

212973

# CONSIDÉRATIONS

SUR LE

## MOUVEMENT VARIÉ DES COURS D'EAU

PAR

**J. MASSAU**

Ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand.

1. *Question de priorité.* — Dans l'avant-propos d'un mémoire publié dans le 4<sup>e</sup> fascicule des *Annales* de 1900, nous avons démontré que c'est à tort que l'auteur d'un article intitulé « Résolution des problèmes, etc. », avait affirmé que le problème du mouvement varié des eaux courantes n'avait jamais été résolu, attendu que nous avons donné une solution de ce problème dans une note parue en 1889 dans les *Annales des Ingénieurs de Gand*.

Dans une réponse publiée dans le 6<sup>e</sup> fascicule des *Annales* de 1900, l'auteur de la « Résolution » prétend que le problème qui défait « les plus savants analystes » était la recherche des intégrales générales des équations ; il n'y a pas une phrase de son article qui permette cette interprétation ; toutes s'appliquent à un tracé analogue à celui des axes du mouvement permanent.

Nous n'avons jamais non plus fait un grief à l'auteur de ne pas avoir cité notre mémoire avant sa publication ; dans notre avant-propos, il n'est question que de notre note de 1889. C'est cette note qui, à notre avis, aurait pu être mentionnée parmi les travaux antérieurs.

2. *Question scientifique.* — Notre contradicteur répond ensuite à la

partie de notre avant-propos, où nous avons démontré qu'il avait appliqué, d'une manière fautive, l'intégration par éléments. Dans cette réponse, il nous reproche d'avoir mal interprété son texte, nous pose des questions, nous provoque à faire des calculs ; nous sommes bien forcé de rédiger cette note, avant de clore définitivement ce pénible débat.

Notre réplique sera divisée en cinq paragraphes : 1° nous montrerons qu'aucune de nos objections générales n'a été rencontrée par notre contradicteur ; 2° que l'erreur commise au commencement de la crue ne peut pas être niée, qu'elle existe dans le texte, dans les formules, dans les calculs, dans les profils, que la preuve en est que, pour la faire disparaître, l'auteur doit invoquer un texte nouveau et des calculs restés secrets ; 3° nous montrerons ensuite que le nouveau texte qui doit corriger l'erreur commise, est l'énoncé d'un problème impossible et que les calculs secrets n'existent pas ou sont inexacts ; 4° nous démontrerons ensuite que le second problème contenait déjà l'énoncé d'un problème impossible, que la propagation instantanée de la première manifestation de la marée est une conséquence inévitable des équations fausses de l'auteur, que si les chiffres publiés donnent un autre résultat, c'est que l'auteur, n'aboutissant pas par ses tâtonnements, s'est laissé influencer par des renseignements auxquels nous ne sommes pas étranger et a commis les erreurs de chiffres nécessaires pour obtenir une propagation progressive, propagation progressive qui est en contradiction avec ses formules ; 5° enfin, nous relèverons deux nouvelles erreurs commises par l'auteur dans sa réponse ; nous démontrerons que les vitesses de propagation sont indépendantes des résistances, qu'elles dépendent exclusivement des deux termes des vitesses et que négliger l'un de ces termes, c'est troubler complètement les lois de la propagation.

#### § 1. OBJECTIONS GÉNÉRALES.

3. *Objection tirée du sentiment des choses de l'hydraulique.* — Nous avons formulé cette objection de la manière suivante :

« La résolution des deux questions du mouvement varié » repose sur l'application répétée du problème suivant : on donne l'axe hydraulique à l'instant  $t$ , trouver l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$ . On part du niveau d'aval ; on essaie une valeur du débit ; on détermine de proche en proche les éléments du nouvel axe hydraulique et la variation de débit, au moyen de l'équation du mouvement varié et de l'équation de continuité. L'axe hydraulique définitif s'obtiendra par tâtonnements

la valeur d'essai du débit ne sera exacte que si l'on trouve dans la section supérieure le débit déterminé par le diagramme de la crue. Il résulte de là que les circonstances d'amont et d'aval exercent leur influence sur toute l'étendue du nouvel axe hydraulique. Supposons le mouvement permanent établi », etc.

L'auteur ne répond pas à cette objection ; il est vrai de dire qu'il semble croire qu'elle ne s'applique qu'au commencement de la crue. C'est évidemment une objection générale qui s'applique au calcul de tous les axes hydrauliques.

Supposons que l'on donne l'axe hydraulique instantané de l'Escaut, de Westkappel à Gand, le diagramme de marée à l'embouchure et le débit à l'amont ; on demande la cote d'eau à Gand après la première heure. On partira de l'embouchure avec la cote donnée  $z'$  et un débit arbitraire  $q'$  ; on trouvera une certaine cote et un certain débit à Gand ; on recommencera les calculs, jusqu'à ce que l'on obtienne à Gand le débit qui a été donné a priori ; on aura alors la cote  $z$  à Gand, qui était demandée. Supposons maintenant qu'on demande de faire un nouveau calcul, en supposant que le diagramme de marée soit modifié pour tenir compte de l'influence d'une tempête ; tous les tâtonnements doivent être recommencés ; il faut prendre une nouvelle valeur de  $z'$  et l'on obtiendra une nouvelle valeur de  $z$ . On peut donc écrire :

$$z = \varphi(z').$$

Nous disons que cela est contraire au sentiment de choses de l'hydraulique ; la cote  $z'$  ne peut pas exercer d'influence instantanée sur la cote  $z$  ; la cote  $z$  dépend de la marée antérieure ; quant à la cote  $z'$ , le calcul et l'expérience démontrent qu'il faudra environ 6 heures avant qu'elle fasse sentir son influence jusque Termonde.

Cette objection est très grave ; il ne s'agit pas de savoir si la fonction  $\varphi$  est bien ou mal calculée ; cette fonction n'existe pas ; la méthode met en relation des quantités qui sont indépendantes l'une de l'autre.

Pour éviter tout malentendu, remarquons que nous avons dit que les circonstances d'amont et d'aval exercent leur influence sur toute la longueur de la rivière, sans parler de la grandeur de cette influence instantanée. Nous n'avons pas dit, par exemple, qu'il y a marée haute partout au même instant ou qu'il n'y avait pas de retard dans le maximum de la crue. Nous avons dit : il y a une influence instantanée, et si petite qu'elle soit, cela nous suffit ; il doit y avoir une faute de principe dans la méthode qui conduit à un semblable résultat.

4. *Objection tirée du sentiment des choses de la dynamique.* — Nous avons montré par des raisonnements et des exemples qu'en dynamique, tous les problèmes peuvent se résoudre de proche en proche sans

aucun tâtonnement; nous avons expliqué que les tâtonnements n'apparaissent que quand il s'agit de chercher les conditions initiales qui réalisent une solution particulière, telle que l'équilibre, le mouvement permanent parce que la nature elle-même n'atteint ces solutions particulières qu'après des espèces d'hésitations : oscillation ou convergence. « Nous comprenons très bien que la détermination de l'axe hydraulique du mouvement permanent donne lieu à des tâtonnements, parce qu'il s'agit d'une solution théorique qui ne se produit peut-être jamais dans la nature. Mais si quelques orages éclatent dans la partie supérieure du bassin d'un grand fleuve, nous comprenons difficilement que, pour déterminer l'effet immédiat du commencement de la crue provoquée par ces orages, on soit obligé de se livrer à des tâtonnements où l'on ferait intervenir toutes les résistances, depuis la mer jusqu'à la région où la crue se produit. »

On nous répond : ces tracés ne vont naturellement pas sans quelques tâtonnements; mais notre contradicteur est-il bien fondé à les qualifier de suspects, alors qu'il les admet dans le cas du mouvement permanent?

