NOTE

sur l'intégration des équations

DU

MOUVEMENT VARIÉ DES EAUX

PAR

E. HAERENS

Ingénieur des Ponts et Chaussées en disponibilité
Professeur à l'Université de Gand.

Dans le 2e fascicule des *Annales* a paru un « Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles » dont l'avant-propos est la critique d'un travail que nous avons publié antérieurement (1). Nous ne pouvons laisser passer sans réponse les assertions de l'auteur.

Parlant des questions qui font l'objet de notre étude, il nous fait dire que « ce problème défie les plus savants analystes », ce qui serait vraiment de l'outrecuidance de notre part ; or, « ce problème », c'est la recherche de l'intégrale générale des équations différentielles du mouvement varié, et l'auteur abonde dans notre sens lorsque, envisageant la possibilité d'intégration, il dit lui-même dans son mémoire : « Les » équations de la caractéristique ne conduisent à aucune combinaison » intégrale dans le cas général ». Nous avions du reste ajouté : « Il n'entre nullement dans notre intention d'aborder le problème » dans toute sa généralité ; nous voulons simplement prouver, en » résolvant deux cas choisis parmi les moins compliqués, que l'on » peut, sans recourir à des théories transcendantes, aboutir à des » résultats déjà appréciables et pouvant donner d'utiles indications » pour l'examen des cas réels de la pratique. »

C'est bien à tort aussi qu'il nous fait un grief de passer sous silence

(1) *Résolution de deux questions sur le mouvement varié des eaux.* (*Ann. des Trav. publ.*, 1899, 1er fasc.)

sa méthode, qui devait faire l'objet d'un mémoire spécial, annoncé, en 1889, par une petite note insérée dans les *Annales de l'Association des Ingénieurs de Gand*, alors que nous ne dirigions pas encore cette publication ; nous ne pouvions naturellement pas citer un mémoire qui n'a paru que plusieurs mois après le nôtre et dont nous ignorions absolument le contenu.

Ceci dit, abordons le fond de la discussion et rappelons brièvement comment nous avons traité les deux questions choisies comme cas particuliers du mouvement varié, notamment la propagation d'une crue sur un certain développement de rivière et celle de la marée dans la partie inférieure d'un fleuve.

Après avoir établi les équations différentielles du mouvement varié, au nombre de deux, nous leur avons substitué des équations aux différences finies à la suite d'une intégration partielle, par rapport à la variable x (distance d'une section à l'origine) pour la première équation, et par rapport au temps t pour la seconde; c'est pour effectuer ces intégrations que nous avons attribué aux diverses fonctions contenues dans les équations la forme linéaire en x et en t, dans les intervalles Δx et Δt considérés, tout comme dans l'estimation d'une surface, par la division en trapèzes. L'auteur du mémoire cité n'admet pas cette hypothèse, qui doit, d'après lui, entacher d'erreur tous nos résultats; nous répondrons à cela qu'il dépend de celui qui fait les calculs de fractionner les intervalles de temps et de distance suffisamment, pour obtenir telle approximation que l'on voudra.

Nous basant sur les deux équations aux différences finies, nous avons tracé les axes hydrauliques à des intervalles de temps donnés et en opérant par tronçons successifs, comme dans le tracé par points des axes permanents. Les conditions à remplir diffèrent suivant que ce sont les circonstances d'amont ou d'aval qui déterminent les variations du mouvement: dans le premier cas (celui de la propagation d'une crue), nous sommes partis du niveau d'aval supposé fixe, avec un débit arbitrairement choisi, et l'axe ainsi tracé ne convient que s'il aboutit à la section supérieure avec le débit indiqué par le diagramme de la crue; dans le second cas (propagation d'une marée fluviale), nous partons du niveau d'aval, dont les variations en fonction du temps sont connues, encore avec un débit arbitraire à déterminer par la condition qu'au point où le nouvel axe rencontre l'axe initial le débit soit le même pour les deux. Ces tracés ne vont naturellement pas sans quelques tâtonnements ; mais notre contradicteur est-il bien fondé à les qualifier de suspects, alors qu'il les admet dans le cas du mouvement permanent? Ces tâtonnements ne sont pas inhérents à la nature de la question ; ils résultent de la forme complexe des fonctions sur lesquelles on doit opérer et on n'y peut échapper tant que les équations elles-mêmes ne se simplifient par des données particulières.

Quelles sont, à présent, les erreurs de principe que nous aurions commises en opérant comme nous venons de le rappeler succinctement? Laissons parler l'auteur du « Mémoire sur l'intégration graphique etc. » ; voici comment il apprécie notre méthode :

« Il résulte de là que les circonstances d'amont et d'aval exercent
» leur influence sur toute l'étendue du nouvel axe hydraulique.
» Supposons le mouvement permanent établi à l'instant t où la crue
» commence; quelque petit que soit Δt, on trouvera à l'instant $t+\Delta t$
» un nouvel axe complètement différent du premier, de telle sorte que
» la première manifestation de la crue se propage instantanément dans
» toute la longueur de la rivière. Cela nous paraît inadmissible ».

C'est en vain que nous avons cherché, dans le texte de notre article, un passage qui puisse justifier l'interprétation que l'on vient de lire.

