surface horizontale située plus en arrière que par un arc convexe, est suivie d'une ondulation positive qui se relève au-dessus du plan BC pour neutraliser l'influence du terme négatif de la courbure. Et ainsi de

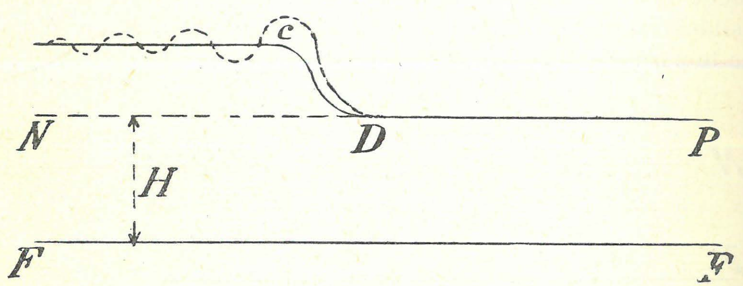

Fig. 10.

suite, jusqu'à ce qu'il se soit réalisé un état d'équilibre du mouvement qui comprendra une série d'ondes de plus en plus petites (fig. 10).

En B où il y a également un arc de raccordement convexe, le même équilibre du mouvement doit tendre à s'établir, mais ici, un afflux d'eau ne pouvant plus compenser l'influence de la courbure, c'est la queue de l'onde qui se détache et qui tend à former une onde distincte. Le même morcellement continuant, l'intumescence primitive se résoud en une série d'ondes isolées jusqu'à ce que la hauteur de chacune d'elle et la cour-

bure de la surface soient dans un rapport tel, que la célérité soit la même en tous les points. On a alors une succession d'ondes solitaires.

ONDES NÉGATIVES. — Les ondes négatives qui se propagent en dessous du niveau primitif du canal, donnent aussi lieu à quelques constatations intéressantes.

Le profil longitudinal le plus simple de l'onde négative, peu de temps après sa formation, comprend : une partie concave plus ou moins profonde qui se raccorde en avant et en arrière avec le niveau libre primitif par l'intermédiaire de deux courbes convexes.

Sous l'influence des termes qui tiennent compte de la hauteur et de la courbure, les parties concaves de l'onde proche du sommet marchent moins vite que les parties antérieures où les profondeurs sont plus grandes. L'onde négative s'allonge ainsi de plus en plus en s'aplatissent de manière à conserver le volume initial, qui reste invariable dans une eau de profondeur uniforme. La queue de l'onde allant, pour les mêmes motifs que précédemment, plus vite que le corps y pénètre et diminue sans cesse de longueur de l'onde. Au bout d'un certain temps donc, l'onde négative primitive représentée en trait

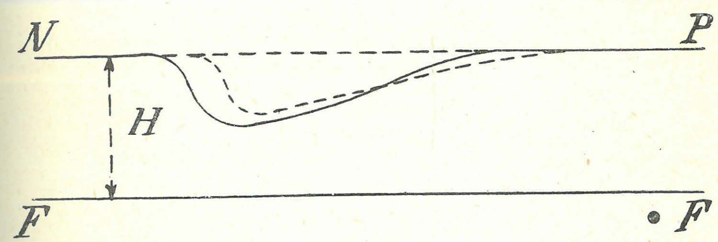

Fig. 11.

plein (fig. 11) prend la forme allongée figurée par le trait pointillé. Cette forme n'est pas définitive. L'onde négative, ne pouvant se raccorder à l'arrière, avec le plan d'eau du canal, que par un arc convexe, pour lequel le dernier terme de la célérité est négatif, est suivie d'une ondulation positive qui se relève au-dessus du niveau du canal jusqu'à ce que l'exhaussement réalisé neutralise le terme négatif de la courbure. Cette onde positive est nécessairement suivie d'une partie concave qui assure le raccordement de la surface avec le niveau du canal. Comme l'équilibre du mouvement exige que la célérité de cet arc concave soit égale à celle du corps principal de l'onde négative, qui est plus petite que $\sqrt{gH}$, le terme positif dû à la courbure doit être compensé par le terme de la hauteur, ce qui ne peut être que si la hauteur est négative. Mais

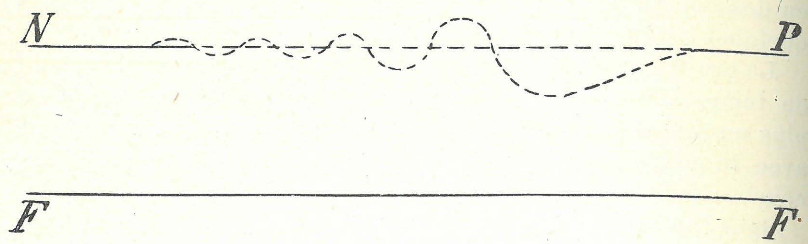

Fig. 12.

alors l'arc de raccordement a la forme d'une onde négative à laquelle il faut appliquer le même raisonnement que celui fait pour l'onde négative initiale. Dans ces conditions toute onde négative est suivie d'une série d'autres ondes alternativement positives et négatives, qui sont, à fort peu de chose près, les unes entièrement convexes, les autres concaves, les points d'inflexion se trouvant sensiblement sur le prolongement du du niveau du canal.

(*A suivre.*)

LE CALCUL DES COLONNES

PAR

L. LEMAIRE

Ingénieur A.I.Lg. A.I.M.
Ingénieur conseil de sociétés charbonnières.

(*Suite et fin*).

V. *Annales des Travaux Publics de Belgique* de 1921 et n[os] 1 et 2 de 1922.