Notre argumentation est précisément la réponse à la question qui nous est faite.

5. *Objection tirée du théorème de Cauchy.* — Connaissant l'axe hydraulique initial, on peut déterminer une solution analytique. Si on donne l'axe initial et les circonstances d'amont et d'aval, le problème est résolu par une solution irrégulière, représentée par des surfaces qui se coupent. On peut appliquer aux solutions analytiques le développement de Taylor, l'intégration par éléments et les équations I et II de la résolution; il n'en est pas de même pour les solutions irrégulières. Cela étant, voici notre objection :

« Pour établir les équations aux différences approchées, on admet que les variations de la cote d'eau, de la vitesse, du débit dans une section, pendant l'intervalle  $\Delta t$ , sont représentées par des éléments rectilignes. C'est cette hypothèse que nous contestons. En effet, il s'agit alors d'une solution analytique, sans discontinuité, et en vertu du théorème de Cauchy, cette solution est complètement déterminée par l'axe initial et il n'est pas possible d'introduire les conditions d'amont et d'aval ».

L'auteur nous répond qu'il dépend de celui qui fait les calculs de fractionner les intervalles de temps et de distance suffisamment pour obtenir telle approximation que l'on voudra. Mais nous sommes d'accord sur ce point; l'auteur obtient une solution sans discontinuité; les éléments sont rectilignes; nous admettons cela, en disant : « En effet,

il s'agit alors d'une solution analytique ». L'objection est que cette solution est contraire au théorème de Cauchy.

Nous pouvons exprimer la même objection d'une autre manière ; l'auteur trouve une solution régulière, qui dépend de quatre fonctions arbitraires : deux fonctions pour l'axe initial, le diagramme des débits à l'amont et le niveau d'aval ; cela est impossible dans un problème qui dépend de deux équations du premier ordre.

6. *Objection tirée de l'oubli de deux équations* — Nous expliquons alors comment ce problème impossible a été faussement résolu : « Considérons un axe hydraulique divisé en plusieurs segments ; on peut déterminer complètement le nouvel axe hydraulique, en écrivant deux équations pour chaque sommet ; on n'a écrit que deux équations pour chaque segment ; il y a encore deux équations qui manquent et que l'on remplace par les circonstances d'amont et d'aval. »

On nous répond : « cette objection est sans fondement, attendu que le dernier point obtenu appartient au tronçon précédent, pour lequel les conditions ont été satisfaites et il ne reste, par conséquent, que deux conditions à remplir pour le nouveau point à déterminer ».

Nous croyons comprendre que, par ce raisonnement, notre contradicteur veut démontrer que la solution qu'il obtient satisfait aux deux équations du problème. Rappelons que l'axe hydraulique à l'instant  $t$  est déterminé par les calculs antérieurs, que l'on donne le niveau d'aval et le diagramme des débits ; on trouve alors, de  $t$  à  $t + \Delta t$ , une solution sans discontinuité ; les éléments des diagrammes sont rectilignes. Plaçons-nous à l'extrémité d'amont A à l'instant  $t$  et voyons si les deux équations aux dérivées partielles sont satisfaites.

Les dérivées des fonctions  $h$  et  $q$  par rapport aux distances sont déterminées par l'axe hydraulique à l'instant  $t$ . Nous pouvons résoudre les deux équations du problème, par rapport aux dérivées des fonctions  $h$  et  $q$  dans le temps et l'une des équations se mettra sous la forme :

$$\frac{dq}{dt} = a.$$

Cette équation n'est certainement pas satisfaite, car dans la solution obtenue, la dérivée du débit est celle qui est donnée par le diagramme des débits et comme ce diagramme peut être choisi à volonté à partir de l'instant  $t$ , la dérivée du débit peut être prise arbitrairement.

Nous pouvons mettre notre objection sous une autre forme. Posons le problème suivant : connaissant l'axe hydraulique initial, trouver la

solution analytique et déterminer les circonstances d'amont et d'aval qui peuvent la réaliser. On trouvera la solution de ce problème par le développement de Taylor ou l'intégration par éléments visée dans notre note de 1889. Les équations (I) et (II) de la « Résolution » sont vraies dans ce cas, mais elles ne donnent pas la solution du problème, puisque les circonstances d'amont et d'aval sont inconnues; il y a deux inconnues de trop pour chaque axe ou deux équations qui manquent. En d'autres termes, quand les équations sont vraies, elles sont insuffisantes, elles ne peuvent servir à rien.

7. *Objection tirée des discontinuités.* — Pour démontrer que les équations I et II de la « Résolution » sont inexactes quand il s'agit d'une solution irrégulière, nous avons montré à titre d'exemple que l'équation :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

est loin d'être vraie au commencement de la crue. On nous répond : « Si nous nous sommes permis cette substitution, c'est que nous avons constaté au préalable que l'erreur ainsi commise ne portait pas à conséquence; nous avons même fait remarquer, dans notre article, que le terme en question devient tout à fait négligeable dans le problème de la propagation d'une crue. »

Nous avons écrit : « Les lois spéciales au mouvement varié sont complètement troublées par les erreurs que nous venons de signaler ». Dans les problèmes intéressants, propagation de la marée et des crues rapides, il ne peut pas être question de négliger le terme qui caractérise l'équation du mouvement varié. Dans les crues lentes, les lois du mouvement varié se manifestent par des variations de pente et de débit qui peuvent devenir négligeables; on peut appliquer l'équation du mouvement permanent mais alors, cela veut dire que l'on renonce à résoudre le problème du mouvement varié.

Il existe une méthode bien connue qui consiste à appliquer l'équation du mouvement permanent en tenant compte du volume d'eau emmagasiné; cette méthode a été employée pour le Haut-Escaut, la Lys, la Dyle et un peu partout; elle conduit à des résultats utiles. Mais il ne faut pas lui demander trop; il faut se contenter de pentes moyennes pour des laps de temps déterminés et surtout ne pas lui demander les lois de la propagation. Ainsi, quand on nous dit que le terme du mouvement varié devient tout à fait négligeable dans le problème de la propagation d'une crue, nous devons dire : cela est radicalement faux; ce terme est peut-être devenu négligeable dans un calcul

inexact où il est rendu cent ou mille fois trop petit, mais il exerce une influence considérable sur les vitesses de propagation des irrégularités du débit; nous le démontrerons plus loin.

Nous remarquerons aussi que nous avons pris le terme de la dérivée de la vitesse à titre d'exemple; une erreur analogue est commise sur l'accroissement du débit dans le temps. Pour établir l'équation II, on doit évaluer le volume d'eau débité par une section; ce volume serait  $q\Delta t$ , si le mouvement était permanent; il faut ajouter un terme supplémentaire qui a été évalué à

$$\frac{\Delta q}{2} \Delta t.$$

Cette formule suppose que l'élément du diagramme des débits est une ligne droite. Supposons que le débit reste constant pendant les neuf dixièmes de l'intervalle  $\Delta t$ ; le volume supplémentaire s'exprimera par :

$$\frac{\Delta q}{2} \frac{\Delta t}{10}$$

Le rapport de la valeur admise à la valeur réelle est 10; on commet une erreur de 90 p. c.

Enfin, ces observations ne s'appliquent pas seulement au commencement de la crue; elles s'appliquent à toutes les irrégularités.