Remarquons d'abord que les circonstances d'amont et d'aval interviennent indépendamment les unes des autres dans les deux questions que nous avons traitées ; en ce qui concerne la dernière (propagation d'une marée fluviale), il suffit d'un coup d'œil jeté sur le profil en long, où sont indiqués les axes hydrauliques espacés d'heure en heure, pour reconnaître que les fluctuations du niveau d'aval ne se transmettent que progressivement vers l'amont. L'objection fondamentale qui nous est faite porte donc sur le premier problème (propagation d'une crue), et, de fait, si l'on examine le profil en long de la rivière, on voit les différents axes, numérotés de 1 à 8, relevés par rapport à l'axe initial (o) sur toute l'étendue de la section de la rivière considérée (50 kilomètres) ; seulement, il ne faut pas perdre de vue que ces axes se suivent à un jour d'intervalle, et il s'agit d'évaluer le temps que met la première manifestation de la crue, la première onde d'amont si l'on veut, à parcourir la distance de 50 kilomètres. Puisque, comme il est dit dans l'avant-propos du mémoire qui nous occupe, « toutes les circonstances d'amont et d'aval se propagent, non
» instantanément, mais progressivement, avec la vitesse d'une onde
» infiniment petite », appliquons la formule qui donne la vitesse de propagation v d'une pareille onde dans un courant de profondeur h et de vitesse u :

$$v = u + \sqrt{gh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cette formule, qui se retrouve d'ailleurs dans le mémoire en question, donne pour v une valeur de $5^{m}.80$ en prenant des moyennes pour *u* et *h* au commencement de la crue ; de sorte que la première manifestation de celle-ci se transmettrait à 50 kilomètres en aval avec un retard de 2 $^1/_2$ heures seulement, et il est dès lors tout naturel que l'axe hydraulique se soit relevé en entier après le premier jour. Nous faisons toutefois des réserves quant à l'application de la formule précédente au cas de la propagation d'une crue, car il n'est pas admissible que la vitesse de transmission des débits d'amont en aval d'une rivière ne soit pas influencée par la résistance du lit ; c'est un point sur lequel nous reviendrons tantôt.

Pour ce qui concerne les diagrammes des hauteurs, des débits et des vitesses, en différentes sections et en fonction du temps, nous avons déterminé ces quantités variables jour par jour, et, voulant simplement figurer la marche générale de la crue, nous avons joint directement, par des éléments droits, les différents points obtenus ; il va de soi que les premiers éléments, reliant les points *0* et *1* des diagrammes, ne représentent qu'imparfaitement les différentes courbes à leur origine, celle-ci se trouvant à quelque distance du point zéro pour les sections prises en aval. La recherche de cette origine n'offre qu'un intérêt purement analytique, attendu qu'il ne serait même pas possible de constater pratiquement à quel moment précis les courbes de hauteur, débit, etc., se détachent de la droite horizontale qui figurerait le mouvement permanent ; cependant, nous avons tenu à montrer que nos équations approchées permettaient également de résoudre ce problème secondaire. Voici comment nous avons opéré : nous avons choisi des intervalles de temps de 2 heures, à partir du début de la crue ; partant de la section d'amont, avec un certain relèvement par rapport à l'axe intiial du mouvement permanent et avec un débit déterminé par le temps fixé, nous avons tracé un nouvel axe qui doit rencontrer le premier en un point où la valeur des débits soit concordante. Cette condition détermine, après quelques tâtonnements, la distance à laquelle se manifeste le premier effet de la crue après l'intervalle de temps choisi ; c'est ainsi que nous avons constaté qu'il fallait de 6 à 7 heures au remous pour atteindre la section d'aval. Comme on le voit, l'écart est notable entre ce résultat et celui que nous a donné la formule (1), et il s'explique par l'influence retardatrice de la résistance du lit.

Un mot encore pour répondre à une autre objection : En posant nos deux équations aux différences finies, pour chaque tronçon d'un axe, nous n'aurions pas satisfait aux conditions du mouvement aux deux points extrêmes du tronçon, lesquelles seraient au nombre de quatre. Cette objection est sans fondement, attendu que le dernier point obtenu appartient au tronçon précédent, pour lequel les conditions ont été satisfaites, et il ne reste par conséquent que deux conditions à remplir pour le nouveau point à déterminer ; c'est comme si l'on disait, dans le cas du mouvement permanent, qu'il ne suffit pas de la seule équation dont on dispose pour fixer un nouveau point de l'axe, sous prétexte qu'il y a deux conditions à remplir, une à chaque extrémité du tronçon. Dans le cas du mouvement varié, la détermination d'un nouveau point comporte deux inconnues (hauteur et débit), et on dispose précisément de deux équations.

Finalement, l'auteur du mémoire nous reproche d'avoir substitué à une dérivée, telle que : $\frac{dv}{dt}$, le rapport des accroissements finis : $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, ce qui serait loin d'être approximativement exact, surtout au début de la crue.

Si nous nous sommes permis cette substitution, c'est que nous avions constaté au préalable que l'erreur ainsi commise ne portait pas à conséquence ; nous avons même fait remarquer, dans notre article, que le terme en question devient tout à fait négligeable dans le problème de la propagation d'une crue.

On voit bien, par tout ce qui précède, ce qui différencie les deux modes de résolution des équations du mouvement varié : l'auteur du « Mémoire sur l'intégration etc. », traite la question au point de vue analytique et rigoureux, tandis que nous avons dirigé nos calculs vers une solution approchée et suivant une méthode qui permît de résoudre des problèmes présentant un intérêt direct pour l'application. Nous avons exprimé cette opinion qu'on ne pouvait aboutir en opérant sur les équations différentielles sous leur forme générale, et l'examen du « Mémoire » qui nous occupe n'a pas ébranlé notre conviction. L'auteur a eu beau transformer les équations de toutes les façons, nous ne voyons pas qu'il se dégage de ses calculs une méthode que l'on puisse mettre en pratique pour résoudre des questions dans le genre de celles que nous avons traitées et dont nous avons vainement cherché un exemple dans son mémoire. L'occasion était belle cependant pour prouver l'inexactitude de nos résultats : l'auteur n'avait qu'à reprendre les données de nos problèmes et leur appliquer sa méthode ; pourquoi s'en est-il abstenu ?

Gand, septembre 1900.