8. *Remarques finales.* — La réponse à notre avant-propos se termine de la manière suivante :

« Nous avons exprimé cette opinion qu'on ne pouvait aboutir en opérant sur les équations différentielles sous leur forme générale, et l'examen du « Mémoire » qui nous occupe n'a pas ébranlé notre conviction. L'auteur a eu beau transformer les équations de toutes les façons, nous ne voyons pas qu'il se dégagé de ses calculs une méthode que l'on puisse mettre en pratique pour résoudre des questions dans le genre de celles que nous avons traitées et dont nous avons vainement cherché un exemple dans son mémoire. L'occasion était belle cependant pour prouver l'inexactitude de nos résultats; l'auteur n'avait qu'à reprendre les données de nos problèmes et leur appliquer sa méthode; pourquoi s'en est-il abstenu? »

Notre contradicteur n'a pas lu notre mémoire; qu'il lise les numéros 60 à 65; il verra que non seulement nous avons donné des exemples, mais que nous avons considéré tous les cas possibles. Au lieu de tracer des axes hydrauliques instantanés, nous traçons des axes de propagation; chaque nouveau point qui est un point d'intersection

est déterminé par des équations linéaires; ces axes sont déterminés *ne varietur*; il n'y a pas de tâtonnements; l'application de notre méthode est d'une facilité remarquable. On veut sans doute nous reprocher de ne pas avoir pris d'exemples chiffrés; nous n'avons pas pensé qu'un lecteur nous demanderait de lui expliquer, par des exemples numériques, la manière de résoudre des équations du premier degré.

La belle occasion qu'on nous offre de démontrer par des chiffres l'inexactitude d'une méthode n'est pas sérieuse; quand nous aurons publié, en deux colonnes, des résultats comparatifs, la question sera de savoir quels sont les chiffres exacts; la discussion n'aura pas fait un pas. Nous en avons déjà la preuve. L'auteur de la « Résolution » a publié des chiffres où la première manifestation de la crue se propageait instantanément; notre formule donne un retard de 2 h.  $\frac{1}{2}$ ; immédiatement, on nous oppose un nouveau calcul où le retard est de 6 à 7 heures; les deux premiers chiffres ont provoqué l'arrivée d'un troisième et ces trois chiffres n'apprennent rien; c'est à la théorie à trouver la formule exacte.

La question que l'on nous adresse en terminant est une figure de rhétorique; la réponse est plus haut; nous n'avons pas appliqué notre méthode aux données de la « Résolution » parce que nous n'étions pas capables d'aboutir; telles sont, du moins, les convictions inébranlables de notre contradicteur.

Il n'y a pas de convictions plus inébranlables que celles qui ne reposent sur rien; aussi, sans trop nous en préoccuper, nous poursuivrons paisiblement notre argumentation.

## § 2. OBJECTION TIRÉE DU COMMENCEMENT DE LA CRUE.

9. *Propagation instantanée.* — Nous avons écrit dans notre avant-propos : « Supposons le mouvement permanent établi à l'instant  $t$  où la crue commence; quelque petit que soit  $\Delta t$ , on trouvera à l'instant  $t + \Delta t$  un nouvel axe complètement différent du premier, de telle sorte que la première manifestation de la crue se propage instantanément dans toute la longueur de la rivière. Cela nous paraît inadmissible. »

On nous répond : « C'est en vain que nous avons cherché, dans le texte de notre article, un passage qui puisse justifier l'interprétation qu'on vient de lire. »

Nous sommes donc l'objet d'une accusation excessivement grave; on nous accuse d'avoir faussement interprété un texte dans le but d'y

découvrir une erreur qui n'existerait pas. Nous allons démontrer que cette erreur existe dans le texte, dans les formules, dans les tableaux de calculs, dans les profils.

10. *L'erreur est dans le texte.* — Après avoir montré comment on trace l'axe du mouvement permanent au temps  $t_0$ , l'auteur de la « Résolution » s'exprime en ces termes :

« Passons au temps  $t_1$  : l'axe à tracer conserve son origine à l'aval, mais le débit n'est connu que dans la section supérieure A. Il faut donc se donner arbitrairement le débit en F à l'instant considéré ; remontant alors point par point, connaissant  $h_1$  et  $q_1$  à l'aval de chaque tronçon, on détermine par tâtonnement  $h_0$  et  $q_0$  à l'amont, comme dans le cas du mouvement permanent, mais en s'appuyant à la fois sur les formules (I) et (II). Ainsi, en fixant à titre d'essai une valeur de  $h_0$ , la relation (II) détermine  $q_0$  et il reste à vérifier si (I) est satisfaite.

De proche en proche, on arrive à la section supérieure A et c'est là qu'on constatera, par le dernier débit obtenu, si celui qu'on s'était donné à l'aval était bien choisi ; le tracé ne sera définitif que s'il y a concordance entre le débit A et celui inscrit au diagramme de la crue.

On opérera de même pour les intervalles de  $t_1$  à  $t_2$ , etc. »

D'après les considérations qui ont servi à établir les équations (I) et (II), les calculs seront d'autant plus exacts que l'intervalle  $t_1 - t_0$  ou  $\Delta t$  sera plus petit. L'auteur a fait les calculs pour un intervalle d'un jour, mais nous pouvons appliquer son texte en prenant pour  $\Delta t$  un intervalle de temps aussi petit que nous voulons ; nous trouverons un axe hydraulique qui se relève entièrement ; c'est la propagation instantanée que nous avons signalée.

11. *L'erreur est dans les formules.* — Les formules (I) et (II) supposent que les variations de vitesse et de débit pendant l'intervalle  $\Delta t$  sont représentées par des éléments rectilignes ; donc, même en prenant un intervalle d'un jour, on a admis la propagation instantanée dans les formules.

12. *L'erreur est dans les calculs.* — Les calculs du premier axe hydraulique du mouvement varié ont été faits d'après la méthode qui figure dans le texte et en appliquant les formules qui supposent des éléments rectilignes ; on peut facilement le vérifier ; donc l'erreur est dans les calculs.

13. *L'erreur est dans les profils.* — Il suffit de jeter un regard sur les diagrammes pour y reconnaître la propagation instantanée de la première manifestation de la crue. L'auteur prétend que l'erreur ne se

trouve pas dans le profil en long parce que les axes hydrauliques ne sont représentés que de jour en jour ; mais le profil en long est une représentation conventionnelle complétée par les profils en travers et celui qui sait lire un plan trouvera immédiatement l'axe à l'instant  $t + \frac{1}{2}$  heure ; il est relevé dans toute son étendue.

14. *Apparition d'un nouveau texte et de nouveaux calculs.* — Après avoir nié l'erreur commise, l'auteur se charge de la démontrer en plaidant les circonstances atténuantes et en proposant un nouveau texte pour la corriger.

Nous lisons, en effet : « Il va de soi que les premiers éléments, reliant les points 0 et 1 des diagrammes, ne représentent qu'imparfaitement les différentes courbes à leur origine, celle-ci se trouvant à quelque distance du point zéro pour les sections prises en aval. La recherche de cette origine n'offre qu'un intérêt purement analytique, etc... »

L'explication est étrange ; le problème à résoudre est intitulé : « Question du mouvement varié, propagation d'une crue. » Quel est l'intérêt du problème ? Est-ce le mouvement au maximum de la crue ? Tout le monde sait que, dans une crue lente, il diffère très peu du mouvement permanent. En appliquant la formule de Bazin, nous trouverons un résultat au moins aussi exact que celui qui a été publié. Tout l'intérêt d'un problème du mouvement varié est évidemment d'étudier le mouvement quand il est varié ; tout l'intérêt d'un problème qu'on intitule propagation d'une crue est évidemment d'étudier les vitesses de propagation. Aussi est-ce avec un réel étonnement que nous lisons qu'il est indifférent à l'auteur de savoir si les eaux de crues arrivent instantanément, avec un retard de 2 h.  $\frac{1}{2}$  ou un retard de 6 à 7 heures. Nous remarquerons ensuite qu'il ne suffit pas de dire qu'il n'y avait pas grand intérêt à dessiner les profils exactement ; ce qu'il faudrait expliquer, c'est l'intérêt qu'il y avait à les dessiner inexactement.

Nous lisons ensuite : « Cependant nous avons tenu à montrer que nos équations approchées permettaient également de résoudre ce problème secondaire. Voici comment nous avons opéré : nous avons choisi des intervalles de temps de 2 heures, à partir de la crue ; partant de la section d'amont, avec un certain relèvement par rapport à l'axe initial du mouvement permanent et avec un débit déterminé par le temps fixé, nous avons tracé un nouvel axe qui doit rencontrer le premier en un point où la valeur des débits soit concordante. Cette condition détermine, après quelques tâtonnements, la distance à laquelle se manifeste le premier effet de la crue après l'intervalle de

temps choisi; c'est ainsi que nous avons constaté qu'il fallait de 6 à 7 heures au remous pour atteindre la section d'aval. »

On le voit; l'erreur que nous avons signalée n'existerait pas dans le texte publié; et cependant il faut la corriger par un nouveau texte et ce texte est en contradiction avec celui qui a paru; car, au lieu de commencer par l'aval, on commence par l'amont et l'on détermine l'axe par une condition tout à fait nouvelle. N'est-il pas évident que nous avons interprété le texte comme il devait l'être et que l'accusation dont nous sommes l'objet est complètement imméritée?

15. *Concluions.* — La question nous paraît très claire; l'auteur de la « Résolution » a commis une erreur, il la regrette, il la retire; mais alors pourquoi ne pas la retirer avec grâce? Il pouvait dire simplement qu'il était facile de faire disparaître cette erreur en remplaçant la méthode générale par une méthode particulière applicable au commencement de la crue, et, dans cette hypothèse, nous aurions exprimé le regret d'avoir argumenté sur une erreur qui n'est pas une conséquence inévitable des formules employées. Malheureusement, si nous avons argumenté sur cette erreur, c'est que nous savions qu'elle faisait partie intégrante de la méthode; nous allons démontrer que le nouveau texte est l'énoncé d'un problème impossible et que les nouveaux calculs n'ont jamais existé ou contiennent des erreurs d'arithmétique.

### § 3. — RÉFUTATION DU NOUVEAU TEXTE.

16. *Une première faute de logique.* — D'après le texte publié, on détermine l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$ , en partant de l'aval avec la cote  $z'$  et le débit  $q'$ ; il y a deux constantes arbitraires:  $z'$  et  $q'$ ; il y a  $\infty^2$  solutions; toutes ces solutions doivent satisfaire à une équation différentielle du second ordre; les tâtonnements ont pour but de trouver une solution particulière, connaissant la cote  $z'$  à l'aval et le débit  $q$  à l'amont. Cette méthode donne une propagation instantanée de la première manifestation de la crue; cela est inadmissible. Quelle est la conclusion logique qu'il fallait déduire de ce résultat absurde? C'est évidemment que les équations sont fausses. Au lieu de cela, l'auteur de la méthode ne se préoccupe que d'éviter notre objection; il conserve les équations et change de méthode. Mais si les équations sont fausses, il ne supprime pas la cause de l'erreur; si elles sont exactes, pourquoi ne puis-je pas appliquer l'ancien texte?

17. *Une deuxième faute de logique.* — Le nouveau texte n'est appli-

cable que si l'on suppose le mouvement permanent au commencement de la crue. Supposons un mouvement varié, mais se rapprochant autant qu'on le voudra d'un mouvement permanent; on doit évidemment avoir une solution analogue à celle du nouveau texte: or, ce nouveau texte n'est pas applicable à cause de la variation du débit; il y aura donc de nouvelles exceptions; déjà on prévoit l'apparition de textes futurs. Et si le mouvement initial devient de plus en plus varié, à quel moment faudra-t-il abandonner le nouveau texte et les textes futurs pour reprendre le texte ancien?

18. *Une troisième faute de logique.* — Nous avons dit que les axes à l'instant  $t + \Delta t$  sont les solutions d'une équation différentielle du second ordre; l'axe du mouvement permanent est évidemment une solution particulière. Le nouveau texte revient à dire que, pour éviter la propagation instantanée, on renonce à la solution ordinaire pour former une solution irrégulière et composée de deux segments de solutions régulières. Mais cela ne s'est jamais vu; il est impossible que l'équation différentielle soit satisfaite au point de jonction, où la dérivée seconde devrait être à la fois finie et infinie; si c'est un point de contact, et c'est ce qui arrive toujours pour la fonction  $q$ , on a deux solutions qui doivent coïncider à moins qu'il n'y ait ambiguïté dans la détermination de la dérivée seconde.

19. *Démonstration mathématique.* — Nous nous proposons de démontrer qu'en partant des équations de la « Résolution », on ne peut pas trouver, au commencement de la crue, un axe hydraulique du mouvement varié suivi d'un axe hydraulique du mouvement permanent. Appliquons les équations (I) et (II) de la « Résolution » à un tronçon de longueur  $\Delta x$  et dont l'extrémité aval soit le point de jonction de deux axes à l'instant  $t + \Delta t$ ; à l'instant  $t$  le mouvement permanent règne dans toute l'étendue de la rivière. Nous désignerons la vitesse par  $u$ ; l'équation (I) peut s'écrire :

$$z_1 - z_0 = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \frac{1}{g} \left( \frac{\Delta u_0}{\Delta t} + \frac{\Delta u_1}{\Delta t} \right) \frac{\Delta x}{2} + \frac{b\Delta x}{2} \left( \frac{\chi_0}{\omega_0} u_0^2 + \frac{\chi_1}{\omega_1} u_1^2 \right).$$

Appliquons l'équation du mouvement permanent à l'instant  $t$  et soustrayons-la de la précédente; nous aurons en représentant par  $\Delta$  les accroissements par rapport au temps et en remarquant que  $z_1, u_1, \omega_1,$

$\lambda_1$  n'ont pas varié et que le terme en  $\Delta u_0$  n'existe pas dans l'équation du mouvement permanent :

$$(1) \quad -\Delta z_0 = -\Delta \frac{u_0^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\Delta u_0}{\Delta t} \frac{\Delta x}{2} + \frac{b\Delta x}{2} \Delta \left( \frac{\chi_0}{\omega_0} u_0^2 \right).$$

Reprenons l'équation (II) de la « Résolution » :

$$(\Delta\omega_0 + \Delta\omega_1) \Delta x = [2(q_0 - q_1) + \Delta q_0 - \Delta q_1] \Delta t.$$

Cette équation devient, en remarquant que  $\omega_1$  et  $q_1$  n'ont pas varié et que  $q_0 = q_1$  :

$$(2) \quad \Delta\omega_0 \Delta x = 2\Delta q_0 \Delta t.$$

Dans les équations (1) et (2),  $\Delta t$  représente une intervalle de temps fini, tel que 2 heures;  $\Delta x$ , au contraire, peut-être supposé infiniment petit. Les accroissements dans le temps des quantités  $\omega_0$ ,  $u_0$ ,  $z_0$ , sont alors des infiniment petits qui dépendent de  $\Delta x$ , parce que la section  $\omega_0$  est infiniment voisine de la section  $\omega_1$  où le mouvement permanent n'est pas troublé. Nous allons transformer l'équation (1) en indiquant les termes en  $\Delta z_0$  d'une manière explicite, les termes d'ordre supérieur seront représentés par des points. On a :

$$\Delta\omega_0 = -l_0 \Delta z_0 + \dots$$

$l_0$  étant la largeur de la rivière. On en déduit que  $\Delta q_0$  est d'ordre supérieur : on a alors :

$$\Delta \frac{u_0^2}{2g} = \frac{u_0}{g} \Delta u_0 + \dots$$

$$\Delta u_0 = \Delta \frac{q_0}{\omega_0} = \frac{q_0 l_0 \Delta z_0}{\omega_0^2} + \dots = \frac{u_0}{h_0} \Delta z_0 + \dots$$

en posant :

$$h_0 = \frac{\omega_0}{l_0}.$$

L'équation (1) devient :

$$-\Delta z_0 = -\frac{u_0^2}{gh_0} \Delta z_0 + \dots$$

En divisant par  $\Delta z_0$  et passant à la limite, on a :

$$\frac{u_1^2}{gh_1} = 1.$$

Cette équation n'est satisfaite qu'au point de l'axe hydraulique où la

tangente est verticale ; ce point ne peut pas exister ; donc l'hypothèse d'un point de jonction est réduite à l'absurde.

20. *Deuxième démonstration.* — Nous allons établir l'équation différentielle du second ordre de tous les axes hydrauliques que l'on peut trouver à l'instant  $t + \Delta t$  ; pour simplifier les calculs, nous supposons le mouvement uniforme à l'instant  $t$  et une rivière de grande largeur, de manière à pouvoir appliquer la formule simple :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{bq^2}{h^3} \dots \dots \dots (1)$$

$q$  étant le débit par unité de largeur, et  $h$  la profondeur constante.

Nous allons appliquer à l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$  les équations de la « Résolution », mais nous supposons que  $\Delta x$  soit infiniment petit et que l'on ait passé à la limite après avoir divisé par cette quantité ; on a alors :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{u^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{bq^2}{h^3} \dots \dots \dots (2)$$

$$2 \frac{\Delta h}{\Delta t} = - \frac{d}{dx} \Delta q \dots \dots \dots (3)$$

Soustrayons de l'équation (2) l'équation du mouvement permanent ; représentons par  $\Delta$ , les accroissements dans le temps des quantités  $z$ ,  $q$ ,  $h$ , il vient en remplaçant  $u$  par  $q : h$  et  $\Delta z$  par  $-\Delta h$  :

$$- \frac{d}{dx} \Delta h = \frac{d}{dx} \Delta \frac{q^2}{2gh^2} + \frac{1}{g\Delta t} \Delta \frac{q}{h} + b\Delta \frac{q^2}{h^3}.$$

Nous supposons  $\Delta t$  donné à priori, mais suffisamment petit pour remplacer les accroissements dans le temps par des différentielles ; nous poserons :

$$\Delta h = h' \quad \Delta q = q' \quad \Delta t = \theta.$$

Les équations (2) et (3) deviennent :

$$\frac{dh'}{dx} \left( 1 - \frac{q^2}{gh^3} \right) + \frac{q}{gh^2} \frac{dq'}{dx} + q' \left( \frac{1}{gh\theta} + \frac{2qb}{h^3} \right) - h' \left( \frac{q}{g\theta h^2} + \frac{3bq^2}{h^4} \right) = 0.$$

$$\frac{dq'}{dx} + 2 \frac{h'}{\theta} = 0.$$

Les fonctions  $h'$  et  $q'$  sont déterminées par deux équations différen-

tielles du premier ordre ; en éliminant  $h'$ , on trouve une équation du second ordre :

$$-\frac{\theta}{2} \frac{d^2 q'}{dx^2} \left(1 - \frac{q^2}{gh^5}\right) + \frac{dq'}{dx} \left(\frac{3q}{2gh^2} + \frac{3\theta}{2} \frac{bq^2}{h^4}\right) + q' \left(\frac{1}{gh\theta} + \frac{2qb}{h^5}\right) \dots \dots \dots (4)$$

Pour intégrer cette équation linéaire, on résout l'équation :

$$-\frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{q^2}{gh^5}\right) X^2 + \left(\frac{3q}{2gh^2} + \frac{3\theta}{2} \frac{bq^2}{h^4}\right) X + \left(\frac{1}{gh\theta} + \frac{2qb}{h^5}\right) = 0.$$

On reconnaît facilement que les racines sont toujours réelles, de signes contraires, et que la plus grande racine, en valeur absolue, est la racine négative. Soient  $\alpha$ ,  $-\beta$  ces racines, on a :

$$q' = Ae^{\alpha x} + Be^{-\beta x} \dots \dots \dots (5)$$

$$h' = -\frac{\theta}{2} [A\alpha e^{\alpha x} - B\beta e^{-\beta x}] \dots \dots (6)$$

Prenons le cas de la propagation d'une crue et résolvons le problème du texte de la « Résolution » ; on déterminera les constantes A et B en exprimant les conditions :

$$\begin{aligned} x = 0 & & q' = q'_0 \\ x = x_1 & & h' = 0. \end{aligned}$$

On trouve :

$$q' = M \left( \frac{e^{\alpha(x-x_1)}}{\alpha} + \frac{e^{-\beta(x-x_1)}}{\beta} \right) \dots \dots \dots (7)$$

$$h' = \frac{2M}{\theta} \left[ e^{\beta(x_1-x)} - e^{-\alpha(x_1-x)} \right] \dots \dots \dots (8)$$

$$M = \frac{q'_0}{\frac{e^{-\alpha x_1}}{\alpha} + \frac{e^{\beta x_1}}{\beta}} \dots \dots \dots (9)$$

Le texte de la « Résolution » est donc l'énoncé d'un problème possible ; la propagation instantanée de la première manifestation de la crue est une déduction logique des équations fausses de la « Résolution ».

Il n'en est pas de même du nouveau texte ; d'après ce nouveau texte, on doit établir qu'en un certain point d'abscisse  $x$ , on a :

$$h' = 0 \qquad q' = 0$$

On devrait avoir, d'après les équations (5) et (6) :

$$Ae^{\alpha x} + Be^{-\beta x} = 0$$

$$A\alpha e^{\alpha x} - B\beta e^{-\beta x} = 0.$$

Ces équations sont incompatibles, à moins que l'on ait :

$$A = 0, \qquad B = 0$$

Il résulte de là que le nouveau texte est bien l'énoncé d'un problème impossible et que la propagation instantanée est une conséquence inévitable des équations fausses.

21. *Conclusions.* — Nous nous trouvons dans une situation délicate. D'un part, l'auteur de la « Résolution » déclare qu'il a fait des calculs en appliquant le nouveau texte, il annonce même que ces calculs lui ont donné un retard de 6 à 7 heures dans la propagation de la crue. D'autre part, nous nous trouvons devant une quintuple argumentation, d'une logique irréfutable, démontrant que ces calculs sont impossibles. Entre les déductions fondées sur la raison pure et les témoignages humains, nous ne pouvons pas hésiter : la raison ne peut avoir tort ; ce sont les témoignages humains qui sont entachés d'erreur. Ou bien les calculs annoncés n'ont pas été faits, ou ce sont des calculs faux.

#### § 4. LE SECOND PROBLÈME.

22. *Méthode particulière.* — Dans le second problème, l'auteur de la « Résolution » suppose le mouvement permanent établi à marée basse ; il se donne le diagramme de marée et le débit au premier barrage à l'amont. Au commencement de la propagation de la marée, il renonce à la méthode générale pour employer une méthode particulière qui a une certaine analogie avec celle du nouveau texte et qu'il formule de la manière suivante :

« On procède par divisions égales du temps, d'heure en heure en ce cas, en partant chaque fois d'un niveau connu à l'aval avec un débit arbitrairement choisi et à vérifier. La condition à réaliser c'est qu'au point où le tracé essayé rejoint l'axe primitif du mouvement permanent, le débit se trouve précisément ramené à sa valeur initiale de 100 mètres

cubes, qui se maintient dans la partie supérieure du fleuve soustraite à l'influence de la marée.

23. *Les trois fautes de logique.* — Nous pouvons reproduire ici les trois fautes de logique que nous avons signalées à propos du nouveau texte : 1° si les équations sont exactes, pourquoi ne pourrait-on pas employer la méthode générale du premier problème; si les équations sont fausses, on ne corrige pas l'erreur en changeant de méthode; 2° il faudrait un texte futur pour le cas où le mouvement initial diffère très peu du mouvement permanent; si le mouvement devient de plus en plus varié, à quel moment reprendra-t on la méthode générale? 3° les axes hydrauliques à l'instant  $t + \Delta t$  dépendent d'une équation du second ordre; on ne peut pas former une solution en la composant de fragments de solutions particulières.

24. *Démonstration mathématique.* — Nous pouvons démontrer comme au numéro 19, qu'en partant des équations de la « Résolution », on ne peut pas trouver un axe hydraulique du mouvement permanent suivi d'un axe hydraulique du mouvement varié. Nous pouvons appliquer les mêmes équations si nous supposons que  $\omega_1$  est la section du point de jonction,  $\omega_0$  étant une section à l'aval; il suffit de changer le signe  $\Delta x$ . Comme  $\Delta x$  ne figure pas dans le résultat, nous arriverons encore à la condition impossible :

$$\frac{u_1^2}{gh_1} = 1.$$

25. *Deuxième démonstration.* — Prenons, comme au numéro 20, le cas d'un mouvement uniforme et d'un lit très large; nous trouverons encore pour l'axe hydraulique à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$q' = Ae^{\alpha x} + Be^{-\beta x}$$

$$h' = -\frac{\theta}{2} \left[ \Lambda \alpha e^{\alpha x} - B\beta e^{-\beta x} \right]$$

Nous supposerons le débit constant dans la section  $x = 0$ ; on donne  $h'$  à l'aval; on a donc :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } x = 0 & q' = 0 \\ \text{pour } x = x_1 & h' = h'_1. \end{array}$$

On trouve :

$$q' = -B(e^{\alpha x} - e^{-\beta x})$$

$$h' = \frac{B\theta}{2} \left( \alpha e^{\alpha x} + \beta e^{-\beta x} \right).$$

On trouve B par l'équation :

$$h'_1 = \frac{B\theta}{2} \left( \alpha e^{\alpha x_1} + \beta e^{-\beta x_1} \right).$$

On voit que la méthode générale peut être employée ; connaissant le relèvement  $h'_1$  à l'aval, sachant que le débit reste constant au premier barrage, l'axe hydraulique est complètement relevé.

S'il n'y a pas de barrage, on peut supposer que le débit reste constant à l'infini ; on pose :

$$\text{pour } x = -\infty, \quad q' = 0.$$

On trouve :

$$q' = B e^{-\beta x}$$

$$h' = \frac{B\theta}{2} \beta e^{-\beta x}$$

$$h'_1 = \frac{B\theta}{2} \beta e^{-\beta x_1}$$

L'axe hydraulique se relève jusqu'à l'infini. La propagation instantanée de la marée jusqu'à l'infini est donc une conséquence logique des équations fausses de la « Résolution ».

Essayons maintenant d'appliquer la méthode particulière ; soit  $x$  l'abscisse du point de jonction ; on doit avoir :

$$q' = A e^{\alpha x} + B e^{-\beta x} = 0$$

$$-\frac{2h'}{\theta} = A \alpha e^{\alpha x} - B \beta e^{-\beta x} = 0.$$

Ces équations sont incompatibles si A et B ne sont pas nuls. La méthode particulière est donc impossible.

La propagation instantanée de la marée jusqu'au premier barrage ou jusqu'à l'infini est donc une conséquence inévitable des équations fausses de la « Résolution ».

26. *Résultats obtenus.* — Si l'on examine les tableaux des résultats obtenus, on trouve que la première manifestation de la marée se propage avec une vitesse de 10 kilomètres à l'heure, pour les trente premiers kilomètres et parcourt les vingt derniers kilomètres en deux heures.

Dans notre note de 1889, nous avons indiqué que la vitesse de propagation était celle d'une onde infiniment petite ; on trouve alors

une vitesse d'environ 15 kilomètres à l'heure. Il y a donc un écart sensible. Nous trouvons la justification de cet écart dans la réponse de notre contradicteur ; notre formule ne tiendrait pas compte des résistances ; l'influence de ces résistances serait de retarder la propagation.

Nous nous trouvons encore dans une situation délicate. L'auteur de la « Résolution » affirme avoir obtenu ses résultats en appliquant la méthode particulière rappelée plus haut. D'autre part, nous nous trouvons devant une quintuple argumentation d'une logique irréfutable, démontrant que ces calculs sont impossibles. Entre les déductions fondées sur la raison pure et les actions humaines, nous ne pouvons pas hésiter ; la raison ne peut pas avoir tort. Les calculs qui sont publiés doivent être fautifs ; nous devons chercher les erreurs, nous devons les trouver.

27. *Erreurs d'arithmétique.* — Ce serait un travail considérable que de vérifier tous les calculs qui ont été présentés ; mais en nous souvenant de la démonstration du numéro 19, résumé au numéro 24, nous découvrons facilement les erreurs les plus intéressantes. Nous avons montré, que s'il y avait un point d'intersection de deux axes, comme le suppose l'auteur, la variation de débit serait négligeable dans les environs du point d'intersection ; le nouvel axe différerait très peu d'un axe de relèvement du mouvement permanent ; il ne peut rencontrer l'axe primitif, il doit lui être asymptotique. Nous devons donc trouver que l'on a exagéré la différence de pente des deux axes ; la pente de l'axe de relèvement qui résulte des cotes, doit être plus faible que celle qui résulte de la formule.

Considérons le tronçon *Ee* ; au début de la marée, la pente superficielle est de 0<sup>m</sup>.35 ; après la première heure le relèvement est de 0<sup>m</sup>.10 en *e*, il est nul en *E* ; la différence de pente est de 0<sup>m</sup>.10 ; on devrait trouver une pente totale de 0<sup>m</sup>.25 ; nous allons démontrer que la formule donne une pente plus forte.

La formule que l'on doit appliquer est la formule :

$$\Delta z = \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_0^2}{2g} + \frac{\Delta x}{2g} \left( \frac{\Delta u_0}{\Delta t} + \frac{\Delta u_1}{\Delta t} \right) + \frac{b\Delta x}{2} \left( \frac{\chi_0}{\omega_0} u_0^2 + \frac{\chi_1}{\omega_1} u_1^2 \right).$$

On a :

$$\chi_0 = 69.0 \quad \omega_0 = 156 \quad u_0 = 0.64 \quad \Delta u_0 = 0$$

$$\chi_1 = 72.5 \quad \omega_1 = 180 \quad u_1 = 0.52 \quad \Delta u_1 = -0.06.$$

En faisant les calculs, on trouve :

$$\Delta z = 0.276.$$

L'erreur absolue est de  $0^m.026$ ; la différence de pente au lieu d'être de  $0^m10$  devient  $0^m074$ ; l'erreur relative est de

$$\frac{0.026}{0.074} = 0.35,$$

soit une erreur de 35 p. c.

Signalons aussi de petites erreurs provenant de l'évaluation du terme de la résistance par la formule des trapèzes, pour des tronçons de longueur un peu grande.

28. *Conclusions.* — On peut conclure de ce qui précède que les tâtonnements qui constituent l'originalité de la méthode de la « Résolution » sont tellement pénibles que l'auteur lui-même n'a pas pu aboutir; il n'a même pu découvrir le genre de solution qu'il devait trouver. Il devait obtenir une propagation instantanée jusqu'à l'infini; il ne s'en est pas aperçu. Nous ne lui en faisons pas un grief.

Supposons, en effet, que par des recherches analytiques analogues à celle du numéro 25, on détermine exactement le débit à l'aval à la fin de la première heure; il sera même impossible de vérifier complètement l'exactitude du chiffre donné. On aura beau calculer l'axe de relèvement, il arrivera un moment où le relèvement sera plus petit que les décimales négligées et il sera impossible de vérifier la condition exigée qui est l'asymptotisme à l'axe du mouvement permanent. Comme on ne connaît pas le débit, le calcul peu difficilement être mené à bonne fin.

Aussi las de tâtonner, l'auteur est allé aux renseignements; nous nous plaignons à reconnaître qu'il ne les a pas appliqués servilement; afin de tenir compte des résistances que nous aurions négligées, il a choisi une vitesse de propagation plus petite que la vitesse de l'onde dont il était question dans notre note de 1889. Il a eu tort cependant; le renseignement était exact. Nous avons pu dire que la formule mathématique que nous avions trouvée était indépendante des résistances, mais jamais nous n'avons dit que nous les avions négligées; nous reviendrons sur ce point.

Ce qui est certain, c'est que le renseignement exact était en contradiction avec les formules fausses de l'auteur, c'est qu'en modifiant ce renseignement, la contradiction ne faisait qu'augmenter.

Une fois que l'auteur a eu l'idée du résultat qu'il devait obtenir, les tâtonnements qui étaient si rebelles, sont devenus d'autant plus complaisants qu'ils étaient nébuleux. Mais il est bien clair que la vitesse de propagation que l'on calcule de cette manière est tout à fait

arbitraire et ce sont des erreurs d'arithmétique qui mènent au résultat obtenu.

29. *Remarques finales.* — Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi nous n'avons pas dit un mot du second problème, dans nos critiques antérieures. Nous nous trouvons en présence d'une méthode générale déduite logiquement d'équations fausses; cette méthode est celle du premier problème. Nous avons pensé que l'histoire du second problème était trop pénible à raconter; nous avons fait le silence sur les fautes de logique et les calculs faux. Nous avons alors pu écrire :

« On voit par cet exposé que cette méthode repose sur des raisonnements qui ont toutes les apparences de la logique. On n'y trouve qu'une seule hypothèse, etc... »

C'était presque un mensonge eu égard au second problème; mais ce n'était qu'un mensonge par omission et même nous étions content de nous; nous étions content d'avoir pris ce qu'il y avait de mieux dans l'article de notre contradicteur et nous nous félicitions d'avoir rédigé une critique bonne et généreuse. Aussi comprend-on tout ce que nous avons souffert quand nous avons lu cette phrase :

« C'est en vain que nous avons cherché, dans le texte de notre article un passage qui puisse justifier l'interprétation qu'on vient de lire. »

Non seulement on voulait montrer que nous avions argumenté sur une erreur de détail, on allait jusqu'à prétendre que, par une fausse interprétation de texte, c'était nous qui avions inventé la propagation instantanée de la crue.

Mais cette propagation instantanée, c'était ce qu'il y avait de mieux dans la « Résolution »; c'est absurde, en fait; mais c'était au moins une déduction logique des équations admises. Aussi ce que l'auteur a de mieux à faire, c'est de reprendre cette propagation instantanée et de renier la note qu'il a écrite dans le sixième fascicule de 1900; la formule est toute trouvée, qu'il écrive dans une nouvelle note :

« C'est en vain que nous avons cherché dans le sixième fascicule de 1900, un article quelconque qui pourrait nous être attribué. »

#### § V. DEUX NOUVELLES ERREURS.

30. *Propagation et résistances.* — Dans sa réponse, l'auteur de la « Résolution » cite la formule de notre mémoire qui donne la vitesse d'une onde infiniment petite :

$$v = u + \sqrt{gh} . . . . . (1)$$

Il ajoute : « Nous faisons toutefois nos réserves quant à l'application de la formule au cas de la propagation d'une crue, car il n'est pas admissible que la vitesse de transmission des débits d'amont en aval d'une rivière ne soit pas influencé par la résistance du lit ; c'est un point sur lequel nous reviendrons tantôt. »

Nous lisons plus loin : « C'est ainsi que nous avons constaté qu'il fallait de 6 à 7 heures au remous pour atteindre la section d'aval. Comme on le voit, l'écart est notable entre ce résultat et celui que nous a donné la formule (1) et il s'explique par l'influence retardatrice de la résistance du lit. »

Contrairement à cette assertion qui ne repose que sur des calculs dont nous avons démontré l'impossibilité, nous allons prouver mathématiquement que notre formule est rigoureusement exacte, dès que les équations du mouvement varié sont applicables.

31 *Démonstration par les caractéristiques.* — Si notre contradicteur avait lu notre mémoire, il aurait vu que notre thèse est démontrée au numéro 10. Nous avons imaginé une discontinuité quelconque ; nous avons démontré que cette discontinuité devait se propager avec l'une de deux vitesses.

$$\frac{ds}{dt} = u \pm \sqrt{gh}.$$

Nous n'avons pas négligé le terme des frottements ; nous lui avons donné la forme la plus exacte qui soit connue. La vérité, c'est que ce terme n'exerce pas d'influence directe sur la vitesse de propagation ; la propagation est un phénomène d'inertie ; la résistance du lit n'exerce qu'une influence indirecte en intervenant dans le calcul des fonctions  $u$  et  $h$ .

32. *Deuxième démonstration.* — Il nous a paru assez piquant d'élucider ce point controversé en appliquant les équations de la « Résolution ». Comme on ne peut pas déduire un résultat exact d'équations fausses, cette démonstration doit se faire en deux actes : 1<sup>o</sup> corriger les fautes ; 2<sup>o</sup> calculer la vitesse de propagation.

Nous ne prendrons pas le problème dans toute sa généralité ; pour simplifier la démonstration, nous prendrons le cas du commencement de la crue, en supposant le mouvement permanent établi.

Reprenons les calculs du numéro 19, mais corrigeons d'abord l'équation (1) en évaluant convenablement le terme du mouvement varié. Ce terme a pour valeur :

$$\frac{\Delta x}{2g} \left( \frac{du_0}{dt} + \frac{du_1}{dt} \right)^2.$$

On a supposé :

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{\Delta u_0}{\Delta t}, \quad \frac{du_1}{dt} = \frac{\Delta u_1}{\Delta t} = 0.$$

Ces valeurs sont inexactes. Dans la section d'amont, la vitesse est d'abord restée constante jusqu'à l'arrivée des eaux de crue; elle a ensuite varié pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ ; on doit écrire :

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{\Delta u_0}{\Delta t}.$$

Pendant cet intervalle de temps  $\Delta t$ , les eaux de crue ont parcouru la distance  $\Delta x$ ; si  $v$  est la vitesse de propagation, on a donc :

$$\Delta x = v \Delta t$$

En éliminant  $\Delta t$  des équations précédentes, on trouve :

$$\frac{du_0}{dt} = v \frac{\Delta u_0}{\Delta x}.$$

Nous prendrons alors approximativement :

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_0}{dt}.$$

On a donc :

$$\frac{\Delta x}{2g} \left( \frac{du_0}{dt} + \frac{du_1}{dt} \right) = \frac{v}{g} \Delta u_0.$$

C'est ce terme qui est infiniment petit du premier ordre, qui doit remplacer le terme du second ordre (pour  $\Delta t$  fini) :

$$\frac{1}{g} \frac{\Delta u_0}{\Delta t} \frac{\Delta x}{2}.$$

L'équation (1) du numéro 19 devient alors :

$$-\Delta z_0 = \frac{v - u_0}{g} \Delta u_0 + \frac{b \Delta x}{2} \Delta \left( \frac{\gamma_0}{\omega_0} u_0^2 \right) + \dots$$

On voit que le terme des résistances est du second ordre, il passe dans les quantités qui doivent disparaître et qu'il est inutile d'écrire explicitement; on a :

$$(1) \quad -\Delta z_0 = \frac{v - u_0}{g} \Delta u_0 + \dots$$

Le second membre de l'équation (2) du numéro 19 doit être corrigé d'après le même principe. Le volume liquide qui traverse la section  $\omega_1$  est  $q_1 \Delta t$ ; mais le volume débité par la section  $\omega_0$  n'est pas

$$\left( q_0 + \frac{\Delta q_0}{2} \right) \Delta t$$

comme l'auteur de la « Résolution » l'a supposé pour établir son équation (II); ce volume est :

$$q_0 \Delta t + \frac{\Delta q_0}{2} \Delta t$$

En égalant les deux valeurs du volume emmagasiné dans le tronçon considéré et en remplaçant  $\Delta t$  par sa valeur, on trouve :

$$(2) \quad v \Delta \omega_0 = \Delta q_0 \cdot l$$

La variation du débit est du premier ordre, au lieu d'être du second ordre, comme au numéro 19.

On trouve alors :

$$\Delta u_0 = \Delta \frac{q_0}{\omega_0} = \frac{\Delta q_0}{\omega_0} - \frac{q_0 \Delta \omega_0}{\omega_0^2} = - \frac{v - u_0}{h_0} \Delta z_0.$$

En portant cette valeur de  $\Delta u_0$  dans l'équation (1), on trouve :]

$$- \Delta z_0 = - \frac{(v - u_0)^2}{g h_0} \Delta z_0 + \dots$$

En divisant par  $\Delta x$  et en passant à la limite, on trouve :

$$\left( \frac{(v - u_1)^2}{g h_1} - 1 \right) \lim \frac{\Delta z_0}{\Delta x} = 0.$$

Cette équation est impossible, à moins que l'on ait :

$$v = u_1 \pm \sqrt{g h_1}$$

et alors l'axe du mouvement varié est indéterminé. Non seulement on retrouve les mêmes vitesses de propagation que par les caractéristiques, mais on retrouve même l'indétermination de la surface hydraulique le long d'une caractéristique.

33. *La propagation et les termes des vitesses.* — Nous avons cité au numéro 7, l'opinion de notre contradicteur sur le terme du mouvement varié : « nous avons même fait remarquer, dans notre article, que le

terme en question devient tout à fait négligeable dans le problème de la propagation d'une crue ». Nous supposons qu'étudier la propagation d'une crue, c'est déterminer les vitesses avec laquelle les irrégularités de la courbe des débits se transmettent vers l'aval. Dans ce cas, nous allons démontrer que l'assertion que nous venons de rappeler est fautive et que les deux termes des vitesses exercent chacune leur influence sur les vitesses de propagation et de telle manière, que négliger l'un de ces termes, c'est troubler complètement les lois de la propagation.

34. *Démonstration par les caractéristiques.* — Nous pouvons remplacer l'équation du mouvement varié par une autre équation où les termes des vitesses seraient respectivement multipliés par les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ ; on a :

$$\frac{dz}{ds} = \lambda \frac{u}{g} \frac{du}{ds} + \frac{\mu}{g} \frac{du}{dt} + bu^2.$$

En appliquant à cette équation la méthode du numéro 50 de notre mémoire, on trouve pour les caractéristiques, l'équation :

$$(ds - udt)(\mu ds - \lambda udt) - ghdt^2 = 0.$$

1° Si on veut négliger le terme du mouvement varié, on doit faire :

$$\mu = 0, \quad \lambda = 1.$$

On trouve :

$$\text{caractéristique d'amont :} \quad dt = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt} = \infty.$$

$$\text{caractéristique d'aval :} \quad \frac{ds}{dt} = - \frac{gh - u^2}{u}.$$

Ce terme que nous avons négligé n'aurait pas d'influence sensible sur la propagation d'une crue, prétend l'auteur de la « Résolution » ; nous trouvons au contraire que les lois de la propagation sont complètement changées, car l'influence des circonstances d'amont se propage avec une vitesse infinie.

2° Si on veut négliger les deux termes des vitesses, on doit faire :

$$\mu = 0, \quad \lambda = 0$$

On trouve :

$$dt^2 = 0$$

Les deux caractéristiques se confondent avec l'axe instantané.

Les deux vitesses sont infinies. Mais on reconnaît qu'alors on se trouve dans le cas du paradoxe de Poisson ; le problème devient impossible. C'est ce que l'on pouvait prévoir ; il s'agit alors d'un

liquide sans inertie ; il n'y a plus de lois de propagation ; on peut faire varier les vitesses brusquement.

35. *Deuxième démonstration.* — Si dans la démonstration du numéro 32, on multiplie les termes des vitesses respectivement par  $\lambda$  et  $\mu$ , on arrive alors à l'équation :

$$(\mu v - \lambda u_1) (v - u_1) = gh_1.$$

Si on néglige le terme du mouvement varié, on doit faire :

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0.$$

On trouve :

$$v = - \frac{gh_1 - u_1^2}{u_1}.$$

Une des racines est disparue ; on sait que dans ce cas la racine devient infinie ; on retrouve donc les mêmes résultats que par la méthode précédente. Il en est de même des autres cas.

36. *Conclusions.* — On peut conclure de ce qui précède que la méthode de la « Résolution » ne permet guère d'arriver à des résultats utiles quand il s'agit de mouvement varié et de propagation de l'influence des circonstances d'amont et d'aval ; l'auteur n'est pas même parvenu à reconnaître quels sont les termes de l'équation du mouvement qui exercent une influence sur le problème à résoudre ; il considère comme négligeable un terme dont l'influence est très grande ; il attribue au contraire une influence considérable à un terme dont l'influence directe est nulle.

Pour démontrer notre thèse au moyen des équations mêmes de la « Résolution », nous avons dû commencer par les corriger ; cette correction montre très bien l'importance des erreurs commises ; on remplace :

$$\frac{\Delta x}{2g} \frac{\Delta u_0}{\Delta t} \quad \text{par} \quad \frac{v \Delta u_0}{g}$$

$$\Delta q_0 = \frac{\Delta \omega_0 \cdot \Delta x}{\Delta t} \quad \text{par} \quad \Delta q_0 = v \Delta \omega_0.$$

Pour  $\Delta t$  donné et pour  $\Delta x$  infiniment petit, le rapport du terme exact à sa valeur fautive est infiniment grand.

Cette démonstration montre aussi que l'on peut arriver à la vérité par toutes les voies, pourvu qu'on la cherche sincèrement et sans idée préconçue.

Février 1904.